Geometria proiettiva differenziale. I

Capitolo IV. Superficie rigate (Č)

In: Guido Fubini (author); Eduard Čech (author): Geometria proiettiva differenziale. I. (Italian). Bologna: Zanichelli, Nicola, 1926. pp. [181]--241.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402435

CAPITOLO IV.

SUPERFICIE RIGATE (Č.) (*)

§ 31. — Applicazione delle formole generali del Capitolo II al caso particolare di una superficie rigata.

In questo Capitolo studiamo la classe più semplice di superficie non sviluppabili che è quella delle *superficie rigate*. Tale studio particolare è persino necessario, giacchè una parte essenziale dei risultati generali, e cioè il concetto di coordinate e forme *normali*, qui non si può applicare. Cominciamo coll'esplicitare le formole generali nel caso attuale supponendo che le rette generatrici siano le $v =$ cost.

Nel § 32 ritroveremo per via diretta tutti i seguenti risultati. Applicando qui le formole generali, dobbiamo porre, se le $v =$ cost. sono le *generatrici :*

$$a_{11} = a_{111} = a_{112} = a_{122} = 0 \ , \ A = -a_{12}^2 < 0 \ , \ \varepsilon = -\operatorname{sgn} A = 1 \ ,$$

$$F_2 = (2a_{12}du + a_{22}dv)dv \quad , \quad F_3 = a_{222}dv^3 \, ,$$

$$2X = \Sigma A_{ik}\, x_{ik} = -\frac{a_{22}}{a_{12}^{\;2}}\, x_{11} + \frac{2}{a_{12}}\, x_{12} \, .$$

(*) I risultati più importanti di questo Capitolo sono stati esposti, per la prima volta, (in boemo) nel Časopis pro pěstování matematiky a fysiky, t. LIII, 1923-4.

Le equazioni fondamentali (Cap. II, § 14 *A*) danno quindi, eliminando X:

(1) $x_{11} = p_{11}x$, $a_{22}x_{12} - a_{12}x_{22} + a_{222}x_1 + (a_{12}p_{22} - a_{22}p_{12})x = 0$.

Notiamo pure la relazione di coniugio (Cap. II § 14 *A*)

$$(1)_{\text{bis}} \qquad 2p_{12}a_{12} = a_{22}p_{11}.$$

I valori dei simboli di Christoffel essendo

$$\begin{pmatrix} 11 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{12}}\frac{\partial a_{12}}{\partial u}, \begin{pmatrix} 11 \\ 2 \end{pmatrix} = 0, \begin{pmatrix} 12 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2a_{12}}\frac{\partial a_{22}}{\partial u}, \begin{pmatrix} 12 \\ 2 \end{pmatrix} = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 22 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{a_{22}}{a_{12}^2}\frac{\partial a_{12}}{\partial v} + \frac{1}{2}\frac{a_{22}}{a_{12}^2}\frac{\partial a_{22}}{\partial u} + \frac{1}{2a_{12}}\frac{\partial a_{22}}{\partial v},$$

$$\begin{pmatrix} 22 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{a_{12}}\frac{\partial a_{12}}{\partial v} - \frac{1}{2a_{12}}\frac{\partial a_{22}}{\partial u},$$

la prima delle (1) si può scrivere

$$\frac{\partial^2 x}{\partial u^2} - \frac{\partial \log a_{12}}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} - p_{11}x = 0.$$

Se ne deduce subito che

$$x = \varphi(u, v)y + \psi(u, v)z$$

dove i due punti y e z non dipendono che da v. [Le lettere x, y, z non significano più tre coordinate dello stesso punto, ma tre punti diversi]. Cambiando il fattore di proporzionalità di x, si può supporre $\varphi(u, v) = 1$. La ψ dipende poi necessariamente da u, perchè x descrive una *superficie,* e possiamo sceglierla addirittura come nuovo parametro u, sicchè (e *quest' ipotesi sarà fatta per tutto ciò che segue*)

$$(2) \qquad x = y + uz$$

L'equazione precedente dà poi, tenendo conto anche di $(1)_{\text{bis}}$

$$(3) \qquad \frac{\partial \log a_{12}}{\partial u} = 0 \quad , \quad p_{11} = 0 \quad , \quad p_{12} = 0.$$

È del resto geometricamente chiaro senz'altro che l'ipotesi (2) è sempre legittima: *I punti* y *e* z *descrivono due curve in corrispondenza biunivoca definita da uguali valori di* v (*curve direttrici* della rigata) *e la superficie rigata che indicheremo con la lettera* R, *è il luogo delle rette che congiungono punti corrispondenti.* Indicheremo con apici le derivate delle espressioni che non dipendono che da v; p. es. $y' = \frac{\partial y}{\partial v} = \frac{dy}{dv}$.

L'equazione (Cap. II, § 12 A)

$$\frac{1}{\sqrt{|A|}}(x\, x_u\, x_v\, x_{uv}) = a_{12}$$

dà, sostituendovi dalla (2),

$$(yz\, y'z') = \omega a_{12}^2, \tag{4}$$

essendo posto

$$\omega = \operatorname{sgn}(yz\, y'z') = \operatorname{sgn} a_{12} = \pm 1. \tag{4 bis}$$

Le coordinate ξ del piano tangente, fissate al solito modo (Cap. II, § 12 B) sono

$$\xi = \frac{1}{|a_{12}|}(y, z, y' + uz') = \frac{(y, z, y' + uz')}{\sqrt{|y, z, y', z'|}}.$$

Quindi ξ è lineare in u e porremo

$$\xi = \eta + u\zeta, \quad \eta = \frac{1}{|a_{12}|}(yzy'), \quad \zeta = \frac{1}{|a_{12}|}(yzz'). \tag{5}$$

Donde il teorema di Chasles: *Il fascio dei piani* π *tangenti lungo una generatrice* g *è proiettivo alla punteggiata dei punti* P *di contatto. Questa proiettività definisce la generatrice* g' *infinitamente vicina alla* g, *perchè si può pensare come ottenuta proiettando da* g' *coi piani* π *i punti* P.

Le $S\xi x = S\xi x_u = \ldots = 0$ danno:

$$S\eta y = S\eta z = S\zeta y = S\zeta z = S\eta y' = S\eta' y = S\zeta z' = S\zeta' z = 0 \tag{6}$$

e le $Sx_u\,\xi_v = Sx_v\,\xi_u = -a_{12}$ danno poi

$$(6)_{\text{bis}} \qquad -S\eta' z = S\eta z' = +S\zeta' y = -S\zeta y' = a_{12}.$$

Dalle (6) e $(6)_{\text{bis}}$ si trae derivando:

$$S\eta' z' = \frac{\partial}{\partial v} S\eta z' - S\eta z'' = \frac{\partial a_{12}}{\partial v} - \frac{1}{|a_{12}|}(yzy'z''),$$

$$S\zeta' y' = \frac{\partial}{\partial v} S\zeta y' - S\zeta y'' = -\frac{\partial a_{12}}{\partial v} - \frac{1}{|a_{12}|}(yzz'y'').$$

Derivando (4) se ne deduce $S\eta' z' = S\zeta' y'$. Poichè

$$Sx_v\,\xi_v = S(y' + uz')(\eta' + u\zeta') = -a_{22}$$

si trae che $\dfrac{a_{22}}{a_{12}}$ è *un polinomio di secondo grado nella* u

$$(7) \qquad \frac{a_{22}}{a_{12}} = 2(a + 2bu + cu^2)$$

dove:

$$(7)_{\text{bis}} \qquad a = -\frac{1}{2a_{12}} S\eta' y', \quad b = -\frac{1}{2a_{12}} S\zeta' y' = -\frac{1}{2a_{12}} S\eta' z',$$
$$c = -\frac{1}{2a_{12}} S\zeta' z'.$$

Così pure dalla

$$a_{222} = \frac{1}{2}(Sx_v\,\xi_{vv} - x_{vv}\,\xi_v) =$$

$$= \frac{1}{2} S\Big[(y' + uz')(\eta'' + u\zeta'') - (y'' + uz'')(\eta' + u\zeta')\Big]$$

deduciamo che:

$$(8) \qquad \frac{a_{222}}{a_{12}} = A + 2Bu + Cu^2,$$

(dove A non indica più il discriminante di F_2), e dove:

$$
(8)_{\text{bis}} \qquad \left\{ \begin{aligned}
A &= \frac{1}{2a_{12}} S(y'\eta'' - y''\eta'), \\
B &= \frac{1}{4a_{12}} S(y'\zeta'' - y''\zeta' + z'\eta'' - z''\eta'), \\
C &= \frac{1}{2a_{12}} S(z'\zeta'' - z''\zeta').
\end{aligned} \right.
$$

L'elemento lineare proiettivo è

$$
(8)_{\text{ter}} \qquad \frac{F_3}{F_2} = \frac{1}{2} \frac{(A + 2Bu + Cu^2)dv^2}{du + (a + 2bu + cu^2)dv}.
$$

Dalla seconda delle (1) dove ora $p_{12} = 0$, si trae

$$
(x_{22}, x_1, x_2, x_{12}) = p_{22}(x, x_1, x_2, x_{12}),
$$

ossia:

$$
p_{22} = \frac{\left(\frac{\partial^2 x}{\partial v^2}, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)}{\left(x, \frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial^2 x}{\partial u \partial v}\right)} = \frac{(y'' + uz'', z, y', z')}{(y, z, y', z')},
$$

che è un polinomio

$$
(9) \qquad p_{22} = (P - C)u + (N - B)
$$

di primo grado nella u. Essendo (Cap. II, § 16 A)

$$
\pi_{22} - p_{22} = \frac{\partial}{\partial u} \frac{a_{222}}{a_{12}},
$$

si deduce:

$$
(9)_{\text{bis}} \qquad \pi_{22} = (P + C)u + (N + B).
$$

La (1) diventa

$$
(1)_{\text{ter}} \quad 2(a + 2bu + cu^2)x_{12} - x_{22} + (A + 2Bu + Cu^2)x + p_{22}\,x = 0.
$$

Posto al solito $\theta = \log|a_{12}|$, i valori attuali dei simboli di Christoffel sono

$$\begin{Bmatrix} 12 \\ 1 \end{Bmatrix} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{a_{22}}{a_{12}}\right) = 2(b + cu)\,, \quad \begin{Bmatrix} 12 \\ 2 \end{Bmatrix} = 0\,,$$

$$\begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} = -\frac{a_{22}}{a_{12}}\theta' + \frac{1}{2}\frac{a_{22}}{a_{12}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{a_{22}}{a_{12}}\right) +$$

$$+\frac{1}{2a_{12}}\frac{\partial}{\partial v}\left(a_{12}\cdot\frac{a_{22}}{a_{12}}\right) = -\frac{1}{2}\frac{a_{22}}{a_{12}}\theta' + \frac{1}{2}\frac{a_{22}}{a_{12}}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{a_{22}}{a_{12}}\right) +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{a_{22}}{a_{12}}\right) = (a' - \theta' a) + 2(b' - \theta' b)u + (c' - \theta' c)u^2 +$$

$$+ 4(a + 2bu + cu^2)(b + cu)\,,$$

$$\begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} = \theta' - \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{a_{22}}{a_{12}}\right) = \theta' - 2(b + cu)\,.$$

Sviluppando ed eguagliando a zero identicamente nella u la $(1)_{\text{ter}}$, si trova quindi:

$P + c' - \theta' c = 0$ (che è l'*unica* condizione d'integrabilità)

$$y'' = (\theta' - 2b)y' + 2az' + (N - B)y + (a' - a\theta' + A)z\,,$$

$$z'' = -2cy' + (\theta' + 2b)z' + (2b' - 2b\theta' + N + B)z + (c\theta' - c' - C)y.$$

Si introduce simmetria definendo una quantità j con la

$$j = -N + ac - b^2 - b' + b\theta'. \tag{10}$$

E si hanno così *le equazioni fondamentali per i punti* y, z *di due direttrici:*

$$(11)\quad \begin{aligned} y'' &= (\theta' - 2b)y' + 2az' + (-b' + b\theta' + ac - b^2 - B - j)y + \\ &\qquad + (a' - a\theta' + A)z\,, \\ z'' &= -2cy' + (\theta' + 2b)z' + (-c' + c\theta' - C)y + \\ &\qquad + (b' - b\theta' + ac - b^2 + B - j)z. \end{aligned}$$

Le equazioni (7) e $(9)_{\text{bis}}$ mostrano che *per η e ζ valgono equazioni che differiscono dalle precedenti soltanto nei segni* di A, B, C:

$$(11)_{\text{bis}} \quad \begin{aligned} \eta'' &= (\theta' - 2b)\eta' + 2a\zeta' + (-b' + b\theta' + ac - b^2 + B - j)\eta + \\ &\qquad + (a' - a\theta' - A)\zeta, \\ \zeta'' &= -2c\eta' + (\theta' + 2b)\zeta' + (-c' + c\theta' + C)\eta + \\ &\qquad + (b' - b\theta' + ac - b^2 - B - j)\zeta. \end{aligned}$$

TEOREMA FONDAMENTALE.

Dato l'elemento lineare proiettivo $(8)_{\text{ter}}$ *basterà quindi la conoscenza della sola* N, *o della* j, *per determinare completamente la superficie.* (Si noti che θ può assumere valori arbitrarii al variare del fattore di proporzionalità delle y, z).

§ 32. — Deduzione diretta dei risultati precedenti e prime applicazioni.

A) Nuova deduzione delle (11).

Prima di proseguire, voglio mostrare come si possa giungere ai risultati del § precedente in modo diretto, indipendente cioè dalla teoria generale delle superficie. Il metodo, di cui faremo uso, è del resto applicabile a casi più generali negli iperspazi. Come al § precedente, definiamo la rigata R come luogo delle rette congiungenti punti omologhi y e z di due curve C_y e C_z in corrispondenza biunivoca, punti le cui coordinate sono funzioni di un parametro v, sicchè il punto generico x di R è dato dalla

$$(1) \qquad x = y + uz.$$

Porremo

$$(2) \qquad (yz\,dy\,dz) = \omega(a_{12}dv)^2, \quad \omega = \pm 1$$

ossia, indicando con apici derivate rapporto alla v,

$$(yzy'z') = \omega a_{12}{}^2, \quad \omega = \operatorname{sgn}(yzy'z'),$$

e supponiamo, come è lecito, anche $\operatorname{sgn} a_{12} = \omega$. Le coordinate della generatrice p di R sono nella solita notazione

$$(3) \qquad p = (yz).$$

Le coordinate ξ del piano tangente ad R nel punto x sono

$$\xi = \frac{\lambda}{dv}(y\,,z\,,dx) = \lambda\Big[(y\,,z\,,y') + u(y\,,z\,,z')\Big]\,,$$

oppure, posto

$$\eta = \lambda(yzy')\,,\quad \zeta = \lambda(yzz')\,,$$

$$(4) \qquad \xi = \eta + u\zeta.$$

Per determinare λ in modo indipendente dalla scelta del parametro v, basta porre la condizione

$$(yz) = \pm(\eta\zeta).$$

È (Introduzione § 1 E)

$$(yzy'\,,\ yzz') = (yz)(yzy'z')\,,$$

sicchè risulta subito:

$$\lambda^2(yzy'z') = \pm 1 = \omega.$$

Prendendo p. es. $\lambda > 0$, risulta

$$(4)_{\text{bis}} \qquad \eta = \frac{(yzy')}{\sqrt{|\,yzy'z'\,|}}\quad,\quad \zeta = \frac{(yzz')}{\sqrt{|\,yzy'z'\,|}}$$

$$(3)_{\text{bis}} \qquad (\eta\zeta) = \omega(yz).$$

L'equazione $(3)_{\text{bis}}$ dà il significato geometrico del segno ω: *Un verso scelto nella punteggiata* p *e il verso corrispondente nel fascio dei piani tangenti sono associati nel senso dell'introduzione* § 1 *C allora e allora soltanto che* $\omega = 1$.

Accanto alle precedenti, valgono le formole duali

$$(5)\qquad y=\frac{(\eta\zeta\eta')}{\sqrt{|(\eta\xi\eta'\xi')|}}\ ,\quad z=\frac{(\eta\zeta\zeta')}{\sqrt{|(\eta\xi\eta'\xi')|}}$$

$$(\eta\zeta\eta'\zeta')=\omega(a_{12}\,dv)^2$$

che il lettore verificherà facilmente.

Sono evidenti le identità (6) e $(6)_{\text{bis}}$ del § precedente. Derivandole, si vede subito che si può porre (è $\theta=\log|a_{12}|$)

$$a=-\frac{1}{2a_{12}}S\eta'y'=\frac{1}{2a_{12}}S\eta y''=\frac{1}{2a_{12}}S\eta''y\,,$$

$$(6)\qquad b=-\frac{1}{2a_{12}}S\eta'z'=-\frac{1}{2a_{12}}S\zeta'y'=\frac{1}{2a_{12}}S\eta z''-\frac{1}{2}\theta'$$

$$=+\frac{1}{2a_{12}}S\zeta y''+\frac{1}{2}\theta'=\frac{1}{2a_{12}}S\eta''z+\frac{1}{2}\theta'=\frac{1}{2a_{12}}S\zeta''y-\frac{1}{2}\theta',$$

$$c=-\frac{1}{2a_{12}}S\zeta'z'=\frac{1}{2a_{12}}S\zeta z''=\frac{1}{2a_{12}}S\zeta''z\,.$$

Dalle $(4)_{\text{bis}}$ si vede che si ha anche

$$(6)_{\text{bis}}\qquad a=\frac{\omega}{2a_{12}^2}(yzy'y'')\,,\ b=\frac{\omega}{2a_{12}^2}(yzy'z'')-\frac{1}{2}\theta'=$$

$$=\frac{\omega}{2a_{12}^2}(yzz'y'')+\frac{1}{2}\theta',\ \ c=\frac{\omega}{2a_{12}^2}(yzz'z'')\,.$$

Notiamo pure l'identità

$$4a_{12}^2(ac-b^2)=\begin{vmatrix} Sy'\eta' & Sy'\zeta' \\ Sz'\eta' & Sz'\zeta' \end{vmatrix}=S(y'z')\,(\eta'\zeta').$$

Ora dalle $(4)_{\text{bis}}$ si ha

$$(\eta'\zeta')=\frac{1}{a_{12}^2}\Big[(yzy'')+(yz'y')-\theta'(yzy')\,,\ (yzz'')+(y'zz')-\theta'(yzz')\Big]$$

$$=\frac{1}{a_{12}^2}(y''z'')\,(yzy''z'')+P\,,$$

dove P soddisfa alla $SP(y'z')=0$, sicchè

$$(6)_{\text{ter}} \qquad ac-b^2=\frac{1}{4a_{12}^4}(yzy''z'')(y'z'y''z'').$$

Definiamo le A, B, C dalle $(8)_{\text{bis}}$ del § precedente e poniamo

$$(7) \qquad j=\frac{1}{4a_{12}}S(y'\zeta''-y''\zeta'-z'\eta''+z''\eta')-3(ac-b^2).$$

(Si vedrà fra poco che ciò coincide col valore di j definito dalla (10) del § precedente). Il lettore stabilirà facilmente le formole

$$A=\frac{\omega}{2a_{12}^2}\left[-(yzy'y''')+3(yy'z'y'')+3\theta'(yzy'y'')\right],$$

$$(8) \qquad B=\frac{\omega}{4a_{12}^2}\Big[-(yzy'z''')-(yzz'y''')+3(yy'z'z'')+$$

$$+3(zy'z'y'')+3\theta'(yzy'z'')+3\theta'(yzz'y'')\Big],$$

$$C=\frac{\omega}{2a_{12}^2}\left[-(yzz'z''')+3(zy'z'z'')+3\theta'(yzz'z'')\right],$$

$$j=\frac{\omega}{4a_{12}^2}\Big[(yzz'y''')-(yzy'z''')-(yy'z'z'')+$$

$$+(zy'z'y'')+2(yzy''z'')+\theta'(yzz'y'')-\theta'(yzy'z'')-3\omega(yzy''z'')(y'z'y''z'')\Big]$$

$$+\frac{1}{2}(\theta''-\theta'^2).$$

che esprimono le A, B, C, j mediante sole coordinate di punto.

I punti y, z, y', z' essendo linearmente indipendenti, valgono equazioni della forma

$$y''=p_{11}y'+p_{12}z'+q_{11}y+q_{12}z,$$

$$z''=p_{21}y'+p_{22}z'+q_{21}y+q_{22}z.$$

Moltiplicando con η e ζ e confrontando con le (6), e con le (6) e (6) $_{\text{bis}}$ del § precedente, si trova

$$2a_{12}a = a_{12}p_{12} \quad , \quad 2a_{12}b - a_{12}\theta' = -a_{12}p_{11} ,$$

$$2a_{12}b + a_{12}\theta' = a_{12}p_{12} \quad , \quad 2a_{12}c = -a_{12}p_{21} ,$$

ossia

$$p_{11} = -2b + \theta' , \quad p_{12} = 2a , \quad p_{21} = -2c , \quad p_{22} = 2b + \theta'.$$

Moltiplicando invece con η' e ζ' si deduce

$$S\eta' y'' = -2a_{12}ap_{11} - 2a_{12}bp_{12} - a_{12}q_{12} = -a_{12}(2a\theta' + q_{12}) ,$$

$$S\zeta' y'' = -2a_{12}bp_{11} - 2a_{12}cp_{12} + a_{12}q_{11} =$$
$$= a_{12}(4b^2 - 4ac - 2b\theta' + q_{11}) ,$$

$$S\eta' z'' = -2a_{12}ap_{21} - 2a_{12}bp_{22} - a_{12}q_{22} =$$
$$= -a_{12}(4b^2 - 4ac + 2b\theta' + q_{22}) ,$$

$$S\zeta' z'' = -2a_{12}bp_{21} - 2a_{12}cp_{22} + a_{12}q_{21} = a_{12}(-2c\theta' + q_{21}).$$

Ora derivando le (7) $_{\text{bis}}$ del § 1 e tenendo conto delle (8) $_{\text{bis}}$ del § 1 e della (7) si trova

$$S\eta' y'' = -a_{12}(a' + a\theta' + A) ,$$

$$S\zeta' y'' = -a_{12}(b' + b\theta' + 3ac - 3b^2 + B + j) ,$$

$$S\eta' z'' = -a_{12}(b' + b\theta' - 3ac + 3b^2 + B - j) ,$$

$$S\zeta' z'' = -a_{12}(c' + c\theta' + C) ,$$

sicchè

$$q_{11} = -b' + b\theta' + ac - b^2 - B - j \ , \ q_{12} = a' - a\theta' + A ,$$

$$q_{21} = -c' + c\theta' - C \ , \ q_{22} = b' - b\theta' + ac - b^2 + B - j .$$

Ecco ritrovate, con un procedimento più semplice, le equazioni fondamentali (11). Nello stesso modo si possono verificare le (3).

B) Applicazione alla quadrica di Lie.

Sappiamo dal Cap. III § 21 *D* che *la quadrica di Lie di una rigata è il suo iperboloide osculatore;* lo si indicherà nel seguito con la lettera *H*. *Per un valore fisso di* v, *il piano polare del punto*

$$(9) \qquad \rho_1 y + \rho_2 z + \sigma_1 y' + \sigma_2 z'$$

rispetto ad H *è*

$$(9)_{\text{bis}} \qquad \rho_1 \eta + \rho_2 \zeta + \sigma_1 \eta' + \sigma_2 \zeta'.$$

Ciò si vede quasi immediatamente da *l. c.* Ne vogliamo dare qui un'altra dimostrazione. In primo luogo, si vede dalle (6) e $(6)_{\text{bi}}$ del § 31 che la condizione d'incidenza

$$S(\rho_1 y + \rho_2 z + \sigma_1 y' + \sigma_2 z')(\overline{\rho}_1 \eta + \overline{\rho}_2 \xi + \overline{\sigma}_1 \eta' + \overline{\sigma}_2 \xi') = 0$$

è simmetrica in $\rho_1, \rho_2, \sigma_1, \sigma_2$ e $\overline{\rho}_1, \overline{\rho}_2, \overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2$, senza essere soddisfatta identicamente per $\rho_1 = \overline{\rho}_1$ ecc., sicchè la correlazione definita dalle (9) e $(9)_{\text{bis}}$ è proprio una polarità rispetto ad una quadrica *H*. Ma di più si ha per le (11) del § 31

$$p = (yz), \qquad p' = (yz') - (zy'),$$

$$(10) \qquad p'' = (yz'') - (zy'') + 2(y'z') = -2c(yy') +$$

$$+(\theta' + 2b)(yz') - (\theta' - 2b)(zy') - 2a(zz') + 2(ac - b^2 - j)(yz) + 2(y'z').$$

Ora dalla $(3)_{\text{bis}}$ § 32 e $(11)_{\text{bis}}$ § 31 si vede che similmente

$$\omega p = (\eta\zeta) \quad , \quad \omega p' = (\eta\zeta') - (\zeta\eta'),$$

$$\omega p'' = -2c(\eta\eta') + (\theta' + 2b)(\eta\zeta') - (\theta' - 2b)(\zeta\eta') - 2a(\zeta\zeta') +$$

$$+ 2(ac - b^2 - j)(\eta\zeta) + 2(\eta'\zeta'),$$

sicchè ogni retta linearmente dipendente da p, p', p'' è polare di sè stessa rispetto ad *H*, *c. d. d.* (Lo stesso si può far vedere, con la stessa facilità, delle generatrici del secondo sistema di *H*, cfr. § 34).

La dimostrazione precedente ci permette di provare per un'altra via il teorema del Cap. III, § 21 D che, *in un punto* x *di una superficie qualunque, la quadrica di Lie è l'iperboloide osculatore di ciascuna rigata asintotica (cioè di ognuna delle* 2 *rigate generate dalle tangenti asintotiche d'un sistema lungo la curva asintotica dell'altro sistema).* Per chiarezza si supponga S riferita alle asintotiche. Una delle rigate del teorema è generata dalla retta luogo del punto $x_u + tx$, dando a u valore costante. Si vede subito che, se ξ è il piano tangente ad S, allora:

$$S\xi_u(x_u + tx) = S\xi(x_u + tx) = S(\xi_u + t\xi)_v(x_u + tx) = 0\,,$$

cosicchè il piano tangente alla rigata nel punto $x_u + tx$ è $\xi_u + t\xi$. Ora è $(xx_u) = (\xi\xi_u)$ [cfr. Cap. II, § 19 (V)], sicchè la nostra scelta del fattore delle coordinate del piano tangente è d'accordo con la $(3)_{\text{bis}}$ del § presente. Il piano polare del punto

$$\rho_1 x + \rho_2 x_u + \sigma_1 x_v + \sigma_2 x_{uv}$$

rispetto all'iperboloide osculatore coincide quindi col piano polare

$$\rho_1 \xi + \rho_2 \xi_u + \sigma_1 \xi_v + \sigma_2 \xi_{uv}$$

dallo stesso punto rispetto alla quadrica di Lie, *c. d. d.*

§ 33. — Orientazione delle generatrici; espressioni intrinseche. Formole relative al cambiamento di variabili.

Le quantità a, b, c, A, B, C, j precedentemente definite sono evidentemente invarianti per sostituzioni unimodulari. Occorre trovare delle espressioni che siano di più indipendenti dalla scelta particolare delle u, v (intrinseche) ed invarianti per sostituzioni moltiplicative. Ma bisogna tener presente che noi qui non facciamo uso di coordinate curvilinee u, v qualunque, ma soltanto tali che sia

$$x = y + uz$$

i punti y e z non dipendendo che da v. La trasformazione più generale che non cambia tale ipotesi è

$$(1) \qquad u = \frac{\lambda_2 + \mu_2 \bar{u}}{\lambda_1 + \mu_1 \bar{u}}, \quad v = V, \quad \bar{x} = \rho(\lambda_1 + \mu_1 \bar{u})x,$$

$\lambda_1, \mu_1, \lambda_2, \mu_2, V, \rho$ essendo funzioni di $\bar{v}$ tali che

$$\rho V(\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1) \gtrless 0.$$

Nella teoria delle superficie generali abbiamo chiamata intrinseca un'espressione il cui valore non cambia mutando le u, v ma *non alterando il fattore di* x. Corrispondentemente dovremmo qui chiamare intrinseca ogni espressione che non varia ponendo

$$u = \lambda_2 + \mu_2 \bar{u}, \quad v = V, \quad \bar{x} = x.$$

Ma qui troviamo più opportuno, chiamare *intrinseca* soltanto ogni espressione che non varia ponendo

$$(2) \quad u = \frac{\lambda_2 + \mu_2 \bar{u}}{\lambda_1 + \mu_1 \bar{u}}, \; v = V, \; \bar{x} = (\lambda_1 + \mu_1 \bar{u})x, \; (\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1)^2 = 1.$$

Per un'espressione intrinseca *nel senso ora precisato* l'esame del comportamento per sostituzione moltiplicativa si riduce a cercare come essa si trasformi ponendo

$$(3) \qquad u = \bar{u}, \quad v = \bar{v}, \quad \bar{x} = \rho x.$$

Le trasformazioni (2) sono di due specie; quelle di *prima specie* per cui $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = 1$ e quelle di *seconda* per cui $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = -1$. Una espressione che non varia per quelle di prima specie e cambia invece di segno se $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = -1$, si dirà *impropriamente intrinseca.* Geometricamente, essendo

$$\frac{\partial u}{\partial \bar{u}} = \frac{\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1}{(\lambda_1 + \mu_1 \bar{u})^2},$$

le trasformazioni (2) di seconda specie cambiano il *verso positivo* *sulle generatrici,* se si chiama verso positivo quello di u crescente. Il lettore verifichi, eseguendo la trasformazione (2) nella (7) del § 32 che *la quantità* $\frac{\mathrm{j}}{\mathrm{a}_{12}{}^2}$ *è intrinseca.* Ne daremo al § seguente una dimostrazione più facile.

Anche l'*equazione* $A + 2Bu + Cu^2 = 0$ è intrinseca, anzi intrinseca ed invariante. Infatti, noi sappiamo dalla teoria generale che l'espressione $(8)_{\text{ter}}$ del § 31 (elemento lineare) non cambia affatto per la (1). *I due punti sopra ogni generatrice per cui* $\mathrm{A} + 2\mathrm{Bu} + \mathrm{Cu}^2 = 0$ *sono i punti flecnodali della generatrice; al variare di* v *essi descrivono le due curve flecnodali* di R. Ciò sappiamo già dal Cap. II § 16 B; un'altra dimostrazione sarà data al § 37.

Per vedere come si trasforma l'espressione $A + 2Bu + Cu^2$ per la sostituzione generale (1), si può (F.) far uso dell'invarianza dell'elemento lineare proiettivo.

Da (1) si ha

$$du = \frac{\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1}{(\lambda_1 + \mu_1\bar{u})^2} d\bar{u} + (\ldots)d\bar{v} \quad , \quad dv = V'd\bar{v} \,,$$

dove non importa precisare il valore di $(\ldots)$. Se ne deduce tosto:

$$\frac{1}{2}\frac{(A + 2Bu + Cu^2)dv^2}{du + (a + 2bu + cu^2)dv} =$$

$$\frac{V'^2}{2(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)}\frac{[A(\lambda_1+\mu_1\bar{u})^2 + 2B(\lambda_1+\mu_1\bar{u})(\lambda_2+\mu_2\bar{u}) + C(\lambda_2+\mu_2 u)^2]d\bar{v}^2}{d\bar{u} + (\ldots)d\bar{v}},$$

sicchè

$$(4) \qquad \bar{A} + 2\bar{B}\bar{u} + \bar{C}\bar{u}^2 =$$

$$= \frac{V'^2}{\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1}\left[A(\lambda_1+\mu_1\bar{u})^2 + 2B(\lambda_1+\mu_1\bar{u})(\lambda_2+\mu_2\bar{u}) + C(\lambda_2+\mu_2\bar{u})^2\right].$$

D'altra parte, dal Cap. II sappiamo che è in virtù di (1)

$$\bar{F}_2 = \rho^2(\lambda_1 + \mu_1 u)^2 F_2 \,,$$

ed, essendo

$$F_2 = 2a_{12}dudv + a_{22}dv^2 =$$

$$= 2a_{12}\,\frac{\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1}{(\lambda_1+\mu_1\overline{u})^2}\,V'd\overline{u}\,d\overline{v}+(\ldots)d\overline{v}^2,$$

sarà:

$$\overline{a}_{12} = V'\rho^2(\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1)a_{12}, \tag{5}$$

sicchè:

$$\frac{1}{\overline{a}_{12}^{\,2}}(\overline{A}+2\overline{B}\,\overline{u}+\overline{C}\,\overline{u}^2) = \tag{4$_{\text{bis}}$}$$

$$=\frac{1}{\rho^4(\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1)}\,\frac{1}{a_{12}^{\,2}}\Big[A(\lambda_1+\mu_1\overline{u})^2+2B(\lambda_1+\mu_1\overline{u})(\lambda_2+\mu_2\overline{u})+$$
$$+C(\lambda_2+\mu_2\overline{u})^2\Big]$$

ossia:

$$\frac{1}{\overline{a}_{12}^{\,2}}(\overline{A}+2\overline{B}\,\overline{u}+\overline{C}\,\overline{u}^2) = \tag{4$_{\text{ter}}$}$$

$$=\frac{(\lambda_1+\mu_1\overline{u})^2}{\rho^4(\lambda_1\mu_2-\lambda_2\mu_1)}\cdot\frac{1}{a_{12}^{\,2}}(A+2Bu+Cu^2).$$

L'aspetto della formola a cui si è arrivati rende spontanea l'idea d'introdurre coordinate omogenee sulla generatrice ponendo $u = t_2 : t_1$. Poichè

$$x = y+uz = y+\frac{\lambda_2+\mu_2\overline{u}}{\lambda_1+\mu_1\overline{u}}\,z = \frac{1}{\rho(\lambda_1+\mu_1\overline{u})}\,\overline{x} =$$

$$=\frac{1}{\rho(\lambda_1+\mu_1\overline{u})}(\overline{y}+\overline{u}\,\overline{z}),$$

è in virtù di (1)

$$\overline{y}=\rho(\lambda_1 y+\lambda_2 z)\quad,\quad \overline{z}=\rho(\mu_1 y+\mu_2 z). \tag{6}$$

Posto al solito $p=(yz)$, è $\overline{p}=\rho^2 p$; le sostituzioni (2) di prima specie non cambiano dunque il fattore delle coordinate delle generatrici.

Per definire come si trasformano t_1, t_2, è naturale porre la condizione

$$\overline{t_1}\,\overline{y} + \overline{t_2}\,\overline{z} = \rho(t_1 y + t_2 z).$$

Se ne deduce subito:

$$(6)_{\text{bis}} \qquad t_1 = \lambda_1 \overline{t_1} + \mu_1 \overline{t_2} \quad , \quad t_2 = \lambda_2 \overline{t_1} + \mu_2 \overline{t_2}.$$

Ponendo nella $(4)_{\text{bis}}$ $u = \dfrac{t_2}{t_1}$, essa si scrive ora semplicemente:

$$(4)_{\text{quater}} \qquad \frac{1}{a_{12}^2}(At_1^2 + 2Bt_1 t_2 + Ct_2^2) =$$

$$= \rho^4(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)\frac{1}{\overline{a_{12}}^2}(\overline{A}\,\overline{t_1}^2 + 2\overline{B}\,\overline{t_1}\,\overline{t_2} + \overline{C}\,\overline{t_2}^2).$$

In particolare, posto $\rho = 1$, $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = \pm 1$, si vede che *la forma quadratica*

$$(7) \qquad \frac{1}{a_{12}^2}(At_1^2 + 2Bt_1 t_2 + Ct_2^2) = f\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = f(t)$$

è impropriamente intrinseca, vale a dire, mutando il parametro v, ed eseguendo la $(6)_{\text{bis}}$ in cui $(\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1)^2 = 1$, essa non cambia oppure cambia di segno secondo che $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = 1$ oppure $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = -1$. Questa proposizione è essenziale nella nostra teoria delle rigate. Al § prossimo se ne vedrà un'altra dimostrazione. Lo studio della forma intrinseca $f(t)$ e di $j : a_{12}^2$ sarà eseguito al § 35.

§ 34 — Linee asintotiche, la forma bilineare intrinseca.

A) Linee asintotiche.

Le generatrici $v =$ costante di una rigata formano un sistema di curve asintotiche. Per brevità, indicheremo in questo Capitolo, col termine asintotiche quelle dell' altro sistema (*), date dall' equazione differenziale $2a_{12}du + a_{22}dv = 0$ ossia

$$\frac{du}{dv} + a + 2bu + cu^2 = 0\,. \tag{1}$$

L' equazione (1) ha la forma di Riccati, ed il suo integrale ha quindi la forma

$$u = \frac{\lambda_2 + \mu_2\alpha}{\lambda_1 + \mu_1\alpha}\,, \quad \alpha \text{ costante arbitraria.}$$

Segue il teorema di Serret, che *le asintotiche segnano sulle generatrici punteggiate proiettive.* Posto

$$u = \frac{\lambda_2 + \mu_2\bar{u}}{\lambda_1 + \mu_1\bar{u}}\,,$$

il punto $y + \bar{u}z$ descrive un' asintotica se $\bar{u}$ è costante. Cerchiamo la corrispondente trasformazione delle coordinate omogenee t_1, t_2. Posto $u = t_2 : t_1$, la (1) diventa

$$t_2' t_1 - t_1' t_2 + at_1^2 + 2bt_1t_2 + ct_2^2 = 0$$

che, introducendo un nuovo parametro σ, posso scrivere nella forma:

$$t_1' = (b + \sigma)t_1 + ct_2\,, \quad t_2' = -at_1 + (-b + \sigma)t_2\,.$$

(*) Con ciò non escludiamo il caso che R sia una quadrica.

Posto

$$t_1 = \lambda_1 \bar{t}_1 + \mu_1 \bar{t}_2, \quad t_2 = \lambda_2 \bar{t}_1 + \mu_2 \bar{t}_2,$$

il precedente sistema deve essere soddisfatto dando alle $\bar{t}$ valori costanti qualunque, sicchè λ_1, λ_2 e μ_1, μ_2 ne sono due soluzioni particolari. Supposto $\rho = 1$, deve essere secondo le nostre convenzioni $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = \pm 1 =$ costante. Se ne deduce subito $\sigma = 0$, cosicchè:

$$(2) \qquad t_1' = bt_1 + ct_2, \quad t_2' = -at_1 - bt_2.$$

Se R *è riferita alle asintotiche, è* $a = b = c = 0$. Se R non è riferita alle asintotiche, vi si può arrivare cambiando il parametro col porre

$$u = \frac{\lambda_2 + \mu_2 \bar{u}}{\lambda_1 + \mu_1 \bar{u}}$$

e più precisamente

$$(3) \qquad t_1 = \lambda_1 \bar{t}_1 + \mu_1 \bar{t}_2, \quad t_2 = \lambda_2 \bar{t}_1 + \mu_2 \bar{t}_2$$

senza cambiare v e il fattore delle x; dove λ_1, λ_2 e μ_1, μ_2 sono due soluzioni del sistema lineare (2) scelte in modo che sia

$$(3)_{\text{bis}} \qquad \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = 1.$$

Secondo il § precedente, sarà poi

$$(3)_{\text{ter}} \qquad \bar{y} = \lambda_1 y + \lambda_2 z, \quad \bar{z} = \mu_1 y + \mu_2 z.$$

Si considerino qui $v, \bar{t}_1, \bar{t}_2$ come variabili indipendenti; le derivate parziali di t_1 e t_2 rapporto a v sono date da (2). Essendo

$$t_1 y + t_2 z = \bar{t}_1 \bar{y} + \bar{t}_2 \bar{z},$$

si ha quindi derivando rapporto alla v sotto le ipotesi fatte

$$(4) \qquad t_1 \dot{y} + t_2 \dot{z} = \bar{t}_1 \bar{y}' + \bar{t}_2 \bar{z}',$$

dove abbiamo posto

$$(5) \qquad \dot{y} = y' + by - az, \quad \dot{z} = z' + cy - bz$$

Introducendo le $\dot{y}$, $\dot{z}$, le equazioni (1^1) del § 31 assumono la forma più perspicua

$$(6) \qquad \begin{aligned} y' &= -by + az + \dot{y}, \quad z' = -cy + bz + \dot{z}, \\ \dot{y}' &= -(B + j)y + Az + (\theta' - b)\dot{y} + a\dot{z}, \\ \dot{z}' &= -Cy + (B - j)z - c\dot{y} + (\theta' + b)\dot{z} . \end{aligned}$$

Correlativamente, posto

$$(5)_{\text{bis}} \qquad \dot{\eta} = \eta' + b\eta - a\zeta, \quad \dot{\zeta} = \zeta' + c\eta - b\zeta ,$$

si ha :

$$(6)_{\text{bis}} \qquad \begin{aligned} \eta' &= -b\eta + a\zeta + \dot{\eta}, \quad \zeta' = -c\eta + b\zeta + \dot{\zeta}, \\ \dot{\eta}' &= (B - j)\eta - A\zeta + (\theta' - b)\dot{\eta} + a\dot{\zeta} , \\ \dot{\zeta}' &= -C\eta - (B + j)\zeta - c\dot{\eta} + (\theta' + b)\dot{\zeta} . \end{aligned}$$

Alle (6) e $(6)_{\text{bis}}$ si associano le formole seguenti che seguono subito dal § 31

$$(6)_{\text{ter}} \qquad \begin{aligned} &Sy\eta = 0, \quad Sy\zeta = 0, \quad Sz\eta = 0, \quad Sz\zeta = 0, \\ &S\dot{y}\eta = 0, \quad S\dot{y}\zeta = -a_{12}, \quad S\dot{z}\eta = a_{12}, \quad S\dot{z}\zeta = 0, \\ &Sy\dot{\eta} = 0, \quad Sy\dot{\zeta} = a_{12}, \quad Sz\dot{\eta} = -a_{12}, \quad Sz\dot{\zeta} = 0, \\ &S\dot{y}\dot{\eta} = 0, \quad S\dot{y}\dot{\zeta} = 0, \quad S\dot{z}\dot{\eta} = 0, \quad S\dot{z}\dot{\zeta} = 0 . \end{aligned}$$

Notiamo pure qui le formole

$$(6)_{\text{quater}} \qquad (yz\dot{y}\dot{z}) = \omega a_{12}^2 \quad (\eta\zeta\dot{\eta}\dot{\zeta}) = \omega a_{12}^2$$

che si hanno subito dalle (4) § 31 e (5) § 32 e le formole

$$(6)_{\text{quinquies}} \qquad \begin{aligned} &(\eta\zeta) = \omega(yz), \quad (\eta\dot{\eta}) = -\omega(y\dot{y}), \quad (\zeta\dot{\zeta}) = -\omega(z\dot{z}) \\ &(\eta\dot{\zeta}) = -\omega(z\dot{y}), \quad (\zeta\dot{\eta}) = -\omega(y\dot{z}), \quad (\dot{\eta}\dot{\zeta}) = \omega(\dot{y}\dot{z}) . \end{aligned}$$

Queste ultime si possono dedurre facilmente dalle $(6)_{\text{ter}}$ e $(6)_{\text{quater}}$. P. es., essendo

$$S\eta y = S\eta\dot{y} = S\dot{\eta}y = S\dot{\eta}\dot{y} = 0,$$

è

$$(\eta\dot{\eta}) = \lambda(y\dot{y}) .$$

Ora

$$(\eta\dot{\eta}\zeta\dot{\zeta}) = -(\eta\zeta\dot{\eta}\dot{\zeta}) = -\omega x_{12}^2,$$

$$(\eta\dot{\eta}\zeta\dot{\zeta}) = \lambda S(y\dot{y})(\zeta\dot{\zeta}) = \lambda \begin{vmatrix} Sy\zeta & Sy\dot{\zeta} \\ S\dot{y}\zeta & S\dot{y}\dot{\zeta} \end{vmatrix} = \lambda \begin{vmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{vmatrix} = \lambda a_{12}^2,$$

sicchè $\lambda = -\omega$, ecc.

Continuando a considerare v, $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$ come variabili indipendenti, deriviamo l' identità (4) rapporto alla v. Per le (6) si ottiene

$$t_1\left[-(B+j)y + Az + \theta' \dot{y}\right] + t_2\left[-Cy + (B-j)z + \theta' \dot{z}\right] =$$

$$= \bar{t}_1 \bar{y}'' + \bar{t}_2 \bar{z}'' = \bar{t}_1\left[-(\bar{B}+\bar{j})\bar{y} + \bar{A}\bar{z} + \theta'\bar{y}'\right] +$$

$$+ \bar{t}_2\left[-\bar{C}\bar{y} + (\bar{B}-\bar{j})\bar{z} + \theta'\bar{z}'\right]$$

e quindi per la (4) stessa

$$t_1\left[-(B+j)y + Az\right] + t_2\left[-Cy + (B-j)z\right] =$$

$$= \bar{t}_1\left[-(\bar{B}+\bar{j})\bar{y} + \bar{A}\bar{z}\right] + \bar{t}_2\left[-\bar{C}\bar{y} + (\bar{B}-\bar{j})\bar{z}\right].$$

Correlativamente

$$t_1\left[(B-j)\eta - A\zeta\right] + t_2\left[C\eta - (B-j)\zeta\right] =$$

$$= \bar{t}_1\left[(\bar{B}-\bar{j})\bar{\eta} - \bar{A}\bar{\zeta}\right] + \bar{t}_2\left[\bar{C}\bar{\eta} - (\bar{B}+\bar{j})\bar{\zeta}\right].$$

Queste equazioni valgono anche senza l'ipotesi che i coefficienti della sostituzione (3) siano soluzioni di (2), purchè sia $\lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = 1$. Infatti, S essendo una tale sostituzione, è chiaro che si possono trovare due sostituzioni S_1, S_2 della stessa forma e con cofficienti soddisfacenti alla (2) e tali che S sia il prodotto di S_1 e dell'inversa di S_2. Partendo da (4), lo stesso si può dire per la:

$$t_1\dot{y} + t_2\dot{z} = \bar{t}_1\dot{\bar{y}} + \bar{t}_2\dot{\bar{z}}$$

B) La forma bilineare fondamentale.

Indicando con τ_1, τ_2 e $\bar{\tau}_1$, $\bar{\tau}_2$ risp. altri valori di t_1, t_2 e $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$, la forma bilineare

$$S(t_1\dot{y} + t_2\dot{z})\left\{\tau_1\left[(B-j)\eta - A\zeta\right] + \tau_2\left[C\eta - (B+j)\zeta\right]\right\}$$

non cambia per la sostituzione

$$\begin{matrix} t_1 = \lambda_1\bar{t}_1 + \mu_1\bar{t}_2, & \tau_1 = \lambda_1\bar{\tau}_1 + \mu_1\bar{\tau}_2 \\ t_2 = \lambda_2\bar{t}_1 + \mu_2\bar{t}_2, & \tau_2 = \lambda_2\bar{\tau}_1 + \mu_2\bar{\tau}_2 \end{matrix} \qquad \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = 1.$$

Per le $(6)_{\text{ter}}$ la forma bilineare scritta sopra è

$$a_{12}\left[At_1\tau_1 + (B+j)t_1\tau_2 + (B-j)t_2\tau_1 + Ct_2\tau_2\right].$$

Più precisamente, si trova che *la forma bilineare*

$$(7)\quad f\begin{pmatrix} t_1, & \tau_1 \\ t_2, & \tau_2 \end{pmatrix} = f(t, \tau) = \frac{1}{a_{12}^2}\left[At_1\tau_1 + B(t_1\tau_2 + t_2\tau_1) + Ct_2\tau_2 + \right.$$

$$\left. + j(t_1\tau_2 - t_2\tau_1)\right]$$

è impropriamente intrinseca. Per ciò che abbiamo provato, basta dimostrare che: 1° essa non cambia introducendo un nuovo parametro $\bar{v}$ al posto di v, 2° essa cambia di segno per la sostituzione $t_1 = -\bar{t}_1$, $t_2 = \bar{t}_2$ che equivale alla $y = -\bar{y}$, $z = \bar{z}$, $\eta = -\bar{\eta}$, $\zeta = \bar{\zeta}$, $a_{12} = -\bar{a}_{12}$; e ciò si vede subito dalle $(6)_{\text{bis}}$ e $(8)_{\text{bis}}$ del § 31 e (7) del § 32.

Dire che $f(t, \tau)$ è impropriamente intrinseca, equivale evidentemente a dire che $\dfrac{j}{a_{12}{}^2}$ è intrinseca e che la forma quadratica $f(t)$ è impropriamente intrinseca, il che abbiamo visto, per tutt'altra via, al § precedente.

È spontanea la domanda: *quale è il significato geometrico della proiettività definita sopra ogni generatrice dalla relazione bilineare* $f(t, \tau) = 0$?

La relazione $f(t, \tau) = 0$ è intrinseca, ma non invariante; e quindi non si può caratterizzare con elementi dipendenti soltanto dalla rigata R, ma occorre anche tener conto del fattore scelto per le coordinate $p = (yz)$ della generatrice. Per interpretare geometricamente il fattore delle p, si può considerare il complesso lineare di coordinate $p' = \dfrac{dp}{dv}$. Questo complesso (variabile al variare di v) contiene evidentemente la congruenza lineare speciale delle tangenti di R nei punti della generatrice corrispondente. Viceversa se facciamo passare, per ogni valore di v, un complesso lineare (non speciale) per la congruenza lineare delle tangenti di R nei punti della generatrice corrispondente, si può scegliere il fattore di p in modo che il complessso scelto abbia per coordinate le p', il che del resto non determina p che a meno di un fattore numerico. Il complesso p' contiene evidentemente tutte le generatrici del secondo sistema di H (tangenti asintotiche di R) convenendo chiamare primo sistema di generatrici di H quello cui appartiene la generatrice corrispondente p di R. Invece due sole generatrici del primo sistema di H appartengono al complesso p', cioè p ed un altra generatrice q. Dico che

$$q = (\dot{y}\dot{z}) \tag{8}$$

La retta q essendo intrinseca [cfr. (4)], si può supporre R riferita alle asintotiche. Allora $q = (y'z')$ e per le (10) del § 32:

$$2q = p'' - \theta' p' + 2jp \tag{9}$$

sicchè q sta su H. D' altra parte è

$$Sqp' = S(y'z')\left[(yz') - (zy')\right] = 0,$$

c. d. d. Osserviamo che l' equazione (9) vale evidentemente anche se R non è riferita alle asintotiche.

Considerando la retta q come immagine del fattore delle p, si arriva facimente al significato geometrico della proiettività $f(t, \tau) = 0$. *Si consideri la rigata* S *generata da* q; *fissato* v, *si costruisca il piano tangente di* R *nel punto* $t_1 y + t_2 z$; *nel punto d' intersezione di questo piano con la retta* q, *si costruisca il piano tangente di* S; *l' intersezione di quest' ultimo piano con la retta* p *è il punto* $\tau_1 y + \tau_2 z$ *corrispondente a* $t_1 y + t_2 z$ *nella proiettività* $f(t, \tau) = 0$.

Infatti l' intersezione del primo piano dell' enunciato con q essendo evidentemente $t_1 \dot{y} + t_2 \dot{z}$, le (6) mostrano che l' intersezione del secondo piano dell' enunciato con p è

$$t_1 \left[-(B+j)y + Az\right] + t_2\left[-Cy + (B-j)z\right].$$

Ora

$$\begin{vmatrix} \tau_1, & -(B+j)t_1 - Ct_2 \\ \tau_2, & At_1 + (B-j)t_2 \end{vmatrix} = f(t, \tau), \text{ c. d. d.}$$

La quantità $\dfrac{j}{a_{12}{}^2}$ essendo intrinseca, per vedere come si trasforma per la sostituzione generale (1) del § 3, basta esaminare l' effetto della (3) del § 33. La (7) del § 32 mostra subito (si può per semplicità supporre $a = c = b = 0$) che è

$$(10) \qquad \bar{j} = j + \rho\left(\frac{1}{\rho}\right)'' + \theta' \frac{\rho'}{\rho}, \text{ se } \bar{u} = u, \ \bar{v} = v, \ x = \rho x.$$

C) Congruenza flecnodale.

La congruenza generata dalle generatrici del primo sistema delle quadriche osculatrici H si chiàma la *congruenza flecnodale* di R; una rigata qualunque della congruenza flecnodale si può scegliere come la rigata delle rette q disponendo del fattore arbitrario delle p. In particolare possiamo scegliere il fattore ρ in modo che $\bar{q}$ descriva una sviluppabile della congruenza flecnodale, per il chè occorre e basta che la proiettività $\bar{f}(\bar{t}, \bar{\tau}) = 0$ sia degenere, ossia che sia soddisfatta la condizione

$$\bar{A}\bar{C} - (\bar{B} + \bar{j})(\bar{B} - \bar{j}) = \bar{A}\bar{C} - \bar{B}^2 + \bar{j}^2 = 0\,;$$

dalla (10) e dalla (4) del § precedente si ha

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)'' - \theta'\left(\frac{1}{\rho}\right)' + j \pm \sqrt{B^2 - AC} = 0\,. \tag{11}$$

Le tangenti asintotiche nei punti flecnodali si chiamano *tangenti flecnodali* di R e le rigate che esse generano si dicono *trasformate flecnodali* di R. I punti doppi delle proiettività $\bar{f}(\bar{t}, \bar{\tau}) = 0$ sono i punti flecnodali; applicando quest'osservazione alle proiettività $\bar{f} = 0$ degeneri, si arriva alla proposizione di Wilczynski che *le due trasformate flecnodali di* R *sono le due falde focali della congruenza flecnodale di* R. Da ciò appunto il termine di congruenza fllecnodale. La congruenza flecnodale è quindi un caso particolare delle congruenze con ambedue le falde focali rigate (che saranno studiate al Cap. seguente).

Terminiamo questo § con un'osservazione relativa alle *correlazioni*. Per passare da R ad una superficie correlativa, basta sostituire η e ζ alle y e z e quindi, per le $(4)_{\text{bis}}$ e (5) del § 32 y e z alle η e ζ. Da ciò si vede immediatamente che *la forma bilineare* $\mathrm{f}(\mathrm{t}, \tau)$ *si cambia in* $-\mathrm{f}(\tau, \mathrm{t})$ *passando alla rigata correlativa*; in altre parole, la forma quadratica $f(t)$ cambia di segno, e la quantità $\dfrac{j}{a_{12}^{2}}$ non cambia.

§ 35. — Normalizzazione delle coordinate delle generatrici per superficie rigate a due curve flecnodali distinte.

A) Coordinate normali.

Per arrivare dalla forma quadratica intrinseca $f(t)$ e dalla quantità intrinseca $\frac{j}{a_{12}^2}$ ad espressioni che siano anche invarianti, occorre esaminare l'effetto della sostituzione moltiplicativa $\overline{x} = \rho x$. Abbiamo già osservato che è (cfr. $(4)_{\text{quater}}$ del § 33 e (10) del § 34)

$$(1) \qquad \overline{f}(t) = \frac{1}{\rho^4} f(t), \quad \frac{\overline{j}}{\overline{a}_{12}^2} = \frac{1}{a_{12}^2}\left[j + \rho\left(\frac{1}{\rho}\right)'' + \theta' \frac{\rho'}{\rho}\right] \text{ (*)}$$

Le variabili t_1, t_2 della forma quadratica $f(t)$ non sono completamente determinate; esse si possono sostituire, come sappiamo, da $\overline{t}_1, \overline{t}_2$, dove

$$t_1 = \lambda_1 \overline{t}_1 + \mu_1 \overline{t}_2, \quad t_2 = \lambda_2 \overline{t}_1 + \mu_2 \overline{t}_2, \quad \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = \pm 1;$$

se $\lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = -1$, occorre inoltre cambiare il segno delle *A, B, C. Il discriminante* $B^2 - AC$ di $f(t)$ *è quindi intrinseco*; e *l'effetto della sostituzione moltiplicativa* $\overline{x} = \rho x$ *è*

$$(1)_{\text{bis}} \qquad B^2 - AC = \rho^8 (\overline{B}^2 - \overline{A}\,\overline{C}).$$

Il segno

$$(1)_{\text{ter}} \qquad \varepsilon = sgn(B^2 - AC)$$

di $B^2 - AC$ *è quindi intrinseco ed invariante;* ciò è a priori chiaro, essendo $\varepsilon = 1$ se le due curve flecnodali sono reali e distinte, $\varepsilon = -1$ se le due curve flecnodali sono immaginarie coniugate,

---

(*) È facile verificare che il valore di $\frac{\overline{j}}{\overline{a}_{12}^2}$ è indipendente dalla scelta particolare di v.

ed $\varepsilon = 0$ se le due curve flecnodali coincidono. In questo § supporremo $\varepsilon^2 = 1$; *è spontanea l' idea di normalizzare il fattore arbitrario colla supposizione intrinseca ed invariante*

$$B^2 - AC = \varepsilon. \tag{2}$$

Le coordinate p corrispondenti si diranno *coordinate normali;* la $(1)_{\text{bis}}$ mostra che le coordinate normali contengono un radicale quarto; precisamente se p non sono normali, le coordinate normali sono

$$\pm \sqrt[4]{|B^2 - AC|}\, p.$$

Il segno delle coordinate normali non è determinato; la scelta di esso equivale, come sappiamo, alla scelta del verso positivo sulle generatrici. Possiamo scegliere anche la variabile indipendente v in modo sostanzialmente determinato, supponendo (in coordinate normali) $a_{12} = \pm 1$, ossia

$$\frac{1}{2} S dp \cdot dp = (yz\, dy\, dz) = \omega dv^2, \quad \omega = \pm 1. \tag{3}$$

(Il segno ω del resto non è invariante che rispetto a collineazioni a modulo positivo).

La variabile v determinata da (3) a meno del segno e di una costante additiva si dirà l' *arco proiettivo* della rigata. In coordinate non normali è

$$\omega dv^2 = \sqrt{|B^2 - AC|}\, (yz\, dy\, dz).$$

B) **Invarianti fondamentali d' una rigata a linee flecnodali distinte.**

Nei calcoli seguenti faremo uso di coordinate normali, assumeremo l' arco proiettivo come variabile indipendente ed inoltre supporremo la rigata R riferita alle asintotiche. Le variabili t_1, t_2 non sono ancora completamente determinate; fissando anche il verso positivo sulle generatrici, è ancora lecito di porre

$$t_1 = \lambda_1 \overline{t_1} + \mu_1 \overline{t_2}, \quad \overline{t_2} = \lambda_2 \overline{t_1} + \mu_2 \overline{t_2}, \quad \lambda_1 \mu_2 - \lambda_2 \mu_1 = 1$$

(4) $$\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \textit{ costanti};$$

se invece invertiamo il verso positivo sulle generatrici, dobbiamo porre

$$t_1 = \lambda_1 \bar{t}_1 + \mu_1 \bar{t}_2, \quad t_2 = \lambda_2 \bar{t}_1 + \mu_2 \bar{t}_2, \quad \lambda_1\mu_2 - \lambda_2\mu_1 = -1$$

(4) bis $$\lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2 \textit{ costanti};$$

e di più, *cambiare il segno di* A, B, C. La quantità j corrispondente alle nostre ipotesi è intrinseca ed invariante; la forma quadratica

(5) $$f(t) = At_1^2 + 2Bt_1t_2 + Ct_2^2$$

a discriminante $B^2 - AC = \varepsilon$ è impropriamente intrinseca (cambiando di segno, se si inverte il verso positivo sulle generatrici) ed invariante; *e tali sono pure le forme*

$$f'(t) = A't_1^2 + 2B't_1t_2 + C't_2^2,$$

(5) bis $$f''(t) = A''t_1^2 + 2B''t_1t_2 + C''t_2^2$$

dove gli apici indicano derivate rispetto all'arco proiettivo v*; però con l'avvertenza che* f′(t) *cambia di segno anche se si inverte il verso positivo dell'arco proiettivo.* Essendo $a = b = c = 0$, R *è ben determinata, a meno di collineazioni, date* f(t) *e* j *in funzione di* v; (se si vuole determinare R a meno di collineazioni a modulo positivo, bisogna conoscere anche il segno ω). Osserviamo ancora che può essere $B^2 - AC = 0$ per qualche generatrice particolare; tali generatrici sono da escludersi come singolari, se si fa uso di coordinate normali e dell'arco proiettivo.

Derivando la (2) si ottiene:

$$AC' + CA' - 2BB' = 0;$$

le forme quadratiche $f(t)$ e $f'(t)$ sono quindi *coniugate; i due punti* (5)ter *che sono definiti da* f′(t) = 0 *sopra ogni generatrice sono coniugati armonici rispetto alla coppia dei punti flecnodali e si diranno* **punti armonici** *della generatrice;* essi descrivono le due **curve armoniche** di R. Se ne vedrà più avanti un significato geometrico;

un significato più semplice sarà dato al § 37. Il risultante delle forme $f(t)$ e $f'(t)$

$$4\,(B^2-AC)\,(B'^2-A'C')-(AC'+CA'-2BB')^2$$

si riduce, in virtù di (2) e $(5)_{\text{ter}}$, a $4\varepsilon h$, dove

$$h=B'^2-A'C' \tag{6}$$

è intrinseco ed invariante; si vedrà fra poco che *è* $h=0$ *allora ed allora soltanto che* R *possiede una retta direttrice.* La quantità

$$k=\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix} \tag{7}$$

è impropriamente intrinseca ed invariante, ma cambia di segno anche invertendo il verso positivo di v. Si vedrà *al* § 37 *che è* $k=0$ *allora e allora soltanto che* R *appartiene ad un complesso lineare; in particolare se* $h=0$, *è anche* $k=0$. Ciò si può verificare con facile calcolo. Infatti

$$2k^2=\begin{vmatrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \\ A'' & B'' & C'' \end{vmatrix}\begin{vmatrix} C & -2B & A \\ C' & -2B' & A' \\ C'' & -2B'' & A'' \end{vmatrix}=$$

$$=\begin{vmatrix} -2(B^2-AC) & AC'+CA'-2BB' & AC''+CA''-2BB'' \\ AC'+CA'-2BB' & -2(B'^2-A'C') & A'C''+C'A''-2B'B'' \\ AC''+CA''-2BB'' & A'C''+C'A''-2B'B'' & -2(B''^2-A''C'') \end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix} -2\varepsilon & 0 & 2h \\ 0 & -2h & -h' \\ 2h & -h' & -2\,(B''-A''C'') \end{vmatrix}=0,\ \text{se}\ h=0.$$

Dalla $(5)_{\text{ter}}$ segue per un noto teorema d'algebra (o se si vuole di geometria proiettiva) che, se $\varepsilon=-1$, $h\geqq 0$. Dimostriamo il

TEOREMA FONDAMENTALE :

Se $h \neq 0$, *cioè se* R *ha curve flecnodali distinte, e non possiede nessuna retta direttrice, la superficie* R *è determinata a meno di colli-*

neazioni, se si conoscono $\varepsilon = \pm 1$, $h \neq 0$, k, j *in funzione dell'arco proiettivo* v; *ma affinchè* R *esista, deve essere* $h > 0$ *se* $\varepsilon = -1$. Basta vedere che la forma quadratica $f(t)$ ne è ben determinata a meno di sostituzioni della forma (4), $(4)_{bis}$. Per fissare le idee, supponiamo $\varepsilon = 1$, $h > 0$; il lettore vedrà da sè che il teorema vale anche per $\varepsilon = -1$, $h > 0$, e per $\varepsilon = 1$, $h < 0$. Il dare h e k equivale a supporre soddisfatte *per un valore iniziale* $v = v_0$ le

$$B^2 - AC = 1, \quad B'^2 - A'C' = h, \quad AC' + CA' - 2BB' = 0, \tag{8}$$

e *dappertutto* le equazioni ottenute derivando

$$\left\{ \begin{aligned} & AC'' + CA'' - 2\,BB'' = 2h, \\ & A'C'' + C'A'' - 2\,B'B'' = -h', \end{aligned} \right. \tag{9}$$

oltre alla

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} C'' + \begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix} A'' - \begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix} B'' = k\,.$$

Le (9) si possono risolvere rispetto a A'', B'', C''; infatti il loro determinante vale

$$\begin{vmatrix} A & B \\ A' & B' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C & -2B \\ C' & -2B' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} B & C \\ B' & C' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} -2B & A \\ -2B' & A' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A & C \\ A' & C' \end{vmatrix} \begin{vmatrix} C & A \\ C' & A' \end{vmatrix} =$$

$$= \left\| \begin{matrix} A & B & C \\ A' & B' & C' \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} C & -2B & A \\ C' & -2B' & A' \end{matrix} \right\| =$$

$$= \begin{vmatrix} -2\,(B^2 - AC) & AC' + CA' - 2BB' \\ AC' + CA' - 2BB' & -2(B'^2 - A'C') \end{vmatrix} = 4h.$$

Le (9) determinano dunque completamente le A, B, C appena siano date $h > 0$, k con l'unica condizione che i *valori iniziali* soddisfino alle (8). Noi possiamo con una delle trasformazioni (4) portare i valori iniziali delle radici di $f = 0$, $f' = 0$ (reali per ipotesi) in un gruppo armonico prefissato a piacere, p. es. le radici di $f = 0$ nei punti $u = 0, \infty$, quelle di $f' = 0$ in $u = 1, -1$. Sarà inizialmente

$$A = C = 0, \quad B' = 0, \quad A' + C' = 0$$

sicchè le (8) danno

$$B^2 = 1, \quad A'^2 = h,$$

e abbiamo quattro gruppi possibili di valori iniziali e cioè

$$\left.\begin{array}{lll} 1^\circ & f(t) = 2t_1t_2, & f'(t) = \sqrt{h}\,(t_1^2 - t_2^2), \\ 2^\circ & f(t) = -2t_1t_2, & f'(t) = \sqrt{h}\,(t_1^2 - t_2^2), \\ 3^\circ & f(t) = 2t_1t_2, & f'(t) = -\sqrt{h}\,(t_1^2 - t_2^2), \\ 4^\circ & f(t) = -2t_1t_2, & f(t) = -\sqrt{h}\,(t_1^2 - t_2^2). \end{array}\right\} \text{per } v = v_0.$$

Ma tutti questi casi sono equivalenti per le nostre trasformazioni (4) e $(4)_{\text{bis}}$; infatti da 1° per es. si passa a 2° ponendo $t_1 = \bar{t}_2$, $t_2 = \bar{t}_1$ e cambiando i segni, a 3° ponendo $t_1 = -\bar{t}_1$, $t_2 = \bar{t}_2$ e cambiando i segni, ed a 4° ponendo $t_1 = \bar{t}_2$, $t_2 = -\bar{t}_1$. Pertanto considerando non distinti due sistemi di valori di A, B, C che si deducono l'uno dall'altro con una delle trasformazioni (4) o $(4)_{\text{bis}}$, le A, B, C sono completamente determinate dalle equazioni differenziali (9) e dalle condizioni iniziali (8), c. d. d. Dimostreremo al § 38 che il calcolo si può fare in modo che non si abbia ad integrare che un' equazione di Riccati.

Supponiamo invece $h = 0$. Dimostreremo:

Se $\mathrm{h} = 0$, *una delle radici* $\mathrm{t}_1 : \mathrm{t}_2$ *di* $\mathrm{f(t)} = 0$ *è costante, e una delle linee flecnodali è una direttrice rettilinea.* Infatti si può porre:

$$f(t) = f\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = 2(\alpha_1 t_2 - \alpha_2 t_1)(\beta_1 t_2 - \beta_2 t_1)$$

sicchè

$$f'(t) = 2(\alpha_1' t_2 - \alpha_2' t_1)(\beta_1 t_2 - \beta_2 t_1) + 2(\alpha_1 t_2 - \alpha_2 t_1)(\beta_1' t_2 - \beta_2' t_1).$$

Abbiamo visto sopra che è, in virtù di $h = 0$, $f'\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 0$ oppure $f'\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} = 0$; sia p. es.

$$f'\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = 2(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1)(\alpha_1\alpha_2' - \alpha_2\alpha_1') = 0.$$

Ma $(\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1)^2 = \varepsilon \gtrless 0$, sicchè $\alpha_1 \alpha_2' - \alpha_2 \alpha_1' = 0$ ossia $\alpha_1 : \alpha_2 =$ $=$ costante.

Per un momento escludiamo il caso che tutte le due radici e quindi per la (2) anche tutti i coefficienti di f siano costanti; allora $\alpha_1 : \alpha_2$ è reale sicchè $\varepsilon = 1$; e con una trasformazione (4) si può ottenere che sia $\alpha_1 = 0$ ossia $C = 0$. La linea $t_1 = 0$ generata dal punto z è quindi flecnodale ed asintotica e dunque *retta*. Ciò si verifica facilmente. Infatti, se $a = b = c = C = \theta' = 0$, la seconda delle (11) del § 31 si riduce a

$$z'' = (B - j) z,$$

sicchè fra le quattro coordinate z vi sono due relazioni lineari a coefficienti costanti. Supposto $C = 0$, la (2) dà

$$B = \sigma = \pm 1, \tag{10}$$

sicchè

$$f(t) = t_1 (A t_1 + 2 \sigma t_2).$$

Le trasformazioni (4) che non cambiano l'ipotesi $C = 0$ sono

$$t_1 = \lambda \bar{t}_1, \quad t_2 = \mu \bar{t}_1 + \frac{1}{\lambda} \bar{t}_2, \quad (\lambda, \mu \text{ costanti}, \lambda \neq 0).$$

Sostituendo in $f(t)$ si ottiene

$$f(t) = \bar{t}_1 (\bar{A} \bar{t}_1 + 2 \sigma \bar{t}_2),$$

dove

$$\bar{A} = A \lambda^2 + 2 \sigma \lambda \mu.$$

Delle trasformazioni $(4)_{\text{bis}}$ non occorre che considerare una sola, p. es. la

$$t_1 = \bar{t}_1, \quad t_2 = - \bar{t}_2,$$

seguita dal cambiamento di segno di f, che dà

$$-f(t) = \bar{t}_1 (- A \bar{t}_1 + 2 \sigma \bar{t}_2).$$

Si vede dunque che tanto il segno σ quanto la quantità

$$D = \frac{A''}{A'} \tag{11}$$

sono intrinseci ed invarianti, e che quindi:

2° Teorema fondamentale:

Una rigata R *con una sola retta direttrice e con un' altra curva flecnodale non retta, è determinata, a meno di collineazioni, date* $\sigma = \pm 1$, D *e* j *in funzione dell' arco proiettivo.*

Resta il caso che tutti i coefficienti di $f(t)$ siano costanti. Il ragionamento che precede mostra che R *possiede due rette direttrici distinte, reali o immaginarie se i coefficienti della* f *sono costanti.*

È evidente il teorema: *Una rigata* R *con due rette direttrici distinte, cioè appartenente ad una congruenza lineare non speciale è determinata a meno di collineazioni conoscendo* $\varepsilon = \pm 1$ *e* j *in funzione dell' arco proiettivo* v.

L' osservazione fatta alla fine del § 34 permette di indicare subito l' effetto del passaggio da R ad una superficie correlativa. Se $h \neq 0$, ε, h e j non cambiano e k cambia di segno. Sarebbe facile dedurre senza calcoli che $k = 0$ è la condizione perchè la rigata appartenga ad un complesso lineare. Se $h = 0$, ed i coefficienti di $f(t)$ non sono tutti costanti, D e j non cambiano, muta invece il segno η. Infine una rigata appartenente ad una congruenza lineare ammette sempre correlazioni in sè.

C) Alcune applicazioni geometriche (*).

Terminiamo il § con *l' interpretazione geometrica delle coordinate normali.* Per quanto abbiamo detto al § 34, basta interpretare la

(*) Le quadriche W_1 e W_2 e le rette q_1 e q_2 che qui definiremo furono introdotte per la prima volta da Čech nella memoria: « Projektivní geometrie pěti soumezných mimoběžek » (Géométrie proiective de cinq droites infiniment voisines) nelle Publications de la Faculté des Sciences de l' Université Masaryk, 1921, n. 4.

posizione della retta q corrispondente [che diremo *generatrice principale di H* (*)]. A tale scopo determiniamo, per un valore fisso di v, il luogo dei poli della generatrice corrispondente rispetto alle coniche osculatrici delle asintotiche. Per l'asintotica generata da $x = y + uz$ il polo della generatrice è, secondo il Cap. III § 26

$$4x_v - \frac{\partial \log \frac{a_{12}^2}{\gamma}}{\partial v} x,$$

Essendo $F_3 = a_{12} \gamma \, dv^3$, sarà [(8) del § 31]

$$a_{12} = 1, \; \gamma = A + 2Bu + Cu^2,$$

$$4x_v - \frac{\partial \log \frac{a_{12}^2}{\gamma}}{\partial v} x = 4(y' + uz') + \frac{A' + 2B'u + C'u^2}{A + 2Bu + Cu^2}(y + uz).$$

Posto al solito $u = t_2 : t_1$, *il polo della generatrice* p *rispetto alla conica osculatrice dell'asintotica* $\mathrm{t_1 y} + t_2 z$ *è*

$$(12) \qquad 4f(t)(t_1 y' + t_2 z') + f'(t)(t_1 y + t_2 z).$$

Per fissare le idee si supponga $h \gtreqless 0$. Le forme $f(t)$ e $f'(t)$ sono allora prive di fattor comune sicchè: *Fissato* v, *il luogo dei poli della generatrice corrispondente di* R *è una cubica sghemba* C. *Le generatrici del primo sistema di* H *sono bisecanti di* C; *in particolare, la generatice* p *di* R *interseca* C *nei punti flecnodali. La generatrice principale* q *di* H *interseca* C *in una coppia di punti armonica rispetto alle tangenti flecnodali. Le generatrici del secondo sistema di* H *che passano pei punti d'intersezione di* q *e* C *incontrano* p *nei punti armonici di* p. La retta p e la cubica C sono la base di un fascio di quadriche, al quale appartengono due coni i cui vertici sono rispettivamente nei due punti flecnodali; è notevole la quadrica del fascio coniugata armonica di H rispetto ai due coni del fascio, che è quindi *il luogo delle rette che congiungono i poli della*

(*) La rigata generata da q è quella che il Wilczynski chiama rigata principale della congruenza flecnodale.

generatrice p *rispetto alle coniche osculatrici delle asintotiche che passano per i diversi punti* x *di* p *ai punti coniugati armonici di* x *rispetto ai punti flecnodali; tale quadrica sarà indicata con la lettera* W_1. Incontreremo la quadrica W_1 ai Cap. IX e X nello studio delle corrispondenze Σ e delle quadriche di Moutard. Posto per un punto generico dello spazio

$$x = \lambda y + \mu z + \lambda_1 y' + \mu_1 z', \tag{13}$$

e riguardando λ, μ, λ_1, μ_1 come coordinate di x in un sistema di riferimento dipendente da v, si trova facilmente che l'equazione di W_1 è

$$4[A\lambda\lambda_1 + B(\lambda\mu_1 + \lambda_1\mu) + C\mu\mu_1] - (A'\lambda_1^2 + 2B'\lambda_1\lambda_2 + C'\lambda_2^2) = 0. \tag{14}$$

Correlativamente, il piano polare di p rispetto al cono osculatore dell'asintotica $t_1 y + t_2 z$ è

$$4f(t)(t_1\eta' + t_2\zeta') + f'(t)(t_1\eta + t_2\zeta). \tag{12$_{\text{bis}}$}$$

Il fascio di piani di asse p e l'insieme dei piani che si ottengono da $(12)_{\text{bis}}$ al variare di t_1, t_2 sono la base di una schiera di quadriche. Indichiamo con W_2 la quadrica della schiera coniugata armonica di H rispetto alle due coniche della schiera. Essendo ξ un piano generico dello spazio, posto

$$\xi = \lambda\eta + \mu\zeta + \lambda_1\eta' + \mu_1\zeta' \tag{13$_{\text{bis}}$}$$

in coordinate λ, μ, λ_1, μ_1 [diverse da quelle definite da (13)] l'equazione di W_2 è la stessa (6).

Se R possiede una retta direttrice, la cubica C si spezza in tale retta ed in una conica che interseca la retta direttrice nel suo punto d'incontro con la generatrice principale di H. Se R possiede due rette direttrici, C si spezza in queste due rette e nella generatrice principale di H. Ciò si vede immediatamente dalla (12). Ometto pure le facili dimostrazioni delle osservazioni seguenti: *Le quadriche* W_1 *e* W_2 *sono polari reciproche tanto rispetto ad* H, *quanto rispetto al complesso lineare osculatore* (§ 37) di R. Se R appartiene ad una congruenza lineare, W_1 e W_2 coincidono. In generale, W_1 e W_2 si toccano lungo p, ed hanno in comune due generatrici dell' altro sistema che escono dai punti armonici. *Le due generatrici di* W_2 *passanti per un punto flecnodale di* p (una delle quali è appunto p) *sono coniugate armoniche rispetto alla tangente flecnodale* (tangente asintotica nel punto flecnodale) *e la tangente alla curva flecnodale.*

Qualche importanza ha pure quella generatrice q_1 del primo sistema (cui appartiene p) di W_1 che interseca C in due punti coniugati armonici rispetto a quelle generatrici dell' altro sistema che escono dai punti flecnodali di p; la definizione di tale retta essendo analoga a quella di q, la diremo *generatrice principale di* W_1. Un facile calcolo dà

$$(14)\qquad \begin{aligned} q_1 = {} & (A'C' - B'^2)(yz) + 4(A'C - BB')(yz') - 4(AC' - BB')(zy') + \\ & + 4(BC' - CB')(yy') + 4(AB' - A'B)(zz') + 16(AC - B^2)(y'z'). \end{aligned}$$

Correlativamente si definisce la *generatrice principale* q_2 *di* W_2, le cui coordinate sono

$$(14)_{\text{bis}}\qquad \begin{aligned} q_2 = {} & (A'C' - B'^2)(yz) + 4(AC' - BB')(yz') - 4(A'C - BB')(zy') - \\ & - 4(BC' - CB')(yy') - 4(AB' - A'B)(zz') + 16(AC - B^2)(y'z'). \end{aligned}$$

È dunque

$$q_1 + q_2 + 2hp + 32\varepsilon q = 0:$$

le due coppie di rette p, q; q_1, q_2 *appartengono ad una schiera rigata e si dividono armonicamente. Se* $h = 0$, q, q_1 *e* q_2 *hanno un punto comune sulla direttrice di* R.

§ 36. — Normalizzazione delle coordinate delle generatrici per superficie rigate a curve flecnodali coincidenti.

A) Determinazione di queste rigate per mezzo di invarianti.

Qui vogliamo studiare il caso, escluso al § precedente, che sia identicamente $B^2 - AC = 0$. Il discriminante di $f(t)$ essendo nullo, si ha

$$(1) \qquad f\begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} = \sigma(\alpha_1 t_2 - \alpha_2 t_1)^2 = \sigma(\alpha t)^2, \quad \sigma = \pm 1,$$

il segno σ dipendendo dal verso scelto come positivo sulle generatrici di R. Per scegliere in modo intrinseco e invariante il fattore arbitrario di p o, ciò che è lo stesso, di $f(t)$, il procedimento del § 35 non si applica più. Escludiamo dapprima *il caso che l'unica curva flecnodale* $\alpha_1 y + \alpha_2 z$ *sia retta; in tal caso,* come vedremo al § prossimo, *la rigata apparterrebbe ad una congruenza lineare speciale;* riferendo R alle asintotiche supponiamo dunque che $\alpha_1 : \alpha_2$ non sia costante, sicchè il determinante

$$\alpha_1 \alpha_2' - \alpha_2 \alpha_1' = (\alpha\alpha')$$

sarà $\gtrless 0$. Del resto, può essere $(\alpha\alpha') = 0$ per delle generatrici particolari; noi le escluderemo come singolari. Poniamo

$$(2) \qquad \delta = \operatorname{sgn}(\alpha\alpha') \quad , \quad \delta = \pm 1;$$

sicchè (cfr. la (1) § 35) δ è intrinseco (non dipendendo neanche del verso positivo sulle generatrici) ed invariante, ma dipende però dal verso positivo del parametro v. Per scegliere in modo determinato il fattore arbitrario di $f(t)$ basta supporre

$$(3) \qquad (\alpha\alpha') = \delta.$$

Le coordinate p corrispondenti a (3) e a $\sigma = 1$, che sono quindi ben determinate *anche nel segno,* si diranno *coordinate normali.* Anche la variabile indipendente v si può scegliere in modo ben determinato (anche nel segno) a meno di una costante additiva supponendo, se p sono coordinate normali:

$$(4) \qquad \frac{1}{2} Sdp\,.\,dp = (yzdydz) = \omega dv^2, \quad \omega = \pm 1, \quad \delta = 1;$$

la si dirà l'*arco proiettivo* di R. Non c'è pericolo d'equivoco colla denominazione del § 35, le coordinate normali e l'arco proiettivo ivi definiti essendo identicamente nulli per $B^2 - AC = 0$.

Supponiamo che le p siano coordinate normali, che R sia riferita alle asintotiche, e che v sia l'arco proiettivo, sicchè

$$f(t) = (\alpha t)^2 \quad , \quad (\alpha\alpha') = 1.$$

Derivando si ha $(\alpha\alpha'') = 0$ sicchè

$$\alpha_1'' = l\alpha_1 \quad , \quad \alpha_2'' = l\alpha_2 . \tag{5}$$

3° Teorema fondamentale:

La quantità l è evidentemente intrinseca ed invariante ed il seguente teorema è ovvio: *Una rigata* R *a curve flecnodali coincidenti, ma non appartenente ad una congruenza lineare, è determinata a meno di collineazioni dati gli invarianti* l *e* j *in funzione dell'arco proiettivo.* Dall'osservazione alla fine del § 34 si deduce che una correlazione non cambia che il verso positivo dell'arco proiettivo.

In secondo luogo supponiamo che sia (riferita R alle asintotiche) $\alpha_1 : \alpha_2 =$ costante. Si può determinare il fattore di $f(t)$ e quindi quello di p *a meno di un fattore costante* ponendo la condizione che α_1 e α_2 stesse siano costanti; fatto ciò, si può scegliere dv secondo la (4). Essendo c una costante arbitraria si può ancora sostituire dv e j con

$$c\,dv \quad , \quad c^{-2} j .$$

Supposto $j \gtrless 0$, sia

$$e = \operatorname{sgn} j \quad , \quad w = \int \sqrt{|j|}\, dv ;$$

w è ben determinata a meno del segno e di una costante additiva.

4° Teorema fondamentale:

Una rigata R *appartenente ad una congruenza lineare speciale per cui* $\mathrm{j} \gtrless 0$ *è determinata a meno di collineazioni dato* $\mathrm{e} = \pm 1$, *e* $\dfrac{\mathrm{d}\log|\mathrm{j}|}{\mathrm{dw}}$ *in funzione di* w. *Se invece* $\mathrm{j} = 0$, non esiste nessun differenziale intrinseco ed invariante e nessuna espressione finita intrinseca ed invariante: la variabile v non si può fissare che a meno di sostituzioni del tipo $av + b$ con a, b costanti arbitrarie. *La rigata* R *se* j = 0, *ammette quindi* ∞^3 *collineazioni in sè* (*) *ed è dunque la rigata cubica di Cayley.* Ciò si conferma del resto subito integrando le equazioni (11) del § 31. Postovi

$$A = 1 \quad , \quad B = C = 0 \quad , \quad \theta' = 0 \quad , \quad j = 0 \quad , \quad a = b = c = 0 \, ,$$

esse diventano

$$y'' = z \quad , \quad z'' = 0 \, ,$$

ed integrando si ha:

$$z = (0\,,0\,,1\,,v) \quad , \quad y = \left(1\,, v\,, \frac{v^2}{2}\,, \frac{v^3}{6}\right) ,$$

$$x = y + uz = \left(1\,, v\,, \frac{v^2}{2} + u\,, \frac{v^3}{6} + uv\right)$$

ossia, indicando con $1\,, x\,, y\,, z$ le quattro coordinate di x,

$$x = v \quad , \quad y = \frac{v^2}{2} + u \quad , \quad z = \frac{v^3}{6} + uv \, ,$$

$$z = xy - \frac{x^3}{3}.$$

B) **Alcune interpretazioni geometriche.**

Analogamente a quanto si è fatto al § 35 si possono interpretare geometricamente le coordinate normali. Si consideri anche qui, per un valore fisso di v, il luogo dei poli di p rispetto alle coniche osculatrici delle asintotiche. Tale luogo è sempre dato dalla (12) § 35, ma qui si può scartare il fattore (αt); sicchè rimane

---

(*) Non soltanto ∞^1 perchè ogni rigata appartenente ad una congruenza lineare (generale o speciale) ammette ∞^1 collineazioni in sè che lasciano invariate le singole generatrici.

(6) $$2(\alpha_1 t_2 - \alpha_2 t_1)(t_1 y' + t_2 z) + (\alpha_1' t_2 - \alpha_2' t_1)(t_1 y + t_2 z).$$

Quindi *il luogo dei poli di una generatrice rispetto alle coniche osculatrici delle asintotiche è una conica.* Con la lettera W_1 indichiamo qui il piano della conica, cioè il piano

(7) $$\alpha_1'\eta + \alpha_2'\zeta - 2(\alpha_1\eta' + \alpha_2\zeta').$$

Correlativamente, i piani polari della generatrice p rispetto ai coni osculatori delle asintotiche sono dati da

(6) bis $$2(\alpha_1 t_2 - \alpha_2 t_1)(t_1\eta' + t_2\zeta') + (\alpha_1' t_2 - \alpha_2' t_1)(t_1\eta + t_2\zeta),$$

e sono i piani tangenti di H passanti per il punto W_2

(7) bis $$\alpha_1' y + \alpha_2' z - 2(\alpha_1 y + \alpha_2 z)$$

che è il polo di W_1 rispetto ad H. Se $(\alpha\alpha') = 0$ la detta conica si spezza nella direttrice e nella retta $q = (y'z')$ corrispondente a quella scelta del fattore di p per cui i coefficienti di $f(t)$ sono costanti. Se invece $(\alpha\alpha') \gtrless 0$ la conica è propria. Supponiamo come sopra $(\alpha\alpha') = 1$ e chiamiamo, come al § 35, *generatrice principale di* H la retta q corrispondente. Il punto della conica (6) situato sulla generatrice principale di H sta nel piano osculatore della curva flecnodale (unica). Infatti, tale punto è dato da $\alpha_1' y + \alpha_2' z$. D'altra parte, le equazioni (11) del § 31 si riducono, per le ipotesi fatte, a

$$y'' = (\alpha_1\alpha_2 - j)y + \alpha_2^2 z \ , \ z'' = -\alpha_1^2 y - (\alpha_1\alpha_2 + j)z \, ,$$

sicchè

$$\alpha_1 y'' + \alpha_2 z'' = -j(\alpha_1 y + \alpha_2 z)$$

e quindi

$$(\alpha_1 y + \alpha_2 z)'' = -j(\alpha_1 y + \alpha_2 z) + 2(\alpha_1' y' + \alpha_2' z') + \alpha_1'' y + \alpha'' z$$

ed osservando (5)

$$2(\alpha_1' y' + \alpha_2' z') = (\alpha_1 y + \alpha_2 z)'' + (j - l)(\alpha_1 y + \alpha_2 z).$$

La generatrice principale di H *incontra* quindi *l'intersezione del piano* W_1 *col piano osculatore alla curva flecnodale;* correlativamente si vede che *essa incontra pure la retta che congiunge il punto* W_2 *al punto cuspidale della sviluppabile circoscritta a* R *lungo la curva flecnodale.*

È notevole che lo studio fatto a questo § ed al precedente si può applicare senz'altro anche a coordinate non asintotiche. Riprendiamo la sostituzione (3) del § 34 che conduce a coordinate asintotiche e, come ivi, consideriamo v, $\bar{t}_1$, $\bar{t}_2$ come variabili indipendenti. Derivando rapporto alla v l'identità

$$\bar{f}(\bar{t}) = f(t),$$

si trova subito

$$\bar{f}'(\bar{t}) = \dot{f}(t), \quad \bar{f}''(\bar{t}) = \ddot{f}(t),$$

dove:

$$(8) \quad \left\{ \begin{aligned} & \dot{f}(t) = \dot{A}t_1^2 + 2\dot{B}t_1t_2 + \dot{C}t_2^2, \quad \ddot{f}(t) = \ddot{A}t_1^2 + 2\ddot{B}t_1t_2 + \ddot{C}t_2^2, \\ & \dot{A} = A' + 2(Ab - Ba), \quad \dot{B} = B' + Ac - Ca, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad \dot{C} = C' + 2(Bc - Cb), \\ & \ddot{A} = \dot{A}' + 2(\dot{A}b - \dot{B}a) = A'' + 4(A'b - B'a) + \\ & \qquad + 2[A(b' + 2b^2 - ac) - B(a' + 2ab) + Ca^2], \\ & \ddot{B} = \dot{B}' + \dot{A}c - \dot{C}a = B'' + 2(A'c - C'a) + \\ & \qquad + A(c' + 2bc) - 4Bac - C(a' - 2ab), \\ & \ddot{C} = \dot{C}' + 2(\dot{B}c - \dot{C}b) = C'' + 4(B'c - C'b) + \\ & \qquad + 2[Ac^2 + B(c' - 2bc) - C(b' - 2b^2 + ac)]. \end{aligned} \right.$$

Basta sostituire le $\dot{f}(t)$ e $\ddot{f}(t)$ alle $f'(t)$ e $f''(t)$ per formare le espressioni generali di h e k. Sarà utile che il lettore faccia tale generalizzazione formale per tutte le formole dei § 35, 36 assumendo anche la variabile indipendente v in modo arbitrario.

§ 37. — Il complesso lineare osculatore.

Nel seguito si suppone R riferita alle asintotiche; l'osservazione finale del § precedente permette senz' altro estendere le formole al caso di coordinate qualunque. Le formole fondamentali (11) del § 31 si riducono alle

$$(1) \quad y'' = \theta' y' - (B + j)y + Az \quad , \quad z'' = \theta' z' + (B - j)z - Cy.$$

Posto al sollto $p = (yz)$, $q = (y'z')$, si hanno quindi le formole seguenti, in cui i termini trascurati a destra sono combinazioni lineari di p, p' e delle precedenti

$$(2) \quad \begin{aligned} p'' &= 2q + \theta' p' - 2jp, \text{ già osservato al § 34, (10)} \\ q' &= C(yy') + B[(y'z) - (yz')] + A(zz') + 2\theta' q - jp', \\ q'' &= C'(yy') + B'[(y'z) - (yz')] + A'(zz') + \dots, \\ q'' &= C''(yy') + B''[(y'z) - (yz')] + A''(zz') + \dots \end{aligned}$$

Se ne traggono subito diverse conseguenze. Cerchiamo in primo luogo le direttrici della *congruenza lineare osculatrice* determinata da quattro generatrici successive: se r è una direttrice di tale congruenza, deve essere

$$Srp = Srp' = Srq = Srq' = 0.$$

Le prime tre condizioni dànno che

$$r = (t_1 y + t_2 z, \; t_1 y' + t_2 z') = t_1^2 (yy') - t_1 t_2 \left[(y'z) - (yz')\right] + t_2^2 (zz')$$

sicchè dalla (4) del § 31 si ha:

$$Srq' = -\omega a_{12}{}^2 (At_1^2 + 2Bt_1 t_2 + Ct_2^2) = -\omega a_{12}{}^2 f(t).$$

Le direttrici della congruenza lineare osculatrice sono quindi le tangenti flecnodali come si sapeva a priori. Si vede anche che, *se* $A = B = C = 0$, R *è una quadrica* come si può stabilire facilmente in altri modi; se $A = B = C = 0$ per un valore di v, H *iperoscula* R *lungo la generatrice corrispondente. Condizione* affinchè q'' sia combinazione lineare di p, p', q, q' o *che* R *appartenga ad una congruenza lineare si trova subito essere*

$$\frac{A'}{A} = \frac{B'}{B} = \frac{C'}{C}. \tag{3}$$

che cioè le radici di $\mathrm{f} = 0$ siano *costanti* (cosa che sapevamo già almeno nel caso $B^2 - AC \gtrless 0$). *Condizione* affinchè q''' sia combinazione lineare delle precedenti o *che* R *appartenga ad un complesso lineare è* $\mathrm{k} = 0$, come abbiamo già enunciato.

Le rette del complesso lineare osculatore Ω sono combinazioni lineari di p, p', q, q', q''. Vi appartengono tutte le generatrici del primo sistema di H che sono combinazioni lineari delle sole p, p', q; per fissare la posizione di Ω basta adunque trovare le due generatrici di H del secondo sistema che vi appartengono. Sia

$$r = (t_1 y + t_2 z,\ t_1 y' + t_2 z') = t_1^2 (yy') - t_1 t_2 \left[(y'z) - (yz')\right] + t_2^2 (zz')$$

una di queste due rette. Affinchè r sia combinazione lineare di p, p', q, q', q'' è necessario che r sia combinazione lineare delle q e q'' sole, sicchè si trova la condizione

$$\begin{vmatrix} t_1^2 & C & C' \\ t_1 t_2 & -B & -B' \\ t_2^2 & A & A' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} At_1 + Bt_2 & Bt_1 + Ct_2 \\ A't_1 + B't_2 & B't_1 + C't_2 \end{vmatrix} = 0 \tag{4}$$

Il primo membro di quest' equazione è lo Iacobiano delle forme $f(t)$ e $f'(t)$; il suo discriminante vale

$$4(AB' - A'B)(BC' - B'C) - (AC' - A'C)^2 =$$

$$= 4(AC - B^2)(A'C' - B'^2) - (AC' + CA' - 2BB')^2.$$

Affinchè esso sia identicamente nullo, deve essere identicamente o

$$B^2 - CA = 0$$

oppure

$$A' C' - B'^2 = \left(\frac{d}{dv} \sqrt{|AC - B^2|}\right)^2.$$

Vi sono due classi di superficie rigate per cui tutti i complessi lineari osculatori Ω *sono speciali: la prima è quella delle rigate a curve flecnodali coincidenti; la seconda è quella delle rigate che posseggono una direttrice retta.* Nel secondo caso, supposte coordinate normali, è $h = 0$, condizione che ci è nota dal § 35. Nel caso generale la (4) definisce sopra ogni generatrice due punti diversi che si dicono, per il loro significato, i *punti del complesso* (della generatrice) *perchè per essi passano le generatrici di* H *del secondo sistema appartenenti al complesso lineare osculatore.* Le curve generate da tali punti al variare di v si dicono le *curve del complesso* di R. *Le tre coppie di punti sopra ogni generatrice: dei punti flecnodali, dei punti armonici, dei punti del complesso sono armoniche a due a due,* sicchè due coppie e due soltanto sono reali. *Ecco la nuova definizione delle curve armoniche promessa al* § 35! Osserviamo ancora, lasciando la dimostrazione al lettore come esercizio: *Se per un valore particolare di* v *è* $B^2 - AC = 0$, *la curva flecnodale tocca in generale la generatrice corrispondente ed* Ω *non è speciale. Può accadere invece che la curva flecnodale abbia un punto doppio; allora* Ω *è speciale.*

Cerchiamo ancora il complesso lineare osculatore dell' asintotica descritta dal punto

$$x = t_1 y + t_2 z$$

dove t_1 e t_2 sono costanti. Posto

$$\xi = t_1 \eta + t_2 \zeta,$$

dal Cap. I (§ 7 *A*) sappiamo che, rispetto a tal complesso, il piano polare del punto

$$\lambda x + \lambda_1 x' + \lambda_2 x''$$

è il piano

$$\lambda \xi + \lambda_1 \xi' + \lambda_2 \xi''.$$

Essendo

$$\lambda x + \lambda_1 x' = \lambda t_1 y + \lambda t_2 z + \lambda_1 t_1 y' + \lambda_1 t_2 z',$$

$$\lambda \xi + \lambda_1 \xi' = \lambda t_1 \eta + \lambda t_2 \zeta + \lambda_1 t_1 \eta' + \lambda_1 t_2 \zeta',$$

il piano $\lambda\xi + \lambda_1\xi'$ è anche il piano tangente di H nel punto $\lambda x + \lambda_1 x'$; segue che tutte le generatrici del primo sistema di H appartengono al complesso in questione; di più

$$\lambda x + \lambda_2 (x'' - \theta' x') = \left\{ \lambda t_1 - \lambda_2 \left[t_1 (B + j) + t_2 C \right] \right\} y +$$

$$+ \left\{ \lambda t_2 + \lambda_2 \left[t_1 A + t_2 (B - j) \right] \right\} z ,$$

$$\lambda \xi + \lambda_2 (\xi'' - \theta' \xi') = \left\{ \lambda t_1 + \lambda_2 \left[t_1 (B - j) + t_2 C \right] \right\} \eta +$$

$$+ \left\{ \lambda t_2 - \lambda_2 \left[t_1 A + t_2 (B + j) \right) \right\} \zeta.$$

Condizione affinchè il piano $\lambda\xi + \lambda_2(\xi'' - \theta'\xi')$ sia il piano tangente di H nel punto $\lambda x + \lambda_2 (x'' - \theta' x')$ è

$$0 = \begin{vmatrix} \lambda t_1 - \lambda_2 [t_1 (B + j) + t_2 C], & \lambda t_2 + \lambda_2 [t_1 A + t_2 (B - j)] \\ \lambda t_1 + \lambda_2 [t_1 (B - j) + t_2 C], & \lambda t_2 - \lambda_2 [t_1 A + t_2 (B + j)] \end{vmatrix} =$$

$$= f(t) \lambda_2 (\lambda_2 j - \lambda) .$$

Escludendo il caso triviale di $f(t) = 0$, otteniamo i due punti di p da cui escono le generatrici del secondo sistema di H appartenenti al complesso lineare osculatore dell' asintotica generata da x; il primo è x, come era evidente a priori, il secondo è

$$jx + x'' - \theta' x' = - (t_1 B + t_2 C) y + (t_1 A + t_2 B) z,$$

ossia il coniugato armonico di x rispetto ai punti flecnodali. Segue subito che le tangenti flecnodali sono polari l' una dell' altra rispetto al complesso: in altre parole: *il complesso lineare osculatore dell' asintotica curva di una rigata contiene la congruenza lineare* *osculatrice della rigata. Se tutte le asintotiche di una rigata appartengono a complessi lineari, la rigata appartiene ad una congruenza lineare;* la reciproca si prova pure facilmente. Ma il nostro risultato ha un' altra conseguenza interessante. Al Cap. III, § 25 *B)* abbiamo definito, per un punto generico di una superficie non rigata S, le due *direttrici* come la coppia di rette polari l' una dell' altra rispetto ai complessi lineari osculatori delle due asintotiche incrociantisi nel punto corrispondente di S; la prima direttrice passa per il punto considerato di S, la seconda sta nel piano tangente, e le due rette sono polari reciproche anche rispetto alla quadrica di Lie. Abbiamo pure enunciato un'altra definizione delle direttrici che ora siamo in grado di provare equivalente alla primitiva. *Si considerino le due rigate generate dalle tangenti asintotiche di un sistema di* S *lungo la curva asintotica dell' altro sistema, passanti per il punto* x *considerato di* S. *Sopra la generatrice passante per* x *di una tale rigata, si consideri il coniugato armonico di* x *rispetto ai punti flecnodali: i due punti così ottenuti stanno sopra la seconda direttrice (e correlativamente per la prima direttrice).* Infatti l'asintotica di S essendo evidentemente asintotica anche sulla rigata, una facile considerazione basta a dedurre la proposizione da ciò che si è provato poco fa, tenendo conto del fatto che le due rigate hanno in x il medesimo iperboloide osculatore.

§ 38. — Ulteriore studio di superficie rigate a curve flecnodali distinte, prive di retta direttrice.

Sia data una rigata R a curve flecnodali distinte in coordinate normali, riferita alle asintotiche e v sia l'arco proiettivo (sono le ipotesi del § 35). Supposto $h \gtrless 0$ (se $\varepsilon = -1$, $h > 0$) vogliamo studiare più da vicino come si determina la forma quadratica $f(t)$ dagli invarianti h e k, dati in funzione di v. Distinguiamo due casi.

1° *caso.* $\varepsilon = 1$. La forma $f(t)$ si può decomporre in due fattori lineari reali, sia

$$f(t) = 2(\alpha t)(\beta t). \tag{1}$$

Qui, e nel seguito

$$(\alpha t) = \alpha_1 t_2 - \alpha_2 t_1 \quad , \quad (\beta t) = \ldots , \ldots$$

Dal significato di ε si ha $(\alpha\beta)^2 = 1$ ed evidentemente è lecito supporre

$$(1)_{\text{bis}} \qquad (\alpha\beta) = 1.$$

Le forme lineari (αt), (βt) non sono completamente determinate dalle (1) e $(1)_{\text{bis}}$; ρ essendo funzione qualunque di v, possiamo sostituire (αt) e (βt) rispettivamente con $\rho(\alpha t)$, $\rho^{-1}(\beta t)$ e quindi $(\alpha\alpha')$, $(\beta\beta')$ rispettivamente con $\rho^2(\alpha\alpha')$, $\rho^{-2}(\beta\beta')$. Sia

$$(2) \qquad \delta = \operatorname{sgn}(\alpha\alpha')(\beta\beta').$$

Non può essere $\delta = 0$ perchè allora sarebbe $h = 0$ come si verifica facilmente. Escludiamo anche i valori particolari di v per cui fosse $h = 0$ e quindi $\delta = 0$. Possiamo dunque fissare le forme (αt) e (βt) a meno di un cambiamento simultaneo di segno, ponendo la condizione

$$(3) \qquad (\alpha\alpha') = \delta(\beta\beta') = n \gtrless 0.$$

Derivando la (2) si deduce

$$(4) \qquad (\alpha\beta') = (\beta\alpha') = m.$$

Le n e m, nonchè il segno δ, sono evidentemente invarianti per le sostituzioni (4) del § 35.

È facile vedere che, dati ad arbitrio $\delta = \pm 1$, m, n in funzione dell'arco proiettivo v, la forma quadratica $f(t)$ esiste ed è ben determinata a meno di tali sostituzioni. Infatti, da $(1)_{\text{bis}}$ si vede che $(\alpha' t)$ e $(\beta' t)$ sono combinazioni lineari delle (αt) e (βt), e dalle (3) e (4) si deduce che è precisamente

$$(5) \qquad \begin{aligned} (\alpha' t) &= -m(\alpha t) + n(\beta t) \\ (\beta' t) &= -\delta n(\alpha t) + m(\beta t). \end{aligned}$$

Basta quindi prendere per (α_1, β_1) e (α_2, β_2) due soluzioni del sistema differenziale

$$(5)_{\text{bis}} \qquad \alpha' = -m\alpha + n\beta \quad , \quad \beta' = -\delta n\alpha + m\beta$$

legate da $(1)_{\text{bis}}$; il che è possibile, la $(\alpha\beta) =$ cost. essendo conseguenza delle equazioni $(5)_{\text{bis}}$. Da (5) si deduce tosto

$$(6) \qquad f'(t) = 2n\left[-\delta(\alpha t)^2 + (\beta t)^2\right] \;,\; h = 4\delta n^2 \;,\; k = 16\delta m n^2.$$

Dati h e k, sono quindi determinati δ, m, n^2 ma *non* il segno di n. Infatti tal segno cambia invertendo il verso positivo sulle generatrici, ossia per una sostituzione della forma $(4)_{\text{bis}}$ del § 35.

Se si vuole determinare soltanto la superficie R e non le sue asintotiche, non è necessario integrare il sistema $(5)_{\text{bis}}$. Posto infatti

$$\bar{t}_1 = (\alpha t) \quad , \quad \bar{t}_2 = (\beta t)$$

valgono per t_i fisse le equazioni (cfr. le (2) del § 34)

$$(6)_{\text{bis}} \qquad \begin{aligned} \bar{t}_1' &= (\alpha' t) = \bar{b}\,\bar{t}_1 + \bar{c}\,\bar{t}_2 \,, \\ \bar{t}_2' &= (\beta' t) = -\bar{a}\,\bar{t}_1 - \bar{b}\,\bar{t}_2 \,. \end{aligned}$$

Confrontando con (5) si ha

$$\bar{a} = \delta n \quad , \quad \bar{b} = -m \quad , \quad \bar{c} = n.$$

Omettendo i soprassegni otteniamo il risultato: *Se la rigata* R *possiede due diverse curve flecnodali di cui nessuna è retta, possiamo normalizzare* (a meno di un cambiamento di segni) *i fattori delle coordinate* y *e* z *dei punti flecnodali in modo che sia* (l'arco proiettivo di R essendo la variabile indipendente)

$$\begin{aligned} a &= \delta n \quad , \quad b = -m \quad , \quad c = n \\ A &= 0 \quad , \quad B = 1 \quad , \quad C = 0 \,, \end{aligned} \qquad \delta = \pm 1.$$

m e n essendo legate agli invarianti h e k dalle $h = 4\delta n^2$, $k = 16\delta m n$.

Le equazioni (6) del § 34 sono allora

$$(7)\qquad \begin{aligned} y' &= my + \eta nz + \dot{y} \quad , \quad \dot{y}' = m\dot{y} + \eta n\dot{z} - (1 + j)y \\ z' &= -ny - mz + \dot{z} \quad , \quad \dot{z}' = -n\dot{y} - m\dot{z} + (1 - j)z \,. \end{aligned}$$

Se $\delta = 1$ le curve armoniche sono reali e generate dai punti $y \pm z$, se invece $\delta = -1$ le curve del complesso sono reali e generate dai punti $y \pm z$. Le (11) del § 31 sono

$$(7)_{\text{bis}}\qquad \begin{aligned} y'' &= 2my' + 2\delta nz' + (m' + \delta n^2 - m^2 - 1 - j)y + \delta n'z \\ z'' &= -2ny' - 2mz' - n'y + (-m' + \delta n^2 - m^2 + 1 - j)z \,. \end{aligned}$$

Se ne deduce una dimostrazione molto semplice di un interessante teorema di Sullivan:

Se le due curve flecnodali di una rigata sono piane, anche le curve del complesso e le curve armoniche sono piane e tutti i loro piani appartengono ad un fascio. Indichiamo con y_i e z_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ le quattro coordinate di y e z. Scegliendo convenientemente il sistema di riferimento, possiamo supporre per le ipotesi del teorema $y_3 = 0$, $z_4 = 0$. Le $(7)_{\text{bis}}$ dànno poi

$$2nz_3' + n'z_3 = 0 \qquad 2ny_4' + n'y_4 = 0$$

sicchè $z_3 : y_4 = \lambda =$ costante. La curva descritta dal punto $x = y + cz$ (c costante) sta quindi nel piano fisso

$$x_3 - \lambda c x_4 = 0 \,.$$

2° *caso.* $\varepsilon = -1$, $h > 0$. La forma quadratica $f(t)$ essendo definita, si può scegliere il verso positivo sulle generatrici in modo che $f(t)$ sia *positiva.* Si può dunque porre

$$(8)\qquad f(t) = (\alpha t)^2 + (\beta t)^2.$$

Dal significato di ε si ha $(\alpha\beta)^2 = 1$ e si può supporre anche qui

$$(8)_{\text{bis}}\qquad (\alpha\beta) = 1 \,.$$

Derivando si deduce

$$(9) \qquad (\alpha\beta') = (\beta\alpha') = m.$$

Le forme lineari (αt) e (βt) non sono ancora completamente determinate; ρ essendo una funzione arbitraria dell'arco proiettivo v, si può sostituirle ordinatamente con

$$\cos\rho(\alpha t) + \sin\rho(\beta t) \quad , \quad -\sin\rho(\alpha t) + \cos\rho(\beta t)$$

e quindi le espressioni $(\alpha\alpha')$ e $(\beta\beta')$ ordinatamente con

$$\cos^2\rho(\alpha\alpha') + 2m\cos\rho\sin\rho + \sin^2\rho(\beta\beta') + \rho',$$

$$\sin^2\rho(\alpha\alpha') - 2m\cos\rho\sin\rho + \cos^2\rho(\beta\beta') + \rho',$$

sicchè $(\alpha\alpha') - (\beta\beta')$ viene sostituito da

$$[(\alpha\alpha') - (\beta\beta')]\cos 2\rho + 2m\sin 2\rho.$$

Segue che possiamo fissare le (αt) e (βt) a meno di un cambiamento simultaneo di segni col porre le condizioni $m > 0$ (non può essere $m = 0$ perchè risulterebbe $h = 0$ contro l'ipotesi) e

$$(10) \qquad (\alpha\alpha') = (\beta\beta') = n.$$

Come al caso precedente, si deducono senza fatica dalle $(8)_{bis}$, (9) e (10) le formole

$$(11) \qquad (\alpha' t) = -m(\alpha t) + n(\beta t) \quad , \quad (\beta' t) = -n(\alpha t) + m(\beta t)$$

da cui si deduce

$$(12) \qquad f'(t) = -2m\left[(\alpha t)^2 - (\beta t)^2\right]$$

$$(13) \qquad h = 4m^2, \quad k = 32m^2n,$$

il che insieme con la $m > 0$ determina univocamente le m, n, dalle $h > 0$, k. Per costruire dalle $h > 0$ e k o ciò che è lo stesso, dalle $m > 0$ ed n la forma quadratica $f(t)$, basta scegliere per $(\alpha_1\beta_1)$, e $(\alpha_2\beta_2)$ due soluzioni del sistema differenziale

$$\alpha' = -m\alpha + n\beta, \quad \beta' = -n\alpha + m\beta$$

legate dalle $(8)_{\text{bis}}$. Se non ci interessano le asintotiche di R, non è necessario integrare le equazioni precedenti. Posto infatti

$$(\alpha t) = \overline{t_1}\,, \quad (\beta t) = \overline{t_2}$$

valgono le $(6)_{\text{bis}}$ e il confronto con le (11) dà

$$\overline{a} = n\,, \quad \overline{b} = -m\,, \quad \overline{c} = n\,.$$

Dalle (8) e (12) si ha poi

$$\overline{A} = 1\,, \quad \overline{B} = 0\,, \quad \overline{C} = 1\,,$$

$$\begin{vmatrix} \overline{A}\,\overline{t_1} + \overline{B}\,\overline{t_2}\,, & \overline{B}\,\overline{t_1} + C\,\overline{t_2} \\ \overline{A'}\,\overline{t_1} + \overline{B'}\,\overline{t_2}\,, & \overline{B'}\,\overline{t_1} + \overline{C'}\,\overline{t_2} \end{vmatrix} = 4m\,\overline{t_1}\,\overline{t_2}\,.$$

Omettendo i soprassegni otteniamo il risultato: *Se la rigata reale* R *priva di retta direttrice ha le due curve flecnodali immaginarie possiamo normalizzare* (a meno di un cambiamento simultaneo di segni) *i fattori delle coordinate* y *e* z *dei punti del complesso in modo che sia* (l'arco proiettivo essendo la variabile indipendente)

$$a = n\,, \quad b = -m < 0\,, \quad c = n\,,$$

$$A = 1\,, \quad B = 0\,, \quad C = 1\,,$$

m *e* n *essendo legate agli invarianti* h *e* k *dalle* (13). *Le curve armoniche sono descritte dai punti* $y \pm z$, *le curve flecnodali dai punti immaginari* $y \pm iz$. Le equazioni (6) del § 4 sono nel caso considerato

$$(14) \qquad \begin{aligned} y' &= my + nz + \dot{y}\,, & \dot{y}' &= -jy + z + m\dot{y} + n\dot{z}\,, \\ z' &= -ny - mz + \dot{z}\,, & \dot{z}' &= -y - jz - n\dot{y} - m\dot{z}\,. \end{aligned}$$

§ 39. — La trasformazione flecnodale.

Torniamo a considerare una rigata R a due curve flecnodali reali e distinte senza retta direttrice. Scegliendo l'arco proiettivo di R come variabile indipendente e fissando convenientemente i fattori delle coordinate y e z dei punti flecnodali delle generatrici, possiamo scrivere le equazioni (7) del § 38:

$$(1)\qquad \begin{aligned} y' &= my + \delta n z + \dot{y}\,, & \dot{y}' &= m\dot{y} + \delta n \dot{z} - (1+j)\,y \\ z' &= -ny - mz + \dot{z}\,, & \dot{z}' &= -n\dot{y} - m\dot{z} + (1-j)z\,. \end{aligned}$$

Per ogni v, il significato geometrico del tetraedro formato dai punti y, z, $\dot{y}$, $\dot{z}$ ci è noto: (yz) è la generatrice di R, $(y\dot{y})$ e $(z\dot{z})$ sono le tangenti flecnodali (§ 34) ed $(\dot{y}\dot{z})$ è la generatrice principale di H (§ 35). Al § 34 abbiamo chiamato *trasformate flecnodali* di R le rigate R_1 e R_2 generate rispettivamente dalle rette $(y\dot{y})$ e $(z\dot{z})$. Essendo

$$(1)_{\text{bis}}\qquad (y z y' z') = \omega\,,$$

se determiniamo la generatrice generica di R_1 dai punti (cfr. § 33)

$$(2)\qquad y_1 = y\,,\quad z_1 = \frac{\dot{y}}{n}\,,$$

sarà

$$(2)_{\text{bis}}\qquad (y_1 z_1 y_1' z_1') = -\omega\,.$$

Possiamo omettere i facili calcoli con cui si deduce da (1)

$$y_1'' = \frac{n'}{n} y_1' + 2n z_1' + \left(m' - \frac{mn'}{n} + m^2 - \delta n^2 + 1 + j\right) y_1 + n' z_1\,,$$

$$z_1'' = -2\frac{j}{n} y_1' - \frac{n'}{n} z_1' + \left[-\left(\frac{1+j}{n}\right)' - 2\frac{m}{n}\right] y_1 +$$

$$+\left(m' - \frac{mn'}{n} + m^2 - \delta n^2 - \frac{n''}{n} + \frac{n'^2}{n^2} - 1 + j\right) z_1\,.$$

Indicando con indice 1 le quantità relative a R_1, risulta dal confronto colle (11) § 31

$$a_1 = n,\ b_1 = -\frac{1}{2}\frac{n'}{n},\ c_1 = \frac{j}{n}\,,$$

$$(3)\qquad A_1 = 0,\ B_1 = -1,\ C_1 = -\frac{n'}{n} + 2\frac{m}{n}\,;$$

$$j_1 = \frac{1}{2}\frac{n''}{n} - \frac{3}{4}\frac{n'^2}{n^2} - m' + \frac{mn'}{n} - m^2 + \delta n^2\,.$$

La $A_1 = 0$ dice che *il punto* y *genera anche sulla* R_1 *una curva flecnodale.* Questa proprietà è stata segnalata dal Wilczynski che ha osservato più in generale che esistono ∞^1 rigate che toccano R lungo la curva flecnodale generata da y ed hanno pure nella curva di contatto una curva flecnodale. Ma tale proprietà ci è già nota: infatti, al Cap. II § 13 B pag. 76 abbiamo dimostrato un teorema più generale relativo a superficie qualunque. Dalle (3) si deduce di più $B_1^2 - A_1 C_1 = 1$ ossia, osservando la $(2)_{\text{bis}}$: *Una trasformata flecnodale di* R *corrisponde ad* R *con uguaglianza d' arco proiettivo.*

Analogamente, posto

$$(4) \qquad y_2 = z, \quad z_2 = \frac{\dot{z}}{n}, \quad (y_2 z_2 y_2' z_2') = -\omega,$$

le quantità relative all' altra trasformata flecnodale R_2 di R sono

$$a_2 = n, \quad b_2 = -\frac{1}{2}\frac{n'}{n}, \quad c_2 = \frac{j}{n},$$

$$(5) \qquad A_2 = 0, \quad B_2 = 1, \quad C_2 = \frac{n'}{n^2} + 2\frac{m}{n},$$

$$j_2 = \frac{1}{2}\frac{n''}{n} - \frac{3}{4}\frac{n'^2}{n^2} + m' - \frac{mn'}{n} - m^2 + \delta n^2 .$$

Il confronto delle prime righe delle (3) e (5) dice che, facendo corrispondere il punto $y_1 + uz_1$ di R_1 al punto $y_2 + uz_2$ di R_2, le asintotiche curve di R_1 e R_2 si corrispondono. Ciò si poteva prevedere: infatti, la congruenza delle rette congiungenti $y_1 + uz_1$ a $y_2 + uz_2$ è la congruenza flecnodale di R che sappiamo essere una congruenza W a falde focali R_1 e R_2. Per brevità, diciamo $y(z)$ il *primo* punto flecnodale della generatrice $(y\dot{y})$ di R_1 $[(z\dot{z})$ di $R_1]$. La seconda riga delle (3) dice che la seconda curva flecnodale di R_1 è generata dal punto

$$(6)^{\text{a}} \qquad \left(-\frac{1}{2}\frac{n'}{n} + m\right) y + \dot{y};$$

similmente si vede che la seconda curva flecnodale di R_2 è generata dal punto

$$(6)^b \qquad \left(-\frac{1}{2}\frac{n'}{n} - m\right) z + \dot{z} .$$

Donde il teorema di Wilczynski: *La retta che congiunge i due secondi punti flecnodali di* R_1 *e* R_2 *corrispondenti al medesimo valore di* v, *appartiene ad* H *allora e allora soltanto che* $m = 0$, *che cioè* R *appartenga ad un complesso lineare.* Essendo per le (1)

$$y'' + (n - 2m) y' + (-m' + m^2 = \delta n^2 + 1 + j) y =$$

$$= 2\delta n \left[\dot{z} + \left(\frac{1}{2}\frac{n'}{n} - m\right) z \right],$$

l' intersezione del piano $(yy'y'')$ con la retta $(z\dot{z})$ è

$$(6)^c \qquad \dot{z} + \left(\frac{1}{2}\frac{n'}{n} - m\right) z ;$$

similmente si trova che l' intersezione del piano $(zz'z'')$ con la retta $(y\dot{y})$ è

$$(6)^d \qquad \dot{y} + \left(\frac{1}{2}\frac{n'}{n} + m\right) y .$$

Il confronto delle espressioni (6) conduce subito al teorema: *La generatrice del primo sistema di* H *che passa per l' intersezione del piano osculatore alla prima curva flecnodale di* R_1 *con la generatrice di* R_2 *e la generatrice di* H *che passa il secondo punto flecnodale di* R_1 *sono coniugate armoniche rispetto alla generatrice di* R *e alla generatrice principale di* H. (Naturalmente tutte le rette dell' enunciato devono corrispondere al medesimo valore di v). Questo teorema è dal Wilczynski riguardato come definizione geometrica della generatrice principale di H. Il lettore troverà facendo un calcolo privo di difficoltà che nel teorema enunciato compaiono elementi dipendenti da *sei* generatrici successive di R, mentre è facile trovare che la generatrice principale di H non dipende che da *cinque* generatrici successive di R. Per questa ragione la definizione geometrica della generatrice principale data al § 35 sembra preferibile: il teorema precedente dà piuttosto la costruzione geometrica del secondo punto flecnodale di R_1 (e naturalmente anche di R_2).

Mediante le formole (8) del § 36 si deduce dalle (3) e (5)

$$\dot{A}_1 = 2n\,,\quad \dot{B}_1 = \frac{n'}{n} - 2m\,,\quad \dot{C}_1 = -\frac{n''}{n} + \frac{n'^2}{n^3} + 2\frac{m'}{n} - 2\frac{j}{n}\,,$$

$$\ddot{A}_1 = -2n' + 4mn\,,\quad \ddot{B}_1 = 2\frac{n''}{n} - 2\frac{n'^2}{n^2} - 4m' + 4j\,,$$

$$\ddot{C}_1 = -\frac{n'''}{n^2} + 3\frac{n'n''}{n^3} - 2\frac{n'^3}{n^4} + 2\frac{m''}{n} - 2\frac{j'}{n} + 2\frac{n'j}{n^2} - 4\frac{mj}{n}\,,$$

$$\dot{A}_2 = -2n\,,\quad \dot{B}_2 = -\frac{n'}{n} - 2m\,,$$

$$\dot{C}_2 = \frac{n''}{n^2} - \frac{n'^2}{n^3} + 2\frac{m'}{n} + 2\frac{j}{n}\,,$$

$$\ddot{A}_2 = 2n' + 4mn\,,\quad \ddot{B}_2 = -2\frac{n''}{n} + 2\frac{n'^2}{n^2} - 4m' - 4j\,,$$

$$\ddot{C}_2 = \frac{n'''}{n^2} - 3\frac{n'n''}{n^3} + 2\frac{n'^3}{n^4} + 2\frac{m''}{n} + 2\frac{j'}{n} - 2\frac{n'j}{n^2} - 4\frac{mj}{n}.$$

Seguono i valori degli invarianti h e k per R_1 e R_2:

$$h_1 = 2\frac{n''}{n} - \frac{n'^2}{n^2} - 4\frac{mn'}{n} + 4m^2 - 4m' + 4j\,,$$

$$k_1 = -2\frac{n'''}{n} + 12\frac{mn''}{n} + 12\frac{m'n'}{n} - 24\frac{m^2n'}{n} + 4m'' - 24mm' + 16m^3 + 16mj - 8\frac{n'j}{n} + 4j'\,,$$

(7)

$$h_2 = 2\frac{n''}{n} - \frac{n'^2}{n^2} + 4\frac{mn'}{n} + 4m^2 + 4m' + 4j\,,$$

$$k_2 = 2\frac{n'''}{n} + 12\frac{mn''}{n} + 12\frac{m'n'}{n} + 24\frac{m^2n'}{n} + 4m'' +$$

$$+ 24mm' + 16m^3 + 16mj + 8\frac{n'j}{n} + 4j'.$$

La trasformazione flecnodale merita senza dubbio uno studio più approfondito. Ma qui ci limitiamo ad una semplice applicazione delle formole (7) proponendoci la domanda: *Può accadere che le due trasformate flecnodali* R_1 *e* R_2 *di una rigata* R *siano collineari fra loro, corrispondendosi nell'omografia le tangenti flecnodali appartenenti alla medesima generatrice di* R? Le condizioni del problema sono

$$h_1 = h_2\,, \quad k_1 = k_2\,, \quad j_1 = j_2\,.$$

Ora dalle (3), (5) e (7) si ha

$$h_1 - h_2 = -\frac{8}{n}(mn)'\,, \quad j_1 - j_2 = -2n\left(\frac{m}{n}\right)'$$

sicchè mn e $\frac{m}{n}$ sono costanti. Due casi son possibili: 1° m e n sono costanti; 2° $m = 0$. Nel primo caso $k_1 - k_2 = -8j'$, sicchè anche j è costante. Viceversa, se m, n e j sono costanti, tutte le condizioni del problema sono soddisfatte. Le equazioni differenziali (1) non cambiano in questo caso mettendo $v +$ costante al posto di v sicchè *R ammette un gruppo continuo* ∞^1 *di omografie in sè.* Le equazioni in termini finiti di R si potrebbero scrivere quindi senz'altro. Nel secondo caso $k_1 + k_2 = 0$, sicchè $k_1 = k_2 = 0$ *e tutte le tre superficie* R, R_1, R_2 *appartengono a complessi lineari.* Viceversa se R e R_1, p. es., appartengono a complessi lineari Ω e Ω_1 rispettivamente, la polarità rispetto Ω_1 non cambia R_1 e la polarità rispetto Ω la porta in R_2, sicchè il prodotto delle due correlazioni è una omografia (biassiale) che porta R_1 in R_2. Essendo $m = 0$,

$$k_1 - k_2 = -4\frac{n'''}{n} - 16\frac{n'j}{n} - 8j'.$$

Dunque n può prendersi ad arbitrio purchè diverso da zero, e j si determina dall'equazione differenziale lineare

$$j' = -2\frac{n'}{n}j - \frac{1}{2}\frac{n'''}{n},$$

che integrata dà

$$j = \frac{1}{4n^2}(n'^2 - 2nn'' + \text{cost.})$$

La classe delle rigate a cui siamo arrivati è interessante perchè ogni rigata della classe si deduce semplicemente da una linea a curvatura costante di uno spazio a tre dimensioni di curvatura costante. Si osservi dapprima che i complessi lineari Ω, Ω_1, Ω_2 cui appartengono ordinatamente le rigate R, R_1, R_2 appartengono ad un fascio, perchè, come abbiamo già osservato, Ω_1 e Ω_2 sono polari rispetto a Ω. La congruenza lineare Δ base del fascio può essere generale o speciale. Per brevità, limitiamoci al caso che Δ sia generale. Sia Q_4 una quadrica a quattro dimensioni immagine delle rette del nostro spazio. Le immagini C, C_1, C_2 delle rigate R, R_1, R_2 sono tre curve in corrispondenza biunivoca sopra Q_4, contenute in tre spazi S_4, S_4^1, S_4^2 a quattro dimensioni; S_4, S_4^1, S_4^2 si intersecano in uno spazio S_3 a tre dimensioni che interseca Q_4 in una quadrica Q_2 che è generale, essendo immagine della congruenza non speciale Δ. Gli spazii S_4, S_4^1, S_4^2 intersecano Q_4 in tre quadriche a tre dimensioni Q_3, Q_3^1, Q_3^2 immagini dei complessi Ω, Ω_1, Ω_2. Siano P, P_1, P_2 i punti di C, C_1, C_2 corrispondenti ad un valore di v scelto ad arbitrio. La retta $\overline{P_1 P_2}$ è polare rispetto a Q_4 dello spazio osculatore π_3 a tre dimensioni della curva C in P, essendo P_1 e P_2 le immagini delle direttrici della congruenza lineare osculatrice di R appartenente al valore scelto di v. Ora π_3 sta evidentemente nell'iperpiano S_4 sicchè la retta $P_1 P_2$ passa per un punto fisso O. Sia $\overline{Q_3}$ la proiezione di Q_3^1 e di Q_3^2 dal punto O sull'iperpiano S_4. Una facile considerazione o un facile calcolo mostra che le due quadriche Q_3 e $\overline{Q_3}$ dello spazio S_4 si toccano in tutti i punti della quadrica Q_2. Sia $\overline{C}$ la proiezione della curva C_1 dal punto O nello spazio S_4 che è quindi una curva giacente su $\overline{Q_3}$ e sia $\overline{P}$ il punto di $\overline{C}$ corrispondente al valore di v scelto sopra. La retta $P_1 P_2$ essendo la polare di π_3 rispetto a Q_4, il punto $\overline{P}$ è il polo di π_3 rispetto a Q_3, e quindi gli iperpiani π_3 corrispondenti ai diversi valori di v toccano la quadrica Q_3^* polare di $\overline{Q_3}$ rispetto Q_3, che tocca pure Q_3 in tutti i punti di Q_2. Introduciamo ora nello spazio S_4 una metrica euclidea riguardando S_3 come iperpiano all'infinito e Q_2 come l'assoluto: le quadriche Q_3 e Q_3^* appaiono in questa metrica come ipersfere concentriche. La curva C sta sull'ipersfera Q_3 e i suoi iperpiani osculatori *(e quindi anche i suoi piani osculatori)* (*) toccano l'ipersfera concentrica Q_3^*. Questi piani osculatori intersecano Q_3 nei circoli osculatori di C che hanno quindi raggio costante e la *curva* C *è una linea a curvatura costante tracciata sopra lo spazio a curvatura costante (ipersfera)* Q_3.

Analogamente si può trattare il caso di Δ speciale che conduce a dedurre R da una linea a curvatura costante dell'ordinario spazio euclideo (**).

§ 40. — L'applicabilità proiettiva di superficie rigate.

Il teorema generale Cap. II § 20 *A)* mostra subito che una rigata non può essere applicabile che su una rigata. In particolare una quadrica non è applicabile che su una quadrica e si dimostra subito: *due quadriche sono proiettivamente applicabili se si corrispondono i due sistemi di generatrici.* Escludiamo il caso delle quadriche. Siano R e R_1 due rigate riferite alle asintotiche. Riteniamo le solite notazioni per R, e facciamo uso delle stesse notazioni con indice *1* per R_1. Secondo le $(8)_{\text{ter}}$ § 31 condizione necessaria e sufficiente affinchè sia possibile stabilire fra R e R_1 una corrispondenza biunivoca che sia una deformazione proiettiva è che si possa risolvere rispetto u_1 e v_1 l'equazione

$$\frac{(A+2Bu+Cu^2)dv^2}{du}=\frac{(A_1+2B_1u_1+C_1u_1^2)\,dv_1^2}{du_1}. \tag{1}$$

(*) Più intuitivo è il ragionamento correlativo: se tutti i punti di C stanno su Q_3, tutte le tangenti di C toccano Q_3.

(**) Cfr. una Nota (in boemo) di Čech, nel *Časopis pro pěstování mat. a fys.*, vol. 52, 1923.

In primo luogo si vede che se vi sono soluzioni, esse si ottengono uguagliando u_1 ad una funzione della sola u e v_1 ad una funzione della sola v. Cambiando il parametro v_1 (se l' applicabilità è possibile in diversi modi, tal cambiamento in generale è diverso per i diversi modi di realizzarla) si può dunqne supporre $v = v_1$. Sicchè si ha più semplicemente

$$(1)_{\text{bis}} \qquad \frac{du}{A + 2Bu + Cu^2} = \frac{du_1}{A_1 + 2B_1 u_1 + C_1 u_1^2}$$

dove adesso A, B, C, A_1, B_1, C_1 sono funzioni della sola v. Senza ledere le generalità si può supporre o che $B^2 - AC = \pm 1$, o, se $B^2 - AC = 0$, che la forma $f(t)$ sia normalizzata secondo una delle regole del § 36.

Cominciamo con l' ipotesi che le A, B, C siano costanti. Evidentemente non è possibile soddisfare a $(1)_{\text{bis}}$ che se anche le A_1, B_1, C_1 sono costanti: *Una rigata appartenente ad una congruenza lineare* (non importa se generale o speciale) *non può essere proiettivamente applicabile che su rigate appartenenti pure a congruenze lineari.* Ecco il teorema inverso: *Due rigate appartenenti a congruenze lineari sono sempre* (anche se una congruenza è generale e l'altra speciale) *proiettivamente applicabili in ∞^3 modi.* Infatti se nelle (1) le A, B, C, $A_1 : C_1$, $B_1 : C_1$ sono costanti, per passare da (1) a $(1)_{\text{bis}}$ occorre cambiare il parametro v_1 in modo che anche le A_1, B_1, C_1 risultino costanti. Ciò è evidentemente sempre possibile e se $v_1 = \varphi(v)$ è una maniera di farlo, le altre sono $v_1 = a\varphi(v) + b$, con a, b costanti qualunque ($a \gtrless 0$). Scegliendo le a, b, la $(1)_{\text{bis}}$ determina u_1 in funzione di u, il che introduce una terza costante arbitraria. Si vede subito che: *Se le due congruenze sono speciali, comunque si realizzi l' applicabilità, la corrispondenza fra i punti delle generatrici corrispondenti è sempre proiettiva.* Se una congruenza è generale e l' altra è speciale, tale corrispondenza non può essere proiettiva. *Se le due congruenze sono generali, allora nel campo complesso ∞^2 delle ∞^3 maniere di realizzare l' applicabilità hanno la proprietà che la corrispondenza fra i punti delle generatrici corrispondenti è proiettiva; nel campo reale, tali applicabilità non esistono che se le due congruenze sono simultaneamente od iperboliche od ellittiche.* Come esercizio, il lettore parta dalle equazioni in termini finiti delle due rigate e determini le ∞^3 applicabilità, supponendo ordinatamente le due congruenze generali ecc.

Passiamo al caso che nessuna delle rigate appartenga ad una congruenza lineare. Integrando la $(1)_{\text{bis}}$ in cui v si riguarda come parametro, si ottiene una delle quattro equazioni

$$
(2) \qquad \begin{aligned}
&\frac{u_1-\alpha_1}{u_1-\beta_1}=\lambda\left(\frac{u-\alpha}{u-\beta_1}\right)^{\mu}, \quad \frac{u_1-\alpha_1}{u_1-\beta_1}=\lambda e^{\frac{\mu}{u-\alpha}},\\
&\lambda e^{\frac{\mu}{u_1-\alpha_1}}=\frac{u-\alpha}{u-\beta}, \quad \frac{\lambda}{u-\alpha}+\frac{\lambda_1}{u_1-\alpha_1}=\mu,
\end{aligned}
$$

dove α, β, α_1, β_1, λ, λ_1, μ sono funzioni di v che possono essere immaginarie. In particolare, $u=\alpha$ e $u=\beta$ (o soltanto $u=\alpha$) sono le equazioni delle due linee flecnodali di R, sicchè *una almeno delle α e β (p. e. α) non è costante*, altrimenti R apparterrebbe ad una congruenza lineare, contro la supposizione. Ora osservando il comportamento della funzione u_1 di u nell' intorno del punto $u=\alpha$ si vede subito che u_1 dipende necessariamente anche da v, se vale la seconda o la terza delle (2), oppure se vale la prima e se $\mu^2 \pm 1$. Tali casi sono dunque impossibili, e non restano che due possibilità

$$
\frac{u_1-\alpha_1}{u_1-\beta_1}=\lambda\left(\frac{u-\alpha}{u-\beta}\right)^{\pm 1}, \quad \text{oppure} \quad \frac{\lambda}{u-\alpha}+\frac{\lambda_1}{u_1-\alpha_1}=\mu .
$$

Nè deduciamo: 1° se le linee flecnodali di R coincidono, coincidono pure quelle di R_1 e viceversa 2°; è

$$
u_1=\frac{pu+q}{ru+s};
$$

e p, q, r, s sono necessariamente costanti, perchè u_1 non dipende che da u. Cambiando il parametro u_1 possiamo dunque supporre $u_1=u$, dopodichè la $(1)_{\text{bis}}$ dà $A_1=A$, $B_1=B$, $C_1=C$. E seguono ora senz' altro i teoremi:

Se due rigate R *e* R_1 *proiettivamente applicabili non appartengono a congruenze lineari, le due curve flecnodali di* R_1 *sono distinte o coincidenti, reali od immaginarie, come quelle di* R, *e si* *corrispondono nell' applicabilità. Le rigate* R *e* R_1 *si corrispondono con uguaglianza d' arco proiettivo.*

Se una delle due rigate (e quindi anche l' altra) è a curve flecnodali distinte e priva di retta direttrice, condizione necessaria e sufficiente per l' applicabilità proiettiva è che, per uguali valori di arco proiettivo, il segno ε *e gli invarianti* h *e* k *siano uguali sulle due superficie. Se* R *e quindi anche* R_1 *possiede una retta direttrice, condizione necessaria e sufficiente per l' applicabilità proiettiva è che, per uguali valori dell' arco proiettivo, il segno* σ *e l' invariante* D [§ 35 (11)] *siano uguali sulle due superficie.*

Se R *(e quindi* R_1*) è a curve flecnodali coincidenti, condizione necessaria e sufficiente per l' applicabilità proiettiva è che, per uguali valori dell' arco proiettivo* [§ 36, (4)], *l' invariante* l [§ 36, (5)] *sia uguale per le due superficie.*

Non importa invece il valore dell' invariante j. Dunque: *Le deformate proiettive di una rigata che non appartiene ad una congruenza lineare dipendono da una funzione arbitraria di un argomento,* che è appunto la j. Se ne deduce per es. che, se le curve flecnodali di R sono reali e distinte (coincidenti), esistono due deformate proiettive (una deformata) R_1 di R tali che le generatrici principali delle quadriche di Lie di R_1 descrivano una sviluppabile. Basta porre $j = \pm 1$ $(j = 0)$; cfr. § 34, (11).

Le ricerche precedenti danno immediatamente la soluzione del problema di trovare *le rigate che ammettono un gruppo continuo di deformazioni proiettive in sè. Esse sono di due tipi diversi: 1° una rigata* R *di una congruenza lineare, generale o speciale, ammette* ∞^3 *deformazioni proiettive in sè; 2° una rigata* R, *che non è di una congruenza lineare, ammette* ∞^1 *deformazioni in sè, se o* $\mathrm{h} \gtrless 0$, $\mathrm{h} =$ cost., $\mathrm{k} =$ cost., *oppure* $\mathrm{h} = 0$, $\mathrm{D} =$ cost., *o infine* $\mathrm{B}^2 - \mathrm{AC} = 0$, $\mathrm{l} =$ cost. È interessante rilevare che in tutti e due i casi si può indicare una deformata proiettiva R_1 di R tale che le deformazioni corrispondenti di R_1 in sè siano delle semplici omografie: se R appartiene ad una congruenza lineare, R_1 è la rigata cubica di Cayley, negli altri casi R_1 si ottiene da R sostituendo a j una costante scelta ad arbitrio.