## III. Goniometrické funkce.

**17. Komplexní čísla.** Na střední škole se zavádějí komplexní čísla při nauce o kvadratických rovnicích. Má-li kvadratická rovnice $ax^2 + bx + c = 0$ záporný diskriminant $D = b^2 - 4ac$, pak nemá tato rovnice v oboru reálných čísel žádný kořen. Ale v širším oboru komplexních čísel má ta rovnice dva kořeny, totiž

$$x_1 = \frac{-b + \mathrm{i}\sqrt{|D|}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \mathrm{i}\sqrt{|D|}}{2a}.$$

Každé komplexní číslo $z$ má tvar $z = x + y\mathrm{i}$, kde $x$, $y$ jsou dvě reálná čísla. Řekneme, že $x$ je reálná část komplexního čísla $z$ a že $y$ je imaginární část komplexního čísla $z$, což budeme psáti

$$x = \Re(z), \ y = \Im(z).$$

Na př.

$$\Re(2 - 3\mathrm{i}) = 2, \ \Im(2 - 3\mathrm{i}) = -3;$$
$$\Re(5) = 5, \ \Im(5) = 0;$$
$$\Re(5\mathrm{i}) = 0, \ \Im(5\mathrm{i}) = 5;$$
$$\Re(0) = 0, \ \Im(0) = 0.$$

Čísla reálná jsou zvláštním případem čísel komplexních; jsou to ta komplexní čísla, jejichž imaginární část je rovna nule. Ta komplexní čísla, jejichž reálná část je rovna nule, jmenují se ryze imaginární čísla. Každé komplexní číslo je součet dvou sčítanců, z nichž jeden je reálný a druhý ryze imaginární.

Komplexní čísla sčítáme, odčítáme a násobíme jako čísla reálná, jen musíme věděti, že $\mathrm{i}^2 = -1$:

$$(a + b\mathrm{i}) + (c + d\mathrm{i}) = (a + c) + (b + d)\,\mathrm{i},$$
$$(a + b\mathrm{i}) - (c + d\mathrm{i}) = (a - c) + (b - d)\,\mathrm{i},$$
$$(a + b\mathrm{i})(c + d\mathrm{i}) = ac + b\mathrm{i} \,.\, c + a \,.\, d\mathrm{i} + b\mathrm{i} \,.\, d\mathrm{i} = (ac - bd) + (bc + ad)\,\mathrm{i}.$$

Cvičení 81. Vypočtěte

a) $(2 + 3i)(3 - 2i) - (4 + i)(1 - 4i)$;
b) $(2 + 3i)^2 + (3 + i)^2 + (1 + 2i)^2$;
c) $(i + 1)(i + 2)(i + 3)$;
d) $(3 + i)^2(4 - i) - (3 + i)(4 - i)^2$.

Cvičení 82. $(x + yi)(x - yi) = x^2 + y^2$.

Dělení komplexních čísel převádíme na násobení pomocí cvič. 82. Dělení nulou je i v oboru komplexních čísel stejně nemožné jako v oboru čísel reálných. Je-li však $c + di \neq 0$, pak

$$\frac{a + bi}{c + di} = \frac{(a + bi)\,(c - di)}{(c + di)\,(c - di)} = \frac{(ac + bd) + (bc - ad)i}{c^2 + d^2} =$$
$$= \frac{ac + bd}{c^2 + d^2} + \frac{bc - ad}{c^2 + d^2}\,i.$$

Cvičení 83. Vypočtěte

a) $\frac{2 + i}{1 + 2i}$; b) $\frac{3 + i}{1 - i}$; c) $\frac{i - 2}{i - 3}$; d) $\frac{2i - 1}{1 + 3i}$.

Ke komplexnímu číslu $z = x + yi$ konjugované komplexní číslo je $z^* = x - yi$. Hvězdička má v dalším všude tento význam.

Cvičení 84. Buďtež $u, v$ komplexní čísla. Pak je

$$(u + v)^* = u^* + v^*,\ (u - v)^* = u^* - v^*,\ (uv)^* = u^*v^*$$

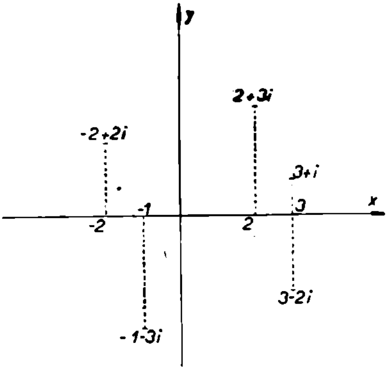
a když $v \neq 0$, je také

$$\left(\frac{u}{v}\right)^* = \frac{u^*}{v^*}.$$

Jako si reálná čísla znázorňujeme body na přímce, tak si komplexní čísla znázorňujeme body v rovině. Za tím účelem si zvolíme v rovině pravoúhlou soustavu souřadnic v obvyklé poloze: osu $x$ vodorovně s kladným smyslem od levé strany k pravé, osu $y$ svisle s kladným smyslem zdola nahoru. Obrazem komplexního čísla $x + yi$ je bod, jehož pravoúhlé souřadnice jsou $x, y$. Obrazy reálných čísel padnou na osu $x$, které proto říkáme reálná osa; obrazy ryze imaginárních čísel padnou na osu $y$, které proto říkáme imaginární osa. Nad reálnou osu padnou obrazy těch komplexních čísel, jejichž imaginární část je kladná, pod reálnou osu obrazy těch, jejichž imaginární část je záporná. Napravo od imaginární osy padnou obrazy těch komplexních čísel, jejichž reálná část je kladná, nalevo padnou obrazy těch, jejichž reálná část je záporná.

V obr. 7 jsou znázorněna komplexní čísla $2 + 3i$, $-2 + 2i$, $-1 - 3i$, $3 - 2i$, $2$, $3$, $-2$, $-1$, $0$.

Protože vlastním předmětem našich úvah nejsou body, nýbrž čísla, a protože body v rovině jsou pro nás pouze obrazy komplexních čísel, není třeba příliš ostře rozlišovati mezi komplexním číslem a bodem, který je jeho obrazem. Proto mluvíme krátce na př. o bodu $2+3i$ místo o bodu, který je obrazem komplexního čísla $2 + 3i$.



Obr. 7.

**Cvičení 85.** Budiž $u \neq 0$ komplexní číslo. Probíhá-li $t$ všecka reálná čísla, probíhá bod $tu$ přímku, která spojuje bod 0 s bodem $u$. Probíhá-li $t$ pouze kladná reálná čísla a nulu, probíhá bod $tu$ polopřímku, která vychází z bodu 0 a jde bodem $u$.

**Cvičení 86.** Buďtež $u$, $v$ dvě komplexní čísla; budiž $u \neq v$, $u \neq 0 \neq v$. Neleží-li všecky tři body $0$, $u$, $v$ na přímce, pak jsou $0$, $u$, $u + v$, $v$ vrcholy rovnoběžníka.

Ze střední školy víte, že střed úsečky, která spojuje bod $z_1 = x_1 + y_1i$ s bodem $z_2 = x_2 + y_2i$, má souřadnice

$$\frac{x_1 + x_2}{2}, \quad \frac{y_1 + y_2}{2}.$$

Tedy je tento střed dán komplexním číslem

$$\frac{z_1 + z_2}{2}. \tag{17·1}$$

**Cvičení 87.** Dokažte pomocí komplexních čísel, že úhlopříčky rovnoběžníka se navzájem půlí (viz cvič. 86).

U komplexních čísel nedefinujeme pojmy „větší“ a „menší“. Přes to také v nauce o komplexních číslech hrají důležitou roli nerovnosti. Nerovnosti přicházejí do této nauky s pomocí pojmu absolutní hodnoty. **Absolutní hodnotou** komplexního čísla $x + yi$ rozumíme číslo $\sqrt{x^2 + y^2}$; značíme je obyčejně $|x + yi|$. Geometricky znamená

$|x + yi|$ vzdálenost bodu $x + yi$ od počátku, t. j. od bodu $z = 0$. Obecněji znáte ze střední školy vzorec pro vzdálenost $d$ bodu $z_1 = x_1 + y_1 i$ od bodu $z_2 = x_2 + y_2$:

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2};$$

tento vzorec lze psáti ve tvaru

$$d = |z_2 - z_1|. \tag{17·2}$$

Všimněme si, že pro reálné $z$ má symbol $|z|$ obvyklý význam.

O absolutních hodnotách komplexních čísel platí jednoduchá, ale důležitá pravidla.

**Cvičení 88.** Pro každé komplexní číslo $z$ je $|-z| = |z|$, $|z^*| = |z|$.

**Cvičení 89.** Je-li komplexní číslo $z \neq 0$, je $|z| > 0$; avšak $|0| = 0$.

**Cvičení 90.** Pro každé komplexní číslo $z$ je $zz^* = |z|^2$, $|z| = \sqrt{zz^*}$.

Věta 48. Jsou-li $u, v$ komplexní čísla, je $|uv| = |u| \,.\, |v|$.

Důkaz. Podle cvič. 84 a 90 je

$$|uv| = \sqrt{uv \,.\, (uv)^*} = \sqrt{uu^* \,.\, vv^*} = \sqrt{uu^*} \,.\, \sqrt{vv^*} = |u|\,|v|.$$

Věta 49. Jsou-li $u, v$ komplexní čísla, je $|u + v| \leqq |u| + |v|$.

Důkaz. I. Dokažme napřed $|1 + z| \leqq 1 + |z|$.

Budiž $z = x + iy$. Jest $x \leqq |x| \leqq \sqrt{x^2 + y^2} = |z|$, tedy $2x \leqq 2|z|$. Přičteme-li v této nerovnosti na obou stranách číslo $1 + x^2 + y^2$, dostaneme $1 + 2x + x^2 + y^2 \leqq 1 + 2|z| + |z|^2$ neboli $|1 + z|^2 = (1 + x)^2 + y^2 \leqq (1 + |z|)^2$, takže $|1 + z| \leqq 1 + |z|$.

II. Nerovnost, kterou máme dokázati, je zřejmá pro $u = 0$. Je-li však $u \neq 0$, položme $z = \frac{v}{u}$, takže $u + v = u(1 + z)$. Podle I a podle věty 48 je

$$|u + v| = |u| \,.\, |1 + z| \leqq |u| \,.\, (1 + |z|) =$$
$$= |u| + |u| \,.\, |z| = |u| + |uz| = |u| + |v|.$$

**Cvičení 91.** V nerovnosti $|u + v| \leqq |u| + |v|$ platí znamení rovnosti v těchto třech případech a v žádném jiném: [1] když $u = 0$, [2] když $v = 0$, [3] když $u \neq 0 \neq v$ a když $\frac{v}{u}$ je kladné reálné číslo.

**Cvičení 92.** Dokažte pomocí komplexních čísel, že každá strana trojúhelníka je menší nežli součet ostatních dvou stran.

**18. Jednotková kružnice.** Komplexní čísla $z$ s absolutní hodnotou rovnou jedné vyplní kružnici se středem v počátku a s poloměrem jedna; říká se jí j e d n o t k o v á  k r u ž n i c e. Jednotkovou kružnici si uspořádáme takto: Prvním bodem je bod 1, posledního bodu není. Bod $z_1$ jednotkové kružnice je před bodem $z_2$ jednotkové kružnice, když přijdeme dříve do polohy $z_1$ nežli do polohy $z_2$, probíháme-li jednotkovou kružnici p r o t i směru pohybu ručiček hodin počínajíce polohou 1.

C v i č e n í **93.** Budiž $|u| = 1$, $|v| = 1$. Bod $u$ leží na jednotkové kružnici před bodem $v$ tenkrát (a pouze tenkrát), nastane-li jeden z těchto tří případů: [1] $\mathfrak{I}(u) \geqq 0$, $\mathfrak{I}(v) < 0$; [2] $\mathfrak{I}(u) \geqq 0$, $\mathfrak{I}(v) \geqq 0$, $\mathfrak{R}(u) > \mathfrak{R}(v)$; [3] $\mathfrak{I}(u) < 0$, $\mathfrak{I}(v) < 0$, $\mathfrak{R}(u) < \mathfrak{R}(v)$.

V ě t a 50. Budiž $|z_1| = 1$, $|z_2| = 1$, $\mathfrak{R}(z_1) > 0$, $\mathfrak{I}(z_1) > 0$, $\mathfrak{I}(z_2) \geqq 0$. Pak leží na jednotkové kružnici bod $z_2$ před bodem $z_1z_2$.

D ů k a z. I. Podle věty 48 leží $z_1z_2$ na jednotkové kružnici. Budiž $z_1 = x_1 + y_1\mathrm{i}$, $z_2 = x_2 + y_2\mathrm{i}$, tedy $x_1 > 0$, $y_1 > 0$, $y_2 \geqq 0$. Jest $z_1z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + (x_1y_2 + x_2y_1)\,\mathrm{i}$. Protože $\mathfrak{I}(z_2) \geqq 0$, potřebujeme podle cvič. 93 pouze dokázati, že je buďto $x_1y_2 + x_2y_1 < 0$ nebo $x_1x_2 - y_1y_2 < x_2$. Rozeznávejme tři případy.

II. Budiž $x_2 > 0$. Ježto $x_1^2 = 1 - x_2^2 < 1$, jest $x_1 < 1$; tuto nerovnost smíme násobiti kladným číslem $x_2$ a dostaneme $x_1x_2 < x_2$. Ježto $y_1 > 0$, $y_2 \geqq 0$, tedy $x_1x_2 - y_1y_2 \leqq x_1x_2 < x_2$.

III. Budiž $x_2 = 0$. Pak je $y_2^2 = |z_2|^2 = 1$, $y_2 \geqq 0$, tedy $y_2 = 1$. Proto je $x_1x_2 - y_1y_2 = -y_1 < 0 = x_2$.

III. Budiž $x_2 < 0$. V případě $x_1y_2 + x_2y_1 < 0$ nemáme co dokazovati. Budiž tedy $x_1y_2 + x_2y_1 \geqq 0$. Jest $x_1 \leqq 1$, $y_2 \geqq 0$, tedy $x_1y_2 \leqq y_2$. Protože $x_2 < 0$, $y_1 > 0$, je $x_2y_1 < 0$, tedy $x_1y_2 + x_2y_1 < x_1y_2 \leqq y_2$; protože $x_1y_2 + x_2y_1 \geqq 0$, je $(x_1y_2 + x_2y_1)^2 < y_2^2$. Tedy $1 = |z_1z_2|^2 = (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)^2 < (x_1x_2 - y_1y_2)^2 + y_2^2$, takže $(x_1x_2 - y_1y_2)^2 > 1 - y_2^2 = x_2^2$, tedy $|x_1x_2 - y_1y_2| > |x_2|$. Avšak $x_2 < 0$, tedy $|x_2| = -x_2$. Ježto $x_1 > 0$, $x_2 < 0$, $y_1 > 0$, $y_2 \geqq 0$, je $|x_1x_2 - y_1y_2| = y_1y_2 - x_1x_2$. Tedy $y_1y_2 - x_1x_2 > -x_2$, takže $x_1x_2 - y_1y_2 < x_2$.

Jsou-li $u, v$ dva různé body na jednotkové kružnici, jest jimi jednotková kružnice rozdělena na dva oblouky s krajními body $u, v$.

Označíme $\{u, v\}$ ten z nich, který dostaneme, pohybujeme-li se po jednotkové kružnici proti ručičkám hodinovým od polohy $u$ do polohy $v$; druhý oblouk bude pak ovšem $\{v, u\}$. Když bod $u$ leží před bodem $v$, pak oblouk $\{u, v\}$ obsahuje mimo své krajní body $u$, $v$ ještě právě ty body jednotkové kružnice, které leží mezi $u$ a $v$, t. j. současně za bodem $u$ a před bodem $v$. Je-li $v = 1$, tedy $u \neq 1$, pak oblouk $\{u, 1\}$ obsahuje mimo své krajní body $u$, 1 ještě právě ty body jednotkové kružnice, které leží za bodem $u$.

Budiž dán na jednotkové kružnici konečný počet bodů

$$z_1 = 1, z_2, z_3, \ldots, z_m, \tag{18·1}$$

z nichž prvý je bod 1 a které jsou napsány v takovém pořádku, v jakém je dostaneme, probíháme-li jednotkovou kružnici počínajíc polohou 1 proti ručičkám hodinovým. Pak se nám jednotková kružnice rozdělí na oblouky

$$\{z_1, z_2\}, \{z_2, z_3\}, \ldots, \{z_{m-1}, z_m\}, \{z_m, z_1\}, \tag{18·2}$$

které se navzájem nepřekrývají, ale které pokryjí celou jednotkovou kružnici. Takové rozdělení jednotkové kružnice na oblouky (18·2) nazveme kruhovou stupnicí a body (18·1) nazveme dělicími body té stupnice.

**19. Kruhový svazek.** V tomto odstavci si zavedeme zcela určitou posloupnost kruhových stupnic, kterou nazveme kruhovým svazkem. Prvá stupnice kruhového svazku má dva dělicí body 1, — 1 a skládá se tedy ze dvou oblouků $\{1, -1\}$ a $\{-1, 1\}$.

Cvičení **94.** $\{1, -1\}$ se skládá z těch bodů $z$ jednotkové kružnice, pro něž $\Im(z) \geqq 0$; $\{-1, 1\}$ se skládá z těch $z$, pro něž $\Im(z) \leqq 0$.

Abychom si definici ostatních stupnic kruhového svazku připravili, budeme si definovati rekurentně zcela určitou posloupnost

$$u_1, u_2, u_3, \ldots \tag{19·1}$$

bodů jednotkové kružnice a položíme pro všecka $n$

$$u_n = p_n + iq_n. \tag{19·2}$$

Nejprve budiž

$$u_1 = -1, \text{ tedy } p_1 = -1, \; q_1 = 0. \tag{19·3}$$

Je-li při určitém $n$ bod (19·2) již definován, definujme $u_{n+1}$ rovnicemi

$$p_{n+1} = \sqrt{\frac{1+p_n}{2}}, \quad q_{n+1} = \sqrt{\frac{1-p_n}{2}}. \tag{19·4}$$

(Ježto $|u_n|^2 = p_n^2 + q_n^2 = 1$, je $|p_n| \leqq 1$, takže žádný odmocněnec v (19·4) není číslo záporné.) Jest

$$p_{n+1}^2 + q_{n+1}^2 = \frac{1+p_n}{2} + \frac{1-p_n}{2} = 1,$$

takže (19·1) je vskutku posloupnost bodů na jednotkové kružnici.

Podle (19·3) a (19·4) je

$$u_2 = i, \; p_2 = 0, \; q_2 = 1. \tag{19·5}$$

**Cvičení 95.** Pro $n \geqq 3$ je $0 < p_n < 1$, $0 < q_n < 1$.

Věta 51. Pro $n \geqq 1$ je $u_{n+1}^2 = u_n$.

Důkaz. Pro $n = 1$ to plyne z (19·3) a (19·5). Budiž tedy $n \geqq 2$. Podle (19·5) a podle cvič. 95 je $q_n \geqq 0$. Protože $p_n^2 + q_n^2 = 1$, $q_n \geqq 0$, je $q_n = \sqrt{1 - p_n^2}$. Avšak z (19·4) plyne

$$u_{n+1}^2 = (p_{n+1} + q_{n+1}i)^2 = p_n + i\sqrt{1 - p_n^2},$$

takže $u_{n+1}^2 = p_n + q_n i = u_n$.

**Cvičení 96.** Pro $n \geqq 1$ je $u_n^{2^{n-1}} = -1$, $u_n^{2^n} = 1$.

Věta 52. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$, $k$ celé, $0 \leqq k \leqq 2^{n-1}$ je $\Im(u_n^k) \geqq 0$.

Důkaz. Pro $n = 1$ a pro $n = 2$ to plyne z (19·3) a (19·5). Můžeme tedy předpokládati, že při určitém $n \geqq 2$ je věta správná a máme dokázati, že zůstane správná i pro $n + 1$. Máme tedy dokázati, že pro $0 \leqq k \leqq 2^n$ je $\Im(u_{n+1}^k) \geqq 0$. Je-li $k = 2h$ sudé, je $u_{n+1}^k = u_{n+1}^{2h} = u_n^h$ podle věty 51 a $0 \leqq h \leqq 2^{n-1}$, tedy $\Im(u_{n+1}^k) \geqq 0$. Je-li však $k$ liché, jsou $k - 1$ a $k + 1$ čísla sudá, jež jsou obě nezáporná (t. j. $\geqq 0$) a nejvýše rovna $2^n$, takže $\Im(u_{n+1}^{k-1}) \geqq 0$, $\Im(u_{n+1}^{k+1}) \geqq 0$. Avšak $|u_{n+1}| = 1$, tedy $u_{n+1} \,.\, u_{n+1}^* = 1$, takže

$$u_{n+1}^{k-1} + u_{n+1}^{k+1} = u_{n+1}^k(u_{n+1}^* + u_{n+1}) = 2p_{n+1}u_{n+1}^k.$$

Tedy $2p_{n+1} \,.\, \Im(u_{n+1}^k) = \Im(u_{n+1}^{k-1}) + \Im(u_{n+1}^{k+1}) \geqq 0$. Avšak $p_{n+1} > 0$ podle cvič. 95 (neboť $n \geqq 2$), takže $\Im(u_{n+1}^k) \geqq 0$.

Věta 53. Body

$$1, u_n, u_n^2, \ldots, u_n^{2^n-1} \tag{19·6}$$

jdou zá sebou v tomto pořádku na jednotkové kružnici, probíháme-li ji proti ručičkám hodinovým.

Důkaz. I. Budiž $0 \leqq k \leqq 2^{n-1}$. Dokážeme, že bod $u_n^k$ leží před bodem $u_n^{k+1}$. Pro $n = 1$ to plyne z (19·3), pro $n = 2$ z (19·5). Budiž tedy $n \geqq 3$. Podle cvič. 95 je $\Re(u_n) > 0$, $\Im(u_n) > 0$; podle věty 52 je $\Im(u_n^k) \geqq 0$. Tedy bod $u_n^k$ leží před bodem $u_n^{k+1} = u_n \,.\, u_n^k$ podle věty 50.

II. Pro $0 < k < 2^{n-1}$ jest $\Im(u_n^k) > 0$. Neboť podle I leží bod $u_n^k$ za bodem 1 a před bodem ${u_n}^{2^{n-1}}$, t. j. před bodem $-1$, protože ${u_n}^{2^{n-1}} = -1$ podle cvič. 96.

III. Pro $2^{n-1} < k < 2^n$ jest $u_n^k = -u_n^{k-2^{n-1}}$ podle cvič. 96, takže $\Im(u_n^k) < 0$ podle II.

IV. Budiž $0 \leqq h < k < 2^n$. Máme dokázati, že bod $u_n^h$ je před bodem $u_n^k$. Rozeznávejme tři případy. Je-li předně $k \leqq 2^{n-1}$, leží $u_n^h$ před $u_n^k$ podle I; mimo to je v tomto případě $\Im(u_n^h) \geqq 0$, $\Im(u_n^k) \geqq 0$ podle věty 52, takže $\Re(u_n^h) > \Re(u_n^k)$ podle cvič. 93. Je-li za druhé $h > 2^{n-1}$, pak podle toho, co právě bylo řečeno, je $\Re(u_n^{h-2^{n-1}}) > \Re(u_n^{k-2^{n-1}})$; podle cvič. 96 je však $u_n^h = -u_n^{h-2^{n-1}}$, $u_n^k = -u_n^{k-2^{n-1}}$, takže $\Re(u_n^h) < \Re(u_n^k)$; mimo to je $\Im(u_n^h) < 0$, $\Im(u_n^k) < 0$, takže $u_n^h$ leží před $u_n^k$ podle cvič. 93. Je-li konečně $h \leqq 2^{n-1} < k < 2^n$, je $\Im(u_n^h) \geqq 0$ podle věty 52, $\Im(u_n^k) < 0$ podle III, takže $u_n^h$ leží před $u_n^k$ podle cvič. 93.

Nyní můžeme konečně definovati $n$-tou stupnici kruhového svazku. Skládá se z oblouků

$$\{1, u_n\}, \{u_n, {u_n}^2\}, \ldots, \{u_n^{2^n-1}, 1\}$$

a (19·6) jsou její dělicí body. Tyto body jsou, v tom pořádku jak jsou psány za sebou, vrcholy jakéhosi $2^n$-úhelníka $M_n$ vepsaného do jednotkové kružnice.

Věta 54. $M_n$ je pravidelný $2^n$-úhelník s délkou strany $2q_{n+1}$.

Důkaz. Délka $k$-té strany mnohoúhelníka $M_n$ je $|\, u_n^{k-1} - u_n^k \,|$. (Podle cvič. 96 je $u_n^{2^n} = 1$, takže je to pravda i pro $k = 2^n$.) Podle věty 48 je

$$|\, u_n^{k-1} - u_n^k \,| = |\, u_n^{k-1} (1 - u_n) \,| = |\, u_n \,|^{k-1} \,.\, |\, 1 - u_n \,| = |\, 1 - u_n \,|,$$

neboť $|\, u_n \,| = 1$. Tedy jsou všecky strany stejně dlouhé a tudíž $M_n$ je pravidelný, neboť je vepsán do kružnice. Podle věty 51 je $u_n = u_{n+1}^2$; mimoto $u_{n+1}\, u_{n+1}^* = 1$ podle cvič. 90. Tedy podle věty 48

$$\begin{aligned} |\, 1 - u_n \,| &= |\, u_{n+1}\, u_{n+1}^* - u_{n+1}^2 \,| = |\, u_{n+1} \,| \,.\, |\, u_{n+1}^* - u_{n+1} \,| = \\ &= |\, u_{n+1}^* - u_{n+1} \,| = |\, 2q_{n+1} \,| = 2q_{n+1}, \end{aligned}$$

neboť $q_{n+1} \geqq 0$ podle (19·5) a podle cvič. 95.

Dělicí body (19·6) $n$-té stupnice kruhového svazku lze podle věty 51 psáti ve tvaru

$$1,\ u_{n+1}^2,\ u^{n+14},\ \ldots,\ u_{n+1}^{2^{n+1}-2}.$$

Tedy $(n + 1)$-ní stupnice kruhového svazku vznikne z $n$-té stupnice rozpůlením všech jejích oblouků.

Věta 55. Jest

$$\lim_{n\to\infty} p_n = 1,\ \lim_{n\to\infty} q_n = 0.$$

Důkaz. Podle (19·4) je

$$1 - p_{n+1} = 1 - \sqrt{\frac{1 + p_n}{2}} = \frac{1 - \dfrac{1 + p_n}{2}}{1 + \sqrt{\dfrac{1 + p_n}{2}}} = \frac{1 - p_n}{2} \cdot \frac{1}{1 + p_{n+1}}.$$

Podle (19·5) a podle cvič. 95 je $p_{n+1} \geqq 0$, tedy $1 + p_{n+1} \geqq 1$, takže $1 - p^{n+1} \leqq \dfrac{1 - p_n}{2}$. Z toho následuje indukcí

$$1 - p_n \leqq \frac{1 - p_1}{2^{n-1}} = \frac{4}{2^n};$$

mimo to $p_n \leqq 1$ (neboť $p_n^2 + q_n^2 = 1$), tedy $0 \leqq 1 - p_n \leqq \dfrac{4}{2^n}$, takže $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = 1$. Protože $p_n^2 + q_n^2 = 1$, musí býti také $\lim\limits_{n\to\infty} q_n = 0$.

Je-li $n \geqq 2$, pak každý oblouk $\{u_n^k, u_n^{k+1}\}$, $(0 \leqq k \leqq 2^n - 1)$ $n$-té stupnice kruhového svazku je částí jednoho ze čtyř oblouků

$$\{1, \mathrm{i}\}, \{\mathrm{i}, -1\}, \{-1, -\mathrm{i}\}, \{-\mathrm{i}, 1\}$$

druhé stupnice svazku. Z toho následuje, že když bod $z = x + yi$ probíhá oblouk $\{u_n^k, u_n^{k+1}\}$ od polohy $u_n^k$ do polohy $u_n^{k+1}$, $x$ buďto stále roste nebo stále klesá, a také $y$ buďto stále roste nebo stále klesá. Proto jak $x$ tak $y$ při tom probíhá určitý interval. Označme $\{u_n^k, u_n^{k+1}\}_1$

interval, který probíhá $x$, a $\{u_n^k, u_n^{k+1}\}_2$ interval, který probíhá $y$. Je-li

$$\{u_n^k, u_n^{k+1}\}_1 = \langle a, b \rangle,\ \{u_n^k, u_n^{k+1}\}_2 = \langle c, d \rangle,$$

pak z čísel $a, b$ jedno se rovná $\Re(u_n^k)$ a druhé $\Re(u_n^{k+1})$; z čísel $c, d$, jedno se rovná $\Im(u_n^k)$ a druhé $\Im(u_n^{k+1})$. Zřejmě

$$b - a \leqq | u_n^k - u_n^{k+1} |,\ d - c \leqq | u_n^k - u_n^{k+1} |,$$

takže délky obou intervalů jsou $\leqq 2q_{n+1}$ podle věty 54.

Pro $n = 1$ máme dva oblouky $\{1, -1\}, \{-1, 1\}$. Když $z = x + yi$ probíhá oblouk $\{1, -1\}$ od polohy 1 do polohy $-1$, tu $x$ stále klesá od hodnoty 1 do hodnoty $-1$, a $y$ nejprve roste od hodnoty 0 do hodnoty 1 a potom klesá od hodnoty 1 do hodnoty 0, takže $x$ probíhá interval $\{1, -1\}_1 = \langle -1, 1 \rangle$ a $y$ probíhá interval $\{1, -1\}_2 = \langle 0, 1 \rangle$. Podobně když $z = x + yi$ probíhá oblouk $\{-1, 1\}$, probíhá $x$ interval $\{-1, 1\}_1 = \langle -1, 1 \rangle$ a $y$ probíhá interval $\{-1, 1\}_2 = \langle -1, 0 \rangle$.

Cvičení **97**. Budiž $\{v, w\}$ jeden oblouk některé stupnice kruhového svazku. Je-li $z = x + yi$ bod na jednotkové kružnici a náleží-li číslo $x$ do intervalu $\{v, w\}_1$ a $y$ do intervalu $\{v, w\}_2$, pak $z$ náleží do oblouku $\{v, w\}$.

Dělicí bod kruhového svazku je takový bod na jednotkové kružnici, který je dělicím bodem některé stupnice svazku. Zřejmě každý dělicí bod kruhového svazku je dělicím bodem skoro všech stupnic svazku.

Je-li $M$ nějaká soustava bodů na jednotkové kružnici, pak řekneme, že $M$ leží hustě na jednotkové kružnici, když ke každému bodu $z$ jednotkové kružnice a ke každému číslu $\varepsilon > 0$ lze udati bod $v$ patřící do soustavy $M$ a vzdálený od bodu $v$ o méně než $\varepsilon$.

Cvičení **98**. Dělicí body kruhového svazku leží hustě na jednotkové kružnici.

Je-li

$$z_1 = x_1 + y_1 i,\ z_2 = x_2 + y_2 i,\ z_3 = x_3 + y_3 i, \ldots \tag{19·7}$$

posloupnost komplexních čísel a je-li také $z = x + yi$ komplexní číslo, pak vztah

$$\lim_{n \to \infty} z_n = z \tag{19·8}$$

znamená, že platí zároveň $\lim_{n \to \infty} x_n = x$, $\lim_{n \to \infty} y_n = y$.

Cvičení 99. Platí-li vztah (19·8), ve kterém $z_n$ a $z$ jsou komplexní čísla, pak lze každému kladnému $\varepsilon$ přiřaditi index $p$ tak, že pro všecka $n > p$ je $|z_n - z| < \varepsilon$. Obráceně, je-li splněna tato podmínka, platí vztah (19·8).

Cvičení 100. Věty 3, 4 a 5 platí také pro posloupnosti s komplexními členy.

Cvičení 101. Leží-li soustava bodů $M$ hustě na jednotkové kružnici, pak lze každému bodu $z$ na jednotkové kružnici přiřaditi posloupnost (19·7), jejíž členy jsou vzaty vesměs ze soustavy $M$, a pro kterou platí (19·8). Obráceně, je-li splněna tato podmínka, leží $M$ hustě na jednotkové kružnici.

Ačkoli dělicí body kruhového svazku leží hustě na jednotkové kružnici, přece existují na této kružnici také body, které nejsou dělicími body svazku. Takový bod je na př.

$$z = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}.$$

Kdyby při nějakém $n$ bylo $z = u_n^k$, pak by podle cvič. 96 bylo $z^{2^n} = 1$, tedy také $z^{4^n} = (z^{2^n})^{2^n} = 1$. Avšak snadno se vypočte, že $z^3 = 1$, takže $z^4 = z$ a z toho následuje indukcí, že $z^{4^n} = z \neq 1$.

Zvolme bod $z = x + yi$ na jednotkové kružnici tak, že $z$ není dělicím bodem kruhového svazku. Pro každé $n$ máme v $n$-té stupnici svazku určitý oblouk $\{v_n, w_n\}$, ve kterém leží bod $z$. Zřejmě

$$\{v_1, w_1\}_1, \{v_2, w_2\}_1, \{v_3, w_3\}_1, \ldots, \qquad (19\cdot 9)$$

$$\{v_1, w_1\}_2, \{v_2, w_2\}_2, \{v_3, w_3\}_2, \ldots \qquad (19\cdot 10)$$

jsou řetězy intervalů. Bod $x$ leží ve všech intervalech (19·9); bod $y$ leží ve všech intervalech (19·10); pro $n \geqq 2$ je délka $n$-tého intervalu obou řetězů nejvýše rovna $2q_{n+1}$; tedy ze cvič. 25 následuje podle věty 55, že (19·9) je vytvořující řetěz bodu $x$ a (19·10) je vytvořující řetěz bodu $y$. Bod $z$ náleží do všech oblouků

$$\{v_1, w_1\}, \{v_2, w_2\}, \{v_3, w_3\}, \ldots; \qquad (19\cdot 11)$$

obráceně, když bod $\zeta = \xi + \eta i$ náleží do všech oblouků (19·1), náleží $\xi$ do všech intervalů (19·9) a $\eta$ do všech intervalů (19·10), takže je $\xi = x$, $\eta = y$, tedy $\zeta = z$. Tudíž $z$ je jediný bod společný všem obloukům (19·11); řekneme, že (19·11) je kruhový řetěz bodu $z$.

Cvičení 102. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ zvolme v $n$-té stupnici kruhového svazku oblouk $\{v_n, w_n\}$, takže dostaneme posloupnost (19·11). Když (19·11) je kruhový řetěz nějakého bodu $z$ na jednotkové kružnici, který není dělicím bodem kruhového svazku, pak: [1] pro každé $n$ je buďto $v_{n+1} = v_n$ nebo

$w_{n+1} = w_n$; [2] je nekonečně mnoho takových $n$, pro něž $v_{n+1} = v_n$ i nekonečně mnoho takových $n$, pro něž $w_{n+1} = w_n$. Obráceně, jsou-li splněny podmínky [1] a [2], je (19·11) kruhový řetěz určitého bodu $z$ na jednotkové kružnici, který není dělicím bodem kruhového svazku.

Cvičení **103.** Budiž $z$ bod na jednotkové kružnici, který není dělicím bodem kruhového svazku. Budiž (19·11) kruhový řetěz bodu $z$. Pak je

$$\{w_1^*, v_1^*\}, \{w_2^*, v_2^*\}, \{w_3^*, v_3^*\}, \ldots$$

kruhový řetěz bodu $z^*$.

## 20. Funkce sin x a cos x.

Na střední škole se učí, jak lze každému úhlu $\alpha$ přiřaditi dvě čísla, která se značí $\sin\alpha$ a $\cos\alpha$. My si budeme definovati numerický význam symbolů $\sin x$ a $\cos x$, kde $x$ probíhá všecka reálná čísla. Za tím účelem přiřadíme každému reálnému číslu $x$ určitý úhel $\alpha$ a položíme

$$\sin x = \sin\alpha,$$
$$\cos x = \cos\alpha,$$

kde symboly napravo mají týž význam jako na střední škole. Úhel $\alpha$ volíme v takové poloze, že jeho vrchol je v počátku a že prvním ramenem je kladná část reálné poloosy; druhé rameno úhlu $\alpha$ protne jednotkovou kružnici v bodě $z$. Podle toho, co víte ze střední školy, bude (i co do znamení!)

$$\sin x = \Im(z), \quad \cos x = \Re(z).$$

Běží tedy jen o to, jak každému reálnému číslu $x$ přiřadit určitý úhel $\alpha$ neboli, což je v podstatě totéž, určitý bod $z$ na jednotkové kružnici; budeme psáti

$$z = E(x).$$

Geometricky se dá toto přiřazení popsati velmi názorně a jednoduše. Nejprve je $E(0) = 1$. Je-li za druhé číslo $x$ kladné, pohybujeme se po jednotkové kružnici proti ručičkám hodinovým od polohy 1 až do té polohy $z = E(x)$, ve které délka dráhy, kterou jsme urazili, je rovna číslu $x$. Je-li za třetí $x$ záporné, pohybujeme se po jednotkové kružnici po ručičkách hodinových od polohy 1 až do té polohy $z = E(x)$, ve které délka dráhy, kterou jsme urazili, je rovna číslu $|x|$.

Nyní budeme zkoumati, jak lze od této geometrické definice dospěti k ryze aritmetické definici symbolu $E(x)$. Délka celé jednotkové kružnice je, jak známo, rovna $2\pi$. Budiž dáno určité $n = 1, 2, 3, \ldots$ Víme, že body

$$1, u_n, u_n^2, \ldots, u_n^{2^n-1},$$

kde $u_n = p_n + q_n i$ bylo definováno v odst. 19, rozdělí jednotkovou kružnici na $2^n$ sobě rovných (viz větu 54) oblouků

$$\{1, u_n\}, \{u_n, u_n^2\}, \ldots, \{u_n^{2^n-1}, 1\},$$

které následují za sebou v tomto pořádku, probíháme-li jednotkovou kružnici od bodu 1 proti ručičkám hodinovým. Délky všech těch oblouků dohromady dají $2\pi$, takže délka každého z nich je $\pi : 2^{n-1}$. Proto podle geometrické definice symbolu $E(x)$ je

$$E\left(\frac{k\pi}{2^{n-1}}\right) = u_n^k \tag{20·1}$$

pro $0 \leqq k \leqq 2^n - 1$; protože však $u_n^{2^n} = 1$ (viz cvič. 96), následuje z geometrické definice symbolu $E(x)$ snadno, že (20·1) platí pro každé celé $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Mimo to plyne z geometrické definice symbolu $E(x)$, že když $x$ probíhá interval $\langle \frac{k\pi}{2^{n-1}}, \frac{(k+1)\pi}{2^{n-1}} \rangle$, probíhá bod $z = E(x)$ na jednotkové kružnici oblouk $\{u_n^k, u_n^{k+1}\}$; i toto platí pro každé celé $k$.

Dosud jsme vycházeli od geometrické definice symbolu $E(x)$. Nyní začneme všecko znovu, ale tentokrát budeme postupovati ryze aritmeticky; co bylo řečeno dosud v tomto odstavci, o to se nebudeme opírati, ač je tím ovšem následující aritmetický postup motivován. Při tom nebudeme z geometrie předpokládat ani znalost čísla $\pi$. Místo toho si zatím zvolme docela libovolné kladné číslo, které sice už nyní označíme symbolem $\pi$, pro které však teprve v následujícím odstavci provedeme určitou aritmetickou volbu [viz (21·11)], o které se potom přesvědčíme, že geometricky znamená polovinu délky jednotkové kružnice.

Zavedeme si aritmetický svazek se základem $\pi$ a budeme hodnotu symbolu $E(x)$ definovati aritmeticky nejprve pro ten případ, že $x$ je dělicí bod našeho aritmetického svazku. Zvolme určité $n$; $n$-tá stupnice aritmetického svazku má základ $\pi : 2^{n-1}$, takže její dělicí body jsou

$$\frac{k\pi}{2^{n-1}}, \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots). \tag{20·2}$$

Hodnotu symbolu $E(x)$ v těchto dělicích bodech definujeme aritmeticky pomocí (20·1), takže tyto hodnoty jsou body jednotkové kružnice; jsou to dělicí body $n$-té stupnice kruhového svazku. Je-li $u_n^k$ $(0 \leqq k \leqq 2^{n-1})$ libovolný dělicí bod $n$-té stupnice kruhového svazku, pak je $E(x) = u_n^k$ pro nekonečně mnoho dělicích bodů $x$ $n$-té stupnice aritmetického svazku, a to pro dělicí body

$$\frac{k\pi}{2^{n-1}}, \quad \frac{k\pi}{2^{n-1}} \pm 2\pi = \frac{(k \pm 2^n)\pi}{2^{n-1}}, \quad \frac{k\pi}{2^{n-1}} \pm 4\pi, \quad \frac{k\pi}{2^{n-1}} \pm 6\pi, \ldots,$$

neboť $u_n^{2^n} = 1$ podle cvič. 96.

Každý dělicí bod $x$ aritmetického svazku je dělicím bodem skoro všech stupnic svazku a musíme se přesvědčit, že pomocí (20·1) je symbolu $E(x)$ dána táž hodnota, ať jakkoli zvolíme index $n$, pro který je $x$ obsažen mezi body (20·2). Stačí se přesvědčit, že je tomu tak, přejdeme-li od indexu $n$ k indexu $n + 1$. Je-li

$$x = \frac{k\pi}{2^{n-1}} = \frac{2k\pi}{2^n},$$

pak pomocí $n$-té stupnice dostáváme $E(x) = u_n^k$, pomocí $(n + 1)$-ní stupnice $E(x) = u_{n+1}^{2k}$, což je totéž podle věty 51.

Zbývá definovati symbol $E(x)$ pro takové $x$, které není dělicím bodem aritmetického svazku. Budiž

$$\langle r_1, s_1\rangle, \langle r_2, s_2\rangle, \langle r_3, s_3\rangle, \ldots \tag{20·3}$$

aritmetický řetěz bodu $x$. Pro každé $n$ budiž

$$v_n = E(r_n),\ w_n = E(s_n); \tag{20·4}$$

z definice (20·1) plyne, že $\{v_n, w_n\}$ je určitý oblouk $n$-té stupnice kruhového svazku. Podle cvič. 33 je pro každé $n$ buďto $r_{n+1} = r_n$ nebo $s_{n+1} = s_n$ a je nekonečně mnoho takových $n$, pro něž $r_{n+1} = r_n$, i nekonečně mnoho takových $n$, pro něž $s_{n+1} = s_n$. Z toho následuje, že pro každé $n$ je buďto $v_{n+1} = v_n$ nebo $w_{n+1} = w_n$ a že je nekonečně mnoho takových $n$, pro něž $v_{n+1} = v_n$, i nekonečně mnoho takových $n$, pro něž $w_{n+1} = w_n$. Tedy podle cvič. 102 je

$$\{v_1, w_1\}, \{v_2, w_2\}, \{v_3, w_3\}, \ldots \tag{20·5}$$

kruhový řetěz určitého bodu $z$ na jednotkové kružnici, který není dělicím bodem kruhového svazku. Hodnotou symbolu $E(x)$ rozumíme tento bod $z$.

Cvičení **104.** Pro každé reálné $x$ je $|E(x)| = 1$.

Cvičení **105.** Pro každé reálné $x$ je $E(x + 2\pi) = E(x)$.

Cvičení **106.** Jest

$$E(0) = 1,\ E(\pi) = -1,\ E\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathrm{i},\ E\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -\mathrm{i}.$$

Věta 56. Pro každé reálné $x$ je $E(-x) = [E(x)]^*$.

Důkaz. I. Budiž nejprve $x$ dělicí bod aritmetického svazku. Při vhodných $n$ a $k$ je $x = \frac{k\pi}{2^{n-1}}$, tedy $E(x) = u_n^k$, $E(-x) = u_n^{-k}$. Avšak $|u_n^k| = 1$, tedy $u_n^k \cdot (u_n^k)^* = 1$, takže $u_n^{-k} = (u_n^k)^*$.

II. Není-li $x$ dělicí bod aritmetického svazku, budiž (20·3) jeho aritmetický řetěz, takže pomocí (20·4) dostaneme kruhový řetěz (20·5) bodu $E(x)$. Zřejmě

$$\langle -s_1, -r_1\rangle, \langle -s_2, -r_2\rangle, \langle -s_3, -r_3\rangle, \ldots$$

je aritmetický řetěz bodu $-x$, takže podle I je

$$\{w_1^*, v_1^*\}, \{w_2^*, v_2^*\}, \{w_3^*, v_3^*\}, \ldots$$

kruhový řetěz bodu $-x$. Tedy $E(-x) = [E(x)]^*$ podle cvič. 103.

Věta 57. Budiž $0 \leqq x_1 < x_2 < 2\pi$. Pak bod $E(x_1)$ leží na jednotkové kružnici před bodem $E(x_2)$; probíháme-li jednotkovou kružnici počínajíc bodem 1 proti ručičkám hodinovým.

Důkaz. Leží-li $x$ v některém z intervalů

$$\langle 0, \frac{\pi}{2^{n-1}}\rangle, \langle \frac{\pi}{2^{n-1}}, \frac{2\pi}{2^{n-1}}\rangle, \ldots, \langle \frac{(2^n-1)\pi}{2^{n-1}}, 2\pi\rangle, \tag{20·6}$$

leží bod $E(x)$ v příslušném z oblouků

$$\{1, u_n\}, \{u_n, u_n^2\}, \ldots, \{u_n^{2^n-1}, 1\}. \tag{20·7}$$

Při dosti velkém $n$ je takový interval, ve kterém je bod $x_1$, jistě napsán ve (20·6) před takovým intervalem, ve kterém je bod $x_2$. Z toho plyne tvrzení věty, neboť oblouky (20·7) následují jeden za druhým v napsaném pořádku, probíháme-li jednotkovou kružnici počínajíc bodem 1 proti ručičkám hodinovým.

Věta 58. Je-li $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, je $\lim_{n\to\infty} E(a_n) = E(a)$.

Důkaz. I. Leží-li body $x'$, $x''$ v témž intervalu $\langle r, s\rangle$ $k$-té stupnice aritmetického svazku, jest

$$|\Re[E(x')] - \Re[E(x'')]| \leqq 2q_{k+1},$$
$$|\Im[E(x')] - \Im[E(x'')]| \leqq 2q_{k+1}.$$

Neboť oba body $E(x')$, $E(x'')$ leží na oblouku $\{v, w\}$, kde $v = E(r)$, $w = E(s)$, takže oba body $\Re[E(x')]$, $\Re[E(x'')]$ jsou v intervalu $\{v, w\}_1$ a oba body $\Im[E(x')]$, $\Im[E(x'')]$ jsou v intervalu $\{v, w\}_2$; a na str. 70 jsme si všimli, že z věty 54 následuje, že délky obou intervalů $\{v, w\}_1$, $\{v, w\}_2$ jsou $\leqq 2q_{k+1}$.

II. Zvolme $\varepsilon > 0$. Máme dokázati, že existuje index $p$ takový, že pro všecka $n > p$ je

$$\begin{aligned} |\,\Re[E(a_n)] - \Re[E(a)]\,| &< \varepsilon, \\ |\,\Im[E(a_n)] - \Im[E(a)]\,| &< \varepsilon. \end{aligned} \tag{20·8}$$

Podle věty 55 můžeme zvoliti index $k$ tak, že $4q_{k+1} < \varepsilon$. Protože $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, existuje takový index $p$, že pro všecka $n > p$ je $|\,a_n - a\,| < \pi : 2^{k-1}$. Budiž $n > p$; dokážeme, že platí (20·8). V $k$-té stupnici aritmetického svazku budiž $J_1$ interval obsahující bod $a$ a $J_2$ interval obsahující bod $a_n$. Protože $|\,a_n - a\,|$ je menší než délka intervalů $k$-té stupnice aritmetického svazku, intervaly $J_1$, $J_2$ buďto splynou, nebo to jsou dva sousední intervaly. Rozhodně existuje bod $y$, který leží i v intervalu $J_1$ i v intervalu $J_2$. Podle I jsou čísla

$$\begin{gathered} |\,\Re[E(a_n)] - \Re[E(y)]\,|, \; |\,\Re[E(y)] - \Re[E(a)]\,|, \\ |\,\Im[E(a_n)] - \Im[E(y)]\,|, \; |\,\Im[E(y)] - \Im[E(a)]\,| \end{gathered}$$

vesměs $\leqq 2q_{k+1}$. Protože $4q_{k+1} < \varepsilon$, platí (20·8).

Věta 59. Jest $E(x + y) = E(x)\,.\,E(y)$.

Důkaz. I. Předpokládejme nejprve, že $x$ a $y$ jsou dělicí body aritmetického svazku. Existuje takové $n$, že $x$ a $y$ jsou dělicí body $n$-té stupnice aritmetického svazku, takže existují celá čísla $h$, $k$ taková, že

$$x = \frac{h\pi}{2^{n-1}}, \quad y = \frac{k\pi}{2^{n-1}}, \quad \text{tedy } x + y = \frac{(h+k)\pi}{2^{n-1}}.$$

Pak je

$$E(x) = u_n^h, \quad E(y) = u_n^k, \quad E(x + y) = u_n^{h+k},$$

takže $E(x + y) = E(x)\,E(y)$.

II. Buďtež nyní $x$, $y$ libovolná reálná čísla. Podle cvičení 29 a 32 existují pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ dělicí body $x_n$ a $y_n$ aritmetického svazku takové, že $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$. Podle věty 3 je $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n + y_n) = x + y$. Podle věty 58 je

$$\lim_{n\to\infty} E(x_n) = E(x), \quad \lim_{n\to\infty} E(y_n) = E(y),$$

$$\lim_{n\to\infty} E(x_n + y_n) = E(x + y).$$

Podle cvič. 100 je

$$\lim_{n\to\infty} E(x_n)\, E(y_n) = E(x)\, E(y).$$

Podle I je však pro všecka $n$:

$$E(x_n + y_n) = E(x_n)\, E(y_n), \text{ takže } E(x + y) = E(x)\, E(y).$$

Cvičení **107.** **Budiž $z$ libovolný bod na jednotkové kružnici. Pak existuje (jediné) reálné číslo $x$ takové, že $-\pi < x \leqq \pi$, $E(x) = z$.**

Nyní položme pro každé reálné $x$

$$\sin x = \Im[E(x)], \quad \cos x = \Re[E(x)], \tag{20·9}$$

takže

$$E(x) = \cos x + \mathrm{i} \sin x. \tag{20·10}$$

Z vlastností komplexní funkce $E(x)$ plynou ihned příslušné vlastnosti obou reálných funkcí $\cos x$, $\sin x$.

Cvičení **108.** **Pro každé reálné $x$ je $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.**

Cvičení **109.** **Pro každé reálné $x$ je**

$$\cos(x + 2\pi) = \cos x, \quad \sin(x + 2\pi) = \sin x.$$

Cvičení **110.** **Jest**

$$\cos 0 = 1, \quad \cos \pi = -1, \quad \cos \tfrac{1}{2}\pi = 0, \quad \cos(-\tfrac{1}{2}\pi) = 0,$$
$$\sin 0 = 0, \quad \sin \pi = 0, \quad \sin \tfrac{1}{2}\pi = 1, \quad \sin(-\tfrac{1}{2}\pi) = -1.$$

Cvičení **111.** **Pro každé reálné $x$ je**

$$\cos(-x) = \cos x, \quad \sin(-x) = -\sin x.$$

Cvičení **112.** **Funkce $\cos x$ klesá v intervalu $\langle 0, \pi\rangle$. Funkce $\sin x$ roste v intervalu $\langle -\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi\rangle$.**

Cvičení **113.** **Funkce $\cos x$ a $\sin x$ jsou spojité.**

Cvičení **114.** **Pro všecka reálná $x$ a $y$ je**

$$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y,$$
$$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

Cvičení **115.** **Je-li $-1 \leqq t \leqq 1$, pak existuje (jediné) reálné číslo $x$ takové, že $0 \leqq x \leqq \pi$, $\cos x = t$ a (jediné) reálné číslo $y$ takové, že $-\tfrac{1}{2}\pi \leqq y \leqq \tfrac{1}{2}\pi$, $\sin y = t$.**

Cvičení **116.** Jest $\cos x = 0$ pro

$$x = \pm \tfrac{1}{2}\pi, \quad \pm \tfrac{3}{2}\pi, \pm \tfrac{5}{2}\pi, \ldots \tag{20·11}$$

a pro žádné jiné reálné $x$. Jest $\sin x = 0$ pro

$$x = 0, \pm \pi, \pm 2\pi, \ldots \tag{20·12}$$

a pro žádné jiné reálné $x$.

Jakmile známe definici a vlastnosti funkcí $\sin x$, $\cos x$, můžeme zavésti funkce $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$ rovnicemi

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}, \quad \operatorname{cotg} x = \frac{\cos x}{\sin x}. \tag{20·13}$$

Funkce $\operatorname{tg} x$ není definována v bodech (20·11); funkce $\operatorname{cotg} x$ není definována v bodech (20·12).

Cvičení **117.** Jest identicky

$$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg}(x + \pi) = \operatorname{cotg} x,$$
$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x, \quad \operatorname{cotg}(-x) = -\operatorname{cotg} x.$$

Cvičení **118.** Jest identicky

$$\operatorname{tg}(x + y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y},$$

$$\operatorname{cotg}(x + y) = \frac{\operatorname{cotg} x \operatorname{cotg} y - 1}{\operatorname{cotg} x + \operatorname{cotg} y}.$$

Cvičení **119.** Pro $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$ funkce $\operatorname{tg} x$ stále roste a nabývá všech reálných hodnot (každé jednou). Pro $0 < x < \pi$ funkce $\operatorname{cotg} x$ stále klesá a nabývá všech reálných hodnot (každé jednou).

**21. Derivace.** Věta 60. Buďtež $r, s$ dělicí body aritmetického svazku se základem $\pi$. Je-li $0 < r < s \leqq \pi$, jest

$$\frac{\sin r}{r} > \frac{\sin s}{s}. \tag{21·1}$$

Důkaz. Zvolme $n$ tak, že $r$ a $s$ jsou dělicí body $n$-té stupnice aritmetického svazku. Pak je

$$r = \frac{h\pi}{2^{n-1}}, \; s = \frac{k\pi}{2^{n-1}}, \; 0 < h < k \leqq 2^n, \tag{21·2}$$

$$\sin r = \mathfrak{J}(u_n^h), \; \sin s = \mathfrak{J}(u_n^k).$$

Položme pro $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$a_m = \Im\,(u_n^m - u_n^{m-1}),$$

takže

$$a_{m+1} - a_m = \Im\,(u_n^{m+1} - 2u_n^m + u_n^{m-1}).$$

Podle (19·2) a podle věty 51 je, protože $|u_{n+1}|^2 = u_{n+1} \,.\, u_{n+1}{}^* = 1$,

$$u_n^{m+1} - 2u_n^m + u_n^{m-1} = u_n^m\left(u_{n+1}^2 - 2 + \frac{1}{u_{n+1}^2}\right) = u_n^m\left(u_{n+1} - \frac{1}{u_{n+1}}\right)^2 =$$

$$= u_n^m\,(u_{n+1} - u_{n+1}{}^*)^2 = u_n^m\,(2\mathrm{i}q_{n+1})^2 = -\,4q_{n+1}^2\,u_n^m,$$

takže

$$a_{m+1} - a_m = -\,4q_{n+1}^2\,\Im u_n^m.$$

Je-li $0 < m < 2^n$, je $u_n^m$ vnitřní bod oblouku $\{1, -1\}$, takže $\Im(u_n^m) > 0$; mimoto $q_{n+1} \neq 0$ podle (19·5) a cvič. 95, takže $a_{m+1} - a_m < 0$. Tedy

$$a_1 > a_2 > a_3 > \ldots > a_{2^n}.$$

Podle cvič. 5 je tedy, ježto $0 < h < k \leqq 2^n$,

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_h}{h} > \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k}.$$

Avšak

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = \Im\,[(u_n - 1) + (u_n{}^2 - u_n) + \ldots + (u_n^k - u_n^{k-1})] =$$
$$= \Im\,(u_n^k - 1) = \Im\,(u_n^k) = \sin s$$

a podobně $a_1 + a_2 + \ldots + a_h = \Im(u_n^h) = \sin r$. Tedy

$$\frac{\sin r}{h} > \frac{\sin s}{k}$$

a z toho plyne (21·1) podle (21·2).

**Věta 61.** Buďtež $r, s$ dělicí body aritmetického svazku se základem $\pi$. Je-li $0 < r < s < \frac{1}{2}\pi$, je

$$\frac{\sin r}{r\cos r} < \frac{\sin s}{s\cos s}. \tag{21·3}$$

Důkaz. Při vhodném $n \geqq 4$ je

$$r = \frac{h\pi}{2^{n-1}},\; s = \frac{k\pi}{2^{n-1}},\; 0 < h < k < 2^{n-2}, \tag{21·4}$$

$$u_n^h = \cos r + \mathrm{i}\sin r,\; u_n^k = \cos s + \mathrm{i}\sin s.$$

Pro $0 < m < 2^{n-2}$ leží body $u_n^m$, $u_n^{m-1}$ na oblouku $\{1, \mathrm{i}\}$ a jsou různé od i, takže $\Re(u_n^m) \neq 0 \neq \Re(u_n^{m-1})$; proto můžeme položiti

$$a_m = \frac{\Im(u_n^m)}{\Re(u_n^m)} - \frac{\Im(u_n^{m-1})}{\Re(u_n^{m-1})}.$$

Píšeme-li $u_n^m = \alpha_m + \beta_m \mathrm{i}$, je

$$a_m = \frac{\beta_m}{\alpha_m} - \frac{\beta_{m-1}}{\alpha_{m-1}} = \frac{\beta_m \alpha_{m-1} - \alpha_m \beta_{m-1}}{\alpha_m \alpha_{m-1}}.$$

Avšak

$$\beta_m \alpha_{m-1} - \alpha_m \beta_{m-1} = \Im[(\alpha_m + \mathrm{i}\beta_m)(\alpha_{m-1} - \mathrm{i}\beta_{m-1})] =$$

$$= \Im[u_n^m \cdot (u_n^{m-1})^*] = \Im\left(u_n^m \cdot \frac{1}{u_n^{m-1}}\right) = \Im(u_n) = q_n,$$

takže

$$a_m = \frac{q_n}{\alpha_m \alpha_{m-1}}.$$

Tedy

$$a_{m+1} - a_m = \frac{q_n}{\alpha_{m+1} \alpha_m} - \frac{q_n}{\alpha_m \alpha_{m-1}} = \frac{q_n (\alpha_{m-1} - \alpha_{m+1})}{\alpha_{m+1} \alpha_m \alpha_{m+1}}. \qquad (21{\cdot}5)$$

Body $1 = \alpha_0 + \beta_0 \mathrm{i}$, $u_n = p_n + q_n \mathrm{i} = \alpha_1 + \beta_1 \mathrm{i}$, $u_n{}^2 = \alpha_2 + \beta_2 \mathrm{i}$, ... $u_n^{2^n-2} = \alpha_{2^n} + \beta_{2^n} . \mathrm{i} = \mathrm{i}$ následují popořádku za sebou na oblouku $\{1, \mathrm{i}\}$, sledujeme-li jej od bodu 1 k bodu i; proto z (21·5) plyne, že

$$a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_{2^{n-2}-1},$$

takže podle věty 1 je

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_h}{h} < \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_k}{k}.$$

Avšak

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_k = \left(\frac{\beta_1}{\alpha_1} - \frac{\beta_0}{\alpha_0}\right) + \left(\frac{\beta_2}{\alpha_2} - \frac{\beta_1}{\alpha_1}\right) + \ldots + \left(\frac{\beta_k}{\alpha_k} - \frac{\beta_{k-1}}{\alpha_{k-1}}\right) =$$

$$= \frac{\beta_k}{\alpha_k} - \frac{\beta_0}{\alpha_0} = \frac{\beta_k}{\alpha_k} = \frac{\sin s}{\cos s}$$

a podobně je

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_h = \frac{\sin r}{\cos r},$$

takže

$$\frac{\sin r}{h \cos r} < \frac{\sin s}{k \cos s}$$

a z toho plyne (21·3) podle (21·4).

Věta 62. Funkce $\frac{\sin x}{x}$ klesá pro $0 < x \leqq \pi$.

Důkaz. Budiž $0 < x_1 < x_2 \leqq \pi$. Máme dokázati, že

$$\frac{\sin x_1}{x_1} > \frac{\sin x_2}{x_2}. \tag{21·7}$$

Podle cvič. 29 a 30 existují dělicí body $r, s$ aritmetického svazku takové, že $x_1 < r < s < x_2$. Podle věty 60 je

$$\frac{\sin r}{r} > \frac{\sin s}{s},$$

takže můžeme zvoliti číslo $\varepsilon > 0$ tak, že

$$\frac{\sin r}{r} - \varepsilon > \frac{\sin s}{s} + \varepsilon. \tag{21·8}$$

Podle věty 27 a podle cvič. 64 a 113 je funkce $\frac{\sin x}{x}$ spojitá v bodě $x_1$. Tedy existuje na číselné ose interval $J$, který neobsahuje bod 0, takový, že bod $x_1$ leží uvnitř $J$ a že

$$\left| \frac{\sin x}{x} - \frac{\sin x_1}{x_1} \right| < \varepsilon$$

pro každý bod $x$ uvnitř $J$. Podle cvič. 29 a 30 můžeme zvolit uvnitř $J$ dělicí bod $t_1$ aritmetického svazku, pro který je $t_1 < r$; podle věty 60 je

$$\frac{\sin t_1}{t_1} > \frac{\sin r}{r};$$

mimoto je

$$\left| \frac{\sin t_1}{t_1} - \frac{\sin x_1}{x_1} \right| < \varepsilon.$$

Docela stejně se dokáže, že existuje dělicí bod $t_2$ aritmetického svazku, pro který je

$$\frac{\sin t_2}{t_2} < \frac{\sin s}{s}, \quad \left| \frac{\sin t_2}{t_2} - \frac{\sin x_2}{x_2} \right| < \varepsilon.$$

Jest

$$\frac{\sin x_1}{x_1} > \frac{\sin t_1}{t_1} - \varepsilon > \frac{\sin r}{r} - \varepsilon,$$

$$\frac{\sin x_2}{x_2} < \frac{\sin t_2}{t_2} + \varepsilon < \frac{\sin s}{s} + \varepsilon,$$

takže z (21·8) plyne (21·7).

Cvičení 120. Funkce $\frac{\sin x}{x \cos x}$ roste pro $0 < x < \frac{1}{2}\pi$.

Jest

$$E\left(\frac{\pi}{2^n}\right) = u_n = p_n + iq_n, \quad \cos\frac{\pi}{2^{n-1}} = p_n, \quad \sin\frac{\pi}{2^{n-1}} = q_n.$$

Podle věty 60 je

$$q_1,\ 2q_2,\ 2^2q_3,\ 2^3q_4,\ \dots \tag{21·9}$$

stoupající posloupnost; podle věty 61 je

$$\frac{2^2q_3}{p_3},\ \frac{2^3q_4}{p_4},\ \frac{2^4q_5}{p_5},\ \dots \tag{21·10}$$

klesající posloupnost; členy posloupnosti (21·10) jsou kladné podle cvič. 95; tedy posloupnost (21·10) je konvergentní podle věty 9. Nyní plyne z vět 4 a 55, že také posloupnost (21·9) je konvergentní. Je to stoupající posloupnost s kladnými členy, takže její limita je kladné číslo. My jsme však v odst. 20 označili písmenem $\pi$ kladné číslo, jehož určitou volbu jsme odsunuli do tohoto odstavce. Nyní volíme

$$\pi = \lim_{n\to\infty} 2^{n-1}q_n. \tag{21·11}$$

Věta 63. Číslo $\pi$ je polovina obvodu jednotkové kružnice.

Důkaz. Podle věty 54 je $M_n$ pravidelný $2^n$-úhelník s délkou strany $2q_{n+1}$. Obvod jednotkové kružnice je limita posloupnosti, jejíž $n$-tý člen je obvod mnohoúhelníka $M_n$, tedy $2^n \, . \, 2q_{n+1}$, takže z (21·11) plyne, že obvod jednotkové kružnice je $2\pi$.

Věta 64. Jest

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

Důkaz. Protože $\sin\frac{\pi}{2^{n-1}} = q_n$, je

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sin x_n}{x_n} = 1, \text{ je-li } x_n = \frac{\pi}{2^n}. \tag{21·12}$$

Je-li dáno $\varepsilon > 0$, můžeme podle (21·12) zvoliti index $p$ tak, že pro všecka $n > p$ je $\left|\frac{\sin x_n}{x_n} - 1\right| < \varepsilon$. Stačí dokázati, že pro $x \neq 0$,

$|x| < x_p$ je $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$. Je-li $x \neq 0$, $|x| < x_p$, existuje index $n > p$ takový, že $x_n < |x| < x_p$. Jest $\frac{\sin x}{x} = \frac{\sin |x|}{|x|}$ podle cvič. 111, takže číslo $\frac{\sin x}{x}$ podle věty 62 leží mezi čísly $\frac{\sin x_p}{x_p}$ a $\frac{\sin x_n}{x_n}$, která leží mezi čísly $1 - \varepsilon$ a $1 + \varepsilon$. Proto je $\left|\frac{\sin x}{x} - 1\right| < \varepsilon$.

**Věta 65.** Jest

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x} = 0. \tag{21·13}$$

**Důkaz.** Z věty 64 plyne, že

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} = 1,$$

takže podle cvič. 108 je

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x^2} = 1$$

a z toho následuje snadno, že

$$\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos^2 x}{x} = 0. \tag{21·14}$$

Avšak

$$\frac{1 - \cos x}{x} = \frac{1 - \cos^2 x}{x} \cdot \frac{1}{1 + \cos x} \tag{21·15}$$

a podle cvič. 110 a 113 je

$$\lim_{x \to 0} \frac{1}{1 + \cos x} = \tfrac{1}{2}. \tag{21·16}$$

Z (21·14), (21·15) a (21·16) plyne (21·13).

**Věta 66.** Pro každé reálné $x$ je $(\sin x)' = \cos x$.

**Důkaz.** Podle cvič. 114 je pro $h \neq 0$

$$\frac{\sin (x + h) - \sin x}{h} = \cos x \cdot \frac{\sin h}{h} - \sin x \, \frac{1 - \cos h}{h},$$

takže podle vět 64 a 65 je

$$\lim_{h \to 0} \frac{\sin (x + h) - \sin x}{h} = \cos x.$$

Cvičení 121. Pro každé reálné $x$ je $(\cos x)' = -\sin x$.

Cvičení 122. Pro každé $x$ různé od hodnot (20·11) je $(\operatorname{tg} x)' = \dfrac{1}{\cos^2 x}$. Pro každé $x$ různé od hodnot (20·12) je $(\operatorname{cotg} x)' = -\dfrac{1}{\sin^2 x}$. (Podle pravidla o derivování podílu).

Cvičení 123. Derivujte funkce

a) $\sin^3 x \cos 3x$; b) $\dfrac{\sin^3 x}{\cos 3x}$; c) $\dfrac{\cos^3 3x}{\sin x}$;

d) $x^n \sin^n x$; e) $x^n \sin^2 nx$; f) $x^n \sin^n nx$;

g) $e^{-x} \sin^m x \cos^n x$; h) $\log \dfrac{1 + \sin x}{1 - \sin x}$; i) $e^{\sin x}$.

**22. Rozvoje funkcí sin x a cos x v nekonečné řady.** Jak se dá číslo $\pi$ pohodlně počítati pomocí nekonečných řad, o tom je řeč ve VM, odst. 32 a zde se tím nebudeme zabývati. Za to poznáme v tomto odstavci nekonečné řady, pomocí kterých se dají pohodlně počítati hodnoty funkcí $\sin x$ a $\cos x$ pro všecka $x$.

Věta 67. Pro všecka $x > 0$ a pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ je

$$\left|\sin x - \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right]\right| < \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\left|\cos x - \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right]\right| < \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Mimoto jsou diference

$$\sin x - \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right],$$

$$\left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right] - \cos x$$

kladné při sudém $n$ a záporné při lichém $n$.

Důkaz. Pro $n = 1, 2, 3, \ldots$ budiž

$$f_n(x) = \sin x - \left[x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}\right],$$

$$g_n(x) = \cos x - \left[1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}\right].$$

Pak je pro všecka $n$ a $x$

$$f'_{n+1}(x) = g_n(x),\ g'_n(x) = -f_n(x).$$

Zejména je $f_1(x) = \sin x - x$, tedy $f_1(x) < 0$ pro $0 < x \leqq \pi$ podle vět 62 a 64; pro $x > \pi$ je $f_1(x) \leqq 1 - \pi < 0$, takže je $f_1(x) < 0$ pro všecka $x > 0$. Pro všecka $n$ je $f_n(0) = g_n(0) = 0$. Užijeme-li věty 43 na posloupnost funkcí

$$-f_1(x),\ g_1(x),\ f_2(x),\ -g_2(x),\ -f_3(x),\ g_3(x),\ f_4(x),\ -g_4(x),\ \ldots,$$

dostaneme, že pro všecka $x > 0$ je

$$f_n(x) < 0,\ g_n(x) > 0 \text{ při lichém } n,$$
$$f_n(x) > 0,\ g_n(x) < 0 \text{ při sudém } n.$$

Při lichém $n$ je pro $x > 0$

$$f_n(x) < 0, \quad f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} > 0,$$

$$g_n(x) > 0, \quad g_{n+1}(x) = g_n(x) - \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!} < 0,$$

tedy

$$0 < -f_n(x) < \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad 0 < g_n(x) < \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Podobně vyjde při sudém $n$

$$0 < f_n(x) < \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad 0 < -g_n(x) < \frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}.$$

Cvičení **124.** Pro všecka reálná $x$ je

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots \text{ do nekonečna},$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots \text{ do nekonečna}.$$

S pomocí těchto výsledků můžeme snadno počítati velmi přesně $\sin x$ a $\cos x$ pro každé nepříliš velké $x$. Je-li dán úhel $\alpha$ ve stupních, $\alpha$ rovné $n$ stupňům, je

$$\sin \alpha = \sin \frac{n\pi}{180}, \quad \cos \alpha = \cos \frac{n\pi}{180}.$$

Proto je při užívání našich řad třeba znáti numerickou hodnotu čísla $\pi$. Jest

$$\pi = 3{,}14159\ 26535\ 89793\ldots,$$
$$\pi^2 = 9{,}86960\ 44010\ 89358\ldots$$

Cvičení **125.** Vypočtěte aspoň na osm desetinných míst $\sin 2^\circ$, $\cos 2^\circ$, $\sin 3^\circ$, $\cos 3^\circ$, $\sin 5^\circ$ a přesvědčte se, že $\sin 2^\circ . \cos 3^\circ + \sin 3^\circ . \cos 2^\circ = \sin 5^\circ$. (Jest

$$\begin{aligned} \sin 2^\circ &= 0{,}03489\ 94967\ 02501\ldots, \\ \cos 2^\circ &= 0{,}99939\ 08270\ 19095\ldots, \\ \sin 3^\circ &= 0{,}05233\ 59562\ 42943\ldots, \\ \cos 3^\circ &= 0{,}99862\ 95347\ 54574\ldots, \\ \sin 5^\circ &= 0{,}08715\ 57427\ 47658\ldots) \end{aligned}$$

V odst. 16 jsme poznali, že pro každé reálné $x$ je

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^5}{5!} + \ldots$$

Dosadíme-li do této nekonečné řady $ix$ místo $x$, dostaneme řadu

$$1 + i\frac{x}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \ldots$$

jejíž členy jsou střídavě reálné a ryze imaginární. Podle cvič. 124 součet reálných členů je $\cos x$, součet všech ryze imaginárních členů je $i \sin x$. Proto je účelné definovati hodnotu $e^{ix}$ pro reálné $x$ identitou

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x. \tag{22·1}$$

Podle cvič. 111 je

$$e^{-ix} = \cos x - i \sin x,$$

takže

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}. \tag{22·2}$$

Formule (22·1) a (22·2) se jmenují **Eulerovy formule.**