Geometria proiettiva differenziale. I

Capitolo II. I fondamenti della teoria delle superficie

In: Guido Fubini (author); Eduard Čech (author): Geometria proiettiva differenziale. I. (Italian). Bologna: Zanichelli, Nicola, 1926. pp. [49]--124.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402433

Terms of use:

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

CAPITOLO II.

I FONDAMENTI DELLA TEORIA DELLE SUPERFICIE

§ 9. — Formole di calcolo assoluto.

A) Differenziali controvarianti.

Sia

$$G = \Sigma\, a_{rs}\, du_r\, du_s \quad (r\,, s = 1\,, 2\,, \ldots\,, n) \tag{1}$$

una forma quadratica differenziale col discriminante $A \neq 0$; sia A_{rs} il complemento algebrico di a_{rs} in A diviso per A. Poniamo:

$$\begin{bmatrix} i\,h \\ l \end{bmatrix} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{il}}{\partial u_h} + \frac{\partial a_{hl}}{\partial u_i} - \frac{\partial a_{ih}}{\partial u_l}\right), \tag{2}$$

$$\begin{pmatrix} i\,h \\ l \end{pmatrix} = \sum_r A_{lr} \begin{bmatrix} i\,h \\ r \end{bmatrix}. \tag{3}$$

Risolvendo le (3) si trova:

$$\begin{bmatrix} i\,h \\ l \end{bmatrix} = \sum_r a_{lr} \begin{pmatrix} i\,h \\ r \end{pmatrix}. \tag{4}$$

Conserveremo il simbolo $\begin{Bmatrix} i\,h \\ r \end{Bmatrix}$ anzichè $\begin{pmatrix} i\,h \\ r \end{pmatrix}$ soltanto per l'elemento lineare di Gauss della geometria metrica.

Si dimostra che:

$$(5)\qquad \frac{\partial \log \sqrt{A}}{\partial u_i} = \sum_r \begin{Bmatrix} i\,r \\ r \end{Bmatrix}.$$

Le (2) e (3) sono i cosidetti simboli di Christoffel di prima e di seconda specie. Porremo:

$$(6)\qquad \begin{cases} \delta^1 u_i = \delta u_i = du_i\,; \quad \delta^2 u_i = d^2 u_i + \sum\limits_{r,s} \begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix} du_r\, du_s \\[2ex] \delta^3 u_i = d(\delta^2 u_i) + \sum\limits_{r,s} \begin{Bmatrix} r\,s \\ i \end{Bmatrix} du_r\, \delta^2 u_s\,, \ \text{ecc.} \end{cases}$$

Tali espressioni saranno chiamate (*F*) *differenziali controvarianti.* Se noi alle variabili u_i sostituiamo n loro funzioni indipendenti u'_i, la forma G si muta in

$$(7)\qquad \sum a'_{rs}\, du'_r\, du'_s \quad \text{ove} \quad a'_{rs} = \sum_{i,j} a_{ij} \frac{\partial u_i}{\partial u'_r} \frac{\partial u_j}{\partial u'_s}.$$

Corrispondentemente si mutano i simboli di Christoffel. Ma, come è

$$(8)\qquad du_i = \sum_r \frac{\partial u_i}{\partial u'_r} du'_r\,,$$

così si può dimostrare che formole affatto simili valgono per i differenziali controvarianti, che cioè:

$$(9)\qquad \delta^s u_i = \sum_r \frac{\partial u_i}{\partial u'_r} \delta^s u'_r \quad \text{anche per } s = 2\,, 3\,, \ldots.$$

Se n = 2, *porremo sovente* $\mathrm{u}_1 = \mathrm{u}$, $\mathrm{u}_2 = \mathrm{v}$.

B) **Alcune definizioni. Le geodetiche.**

Diremo che un'espressione è *intrinseca,* se il suo valore non muta con un cambiamento di variabili u in loro funzioni u'; la diremo *impropriamente intrinseca* se essa resta immutata per cambiamenti di variabili a Iacobiano positivo, ma cambia di segno per trasformazioni a Iacobiano negativo.

Così p. es. dalle (7), (8), (9) si deduce:

$$(10) \qquad A' = A \left[\frac{d(u_1 u_2 \ldots . u_n)}{d(u'_1 u'_2 \ldots . u'_n)} \right]^2$$

e, se $n = 2$:

$$(11) \quad (du'_1 \, \delta^s u'_2 - du'_2 \, \delta^s u'_1) = \frac{d(u'_1 u'_2)}{d(u_1 u_2)} (du_1 \, \delta^s u_2 - du_2 \, \delta^s u_1).$$

$$(s = 2, 3, \ldots .)$$

Quindi, *per* n $= 2$, *le espressioni*

$$(12) \qquad \sqrt{|A|} \, (du_1 \, \delta^2 u_2 - du_2 \, \delta^2 u_1)$$

e

$$(13) \qquad \sqrt{|A|} \, (du_1 \, \delta^3 u_2 - du_2 \, \delta^3 u_1)$$

di cui, si noti, *la seconda è*, com'è facile verificare con le (5) e (6), *il differenziale della prima, sono entrambe impropriamente intrinseche.*

La prima di esse divisa per $\sqrt{G}^3$ *dà la curvatura geodetica di una linea tracciata su una superficie, su cui* G *è l'elemento lineare. Le geodetiche si possono definire dicendo che essa è nulla.*

Si noti l'identità, che ben presto generalizzeremo:

$$(14) \qquad dG = 2 \, \Sigma a_{rs} \, du_r \, \delta^2 u_s .$$

Se dunque scegliamo lungo le geodetiche il parametro t definito dalla $dt = \sqrt{G}$, lungo esse sarà $\Sigma a_{rs} \frac{du_r}{dt} \frac{\delta^2 u_s}{dt} = 0$ e quindi, essendo nulla anche (12), esse soddisferanno alle

$$(15) \qquad \frac{\delta^2 u_i}{dt^2} = 0 \qquad (i = 1, 2),$$

com'è ben noto. In questa trattazione si è escluso che lungo le geodetiche considerate sia $G = 0$, cioè abbiamo escluse le geodetiche di lunghezza nulla.

Le (15) per $i = 1, 2, \ldots, n$ definiscono anche per $n > 2$ le geodetiche, quando G sia assunto ad elemento lineare.

C) Derivate covarianti.

NB. Il lettore può leggere il resto di questo § man mano che esso sarà invocato nelle pagine seguenti; sarebbe troppo pesante leggerlo in una sola volta, almeno per chi non conosce già il calcolo assoluto.

Sia, per fissare la idee

$$B_3 = \Sigma\, b_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t \qquad (b_{rst} = b_{rts} = b_{srt} = \text{ecc.}) \tag{16}$$

una forma cubica di carattere *intrinseco*, cioè indipendente dalla scelta dei parametri indipendenti u_i. Differenziando, e sostituendo alle $d^2 u$ i loro valori dedotti da (6), si trova:

$$dB_3 = 3\, \Sigma\, b_{rst}\, \delta^2 u_r\, du_s\, du_t + \delta B_3 \tag{17}$$

ove si è posto

$$\delta B_3 = \Sigma\, b_{rsti}\, du_r\, du_s\, du_t\, du_i\,, \tag{18}$$

$$b_{rsti} = \frac{\partial b_{rst}}{\partial u_i} - \sum_q \begin{Bmatrix} r\,i \\ q \end{Bmatrix} b_{qst} - \sum_q \begin{Bmatrix} s\,i \\ q \end{Bmatrix} b_{rqt} - \sum_q \begin{Bmatrix} t\,i \\ q \end{Bmatrix} b_{rsq}\,. \tag{19}$$

La (18) si dirà la forma δB prima covariante della B, il sistema (19), generalmente non simmetrico, si dirà il sistema primo derivato covariante del sistema delle b_{rst}. Com' è evidente anche il primo termine del secondo membro di (17) *è intrinseco*, come B_3 e dB_3; altrettanto avverrà perciò del secondo termine δB_3.

Altrettanto si può dire per forme B_r intrinseche di grado qualunque r; in particolare

$$\left\{\begin{aligned} &\text{per } r = 1, \text{ se } B_1 = \Sigma\, b_r\, du_r\,, \text{ sarà:} \\ &\qquad dB_1 = \Sigma\, b_r\, \delta^2 u_r + \delta B_1\,, \quad \delta B_1 = \Sigma\, b_{ri}\, du_r\, du_i \\ &\qquad\qquad b_{ri} = \frac{\partial b_r}{\partial u_i} - \sum_q \begin{Bmatrix} r\,i \\ q \end{Bmatrix} b_q \end{aligned}\right. \tag{20}$$

$$\left\{\begin{aligned} &\text{per } r = 2, \text{ se } B_2 = \Sigma\, b_{rs}\, du_r\, du_s \ (b_{rs} = b_{sr}), \text{ sarà:} \\ &\quad dB_2 = 2\Sigma\, b_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s + \delta B_2\,, \quad \delta B_2 = \Sigma\, b_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t \\ &\qquad b_{rst} = \frac{\partial b_{rs}}{\partial u'_t} - \sum_q \begin{Bmatrix} r\,t \\ q \end{Bmatrix} b_{qs} - \sum_q \begin{Bmatrix} s\,t \\ q \end{Bmatrix} b_{qr}. \end{aligned}\right. \tag{21}$$

In particolare, se $B_2 = G = \Sigma a_{rs}\, du_r\, du_s$, è:

$$a_{rst} = \frac{\partial a_{rs}}{\partial u_t} - \sum_q \binom{r\,t}{q} a_{qs} - \sum_q \binom{s\,t}{q} a_{qr} = \frac{\partial a_{rs}}{\partial u_t} - \begin{bmatrix} r\,t \\ s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} s\,t \\ r \end{bmatrix} = 0$$

cioè, come avevamo già trovato in (B)

$$dG = 2\Sigma a_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s\,. \tag{11}$$

Cosicchè: *Il sistema derivato covariante del sistema fondamentale delle* a_{rs} *è nullo.*

Infine, se x è una forma intrinseca di grado $r = 0$, cioè se x è una funzione intrinseca, è:

$$\left\{\begin{aligned} & dx = \Sigma\, x_i\, du_i\,, \quad d^2x = \Sigma\, x_i\, \delta^2 u_i + \Sigma\, x_{rs}\, du_r\, du_s\,, \\ & d^3x = \Sigma\, x_i\, \delta^3 u_i + 3\, \Sigma\, x_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s + \Sigma\, x_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t\,, \end{aligned}\right. \tag{22}$$

ove:

$$\left\{\begin{aligned} & x_i = \frac{\partial x}{\partial u_i}\,; \quad x_{rs} = \frac{\partial^2 x}{\partial u_r\, \partial u_s} - \sum_q \binom{r\,s}{q} x_q\,; \\ & x_{rst} = \frac{\partial x_{rs}}{\partial u_t} - \sum_q \binom{r\,t}{q} x_{qs} - \sum_q \binom{s\,t}{q} x_{qr} \end{aligned}\right. \tag{23}$$

sono *le cosidette derivate covarianti prime e seconde della* x. *Si noti che, se ai* δ^2u *sostituiamo i* d^2u, *e alle derivate covarianti le derivate ordinarie, queste formole si riducono alle formole abituali; con cui del resto esse coincidono, se le* a_{rs} *sono costanti.*

D) **Una generalizzazione.**

Se du_i, $d'u_i$, $d''u_i$, ecc. sono altrettanti sistemi di differenziali primi, e se p. es. la forma trilineare

$$B_3 = \Sigma\, b_{rst}\, du_r\, d'u_s\, d''u_t\,,$$

ove non è più necessario supporre che b_{rst} sia simmetrico, ha carattere intrinseco, potremmo ripetere per essa un ragionamento analogo e chiamare primo sistema derivato covariante del sistema b_{rst}

quello definito da (19). Si trova di nuovo che

$$\Sigma\, b_{rsti}\, du_r\, d'u_s\, d''u_t\, d'''u_i$$

ha carattere intrinseco.

Noi porremo

$$b^{rst} = \sum_{l,j,h} A_{rl}\, A_{sj}\, A_{th}\, b_{ljh} \tag{24}$$

Sarà:

$$b_{rst} = \Sigma\, a_{rj}\, a_{sl}\, a_{th}\, b^{jlh}. \tag{25}$$

Notazioni analoghe saranno usate per sistemi binari, quaternari, ecc. (a 2, a 4 indici ecc.) In particolare

$$a^{rs} = \sum_{l,j} A_{rl}\, A_{sj}\, a_{lj} = \Sigma\, \varepsilon_{jr}\, A_{sj} = A_{rs} \tag{26}$$

$$(\varepsilon_{jj} = 1\,,\ \varepsilon_{jr} = 0 \text{ per } j \neq r).$$

I sistemi come b_{rst} sono i sistemi *covarianti* del Ricci, i sistemi b^{rst} i sistemi controvarianti. Se b^{rst} è controvariante, ed x, x', x'' sono tre funzioni intrinseche anche

$$\Sigma\, b^{rst}\, x_r\, x'_s\, x''_t$$

è intrinseco. Più avanti definiremo anche i sistemi misti.

E) I simboli a quattro indici e alcuni parametri differenziali.

Essendo per (26) A_{rs} un sistema controvariante, se ne deduce che i ben noti parametri differenziali

$$\Delta_1 x = \Sigma\, A_{rs}\, x_r\, x_s\ ,\quad \Delta_2 x = \Sigma\, A_{rs}\, x_{rs} \tag{27}$$

hanno significato intrinseco, se x è una funzione intrinseca.

Da (23) si deduce derivando:

$$x_{rst} - x_{rts} = \sum_{p,q} (st\,,\,pr)\, A_{pq}\, x_q \tag{28}$$

ove $(st\,,\,pr)$ è il noto simbolo di Riemann definito dalla:

$$(30)\quad (rk\,,\,ih) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 a_{rh}}{\partial u_i\,\partial u_k} + \frac{\partial^2 a_{ik}}{\partial u_r\,\partial u_h} - \frac{\partial^2 a_{ri}}{\partial u_h\,\partial u_k} - \frac{\partial^2 a_{hk}}{\partial u_r\,\partial u_i}\right) +$$

$$+ \sum_{l\,,\,m} A_{lm}\left(\begin{bmatrix} r\,h \\ m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} i\,k \\ l \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r\,i \\ m \end{bmatrix}\begin{bmatrix} h\,k \\ l \end{bmatrix}\right).$$

Il sistema delle $(rk\,,\,ih)$ è un sistema covariante; se $n = 2$, quelli dei simboli di Riemann che non sono nulli, a meno del segno, coincidono con $(12\,,\,12)$.

La frazione $\dfrac{(12\,,\,12)}{\mathrm{A}}$ *si chiama, se* n $= 2$, *la curvatura di* G.

F) **Relazioni di apolarità.**

Una forma intrinseca

$$\sum b_{rsth\ldots.}\, du_r\, du_s\, du_t\, du_h\ldots..$$

si dice *apolare* o *coniugata alla* G, se per ogni sistema di valori delle $t\,,\,h\,,\,\ldots.$ vale la:

$$(31)\qquad \sum_{r\,,\,s} A_{rs}\, b_{rsth\ldots.} = 0.$$

Questa relazione è intrinseca. *Così* $\mathrm{B} = \Sigma\, \mathrm{b}_{rs}\, \mathrm{du}_r\, \mathrm{du}_s$ *è apolare alla* G, *se*

$$(32)\quad \Sigma A_{rs} b_{rs} = 0 \text{ ossia, per } n = 2, \text{ se } a_{11} b_{22} + a_{22} b_{11} - 2a_{12} b_{12} = 0$$

ossia, posto

$$u_1 = u\;,\; u_2 = v\;,$$

se le radici dv : du *della* G $= 0$ *e della* B $= 0$ *si separano armonicamente.* Possiamo conservare questo enunciato anche nel caso finora escluso $A = 0$; così la relazione di apolarità per due forme quadratiche G, B diventa simmetrica.

Sempre supposto che anche B abbia significato intrinseco, ed

$A \neq 0$, *la forma*

$$(33)\ C = \frac{1}{\sqrt{|A|}} \begin{vmatrix} b_{11}du_1 + b_{12}du_2 & b_{12}du_1 + b_{22}du_2 \\ a_{11}du_1 + a_{12}du_2 & a_{12}du_1 + a_{22}du_2 \end{vmatrix} = \Sigma c_{rs}\, du_r\, du_s$$

impropriamente intrinseca *è una forma apolare ad entrambe ; se le forme date non sono proporzionali, se cioè* (33) *non è identicamente nullo, le forme quadratiche apolari alle* G , B *sono tutte e sole le forme proporzionali a* (33).

Se vale la (32), allora la forma B è apolare sia a G che a C. Ora C, essendo apolare alla G che ha il determinante $A \neq 0$, non può essere proporzionale a G; perciò, per il precedente teorema, esisterà un fattore λ tale che :

$$(34)\qquad B = \frac{\lambda}{\sqrt{|A|}} \begin{vmatrix} c_{11}\,du + c_{12}\,dv & c_{21}\,du + c_{22}\,dv \\ a_{11}\,du + a_{12}\,dv & a_{21}\,du + a_{22}\,dv \end{vmatrix}$$

Ricordando la (32) si trova che :

$$(35)\qquad \lambda = -\,sgn\, A = \pm 1.$$

§ 10. — Riassunto di alcuni teoremi metrici.

A) Triedri diretti e inversi.

Dato un sistema di assi cartesiani p. es. ortogonali x, y, z chiameremo positiva la faccia del piano xy volta verso il raggio positivo delle z. Siano date altre 3 rette orientate non complanari a, b, c uscenti da un punto O; la faccia del piano $a\,b$, volta verso la direzione positiva di c, si dirà la faccia positiva di tale piano nel considerato triedro. Se con un movimento portiamo a coincidere le faccie positive dei piani $x\,y$ ed $a\,b$, allora può avvenire che coincidano i versi delle rotazioni che attraverso l'angolo concavo portano il raggio (cioè la direzione positiva) a nel raggio b, oppure il raggio x nel raggio y. In questo caso diremo che il triedro $a\,b\,c$ è *diretto*, o che segue la legge di *orientazione* determinata dal sistema coordinato xyz, nel caso opposto diremo che abc è un triedro *inverso*, o che non segue la legge di orientazione. *Il determinante dei coseni direttori di* a, b, c *è positivo nel primo caso, negativo nel secondo. Le simmetrie portano triedri diretti in inversi e viceversa;* altrettanto avviene per i movimenti di 2ª specie.

B) Le forme fondamentali di Gauss di una superficie.

Una superficie S sia definita dando le coordinate x, y, z dei suoi punti in funzione di due parametri $u = u_1$, $v = u_2$. Le x_u, y_u, z_u sono proporzionali ai coseni direttori della tangente ad una linea $v =$ cost. di S; e il fattore di proporzionalità è positivo, se noi scegliamo quel verso della tangente che è diretto nel verso delle u crescenti. Proposizione analoga vale per le x_v, y_v, z_v. Come verso della normale scegliamo quello tale che il verso delle u crescenti su una $v =$ cost., il verso delle v crescenti su una $u =$ cost., e il verso della normale formino un triedro diretto; i coseni direttori X, Y, Z di questa direzione normale renderanno positivo il determinante (x_u, x_v, X). Con queste convenzioni è fissata *la faccia positiva del piano tangente alla* S *in un suo punto* A *e anche della stessa superficie* S, almeno in un intorno di A.

Un cambiamento di variabili coordinate u_i *cambia, o non cambia tale faccia positiva, secondo che il suo Iacobiano è positivo o negativo.*

La forme fondamentali di Gauss sono:

$$(1) \qquad ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2 = Sdx^2$$

$$(2) \qquad Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2 = SXd^2x = -SdXdx =$$

$$= \frac{(x_u, x_v, d^2x)}{\sqrt{EG - F^2}}.$$

La prima è intrinseca e invariante (per movimenti).

La seconda è impropriamente intrinseca, invariante per soli movimenti di prima specie, perchè cambia di segno per movimenti di seconda specie (oltre che per una trasformaz. dei parametri u_i a Iacobiano negativo).

In altre parole la seconda forma è completamente determinata soltanto se è data l'orientazione di S, cioè se è data la sua faccia positiva.

La prima forma è *l'elemento lineare* della S.

Date le forme (1), (2), la determinazione della superficie è ridotta all'integrazione del sistema

$$(3) \qquad x_{11} = DX \,, \quad x_{12} = D'X \,, \quad x_{22} = D''X \,,$$

$$(4) \qquad \begin{cases} X_u = \dfrac{FD' - GD}{EG - F^2}\, x_u + \dfrac{FD - ED'}{EG - F^2}\, x_v \,, \\[2ex] X_v = \dfrac{FD'' - GD'}{EG - F^2}\, x_u + \dfrac{FD' - ED''}{EG - F^2}\, x_v \,, \end{cases}$$

ove le x_{rs} indicano derivate covarianti rispetto all'*elemento lineare*, assunto a forma G fondamentale. Per questo elemento lineare i simboli di Christoffel di seconda specie, anzichè con $\left(\begin{smallmatrix} r\,s \\ t \end{smallmatrix}\right)$, si indicheranno con $\left\{\begin{smallmatrix} r\,s \\ t \end{smallmatrix}\right\}$, come abbiamo già detto (§ 9 A).

Le condizioni di integrabilità delle (3), (4) danno le equazioni di Codazzi, e l'equazione di Gauss

$$(5) \qquad \frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} = K \,,$$

ove K è la curvatura dell'elemento lineare. Esse sono le condizioni necessarie e sufficienti, affinchè (1) e (2) individuino una superficie [oltre alla $EG - F^2 > 0$, almeno nel campo reale; questa ultima è l'unica condizione a cui deve soddisfare la (1)].

Le linee per cui è nulla la (1) sono le linee di *lunghezza nulla* (immaginarie coniugate nel campo reale); quelle che annullano (2) sono le *asintotiche*. Da ogni punto O della superficie escono due asintotiche, coincidenti se $DD'' - D'^2 = 0$, ossia se la curvatura $K = 0$. L'essere identicamente soddisfatta questa condizione caratterizza le *sviluppabili* (e loro casi limiti).

Se $D' = 0$, le linee u, v sono *coniugate* e dividono *armonicamente* le asintotiche; se $\dfrac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} \log \dfrac{D}{D''}$ è in più nullo, cioè se si possono mutare i parametri delle u, v in guisa che $D \pm D'' = 0$, il sistema delle u, v dicesi *isotermo-coniugato.*

I piani tangenti in due punti consecutivi di una direzione di S si incontrano nella direzione coniugata; il piano osculatore alle asintotiche uscenti da un punto di S coincide col piano tangente ad S in questo punto.

C) Raggi e linee di curvatura.

Le rette normali generano una congruenza, le cui sviluppabili corrispondono a un sistema ortogonale coniugato: il sistema delle linee di curvatura. I fuochi di una normale diconsi centri di curvatura, le loro distanze r_1, r_2 dai piedi della normale raggi di curvatura. *Il prodotto* $\dfrac{1}{r_1 r_2}$ (curvatura totale della superficie) *coincide con la curvatura K* dell'elemento lineare. Soltanto sul piano e sulla sfera le linee di curvatura sono indeterminate.

D) Elemento lineare dell'immagine sferica.

Si considera sovente anche la terza forma

$$S dX^2 = e du^2 + 2f du dv + g dv^2 ,$$

completamente determinata dalle prime due; i relativi simboli di seconda specie di Christoffel si indicano con $\left\{ {ih \atop l} \right\}'$. Vale la:

$$(5)_{\text{bis}} \qquad \sqrt{\frac{eg - f^2}{EG - F^2}} = K = \frac{1}{r_1 r_2}.$$

E) Superficie applicabili.

Se due superficie S, S' hanno uguale elemento lineare, diconsi applicabili. Ciò significa che la corrispondenza biunivoca tra i punti delle due superficie che hanno uguali coordinate u, v conserva lunghezze e angoli. Cioè, se O è un punto di S ed A, B sono punti di S infinitamente vicini del primo ordine (con coordinate, la cui differenza da quelle di O dipende dai differenziali primi du, dv), e se O', A', B' sono i punti omologhi di S', allora $OA = O'A'$, $OB = O'B'$, l'angolo $A(O)B = A'(O')B'$. In altre parole esiste un movimento M, che porta O' in O e i punti infinitamente vicini ad O' del primo ordine nei punti omologhi infinitamente vicini ad O, cioè porta S' in una superficie $\overline{S}$, che con S ha comuni il punto O e i punti ad esso infinitamente vicini del primo ordine, ossia porta S' in una superficie $\overline{S}$ che con O ha un contatto *analitico* del primo ordine. Poichè O e i punti infinitamente vicini considerati si possono considerare complanari, è inutile distinguere i movimenti di prima o di seconda specie. *Il movimento* M *varierà con la coppia di punti omologhi* O , O' *considerati*, perchè, se così non fosse, uno stesso movimento M porterebbe S' in S; queste due superficie sarebbero uguali; pertanto avrebbero comune non solo l'elemento lineare, ma anche la seconda forma fondamentale (al più a meno del segno, se M è di seconda specie).

Se invece del contatto *analitico* imponessimo ad M di portare S' in una $\overline{S}$ tale che curve omologhe di S, $\overline{S}$ abbiano un contatto *geometrico*, basterebbe che su S, S' angoli omologhi fossero uguali, ossia che S, S' avessero elementi lineari proporzionali, o, come si suol dire, che S, S' fossero *conformemente applicabili.* In tal caso per ogni coppia di punti omologhi O, O' esiste una *similitudine* M che porta S' in una superficie $\overline{S}$ che con S ha in O un *contatto* analitico; e le S, S' si possono anche considerare come *applicabili nel gruppo delle similitudini.* Se poi questa similitudine M non variasse con la coppia di punti O, O' omologhi considerata, allora le superficie sarebbero *simili*; le loro seconde forme avrebbero un rapporto costante, il cui quadrato è uguale al rapporto dei loro elementi lineari.

§ 11. — Prime considerazioni di geom. proiettiva.

A) Le direzioni asintotiche.

Definiremo una superficie S, dando le coordinate omogenee x, y, z, t dei suoi punti in funzione di due parametri $u = u_1$ e $v = v_2$. Se per un momento con x', y', z', t' indichiamo coordinate correnti, l'equazione del piano tangente in un punto x di S è

$$(x\, x_u\, x_v\, x') = 0.$$

Poichè un punto di S infinitamente vicino al punto x ha le coordinate

$$x' = x + dx + \frac{1}{2} d^2x + \dots .$$

esso apparterrà al piano tangente se è nulla l'espressione

$$(1)\quad (x\, x_u\, x_v\, d^2x) = (x, x_u, x_v, x_{uu}\, du^2 + 2x_{uv}\, du\, dv + x_{vv}\, dv^2)$$

$\left(\text{ove } x_{uu} = \dfrac{\partial^2 x}{\partial u^2} \text{ ecc.}\right)$, che noi indicheremo con

$$(2)\qquad b_{11}\, du^2 + 2b_{12}\, du\, dv + b_{22}\, dv^2$$

$$(3)\quad b_{11} = (x\, x_u\, x_v\, x_{uu})\,;\ b_{12} = (x\, x_u\, x_v\, x_{uv})\,;\ b_{22} = (x\, x_u\, x_v\, x_{vv}).$$

Questa espressione, che evidentemente cambia soltanto per un fattore per una collineazione o per una trasformazione di parametri u, v, *definisce dunque, uguagliata a zero, le direzioni in cui il piano tangente taglia la superficie, cioè le asintotiche.* E del resto, se $t = 1$ ed x, y, z sono coordinate cartesiane ortogonali, essa coincide con $\sqrt{EG - F^2}\,(D du^2 + 2D' du dv + D'' dv^2)$. Noi *escluderemo sempre le superficie sviluppabili, cioè le superficie elementarissime per cui* $b_{11}\, b_{22} - b^2_{12} = 0$; e *trascureremo pure come eccezionali i punti in cui fosse* $b_{11}\, b_{22} - b^2_{12} = 0$. *Ammetteremo cioè sempre distinte le direzioni asintotiche uscenti da un punto della superficie.*

B) Le direzioni di Darboux.

Diconsi quadriche *osculatrici* in un punto O di S quelle che incontrano la superficie S in una linea che ha un punto *triplo* nel punto O (così come piano tangente in O è quello che incontra S in una linea che ha in O un punto *doppio*). Supponiamo $t = 1$, che $z = 0$ sia il piano tangente in O; varrà allora uno sviluppo

$$z = \varphi(x, y) + \psi(x, y) + \dots \tag{4}$$

ove φ è un polinomio omogeneo di secondo grado in x, y, ψ è omog. di terzo grado in $x . y$ e dove sono trascurati i termini di grado superiore al terzo. Le quadriche osculatrici saranno le quadriche di equazione:

$$\nu(z - \varphi) + z(\lambda x + \mu y + nz) = 0 \quad (\lambda, \mu, \nu, n = \text{cost.}) \tag{5}$$

che incontrano la superficie in una linea determinata da (4) e da:

$$\nu\psi + \varphi(\lambda x + \mu y) + \dots = 0 \tag{6}$$

ove, come sopra, sono trascurati i termini di grado superiore al terzo.

Le 3 tangenti alla linea d' intersezione hanno nel piano tangente $r = 0$ l' equazione

$$\nu\psi + \varphi(\lambda x + \mu y) = 0. \tag{7}$$

Questo sistema lineare di terne di rette uscenti da O ha dunque una equazione identica alla (3) del § 4, *A*. In virtù dei risultati allora ottenuti abbiamo:

Tra le terne (7) *ve ne sono soltanto tre formate da tre direzioni coincidenti; le tre direzioni così determinate appartengono a loro volta ad una delle terne* (7): *a quella unica terna che è apolare a* φ. *Esse si dicono le direzioni di Darboux.*

Le quadriche osculatrici a cui corrisponde come terna (7) la terna delle direzioni di Darboux diconsi *quadriche di Darboux*. Se (5) è una di esse, le altre se ne deducono facendo variare n. Perciò:

Le quadriche di Darboux formano un fascio, cui appartiene la quadrica $z^2 = 0$ *formata dal piano tangente contato due volte (fascio di Darboux).*

Al sistema lineare (7) si perviene anche in altro modo. Tenuti fissi gli assi delle x, y e i punti unità di questi assi facciamo variare l'asse delle z; poniamo cioè:

$$z = hz' \,, \quad x = x' + mz' \,, \quad y = y' + pz'.$$

La (4) si muta in:

$$hz' = \varphi(x' + mz' \,, y' + pz) + \psi(x' \,, y') + \ldots .$$

ove, come sopra, non si sono scritti i termini di grado superiore al terzo in x', y'. E questa equazione equivale appunto alla:

$$(8) \qquad z' = \frac{1}{h}\,\varphi(x' \,, y') + \left[\nu\psi(x' \,, y') + (\lambda x' + \mu y')\,\varphi(x' \,, y')\right] + \ldots ,$$

ove $h = \dfrac{1}{\nu}$, e dove λ, μ sono parametri, che, al variare di l, m possono assumere valori arbitrarii. Come si vede, i termini di terzo grado descrivono precisamente il sistema lineare (7). Potremo dunque scegliere l'asse delle z in guisa che essi formino un polinomio *apolare* alla φ; e, se ad assi delle x, y abbiamo assunto le direzioni asintotiche, lo sviluppo assumerà la forma canonica:

$$(9) \qquad z = kxy + \frac{1}{6}\,(Ax^3 + Dy^3) + \ldots .$$

Se l'asse delle z fosse stato scelto a caso, e quindi lo sviluppo fosse più generalmente

$$z = kxy + \frac{1}{6}\,(Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3) + \ldots ,$$

le direzioni di Darboux sarebbero sempre quelle definite dalla:

$$Ax^3 + Dy^3 = 0.$$

Le direzioni coniugate di queste, per cui quindi $Ax^3 - Dy^3 = 0$, *diconsi le direzioni di Segre.*

§ 12. — Le forme differenziali fondamentali.

A) Primo metodo.

N. B. Il lettore può accontentarsi di studiare il secondo metodo dato in (B); chi vuole conoscere altri metodi veda le Mem. di Fubini, ove tali forme furono date per la prima volta.

Poniamo (cfr. le (1), (2) del § 11 A):

$$F_2 = \lambda(x\, x_u\, x_v\, d^2x) = \lambda \Sigma b_{rs}\, du_r\, du_s\,, \tag{1}$$

$$\Phi_3 = \lambda(x\, x_u\, x_v\, d^3x) - \frac{3}{2}\, dF_2\,, \tag{2}$$

ove λ è una funzione delle u, v. Queste forme, una *quadratica*, l'altra *cubica*, dipendono dai soli differenziali *primi* delle u, v. Data la superficie S, queste forme variano:

α) quando si esegua sulle x una collineazione a coefficienti costanti,

β) quando si moltiplichino le x, y, z, t per uno stesso fattore $\rho(u, v)$,

γ) quando si muti la funzione λ,

δ) quando si mutino i parametri u, v.

Un facile calcolo prova che in tutti questi casi, e perciò anche quando su S si esegue una collineazione qualsiasi, tali forme subiscono una trasformazione del tipo:

$$\overline{F}_2 = \theta F_2\,, \quad \overline{\Phi}_3 = \theta\Phi_3 + (h du + k dv)F_2 \tag{3}$$

Queste formole hanno una notevole interpretazione geometrica. Posto infatti $t = 1$, $x = u$, $y = v$, $\lambda = -1$:

$$F_2 = d^2z - z_x d^2x - z_y d^2y = z_{xx}dx^2 + 2z_{xy}dxdy + z_{yy}dy^2$$

$$\Phi_3 = (d^3z - z_x d^3x - z_y d^3y) - \frac{3}{2} dF_2 =$$

$$= -\frac{1}{2}(z_{xxx}dx^3 + 3z_{xxy}dx^2dy + 3z_{xyy}dxdy^2 + z_{yyy}dy^3)$$

Se nell'intorno del punto $O(x = y = z = 0)$ della nostra superficie è:

$$z = \varphi(x\,,\,y) + \psi(x\,,\,y) + \ldots$$

ove φ è omogeneo di secondo grado, ψ di terzo, allora nell'intorno del punto considerato si ha:

$$(4)\qquad F_2 = \frac{1}{2}\,\varphi(dx\,,\,dy) + \ldots\,;\quad \Phi_3 = -\,3\psi(dx\,,\,dy) + \ldots .$$

cioè per i risultati del § 3:

La $F_2 = 0$ *determina le direzioni asintotiche, la* $\Phi_3 = 0$ *una delle terne di direzioni in cui la superficie è incontrata da una quadrica osculatrice;* la indeterminazione per Φ_3 è proprio la stessa che avevamo trovato per queste terne di direzioni.

Sorge così l'idea *se non sia possibile rendere* Φ_3 *apolare ad* F_2 *così che la* $\Phi_3 = 0$ *definisca proprio le direzioni di Darboux.* Il risultato fondamentale, che ora proveremo, è che *ciò si ottiene semplicemente ponendo:*

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt[4]{|\,b_{11}\,b_{22} - b^2_{12}\,|}}$$

che cioè la forma

$$(5)\qquad F_3 = \frac{1}{\sqrt[4]{|\,b_{11}\,b_{22} - b^2_{12}\,|}}\,(x\;x_u\;x_v\;d^3x) - \frac{3}{2}\,dF_2$$

è apolare alla

$$(6)\qquad F_2 = \frac{1}{\sqrt[4]{|\,b_{11}\,b_{22} - b^2_{12}\,|}}\,(x\;x_u\;x_v\;d^2x).$$

Avremo così conseguito insieme il risultato fondamentale di *scrivere l'equazione* $F_3 = 0$ *delle linee di Darboux in coordinate curvilinee* u , v *qualsiasi, e in qualunque sistema di coordinate omogenee* x , y , z , t.

Infatti, posto $B = b_{11}\,b_{22} - b^2_{12}$, $F_3 = \dfrac{1}{\sqrt[4]{|\,B\,|}}\,\Sigma\, b_{rst}\;du_r\;du_s\;du_t$

con b_{rst} simmetrico in r, s, t, si ha:

$$b_{111} = (x\ x_u\ x_v\ x_{uuu}) - \frac{3}{2}\frac{\partial b_{11}}{\partial u} + \frac{3}{8} b_{11} \frac{B_u}{B},$$

$$b_{112} = b_{121} = b_{211} = (x\ x_u\ x_v\ x_{uuv}) - \frac{1}{2}\frac{\partial b_{11}}{\partial v} - \frac{\partial b_{12}}{\partial u} +$$

$$+ \frac{1}{8}\left(b_{11}\frac{B_v}{B} + 2b_{12}\frac{B_u}{B}\right)$$

e analoghe per b_{222}, b_{221}. Quindi:

$$b_{22}\, b_{111} + b_{11}\, b_{221} - 2b_{12}\, b_{121} = b_{22}\left[(x\ x_u\ x_v\ x_{uuu}) - \frac{\partial b_{11}}{\partial u}\right] +$$

$$+ b_{11}\left[(x\ x_u\ x_v\ x_{uvv}) - \frac{\partial b_{12}}{\partial v}\right]$$

$$- 2b_{12}\left[(x\ x_u\ x_v\ x_{uuv}) - \frac{1}{2}\frac{\partial b_{12}}{\partial u} - \frac{1}{2}\frac{\partial b_{11}}{\partial v}\right] =$$

$$= -(x\ x_u\ x_v\ x_{vv})(x\ x_u\ x_{uv}\ x_{uu}) - (x\ x_u\ x_v\ x_{uu})(x\ x_u\ x_{vv}\ x_{uv}) +$$

$$+ (x\ x_u\ x_v\ x_{uv})(x\ x_u\ x_{vv}\ x_{uu})$$

che è identicamente nullo, come si vede p. es. portando con una collineazione i punti x, x_u, x_v, x_{uv} nei vertici del tetraedro di riferimento (*). In modo simile si prova che anche:

(*) Ciò si può anche provare in modo diretto, osservando che, aggiungendo alla matrice $(x\ x_u\ x_{uu}\ x_{uv}\ x_{vv})$ una riga uguale alla prima, si ottiene un determinante nullo. Perciò:

$$x(x_u\ x_{uu}\ x_{uv}\ x_{vv}) - x_u\ (x\ x_{uu}\ x_{uv}\ x_{vv}) + x_{uu}\,(x\ x_u\ x_{uv}\ x_{vv}) - x_{uv}\ (x\ x_u\ x_{uu}\ x_{vv}) +$$

$$+ x_{vv}(x\ x_u\ x_{uu}\ x_{uv}) = 0.$$

Analoghe identità si ottengono sostituendo alla x la y, oppure la z, oppure la t. Moltiplicandole rispettivamente per i complementi algebrici di X, Y, Z, T in $(x\ x_u\ x_v\ X)$ e sommando si ottiene l' identità del testo.

$$b_{11}\, b_{222} + b_{22}\, b_{112} - 2b_{12}\, b_{122} = 0 \;;$$

quindi F_3 è apolare ad F_2. Dalla stessa definizione (5) e (6) segue:

Le forme F_2, F_3 *sono impropriamente intrinseche, invarianti per collineazioni unimodulari, restano moltiplicate per* ρ^4 *se si esegue una collineazione di fattore* ρ, *e per* -1 *se si esegue una collineazione a modulo* -1 oppure un cambiamento di variabili u, v a Iacobiano negativo.

Il loro rapporto $F_3 : F_2$ *è perciò intrinseco invariante, e sarà detto elemento lineare proiettivo.*

Posto

$$F_2 = \Sigma\, a_{rs}\, du_r\, du_s \;, \quad \text{è} \tag{7}$$

$$a_{11}\, a_{22} - a^2_{12} = A = -\varepsilon \sqrt{|\, b_{11}\, b_{22} - b^2_{12}\,|} \tag{8}$$

ove $\qquad \varepsilon = -\, sgnA = -\, sgn(b_{11}\, b_{22} - b^2_{12}) = \pm 1.$

Assunta la forma (impropriamente) intrinseca F_2 a forma fondamentale di un calcolo assoluto, valgono le:

$$(9)\quad \left\{ \begin{aligned} F_2 &= \frac{1}{\sqrt{|A|}}\,(x\; x_u\; x_v\; d^2x) = \frac{1}{\sqrt{|A|}}\,(x\; x_u\; x_v\; \Sigma\, x_{rs}\, du_r\, du_s) \\ dF_2 &= 2\,\Sigma\, a_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s = \frac{2}{\sqrt{|A|}}\,(x\; x_u\; x_v\; \Sigma\, x_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s) \\ d^3x &= \Sigma\, x_r\, \delta^3 u_r + 3\,\Sigma\, x_{rs}\, du_r\, \delta^2 u_s + \Sigma\, x_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t \\ F_3 &= \frac{1}{\sqrt{|A|}}\,(x\; x_u\; x_v\; \Sigma\, x_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t) \end{aligned} \right.$$

Confrontando il precedente valore di dF_2 con quello ottenuto derivando, si trova anche la:

$$(9)_{\text{bis}}\qquad F_3 = \frac{1}{\sqrt{|A|}}\,(x\,,\; x_{11}\, du + x_{12}\, dv\,,\; x_{21}\, du + x_{22}\, dv\,,\; dx)$$

Altre espressioni notevoli per F_2, F_3 troviamo in *B)*.

B) Nuovo metodo per definire le F_2, F_3.

Diciamo *positivo* quel verso nel fascio delle rette tangenti uscenti da un punto x che corrisponde al verso di $\mu : \lambda$ crescente nel fascio che da x proietta la punteggiata $\lambda x_u + \mu x_v$. Esso è *impropriamente* intrinseco, perchè si inverte se le u, v subiscono una trasformazione a Iacobiano negativo.

Le coordinate ξ del piano tangente soddisfano alle:

$$(10) \qquad S\xi x = S\xi x_u = S\xi x_v = 0\,, \quad \text{donde segue } Sx\xi_u = Sx\xi_v = 0$$

e sono perciò date dalle:

$$(11) \qquad \xi = \lambda(x\; x_u\; x_v)$$

dove λ è un fattore di proporzionalità, che deve essere *positivo* se si vuole che il verso positivo del fascio (x, ξ) definito nell'Introd. coincida col precedente. Dalle stesse (10) segue anche:

$$(12) \qquad x = \mu(\xi\; \xi_u\; \xi_v)$$

Poniamo:

$$(13) \qquad F_2 = S\xi d^2x = \Sigma a_{ik}\, du_i\, du_k\,.$$

Sarà per le (10) anche:

$$(13)_{\text{bis}} \qquad F_2 = -Sd\xi dx = Sxd^2\xi$$

e quindi:

$$(14) \qquad a_{ik} = S\xi x_{ik} = -S\xi_i\, x_k = -S\xi_k\, x_i = Sx\xi_{ik}$$

E sarà pure

$$(14)_{\text{bis}} \qquad a_{ik} = \lambda(x\; x_u\; x_v\; x_{ik}) = \mu(\xi\; \xi_u\; \xi_v\; \xi_{ik})\,,$$

cosicchè:

$$F_2^2 = \lambda\mu(x\; x_u\; x_v\; d^2x)\,(\xi\; \xi_u\; \xi_v\; d^2\xi) = \lambda\mu \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & F_2 \\ 0 & -a_{11} & -a_{12} & L \\ 0 & -a_{21} & -a_{22} & M \\ F_2 & P & Q & R \end{vmatrix}$$

ove è inutile esplicitare L, M, P, Q, R, ossia:

$F_2^2 = -\lambda\mu A F_2^2$, così che $1 = -\lambda\mu A = \varepsilon\mu\lambda\,|A|$ ove $\varepsilon = -\,sgn A$

Dovendo essere $\lambda > 0$, μ avrà il segno ε di $-A$; e noi facciamo una convenzione *intrinseca* supponendo $\lambda = \varepsilon\mu = \dfrac{1}{\sqrt{|A|}}$.

Quindi:

$$(15)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{1}{\sqrt{|A|}}(x\, x_u\, x_v) \qquad x = \dfrac{\varepsilon}{\sqrt{|A|}}(\xi\, \xi_u\, \xi_v) \\ \varepsilon = -\,sgn A \\ (x\, x_u\, x_v\, d^2x) = \sqrt{|A|}\, F_2 = \varepsilon(\xi\, \xi_u\, \xi_v\, d^2\xi) \end{cases}$$

Si noti poi che con queste convenzioni

$$(16)\quad A = a_{11}a_{22} - a^2_{12} = \lambda^2\left[(x\, x_u\, x_v\, x_{uu})(x\, x_u\, x_v\, x_{vv}) - (x\, x_u\, x_v\, x_{uv})^2\right]$$

Poichè $\lambda^2 = 1 : |A|$, sarà:

$$(16)_{\text{bis}}\quad \begin{cases} \varepsilon = -\,sgn\left\{(x\, x_u\, x_v\, x_{uu})\,(x\, x_u\, x_v\, x_{vv}) - \right. \\ \qquad\qquad \left. - (x\, x_u\, x_v\, x_{uv})^2\right\} = -\,sgn\, A \\ \lambda = \dfrac{1}{\sqrt{|A|}} = \left|(x\, x_u\, x_v\, x_{uu})(x\, x_u\, x_v\, x_{vv}) - (x\, x_u\, x_v\, x_{uv})^2\right|^{-\frac{1}{4}} \end{cases}$$

La forma F_2 coincide con la F_2 precedente; è impropriamente intrinseca, invariante per collineaz. unimodulari ecc.

Data la F_2, *i fattori di proporzionalità per le coordinate* x, ξ *di punto e piano tangente sono determinati a meno di un contemporaneo cambiamento di segno.*

Derivando le (13) e $(13)_{\text{bis}}$ si trova:

$$dF_2 = S\xi d^3x + Sd\xi d^2x = -\,Sd\xi d^2x - Sdx d^2\xi = Sdx d^2\xi + Sx d^3\xi.$$

Studiamo i singoli termini del 2°, 3°, 4° membro. Essi contengono i differenziali *secondi*, e, data F_2, sono tutti completamente determinati se si dà ancora (C)

$$F_3 = \frac{1}{2} S(dx d^2\xi - d\xi d^2 x), \tag{17}$$

la quale espressione dipende solo dai differenziali *primi*. Infatti

$$S dx d^2\xi = S \Sigma x_i \xi_k du_i \delta^2 u_k + S \Sigma x_i \xi_{rs} du_i du_r du_s =$$

$$= - \Sigma a_{ik} du_i \delta^2 u_k + \Sigma (S x_i \xi_{rs}) du_i du_r du_s$$

insieme alla formola analoga per $S d\xi d^2 x$; cosicchè:

$$F_3 = \frac{1}{2} \Sigma S(x_i \xi_{rs} - \xi_i x_{rs}) du_i du_r du_s . \tag{17 bis}$$

Noi porremo:

$$F_3 = \Sigma a_{rst} du_r du_s du_t ; \tag{18}$$

non vi è possibilità di equivoco; con a_{rst} non val la pena di indicare le derivate covarianti della a_{rs}, che sono (§ 9 C) identicamente nulle. Anzi, derivando covariantemente (14), si trova:

$$\begin{aligned} S\xi x_{rst} &= - S\xi_r x_{st} = - S\xi_s x_{rt} = - S\xi_t x_{rs} = \\ &= S x_r \xi_{st} = S x_s \xi_{rt} = S x_t \xi_{rs} = - S x \xi_{rst} . \end{aligned} \tag{19}$$

E quindi

$$a_{rst} = S\xi x_{rst} \tag{19 bis}$$

in modo completamente conforme all' ultima delle (9).

Si noti che anche F_3 è, come F_2, impropriamente intrinseco, perchè tale è il metodo con cui, date le x, abbiamo fissate le ξ.

C) Le forme F_2, F_3 nella geometria metrica.

Sia $t = 1$, siano x, y, z coordinate cartesiane ortogonali; siano X, Y, Z i coseni direttori della normale. La (16) bis dà

$$\lambda = \left| (EG - F^2)(DD'' - D'^2) \right|^{-\frac{1}{4}} \tag{20}$$

Percio

$$F_2 = -\lambda(x_u\, x_v\, d^2x) = -\lambda(x_u\, x_v\, X)\,(Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2)$$

E, se le X sono scelte in guisa che $(x_u\, x_v\, X) > 0$, sarà:

$$(21)\quad F_2 = -\left|\sqrt[4]{\frac{EG-F^2}{DD''-D'^2}}\right|(Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2) = -\frac{Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2}{\sqrt[4]{|K|}}$$

Siano $\xi = \nu X$, $\eta = \nu Y$, $\zeta = \nu Z$, τ le coordinate del piano tangente. È

$$F_2 = S\xi d^2x = \nu SXd^2x = \nu(Ddu^2 + 2D'dudv + D''dv^2).$$

Perciò

$$(22)\qquad \nu = -\frac{1}{\sqrt[4]{|K|}}$$

$$(23)\quad F_3 = \frac{1}{2}dS(dxd\xi) - Sd\xi d^2x = -\frac{1}{2}\nu d(SXd^2x) - \frac{3}{2}d\nu\, SXd^2x - \nu SdXd^2x.$$

Ora le equaz. fondamentali della geometria metrica danno.

$$SXd^2x = +\Sigma D_{rs}\,du_r\,du_s \qquad (D_{11} = D\,;\ D_{12} = D'\,;\ D_{22} = D'')$$

$$dSXd^2x = \Sigma D_{rst}\,du_r\,du_s\,du_t + 2\Sigma D_{rs}\,du_r\,\delta^2 u_s\,;$$

$$SdXd^2x = -\Sigma D_{rs}\,du_r\,\delta^2 u_s\,.$$

Trattandosi di questioni metriche, i differenziali controvarianti $\delta^2 u$ e le derivate D_{rst} covarianti sono state calcolate secondo l'elemento lineare di Gauss; cosicchè, per le equazioni di Codazzi, le D_{rst} formano un sistema simmetrico. Quindi

$$(24)\quad F_3 = \frac{1}{2\sqrt[4]{|K|}}\left(\Sigma D_{rst}\,du_r\,du_s\,du_t - \frac{3}{4}\Sigma D_{rs}\,du_r\,du_s\,d\log|K|\right)$$

Che F_3 sia apolare ad F_2 si dimostra p. es. osservando che:

$$d\log K = d\log\frac{DD'' - D'^2}{EG - F^2} = (D_{111} D_{22} - 2D_{112} D_{12} + D_{11} D_{122})du +$$

$$+ (D_{112} D_{22} - 2D_{122} D_{12} + D_{11} D_{222})dv$$

oppure, più semplicemente, usando coordinate u, v asintotiche. Allora $D = D'' = 0$ ed F_3 si riduce, a meno di un fattore, ad $\left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} du^3 + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} dv^3$, ove i simboli $\left\{ \quad \right\}$ sono i simboli di Christoffel calcolati per l'elemento lineare.

La forma $\Sigma D_{rst}\, du_r\, du_s\, du_t$ definisce, uguagliata a zero, le direzioni comuni alla superficie e ad una delle quadriche osculatrici. Tale forma vale

$$ds^2 d\left(\frac{1}{R_n}\right) - 2\frac{ds^3}{T_g R_g},$$

ove $\dfrac{1}{R_n}$, $\dfrac{1}{R_g}$, $\dfrac{1}{T_g}$ sono la curvatura normale e geodetica, e la torsione geodetica.

D) Una osservazione.

La $F_3 = 0$ definisce le linee di Darboux; se addottiamo la (17) come definizione di F_3, il fattore di proporzionalità delle ξ deve essere scelto non in modo arbitrario, ma col metodo precisato in *B)*. Se scegliamo invece tale fattore in modo arbitrario, la

$$\frac{1}{2} S(dx d^2\xi - d\xi d^2 x)$$

varia nel sistema lineare $6F_3 + (hdu + kdv)F_2$; cioè è una delle forme Φ_3 definite in A e definisce la terna di direzioni comuni alla superficie e ad una quadrica osculatrice. Perciò il fissare, come in B, il fattore di proporzionalità delle ξ equivale a scegliere, tra le quadriche osculatrici, una quadrica di Darboux.

§ 13. — Prime applicazioni.

A) Superficie correlative.

Le (13), $(13)_{\text{bis}}$ e (17) del § 12 dimostrano che *non solo le collineazioni, ma anche le correlazioni conservano le asintotiche e le linee di Darboux.*

Se O, O' sono punti consecutivi di una linea di Darboux, su una superficie correlativa ad O, O' corrispondono due piani tangenti π, π' consecutivi, i cui punti di contatto sono consecutivi su una linea di Darboux, e che quindi si tagliano nella direzione a questa coniugata: cioè (§ 11 B) su una *linea di Segre.* Sia S' correlativa ad S; allora le coordinate ξ' di un suo piano tangente si possono supporre coincidere con le coordinate x del punto omologo di S, cosicchè, per i risultati del § 12 B, le coordinate x' del punto generico di S', varranno $\varepsilon \cdot \xi$. Quindi le forme di S' saranno:

$$F'_2 = \varepsilon F_2 \quad F'_3 = -\varepsilon F_3 \tag{1}$$

e le due superficie avranno elementi lineari proiettivi uguali e di segno opposto.

Osserv. Per le nostre convenzioni il verso positivo nel fascio tangente in x ad S corrisponde al verso di $\mu : \lambda$ crescente sulla punteggiata $\lambda x_u + \mu x_v$, cioè è il verso positivo nel fascio (x, ξ) perchè $\xi : (x\, x_u\, x_v) > 0$.

Poichè $x : (\xi\, \xi_u\, \xi_v)$ ha il segno di ε, tale verso è il verso positivo del fascio che ha per sostegno la retta $(\xi_u\, \xi_v)$, o il verso opposto secondo che $\varepsilon > 0$ oppure $\varepsilon < 0$, ossia secondo che le asintotiche sono reali o complesse. E ciò è intuitivo. La retta da x ad $x + dx$ è coniugata della retta intersezione dei piani ξ, $\xi + d\xi$, e perciò con questa separa armonicamente le asintotiche; le due rette ruotano pertanto nello stesso verso soltanto se le asintotiche sono complesse, ossia se $\varepsilon < 0$, cioè appunto quando sono concordi i versi della punteggiata (x_u, x_v), del fascio (x, ξ) e del fascio di piani (ξ_u, ξ_v). Ecco il significato geometrico della ε!

B) **Significato geometrico del fattore di proporzionalità delle ξ.**

Le superficie S, S' siano due superficie che si toccano lungo una linea L, che assumiamo su entrambe a linea $v = 0$: la direzione coniugata alla direzione di L in un punto qualsiasi di L sarà la stessa su S, S'; supponiamo che le linee $u = cost.$ siano su S, S' tangenti per $v = 0$ a tali direzioni coniugate. Potremo dunque supporre che per $v = 0$ sia:

$$x = x', \quad x_u = x'_u, \quad x_{uu} = x'_{uu}, \quad \sigma x_v = x'_v$$

$(\sigma =$ fattore di proporzionalità$)$.

Anzi, mutando su una delle S, S' il parametro v in un altro che si annulli per $v = 0$ e che altrove abbia lo stesso segno di v, potremo rendere $\sigma = \pm 1$, senza così mutare la faccia scelta come positiva su S ed S'. Sarà allora per $v = 0$

$$\xi' = \sqrt{|A : A'|}\,\sigma\xi \qquad a'_{11} = \sqrt{|A : A'|}\,\sigma a_{11} \qquad a_{12} = a'_{12} = 0$$

$$A : A' = a_{11}\,a_{22} : a'_{11}\,a'_{22}, \text{ donde } a'_{22} = (A' : A)\sqrt{|A' : A|}\,\sigma a_{22}$$

ossia $$S\xi' x'_{vv} = (A' : A)\sqrt{|A' : A|}\,\sigma S\xi x_{vv},$$

ossia $$S\xi\left[\sigma\sqrt{|A : A'|}\,x'_{vv} - \frac{A'}{A}\sqrt{|A' : A|}\,\sigma x_{vv}\right] = 0$$

cioè

$$x'_{vv} - (A' : A)(|A' : A|)x_{vv}, \text{ così come } x_{uu} - x'_{uu} = 0, \; x_{uv}, \; x'_{uv}$$

sono per $v = 0$ combinazioni lineari di x, x_u, x_v.

Confrontando con (3) e (4) del § 3, B, si trova che il contatto delle due superficie è del secondo ordine soltanto se

$$(A' : A)(|A' : A|) = \sigma^2 = 1, \text{ cioè se } A = A'$$

e quindi: $$\xi' = \sigma\xi \quad (\text{con } \sigma = \pm 1).$$

Dunque: *Se due superficie* S, S' *a punti contemporaneamente ellittici o iperbolici* (così che A, A hanno lo stesso segno) *si toccano lungo una linea* L *non asintotica, il contatto è del second' or-*

dine soltanto se (tutt'al più a meno del segno) *hanno comuni su* L *le coordinate di punto e di piano tangente* (normate secondo le convenzioni del § 12 *B*).

Nel caso generale le direzioni asintotiche delle due superficie in un punto di L sono date da

$$a_{11}\,du^2 + a_{22}\,dv^2 = 0 \quad \text{e} \quad a'_{11}\,du^2 + a'_{22}\,dv^2 = 0\,,$$

di cui la seconda vale:

$$a_{11}\,du^2 + a_{22}(A' : A)\,(|A' : A|)dv^2 = 0\,,$$

ossia

$$\eta h^4 a_{11}\,du^2 + a_{22}\,dv^2 = 0\,, \quad \text{ove} \quad \eta = sgn\,\frac{A'}{A}\,, \quad h = \sqrt{|A : A'|}$$

mentre è:
$$\xi' : \xi = 6h.$$

Perciò: *Se due superficie si toccano lungo una linea* L *non asintotica, e se poniamo* $\eta = 1$ *quando esse sono entrambe ad asintotiche reali o complesse, ed uguale a* -1 *quando una è ad asintotiche reali, l'altra ad asintotiche complesse, allora il birapporto delle quattro direzioni asintotiche contate in un certo ordine vale*

$$\left(\frac{1-\sqrt{\eta}\,h^2}{1+\sqrt{\eta}\,h^2}\right)^2,$$

ove h *è* $\pm\frac{\xi'}{\xi}$, *cioè è, a meno del segno, il rapporto delle coordinate di piano tangente per* S, S' *in un punto* $x = x'$ *di* L.

In altre parole la tangente $dv^2 = 0$ *alla* L *contata due volte, la tangente coniugata* $du^2 = 0$ *pure contata due volte, e le due coppie di tangenti asintotiche* $du^2 : dv^2 = -a_{22} : a_{11}$ *e* $du^2 : dv^2 = -a_{22} : \eta h^4 a_{11}$ *appartengono a una stessa involuzione e formano il birapporto* ηh^4.

Se la linea L è di Darboux per S, sarà (per $v = 0$) $S\xi_u\,x_{uu} = S\xi_{uu}\,x_u$ per la (17) del § 12 B; quindi sarà:

$$(2) \qquad 6S(\xi'_u\,x'_{uu} - \xi'_{uu}\,x'_u) =$$

$$= S\Big[(h\xi_u + \xi h_u)x_{uu} - x_u\,(h\xi_{uu} + 2h_u\,\xi_u + \xi h_{uu})\Big] =$$

$$= hS(\xi_u\, x_{uu} - x_u\, \xi_{uu}) + 3h_u\, a_{11},$$

che è nullo soltanto se $h_u = 0$. Dunque:

Se due superficie si toccano in una linea L *non asintotica, che è linea di Darboux di una, essa è anche linea di Darboux per l'altra soltanto se i precedenti birapporti sono costanti lungo* L (*). *In particolare, se nei punti di* L *le due superficie hanno comune una, e quindi entrambe le direzioni asintotiche, se* L *è linea di Darboux per una, essa è linea di Darboux anche per l'altra.*

Dimostreremo ben presto che le linee $F_3 = 0$ di una superficie rigata non sviluppabile si riducono alle generatrici ed a una linea che incontra ogni generatrice generalmente in due punti: linea che diremo la linea *flecnodale* della rigata (la quale dunque, insieme alle generatrici, esaurisce le linee di Darboux della rigata stessa). Avremo dunque dal teor. precedente:

Le linee di Darboux L *di una superficie* S *che non sono anche asintotiche sono caratterizzate da ciò che le rigate formate dalle tangenti tirate nei punti di* L *ad uno dei sistemi di asintotiche di* S *hanno* L *come linea flecnodale; se ciò avviene per le asintotiche di un sistema, altrettanto avviene per l'altro.*

La (2), scritta nell'ipotesi che due superficie si tocchino lungo la linea $v = 0$, diventa nell'ipotesi che la linea di contatto sia qualunque:

$$(3)\quad F'_3 = \pm h\left(F_3 + \frac{3}{2} F_2 \frac{dh}{h}\right) \quad \text{(lungo la linea di contatto).}$$

Supposta S' rigata e quindi formata da rette tangenti ad S nei punti di L, questa linea L sarà flecnodale per S' se

$$\frac{dh}{h} = -\frac{2}{3}\,\frac{F_3}{F_2}.$$

(*) A pag. 35 della Mem. (Courbes tracées sur une surface dans l'espace affine). (Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Masaryk, Brno, 1923, n. 28) Čech ha dimostrato che:

Se due superficie S *ed* S' *hanno contatto del secondo ordine almeno lungo una curva* C, *che è curva di Segre per* S, *condizione necessaria e sufficiente affinchè* C *sia curva di Segre anche per* S' *è che il contatto sia del terzo ordine almeno.*

Quindi:

Le tangenti ad una superficie S *uscenti dai punti di una linea* L *non asintotica si possono distribuire in* ∞^1 *rigate, per cui* L *è flecnodale. Consideriamo in ogni punto di* L *la tangente ad* L *contata due volte, la tangente coniugata pure contata due volte, la coppia delle asintotiche di* S *e la coppia delle asintotiche di una di queste rigate, che tutte appartengono ad una stessa involuzione. Il birapporto* φ *di queste quattro coppie è determinato dalla* $d\log\varphi = -\dfrac{8}{3}\dfrac{F_3}{F_2}$. *Ecco il significato geometrico trovato da Čech per l'elemento lineare proiettivo!*

Osserv. 1.ª Le considerazioni precedenti non si applicano al caso che la L, assunta a linea $v=0$, sia asintotica. Se le $u=$ cost. sono anch'esse asintotiche su entrambe le superficie, si potrà supporre lungo L che $x=x'$, $x_u=x'_u$, $x'_v=\sigma x_v+\alpha x_u$ con $\sigma=\pm 1$, ecc. ecc.

Osserv. 2.ª Altra interpretazione di $F_3 : F_2$ si ha (Bompiani) studiando l'invariante J di una direzione generica e della terna di direzioni $F_3=0$ (di Darboux) o della terna coniugata (di Segre). Per le forme normali φ_3 e φ_2 (§ 14 *D*) si hanno (Bompiani) pure notevoli interpretazioni quando si studii il differenziale di J corrispondente a spostamenti lungo una curva della nostra superficie, il cui piano osculatore passi per l'*asse* (cfr. seg. Cap.)

Le curve per cui $J=$ cost. sono geodetiche per una metrica di Gauss definita da un elemento lineare proporzionale ad F_2 soltanto se la superficie è isotermo-asintotica ($\beta=\gamma$) ecc. (Bompiani).

Più avanti troveremo altre interpretazioni geometriche dovute allo stesso Bompiani ed a Wilczynski.

§ 14. — Le equazioni differenziali fondamentali e la terza forma differenziale.

A) Formole fondamentali.

I due piani ξ_u, ξ_v si tagliano in una retta uscente da x, e contenente il punto

$$(1)\qquad X = \frac{1}{2}\,\Delta_2 x = \frac{1}{2}\,\Sigma A_{rs}\,x_{rs}$$

perchè

$$(2)\qquad S\xi_i\,X = \frac{1}{2}\,\Sigma\,A_{rs}\,S\xi_i\,x_{rs} = -\,\frac{1}{2}\sum_{r,s} A_{rs}\,a_{rsi} = 0$$

per le relazioni di apolarità. Invece è

$$(3)\qquad S\xi X = \frac{1}{2}\,\Sigma\,A_{rs}\,S\xi x_{rs} = \frac{1}{2}\,\Sigma\,A_{rs}\,a_{rs} = 1\,,$$

cosicchè il punto X è distinto dal punto x, ed insieme ad x individua la retta $(\xi_u\,\xi_v)$. Derivando (3) e ricordando (2) si trae:

$$(4)\qquad SX_i\,\xi = 0.$$

Dualmente, posto

$$(5)\qquad \Xi = \frac{1}{2}\Delta_2\,\xi = \frac{1}{2}\,\Sigma A_{rs}\,\xi_{rs}\,,$$

si ha:

$$(6)\qquad Sx\Xi = 1\,,\quad Sx_i\,\Xi = 0\,,\quad Sx\Xi_i = 0.$$

La (3) dimostra che i punti x, x_u, x_v, X sono linearmente indipendenti; e perciò quattro quantità qualunque, p. es. x_{rs} (ed y_{rs}, z_{rs}, t_{rs}) si possono esprimere come loro combinazione lineare; potremo cioè scrivere:

$$x_{rs} = \lambda x_u + \mu x_v + \nu X + px \quad \text{(con le analoghe per } y\,,\ z\,,\ t),$$

donde:

$$a_{rs} = S\xi x_{rs} = \nu \qquad - a_{rsi} = S\xi_i \, x_{rs} = -\lambda a_{i1} - \mu a_{i2}$$

che permettono di determinare λ, μ. Si ha così in conclusione:

(I) $$x_{rs} = \sum_{p,q} a_{rsp} A_{pq} \, x_q + a_{rs} X + p_{rs} \, x.$$

In modo simile si provano le:

(II) $$\xi_{rs} = -\Sigma a_{rsp} A_{pq} \, \xi_q + a_{rs} \, \Xi + \pi_{rs} \, \xi.$$

In quanto alle p_{rs}, π_{rs} possiamo soltanto affermare: *Come le forme* F_2, F_3, *così anche le forme*

$$\mathrm{P} = \Sigma p_{rs} \, du_r \, du_s \,, \quad \Pi = \Sigma \pi_{rs} \, du_r \, du_s$$

non mutano nè per collineazioni unimodulari, nè per cambiamento di parametri u, v *a Iacobiano positivo. Anche esse sono apolari alla* F_2. Infatti da (1) e (I) si deduce, per le relazioni di apolarità tra F_2 ed F_3:

$$2X = \Sigma A_{rs} \, x_{rs} = \Sigma A_{rs} \left[\Sigma a_{rsp} A_{pq} \, x_q + a_{rs} \, X + p_{rs} \, x \right] =$$

$$= 2X + x \Sigma A_{rs} \, p_{rs}$$

donde segue appunto $\Sigma A_{rs} \, p_{rs} = 0$. *Le direzioni per cui* $\mathrm{P} = 0$ e *le direzioni per cui* $\Pi = 0$ formano *pertanto* due coppie di direzioni coniugate.

B) La forma P — II.

Poniamo:

(7) $$\Omega = SX\Xi \,,$$

riservandoci di calcolarlo altrove. Dalle (I) e (II) si deduce:

(8) $$S\xi_{hk} \, x_{rs} = S\xi_{hk} (\Sigma a_{rsp} A_{pq} \, x_q + a_{rs} \, X + p_{rs} \, x) =$$

$$= \sum_{p,q} a_{rsp} A_{pq} a_{hkq} + p_{rs} a_{hk} + a_{rs} SX(-\Sigma a_{hkp} A_{pq} \xi_q + a_{hk} \Xi + \pi_{hk} \xi)$$

$$= \sum_{p,q} a_{rsp} A_{pq} a_{qhk} + p_{rs} a_{hk} + a_{rs} \pi_{hk} + a_{rs} a_{hk} \Omega$$

donde:

$$S(\xi_{hk} x_{rs} - \xi_{rs} x_{hk}) = a_{hk}(p_{rs} - \pi_{rs}) + a_{rs}(\pi_{hk} - p_{hk}). \tag{9}$$

Ora, derivando covariantemente le $a_{111} = -S\xi_1 x_{11}$, $a_{112} = -S\xi_1 x_{12}$, si deduce:

$$-a_{1112} = S\xi_1 x_{112} + S\xi_{12} x_{11}; \quad -a_{1121} = S\xi_1 x_{121} + S\xi_{11} x_{12}. \tag{10}$$

Ora è: $$S\xi_1 x_{112} = S\xi_1 x_{121}.$$

Infatti per le (28) del § 9 *(E)*:

$$S\xi_1(x_{112} - x_{121}) = \Sigma \xi_1(12, p1) A_{pq} x_q =$$

$$= -\Sigma(12, p1) a_{1q} A_{pq} = -(12, 11) = 0.$$

E perciò, sottraendo le (10) si avrà per (9)

$$\begin{aligned} a_{1121} - a_{1112} &= S\xi_{12} x_{11} - S\xi_{11} x_{12} = \\ &= a_{11}(\pi_{12} - p_{12}) - a_{12}(\pi_{11} - p_{11}), \end{aligned} \tag{11}$$

insieme all'analoga

$$a_{2212} - a_{2221} = a_{22}(\pi_{12} - p_{12}) - a_{12}(\pi_{22} - p_{22}) \tag{11 bis}$$

e alla relazione di coniugio

$$a_{22}(\pi_{11} - p_{11}) - 2a_{12}(\pi_{12} - p_{12}) + a_{11}(\pi_{22} - p_{22}) = 0. \tag{11 ter}$$

Poichè, derivando covariantemente la relazione di coniugio $\sum_{r,s} A_{rs} a_{rsi} = 0$ si trova:

$$\sum_{p,q} A_{pq} a_{pqij} = 0, \quad \text{(per ogni sistema di valori di } i, j) \tag{12}$$

si avrà dalle precedenti anche:

$$(11)_{\text{quater}} \quad a_{22}(\pi_{11} - p_{11}) - a_{11}(\pi_{22} - p_{22}) = 2(a_{1122} - a_{2211}).$$

Tutte queste equazioni bastano a determinare $\mathrm{P} - \Pi$, *quando sieno date* F_2, F_3.

Ma si può presentare il calcolo nel modo seguente. La forma:

$$\frac{1}{\sqrt{|A|}} \begin{vmatrix} (p_{11} - \pi_{11})du + (p_{12} - \pi_{12})dv & a_{11}du + a_{12}dv \\ (p_{12} - \pi_{12})du + (p_{22} - \pi_{22})dv & a_{21}du + a_{22}dv \end{vmatrix}$$

apolare alla F_2 ed alla $P - \Pi$ vale per le (11)

$$\frac{1}{\sqrt{|A|}} \sum_{p,q} (a_{pq21} - a_{pq12}) du_p\, du_q$$

Quindi, per i risultati del § 9 F, la forma $P - \Pi$, che è apolare a quest'ultima forma ed alla F_2 vale:

$$(13) \left\{ \begin{aligned} P - \Pi &= \frac{1}{A} \begin{vmatrix} (a_{1112} - a_{1121})du + (a_{1212} - a_{1221})dv & a_{11}du + a_{12}dv \\ (a_{1212} - a_{1221})du + (a_{2212} - a_{2221})dv & a_{21}du + a_{22}dv \end{vmatrix} \\ &= \frac{1}{A} \begin{vmatrix} a_{1112} - a_{1121} & a_{11} & dv^2 \\ a_{1212} - a_{1221} & a_{12} & -du dv \\ a_{2212} - a_{2221} & a_{22} & du^2 \end{vmatrix} \end{aligned} \right.$$

Invece delle forme P e Π *basterà dunque, date le* F_2, F_3, *dare la forma*

$$(14) \quad \left\{ \begin{aligned} Q &= \Sigma(p_{rs} + \pi_{rs}) du_r\, du_s = \Sigma q_{rs}\, du_r\, du_s \\ &\text{ove } q_{rs} = p_{rs} + \pi_{rs} \end{aligned} \right.$$

C) Altre equazioni fondamentali.

Derivando le (I), (II) si trovano delle equazioni:

$$(\mathrm{III}) \qquad X_i = l_i\, x + \sum_{p,q} m_{ip} A_{pq}\, x_q$$

$$\text{(IV)} \qquad \Xi_i = \lambda_i\, \xi + \sum_{p,q} \mu_{ip}\, A_{pq}\, \xi_q$$

ove l, λ, m, μ sono completamente determinate dalle forme F_2, F_3, P, Π, ossia dalle tre forme F_2, F_3, Q.

Rinviando ad altro luogo lo scriverne completamente i valori, qui osserviamo soltanto:

α) Da (III) e (IV) segue:

$$(15) \qquad l_i + \lambda_i = SX_i\,\Xi + SX\Xi_i = \frac{\partial}{\partial u_i} SX\Xi = \Omega_i$$

β) Da (II) e da (III) si trae:

$$SX\xi_{ik} = \Omega a_{ik} + \pi_{ik}\,; \quad SX_i\,\xi_k = -\Sigma m_{ip} A_{pq}\, a_{qk} = -m_{ik}.$$

Poichè, derivando $SX\xi_k = 0$, si trae $SX_i\,\xi_k + SX\xi_{ik} = 0$, sarà:

$$(16) \qquad m_{ik} = \pi_{ik} + \Omega a_{ik} \quad \text{e similmente} \quad \mu_{ik} = p_{ik} + \Omega a_{ik}.$$

In conclusione:

$$(17) \qquad \begin{cases} \Sigma m_{ik}\, du_i\, du_k = \Pi + \Omega F_2\,; \ \Sigma \mu_{ik}\, du_i\, du_k = P + \Omega F_2 \\ \Sigma(l_i + \lambda_i) du_i = d\Omega. \end{cases}$$

Notiamo una proprietà del piano Ξ. Facciamo descrivere al punto x una linea L di S; e per ogni sua posizione consideriamo un punto $x' = X + rx$ della retta intersezione dei piani ξ_u e ξ_v, ove r è una funzione delle u, v. Quando mai la tangente alla linea L' descritta da x' incontra la tangente coniugata della tangente di L? Cioè quando mai i punti x' e dx' giacciono in un piano del fascio $\xi + \rho d\xi$? Il punto $x' = (rx + X)$ giace per le (2) sul piano $d\xi$; dovremo dunque esprimere che anche dx' sta in questo piano cioè che

$$0 = Sdx'd\xi = S(xdr + rdx + dX)d\xi = -(r + \Omega)F_2 - \Pi$$

la quale equazione dà, per ogni valore di r, *due direzioni corrispondenti per la linea L* di S. Queste due direzioni sono coniugate soltanto se $r = -\Omega$, cioè $x' = X - \Omega x$. Quest'ultimo punto insieme ai punti x, x_u, x_v determina appunto il piano Ξ. Ecco così definito geometricamente questo piano; dualmente si può definire geometricamente il punto X tra i punti della retta intersezione dei piani ξ_u, ξ_v. Su questa retta sono perciò caratterizzati per via proiettiva i punti x, X e il precedente punto $x' = X - \Omega x$; ogni altro suo punto si potrà caratterizzare mediante il birapporto che forma coi precedenti.

D) Il teorema fondamentale.

Le equazioni I, II, III, IV *sono per la geometria proiettiva l'analogo delle equazioni fondamentali* 3, 4 (§ 10, B) *della Geom. metrica, e permettono, date le forme* F_2, F_3, Q *di risalire alla superficie, che ne resta determinata a meno di una collineazione. Le loro condizioni d'integrabilità sono l'analogo nel caso attuale delle equazioni di Codazzi.*

§ 15. — Varii sistemi di coordinate x, ξ.

A) Un primo sistema di coordinate.

Noi potremmo scegliere a coordinate x, y, z, t di punto e ξ, η, ζ, τ di piano (che finora sono sempre determinate a meno di un fattore *comune*) coordinate tali che $A = a_{11} a_{22} - a_{12}^2 = \pm 1$. Una tale ipotesi non è di carattere *intrinseco*, neanche se sulla superficie sono prefissate le linee coordinate u, v. Noi non ce ne serviremo mai, per quanto, se u, v sono le asintotiche, tali coordinate sieno quelle di cui fa uso la scuola di Wilczynski.

B) Coordinate non omogenee.

Potremmo usare o per i punti o per i piani coordinate non omogenee, ponendo p. es. $t = 1$, oppure $\tau = 1$. Questo metodo tratta però il piano $t = 0$, o il punto $\tau = 0$ in modo affatto particolare (con locuzione metrica, considera il piano $t = 0$ come piano all'infinito, il punto $\tau = 0$ come origine) ed è perciò da usare soltanto se nel problema che si studia vi è un piano od un punto in posizione affatto speciale. Se $t = 1$, dalle I si trae che $p_{rs} = 0$; se $\tau = 1$, è invece $\pi_{rs} = 0$. Viceversa, se le p_{rs} sono nulle, esiste una combinazione lineare delle x, y, z, t a coefficienti costanti, che è essa stessa una costante; un risultato duale vale se $\pi_{rs} = 0$.

C) Superficie rigate.

Per fare *una scelta di coordinate intrinseca, di carattere proiettivo,* e *dipendente soltanto dalla superficie considerata* dobbiamo cominciare dallo scrivere i discriminanti delle F_2, F_3.

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned} A &= a_{11}\,a_{22} - a_{12}^2\,;\\ R &= 3a_{112}^2\,a_{221}^2 + 6a_{111}\,a_{222}\,a_{112}\,a_{221} - a_{111}^2\,a_{222}^2 -\\ &\quad - 4a_{111}\,a_{122}^3 - 4a_{222}\,a_{112}^3\\ &= 4(a_{112}\,a_{222} - a_{122}^2)\,(a_{111}\,a_{122} - a_{112}^2) -\\ &\quad - (a_{111}\,a_{222} - a_{112}\,a_{221})^2. \end{aligned}\right.$$

L'identità $\Sigma A_{rs}\,a_{rs} = 2$, insieme alle relazioni di apolarità

$$\sum_{r,s} A_{rs}\,a_{rsi} = 0 \qquad (i = 1\,,\,2)$$

danno, risolute rispetto alle A_{rs}:

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned} &A_{11} = \frac{a_{22}}{A} = \frac{2(a_{112}\,a_{222} - a_{221}^2)}{A^2 I}\,;\; A_{22} = \frac{a_{11}}{A} = \frac{2(a_{111}\,a_{221} - a_{112}^2)}{A^2 I}\\ &\qquad - A_{12} = \frac{a_{12}}{A} = \frac{a_{111}\,a_{222} - a_{112}\,a_{221}}{A^2 I} \end{aligned}\right.$$

ove è posto:

$$(3)\qquad I = \frac{1}{A^2}\begin{vmatrix} a_{111} & a_{121} & a_{221}\\ a_{112} & a_{122} & a_{222}\\ a_{11} & a_{12} & a_{22} \end{vmatrix},$$

almeno se $I \neq 0$. Se ne deduce che:

$$(4)\qquad R = A^4\,I^2(A_{11}\,A_{22} - A_{12}^2) = I^2\,A^3$$

almeno se $I \neq 0$, formola che, per continuità, deve valere anche se $I = 0$, come si può del resto dimostrare direttamente così. Se $I = 0$, la terza riga del determinante che figura in (3) non può essere combinazione lineare delle precedenti, perchè dalle relazioni di apolarità seguirebbe l'assurdo $2 = \Sigma A_{rs} a_{rs} = 0$. Dunque le prime due righe di tale determinante formano, se $I = 0$, una matrice nulla; ed esistono quindi due costanti c_1, c_2 tali che:

$$a_{111} : a_{112} : a_{221} : a_{222} = c_1^3 : c_1^2 c_2 : c_1 c_2^2 : c_2^3 .$$

Quindi: *Se* $\mathrm{I} = 0$, *la* F_3 *è un cubo perfetto; perciò* $\mathrm{R} = 0$, *e la* (4) *vale, anche se* $\mathrm{I} = 0$. *Viceversa da* (4) *si trae che, se* $\mathrm{R} = 0$, *anche* $\mathrm{I} = 0$ *ed* F_3 *è un cubo perfetto.*

Le relazioni di apolarità dicono *che allora il fattore lineare, di cui* F_3 *è il cubo, è anche fattore di* F_2; *viceversa, se* F_3, F_2 *hanno un fattore lineare comune, la* F_3 *è proporzionale al suo cubo.*

Le linee di S che annullano tale fattore lineare sono perciò asintotiche, per cui è nullo $S(dxd^2\xi - d\xi d^2x)$, ove ξ, che è il piano tangente ad S, è il piano osculatore di tale linea. Ora, prendendo i differenziali lungo tale linea, è

$$S\xi x = S\xi dx = S\xi d^2x = 0 \text{ e perciò } -Sd\xi d^2x = S\xi d^3x$$

$$Sxd\xi = Sdxd\xi = Sxd^2\xi = 0 \text{ e perciò } Sdxd^2\xi = -Sd\xi d^2x = S\xi d^3x.$$

Per le nostre linee avviene dunque che è identicamente $S\xi d^3x = 0$, cioè che ogni piano ξ ad esse osculatore è anche iperosculatore. Dunque le nostre linee sono piane, ed, essendo asintotiche di S, sono anche *rette*. E viceversa. Dunque:

Le superficie rigate sono caratterizzate dall'una o dall'altra delle relazioni equivalenti: α) $\mathrm{R} = 0$; β) $\mathrm{I} = 0$; γ) F_3 *è un cubo perfetto;* δ) F_2 *ed* F_3 *hanno un fattore lineare comune (che, uguagliato a zero, definisce le generatrici).*

Ne segue anche:

Se F_3 *è identicamente nullo, tutte le asintotiche sono rette, e la superficie, essendo doppiamente rigata, è una quadrica.*

D) Coordinate normali.

Escludiamo le rigate, di cui ci occuperemo altrove.

Osserviamo che, moltiplicando F_2 ed F_3 per uno stesso fattore ρ, l'*invariante assoluto* I *del sistema di queste forme resta moltiplicato per* ρ^{-1}. Noi dunque facciamo una ipotesi *intrinseca* imponendo alla I di valore -1. Chè, se fosse $I = k > 0$, basterebbe moltiplicare le x e le ξ per $\sqrt{k}$; e, se fosse $I = -k < 0$, basterebbe in più cambiare la faccia scelta come faccia positiva di S. Con questo metodo *alle forme* F_2, F_3 *sono sostituite due forme* φ_2, φ_3 *proporzionali completamente determinate in modo intrinseco invariante;* e le corrispondenti *coordinate* x, ξ *di punto e piano tangente sono completamente determinate* a meno di una collineazione unimodulare a coefficienti **costanti**, e in particolare a meno di un contemporaneo cambiamento di segno. Di più resta *intrinsecamente determinata in modo invariante una orientazione positiva della superficie.*

Queste coordinate x, ξ, *queste forme* φ_2, φ_3 *e le corrispondenti* P, Π, Q, *e questa orientazione si diranno coordinate, forme, ed orientazione normali.*

Poichè, date le coordinate omogenee arbitrarie x, occorre una radice quarta per determinare F_2, F_3, e la determinazione poi degli enti normali richiede ancora una radice quadrata, la determinazione degli enti normali, date le x, richiede l'estrazione di *una radice ottava.* Date le x, per passare alle coordinate normali, bisogna calcolare F_2, F_3, cioè bisogna ricorrere alle *derivate terze.*

Ogni sistema di coordinate omogenee che sia determinato dalla sola superficie in modo intrinseco invariante a meno di una collineaz. a coefficienti **costanti**, *e che richieda per la sua determinazione a partire da un qualsiasi sistema di coordinate omogenee soltanto derivazioni di ordine non superiore al terzo coincide, a meno di un fattore numerico inessenziale, con le coordinate normali.*

Infatti, se x sono le coordinate normali, ed x' è un altro sistema di coordinate che gode delle proprietà precedenti, allora il rapporto $x' : x$ sarebbe una quantità intrinseca invariante che dipende dalle derivate di coordinate omogenee generiche di ordine non superiore al terzo. Ciò che è assurdo, perchè la (9) del § 11 prova che con una proiettività (precisamente con una omologia) ogni superficie si può nell'intorno di un suo punto generico trasformare in una superficie collineare (e perciò ad essa uguale dal nostro punto di vista) definita da un'equazione

$$z = xy + (x^3 + y^3) + \dots \qquad (\text{ove } t = 1). \ (^*)$$

(*) Basterà nella formola citata cambiare i punti unità degli assi coordinati, cioè moltiplicare ciascuna delle x, y, z per una opportuna costante.

Perciò:

Il modo più semplice (che ricorre cioè a derivate di ordine minimo) *di definire un sistema di coordinate omogenee in modo intrinseco invariante, è quello di ricorrere alle derivate normali.*

E) **Rette normali.**

In coordinate *normali* x il punto $X = \frac{1}{2}\Delta_2 x$ e la retta (x, X) restano determinate in modo *intrinseco invariante.* Dalle I, II, confrontate con le equazioni fondamentali della geom. metrica sorge spontanea l'idea di dare a tale retta il nome di *normale proiettiva* (o di *prima* normale), e alla retta (ξ, Ξ) il nome di *seconda* normale.

Come vedremo, l'ultimo teorema dato in *D)* equivale al seguente:

Il modo più semplice *di estendere al campo proiettivo la nozione di retta normale in modo che le sviluppabili di queste formino un sistema coniugato* (che sarà il sistema delle *linee di curvatura proiettive*) *è quello sopra definito, che quindi appare come l'unico possibile.*

Questa definizione, pubblicata per la prima volta dal Fubini, fu ritrovata in modo affatto indipendente dal Green, che non ne pose però in luce il carattere di *necessità,* se si vuole la definizione *più semplice* possibile. Il Green cercò semplicemente in un certo fascio di rette una retta che descrivesse una congruenza, le cui sviluppabili determinassero su S un sistema coniugato.

F) **Metrica normale.**

Usando coordinate normali, un punto x' dello spazio in un intorno di un pezzo di S avrà per coordinate $x' = x + wX$, ove x è quel punto di S, da cui esce una normale passante per x', e w è un parametro. Le u, v, w si possono considerare come coordinate di un punto dello spazio in un intorno di S; e, se noi assumiamo come elemento lineare

$$ds^2 = \varphi_2 + dw^2, \tag{5}$$

avremo definito in tale intorno *una geometria metrica determinata dalla superficie* S *in modo intrinseco invariante.* In questa geom. metrica la nostra *normale* proiettiva incontra proprio ortogonalmente la superficie S; tutti gli invarianti metrici, curvatura geodetica, torsione ecc., diventano altrettanti invarianti proiettivi della S e degli enti connessi a tale superficie. In particolare sulla S resta definita una geometria metrica ($ds^2 = \varphi_2$), per cui le *asintotiche sono le linee di lunghezza nulla,* e di cui daremo più avanti un'interpretazione geometrica. *Così le espressioni*

$$\sqrt{|A|}\,(du\delta^2v - dv\delta^2u) : \sqrt{\varphi_2}^{\,3} \tag{6}$$

$$d\left\{\sqrt{|A|}\,(du\delta^2v - dv\delta^2u)\right\} : \varphi_2^{\frac{2}{2}} = \sqrt{|A|}\,(du\delta^3v - dv\delta^3u) : \varphi_2^{\frac{2}{2}} \tag{7}$$

sono per una linea di S *degli invarianti proiettivi : la prima* (curvatura geodetica nella nostra metrica) *si potrebbe chiamare la curvatura asintotica.*

Si possono anche estendere le nozioni di *torsione,* e di *torsione geodetica.*

Così *l'espressione*

$$\frac{1}{T_p} = (x\,,\, dx\,,\, d^2x\,,\, d^3x) : \varphi_2^{\frac{3}{2}}\,,$$

calcolata in coordinate normali, è un invariante nullo soltanto per le sezioni piane, che perciò si può chiamare torsione proiettiva.

Tenendo conto delle equazioni fondamentali (I) e (II), questa espressione si può calcolare facilmente; rinviandone l'esame al § seguente, osserviamo soltanto che, se $\delta^2 u_i = \delta^3 u_i = 0$, allora essa si riduce a $\dfrac{1}{T_g} = \dfrac{P_6}{\varphi_2^{\frac{3}{2}}}$, dove P_6 *è una forma differenziale di sesto grado e del primo ordine.* La torsione proiettiva di una linea a curvatura asintotica nulla si riduce perciò precisamente ad $\dfrac{1}{T_g}$; e, poichè $\dfrac{1}{T_g}$ ha uguali valori per due linee tra loro tangenti, *esso, calcolato per una linea qualsiasi* L *di* S *in un punto* A, *vale la torsione proiettiva di quella linea tangente in* A *ad* L *che ha la curvatura* *asintotica nulla.* Perciò alle linee di curvatura asintotica nulla possiamo dare il nome di *geodetiche proiettive*, e alla frazione $\frac{1}{T_g}$ quello di *torsione geodetica proiettiva.*

Ritroveremo più avanti queste quantità da un altro punto di vista.

§ 16. — Il caso di linee coordinate asintotiche.

A) Le forme F_2, F_3, P, Π, Q.

Se le u, v sono asintotiche, supposte reali, è:

$$(1)\quad \begin{cases} 0 = a_{11} = a_{22} = (x\, x_u\, x_v\, x_{uu}) = (x\, x_u\, x_v\, x_{vv}) = \\ \qquad = (\xi\, \xi_u\, \xi_v\, \xi_{uu}) = (\xi\, \xi_u\, \xi_v\, \xi_{vv}) \\ (x\, x_u\, x_v\, x_{uv}) = (\xi\, \xi_u\, \xi_v\, \xi_{uv}) = \omega a_{12}^2\,, \quad \text{ove} \\ \omega = sgn(x\, x_u\, x_v\, x_{uv}) = sgn(\xi\, \xi_u\, \xi_v\, \xi_{uv}) = sgn a_{12} \\ \varepsilon = -\, sgn A = sgn a_{12}^2 = 1 \\ X = \frac{1}{2}\Delta_2 x = \frac{x_{uv}}{a_{12}}\,, \quad \Xi = \frac{1}{2}\Delta_2 \xi = \frac{\xi_{uv}}{a_{12}} \end{cases}$$

Porremo sovente:

$$(2)\qquad |a_{12}| = e^{\theta} \quad ; \qquad a = a_{12}\,.$$

Essendo F_3 apolare ad F_2, sarà:

$$(3)\qquad F_2 = 2a_{12}\, dudv = 2a dudv\,;$$

$$F_3 = a_{12}(\beta du^3 + \gamma dv^3) = a(\beta du^3 + \gamma dv^3).$$

Se $a_{12} = \beta\gamma$, *le coordinate sono normali* (e la superficie non è rigata).

Se $\beta = \gamma = 0$, *allora* $F_3 = 0$, *e la superficie è una quadrica; se* $\beta = 0$, *le* v $=$ cost. *sono rette; se* $\gamma = 0$, *le* u $=$ cost. *sono rette.* Questi teoremi, conseguenza dei precedenti risultati generali, riceveranno conferma anche dalle seguenti deduzioni. Le equazioni fondamentali (I) e (II), e i risultati relativi a $P - \Pi$ danno ora:

$$\text{I)} \qquad x_{11} = \beta x_2 + p_{11} x, \quad x_{22} = \gamma x_1 + p_{22} x,$$

ossia:

$$\text{I}_{\text{bis}}) \quad x_{uu} = \theta_u x_u + \beta x_v + p_{11} x \qquad x_{vv} = \gamma x_u + \theta_v x_v + p_{22} x$$

insieme alle:

$$\text{II)} \qquad \xi_{11} = -\beta \xi_2 + \pi_{11} \xi \qquad \xi_{22} = -\gamma \xi_1 + \pi_{22} \xi$$

ossia:

$$\text{II}_{\text{bis}}) \quad \xi_{uu} = \theta_u \xi_u - \beta \xi_v + \pi_{11} \xi \qquad \xi_{vv} = -\gamma \xi_u + \theta_v \xi_v + \pi_{22} \xi$$

$$(4) \quad p_{12} = \pi_{12} = 0 \qquad \pi_{11} - p_{11} = \beta_v + \beta \theta_v \qquad \pi_{22} - p_{22} = \gamma_u + \gamma \theta_u$$

Posto poi:

$$(5) \qquad q_{11} = p_{11} + \pi_{11} \qquad q_{12} = 0 \qquad q_{22} = p_{22} + \pi_{22}$$

è:

$$(6) \quad \begin{cases} \frac{1}{2} q_{11} = p_{11} + \frac{1}{2} (\beta_v + \beta \theta_v) = \pi_{11} - \frac{1}{2} (\beta_v + \beta \theta_v) \\ \frac{1}{2} q_{22} = p_{22} + \frac{1}{2} (\gamma_u + \gamma \theta_u) = \pi_{22} - \frac{1}{2} (\gamma_u + \gamma \theta_u). \end{cases}$$

Le q_{11}, q_{22} *sono auto-duali.*

B) **Flecnodi.**

Nei punti soddisfacenti alla $\gamma = 0$ la $(\text{I})_{\text{bis}}$ dimostra che x, x_v, x_{vv} sono collineari cioè che *nei punti per cui* $\gamma = 0$ *le asintotiche* u $=$ cost. *hanno un flesso.*

Proveremo *che in tale punto la retta tangente all' asintotica* u = cost. *ha un contatto quadripunto con la superficie. Teoremi analoghi valgono per i punti soddisfacenti alla* $\beta = 0$.

Per provarlo assumiamo $t = 1$ ed a coordinate x, y, z quelle determinate dai seguenti valori iniziali:

$$x = 0, \; x_u = 1, \; x_v = 0, \; x_{uv} = 0$$

$$y = y_u = y_{uv} = 0, \; y_v = 1$$

$$z = z_u = z_v = 0, \; z_{uv} = 1.$$

Sviluppando con la formola di Taylor, troviamo per le $(1)_{\text{bis}}$, scrivendo i soli termini che ci interessano, indicando con $u = v = 0$ il punto considerato, e con θ_u, β, γ, ecc. i valori di θ_u, β, γ ecc. in questo punto

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} x &= u + \frac{1}{2}(\theta_u u^2 + \gamma v^2) + \frac{1}{6}(\gamma_v + \gamma\theta_v)v^3 + \ldots \\ y &= v + \frac{1}{2}(\beta u^2 + \theta_v v^2) + \ldots \\ z &= uv + \frac{1}{6}(\beta u^3 + 3\theta_u u^2 v + 3\theta_v uv^2 + \gamma v^3) + \\ &\quad + \frac{1}{12}(\gamma_v + \gamma\theta_v)v^4 + \ldots \end{aligned} \right.$$

cioè (scrivendo dei termini di grado superiore al terzo soltanto *quello in* y^4):

$$(8) \qquad z = xy - \frac{1}{3}(\beta x^3 + \gamma y^3) + \frac{1}{12}(2\gamma\theta_v - \gamma_v)y^4 + \ldots$$

Si riconosce appunto che, *soltanto ove* $\gamma = 0$, *la tangente asintotica* $z = x = 0$ *ha un contatto almeno quadripunto con la superficie.*

Se è identicamente $\gamma = 0$, le asintotiche $u = cost.$ hanno in ogni punto un flesso, e quindi sono rette come già sapevamo. La superficie risulta *rigata*, e le sue linee di Darboux si riducono alle generatrici $u = cost.$, e alle linee soddisfacenti alle $\beta = 0$.

Ora per una *superficie non rigata* i punti, in cui $\beta = 0$ oppure $\gamma = 0$ diconsi *flecnodi;* per una superficie rigata, in cui sia identicamente p. es. $\beta = 0$, diconsi *flecnodi* i punti che annullano γ. Ivi la *tangente all'asintotica curva* ha un contatto quadripunto con la superficie, cioè *incontra quattro generatrici infinitamente vicine.* Poichè quattro rette hanno generalmente *due* direttrici, segue *che su ogni generatrice* $\mathrm{v} = \mathrm{cost.}$ *vi sono generalmente due flecnodi,* ossia che con opportuna scelta del parametro u, la γ *è un polinomio di secondo grado in* u; ciò che, come vedremo, si deduce facilmente anche dalle condizioni d'integrabilità delle $(\mathrm{I})_{\mathrm{bis}}$. Il luogo dei flecnodi dicesi *linea flecnodale. Su una rigata le linee di Darboux si riducono alle generatrici e alla linea flecnodale.*

Dallo sviluppo (8) si trae un'altra conseguenza: *La tangente asintotica* $\mathrm{z} = \mathrm{x} = 0$ *ha un contatto pentapunto con la superficie nei punti ove* $\gamma = \gamma_{\mathrm{v}} = 0$, *cioè nei punti ove la linea flecnodale* $\gamma = 0$ *o ha un punto doppio oppure è tangente a una asintotica* $\mathrm{u} = \mathrm{cost.}$

Nel caso delle rigate questo e il precedente teorema si possono dimostrare anche in un altro modo; cercando cioè quando la retta (x, x_v), che è tangente all'asintotica $u = cost.$, incontra una generatrice, cioè una retta $\left(x + x_v\, dv + \frac{1}{2}\, x_{vv} dv^2 + \dots,\right.$ $\left. x_u + x_{uv} dv + \frac{1}{2}\, x_{uvv}\, dv^2 + \dots\right)$

L'equazione in dv che si trova ammette $dv = 0$ come radice quadrupla se $\gamma = 0$, come radice quintupla se $\gamma = \gamma_v = 0$.

C) **Osservazioni varie.**

È facile calcolare

$$\Omega = SX\Xi = S\,\frac{x_{uv}\,\xi_{uv}}{a_{12}^2}. \tag{9}$$

Osserviamo innanzi tutto le identità:

$$
(10)\quad\left\{\begin{aligned}
&0 = a_{11} = S\xi x_{uu} = S\xi_u\, x_u = Sx\xi_{uu}\\
&0 = a_{22} = S\xi x_{vv} = S\xi_v\, x_v = Sx\xi_{vv}\\
&a_{12} = \pm e^{\theta} = S\xi x_{uv} = -S\xi_u\, x_v = -S\xi_v\, x_u = Sx\xi_{uv}\\
&a_{111} = \beta a_{12} = -S\xi_u\, x_{11} = -S\xi_u\, x_{uu} = Sx_u\, \xi_{uu}\\
&a_{222} = \gamma a_{12} = -S\xi_v\, x_{vv} = Sx_v\, \xi_{vv}\\
&a_{112} = 0 = Sx_u\, \xi_{uv} = S\xi_u\, x_{uv} = -S\xi_v\, x_{11} =\\
&\qquad = -S\xi_v\, x_{uu} - \frac{\partial a_{12}}{\partial u} = Sx_v\, \xi_{uu} + \frac{\partial a_{12}}{\partial u}\\
&a_{221} = 0 = Sx_v\, \xi_{uv} = S\xi_v\, x_{uv} =\\
&\qquad = -S\xi_u\, x_{vv} - \frac{\partial a_{12}}{\partial v} = Sx_u\, \xi_{vv} + \frac{\partial a_{12}}{\partial v}
\end{aligned}\right.
$$

Quindi:

$$
\Omega = \frac{1}{a_{12}^2}\frac{\partial}{\partial v} Sx_u \xi_{uv} - \frac{1}{a_{12}^2} Sx_u \frac{\partial \xi_{vv}}{\partial u} =
$$

$$
= -\frac{1}{a_{12}^2} Sx_u \frac{\partial}{\partial u}(\theta_v \xi_v - \gamma\xi_u + \pi_{22}\xi) =
$$

$$
= -\frac{1}{a_{12}^2}\left[\theta_{uv} Sx_u \xi_v - \gamma Sx_u \xi_{uu}\right] = \frac{1}{a_{12}}(\theta_{uv} + \beta\gamma)
$$

cioè

$$
(9)_{\text{bis}}\qquad \Omega = SX\Xi = S\frac{x_{uv}\xi_{uv}}{a_{12}^2} = \frac{1}{a_{12}}(\theta_{uv} + \beta\gamma) =
$$

$$
= \frac{1}{a_{12}}\frac{\partial^2 \log a_{12}}{\partial u \partial v} + \frac{\beta\gamma}{a_{12}}.
$$

La Ω *vale pertanto il rapporto* ($\beta\gamma : a_{12}$ in coordinate asintotiche) *della forma normale* φ_2 *alla* F_2, *diminuito della curvatura di* F_2: *così enunciato,* il teor. permette di calcolare Ω *in coordinate* u, v *qualsiasi.*

Le linee di Darboux hanno per equazione $\beta du^3 + \gamma dv^3 = 0$, quelle di Segre $\beta du^3 - \gamma dv^3 = 0$. Chiamiamo *isotermo-asintotiche* le superficie per cui

$$\frac{\partial^2 \log \beta : \gamma}{\partial u \partial v} = 0. \tag{11}$$

Per esse si potranno scegliere i parametri delle u, v in guisa che $\beta = \gamma$.

D) Condizioni di integrabilità.

Diamo una prima forma delle condizioni d'integrabilità, che studieremo più tardi in modo più completo. Esprimendo che i valori di x_{uuvv} tratti da (I) derivando coincidono, si trovano le condizioni

$$\left\{\begin{aligned} &\gamma_{uu} + 2\frac{\partial p_{22}}{\partial u} + \frac{\partial}{\partial u}(\gamma\theta_u) + \theta_v\theta_{uv} = \beta\gamma_v + 2\beta_v\gamma + \theta_{uvv}, \\ &\beta_{vv} + 2\frac{\partial p_{11}}{\partial v} + \frac{\partial}{\partial v}(\beta\theta_v) + \theta_u\theta_{uv} = \gamma\beta_u + 2\beta\gamma_u + \theta_{uuv}, \\ &\theta_u\frac{\partial p_{22}}{\partial u} + \beta\frac{\partial p_{22}}{\partial v} + 2p_{22}\beta_v + \frac{\partial^2 p_{11}}{\partial v^2} = \\ &\qquad = \theta_v\frac{\partial p_{11}}{\partial v} + \gamma\frac{\partial p_{11}}{\partial u} + 2p_{11}\gamma_u + \frac{\partial^2 p_{22}}{\partial u^2}, \end{aligned}\right. \tag{12}$$

che si possono presentare in forma più semplice. Ad una trasformazione moltiplicativa di coordinate $x = \rho x'$ corrispondono le $\beta = \beta'$, $\gamma = \gamma'$, $a_{12} = \rho^2 a'_{12}$. Ponendo in (I) $x = \rho x'$ con $\rho^2 = a_{12} : a'_{12}$, si trova facilmente che:

$$\theta_{uu} - \frac{1}{2}\theta_u^2 - \beta\theta_v - 2p_{11} = \theta'_{uu} - \frac{1}{2}\theta_u^2 - \beta\theta'_v - 2p'_{11}$$

e l'analoga in p_{22}. Sottraendo dunque β_v dai due membri, si trova che : *le quantità*

$$
(13)\quad \left\{\begin{aligned}
L &= \theta_{uu} - \frac{1}{2}\theta_u^2 - \beta\theta_v - \beta_v - 2p_{11} = \theta_{uu} - \frac{1}{2}\theta_u^2 + \\
&\qquad + \beta\theta_v + \beta_v - 2\pi_{11} = \theta_{uu} - \frac{1}{2}\theta_u^2 - q_{11} \\
M &= \theta_{vv} - \frac{1}{2}\theta_v^2 - \gamma\theta_u - \gamma_u - 2p_{22} = \theta_{vv} - \frac{1}{2}\theta_v^2 + \\
&\qquad + \gamma\theta_u + \gamma_u - 2\pi_{22} = \theta_{vv} - \frac{1}{2}\theta_v^2 - q_{22}
\end{aligned}\right.
$$

non mutano neanche per una trasformazione $x = \rho x'$, cioè *non mutano per una qualsiasi collineazione.* E le (12) si riducono alle :

$$(14)\qquad L_v = -(2\beta\gamma_u + \gamma\beta_u)\,, \qquad M_u = -(2\gamma\beta_v + \beta\gamma_v)\,;$$

$$(15)\qquad \beta M_v + 2M\beta_v + \beta_{vvv} = \gamma L_u + 2L\gamma_u + \gamma_{uuu}\,.$$

Infatti le (14) equivalgono le prime due delle (12) ; l'ultima di queste, quando alle $\frac{\partial p_{11}}{\partial v}$, $\frac{\partial p_{22}}{\partial u}$ si sostituiscono i valori tratti dalle altre due, diventa :

$$
\begin{aligned}
2\beta \frac{\partial p_{22}}{\partial v} + 4p_{22}\beta_v - \beta \quad - \gamma\theta_u\theta_{uu} - 2\beta_v\theta_{vv} - \beta\theta_{vvv} + \\
+ \beta\gamma_{uv} - \gamma_u\theta_u^2 + \theta_u\beta\gamma_v + 2\theta_u\gamma\beta_v = \\
= 2\gamma \frac{\partial p_{11}}{\partial u} + 4p_{11}\gamma_u - \gamma_{uuu} - \beta\theta_v\theta_{vv} - 2\gamma_u\theta_{uu} - \gamma\theta_{uuu} + \\
+ \gamma\beta_{uv} - \beta_v\theta_v^2 + \theta_v\gamma\beta_u + 2\theta_v\beta\gamma_u
\end{aligned}
$$

a cui si riduce anche la (15) in virtù di (13).

In coordinate non omogenee ($t = 1$) l'ultima delle (12) è una identità, perchè $p_{11} = p_{22} = 0$. Non lo è invece la (15) che si può in tal caso considerare come la condizione d'integrabilità delle (13) pensate come equazioni nella θ.

La forma $\mathrm{Ldu}^2 + \mathrm{Mdv}^2$ *è invariante per collineazioni* (e reciprocità), *ma non è intrinseca,* come si riconosce studiando su θ l'effetto di un cambiamento dei parametri delle asintotiche nell'ipotesi semplificatrice che $t = 1$ e quindi $p_{11} = p_{22} = 0$. Ma è facile riconoscere pure che, posto

$$(16) \quad \pm e^{\varphi} = \beta\gamma \quad \text{oppure} \quad \frac{1}{\gamma} \quad \text{oppure} \quad \sqrt{\beta} \quad \text{oppure} \quad \sqrt[3]{\beta^2\gamma}\,, \ldots$$

$$(17) \quad \pm e^{\psi} = \beta\gamma \quad \text{oppure} \quad \frac{1}{\beta} \quad \text{oppure} \quad \sqrt{\gamma} \quad \text{oppure} \quad \sqrt[3]{\beta\gamma^2}\,, \ldots$$

$$\left(\text{se p. es. } \beta = 0, \text{ ponendo } \varphi = -\log|\gamma|\,, \quad \psi = \frac{1}{2}\log|\gamma|\right)$$

allora la forma:

$$(18) \qquad \left(L - \varphi_{uu} + \frac{1}{2}\varphi_u^2\right)du^2 + \left(M - \psi_{vv} + \frac{1}{2}\psi_v^2\right)dv^2,$$

è *intrinseca, pure essendo ancora invariante per collineazioni a modulo qualsiasi;* essa si può perciò talvolta con vantaggio sostituire alla P (o Π, oppure Q), che è invariante solo per collineazioni unimodulari.

Da tutto questo si possono anche dedurre *le condizioni d'integrabilità in coordinate* u, v *qualsiasi,* che furono date in forma concisa per la prima volta dal Fubini nelle sue Note: *Fondamenti della geometria proiettivo-differenziale di una superficie.* (Rend. della R. Accad. dei Lincei vol. 27_2, 1918). Non le scriveremo qui, perchè più tardi le daremo sotto un'altra forma, dovuta al Čech.

E) Calcolo di $(x\,dx\,d^2x\,d^3x)$. Il cono di Segre.

Supporremo le x coordinate omogenee qualsiasi. È, se $u = u_1$ e $v = u_2$ sono asintotiche:

$$d^2x = \Sigma x_i\,\delta^2 u_i + (\beta x_v + p_{11}\,x)du^2 + 2x_{uv}\,du\,dv + (\gamma x_u + p_{22}\,x)dv^2$$

$$d^3x = \Sigma x_i \delta^3 u_i + 3\left\{(\beta x_v + p_{11}x)du\delta^2 u + x_{uv}(du\delta^2 v + dv\delta^2 u) + \right.$$

$$\left. + (\gamma x_u + p_{22}x)dv\delta^2 v\right\} +$$

$$+ x_{111}du^3 + (x_{112} + 2x_{121})du^2 dv + (x_{121} + 2x_{122})dudv^2 + x_{222}dv^3$$

Ora

$$x_{111} = \frac{\partial x_{11}}{\partial u} - 2\theta_u x_{11} = p_{11}x_u + (\beta_u - 2\beta\theta_u)x_v + \beta x_{uv} + \ldots$$

$$x_{112} + 2x_{121} = 3\frac{\partial x_{11}}{\partial v} + 2\theta_{uv}x_u = (3\beta\gamma + 2\theta_{uv})x_u + 3\pi_{11}x_v + \ldots$$

e analoghe dove sono trascurati i termini in x, e dove, si ricordi $\beta_v + p_{11} + \beta\theta_v = \pi_{11}$.

Quindi, posto

$$A = \delta^3 u + 3\gamma dv\delta^2 v + p_{11}du^3 + (3\beta\gamma + 2\theta_{uv})du^2 dv$$
$$+ 3\pi_{22}dudv^2 + (\gamma_v - 2\gamma\theta_v)dv^3,$$

$$B = \delta^3 v + 3\beta du\delta^2 u + p_{22}dv^3 + (3\beta\gamma + 2\theta_{uv})dudv^2$$
$$+ 3\pi_{11}dvdu^2 + (\beta_u - 2\beta\theta_u)du^3,$$

$$C = 3(du\delta^2 v + dv\delta^2 u) + \beta du^3 + \gamma dv^3,$$

sarà :

$$\frac{(x\ dx\ d^2x\ d^3x)}{(x\ \ x_u\ \ x_v\ \ x_{uv})} = \begin{vmatrix} du & dv & 0 \\ \delta^2 u + \gamma dv^2 & \delta^2 v + \beta du^2 & 2dudv \\ A & B & C \end{vmatrix}$$

$$= -2dudv\left[\begin{array}{r} (du\delta^3 v - dv\delta^3 u) + 3(\beta du^2\delta^2 u - \gamma dv^2\delta^2 v) + \\ + (\beta_u - 2\beta\theta_u)du^4 - (\gamma_v - 2\gamma\theta_v)dv^4 \\ + (3\pi_{11} - p_{11})dvdu^3 + (p_{22} - 3\pi_{22})dudv^3 \end{array}\right]$$

$$+ \left[3(du\delta^2 v + dv\delta^2 u) + \beta du^3 + \gamma dv^3\right]\left[du\delta^2 v - dv\delta^2 u + \beta du^3 - \gamma dv^3\right].$$

Se F_3' è il covariante cubico $a(\beta du^3 - \gamma dv^3)$ di F_3 e G è la espressione intrinseca $a(du\delta^2 v - dv\delta^2 u)$, avremo:

$$G = a(du\delta^2 v - dv\delta^2 u) \qquad dG = a(du\delta^3 v - dv\delta^3 u)$$

$\left(\text{cioè la curvatura geodetica rispetto all'elemento } F_2 \text{ è } G : \sqrt{F_2}^{\,3}\right)$,

$$dF_2 = 2a(du\delta^2 v + dv\delta^2 u)$$

$$dF_3' = 3a(\beta du^2\delta^2 u - \gamma dv^2\delta^2 v) + a_{1111}\, du^4 + a_{1112} du^3 dv - a_{2221}\, du dv^3 - a_{2222} dv^4$$

$$= 3a(\beta du^2\delta^2 u - \gamma dv^2\delta^2 v) + \left[\frac{\partial(a\beta)}{\partial u} - 3\theta_u a\beta\right] du^4 +$$

$$+ \frac{\partial(a\beta)}{\partial v} du^3 dv - \frac{\partial(a\gamma)}{\partial u} du dv^3 - \left[\frac{\partial(a\gamma)}{\partial v} - 3\theta_v a\gamma\right] dv^4 .$$

Essendo $(x\; x_u\; x_v\; x_{uv}) = a^2$, ne deduciamo:

$$(19) \quad \left\{ \begin{aligned} (x\; dx\; d^2x\; d^3x) = & - F_2 \left[dG + dF_3' + F_2(\pi_{11} du^2 - \pi_{22} dv^2)\right] \\ & + \left(\frac{3}{2} dF_2 + F_3\right)\left(G + F_3'\right). \end{aligned} \right.$$

Si noti che $\pi_{11} du^2 - \pi_{22} dv^2$ si scrive subito anche in coordinate curvilinee qualsiasi; essa è la forma quadratica apolare ad F_2 e alla forma $\Sigma \pi_{rs} du_r du_s$, covariante al loro sistema.

Cosicchè la (19) *permette di calcolare* (x dx d²x d³x) *in coordinate qualsiasi*. Uguagliando a zero, si trova l'equazione delle sezioni piane. Ne segue facilmente (cfr. la Nota di F. citata più avanti) che *l'equazione delle sezioni piane è determinata dalle nostre forme e viceversa;* cosicchè *due superficie poste in una corrispondenza biunivoca, che conservi le sezioni piane, sono collineari* (ciò che è evidente per superficie algebriche e che per superficie qualsiasi si può dimostrare direttamente (cfr. la Nota del Fubini negli Atti della R. Accad. delle Scienze di Torino 1914 vol. 49 pag. 786).

Cambiando di segno β, γ si trova l'equazione delle curve di contatto della nostra superficie con un cono $(\xi\; d\xi\; d^2\xi\; d^3\xi) = 0$.

L'equazione:

$$(20) \qquad (x\, dx\, d^2x\, d^3x) = (\xi\, d\xi\, d^2\xi\, d^3\xi)\ (^*)$$

non contiene i differenziali terzi e si riduce alla:

$$(20)_{\text{bis}} \qquad -F_2\left[2dF_3' + F_2\left\{(\pi_{11} - p_{11})du^2 - (\pi_{22} - p_{22})dv^2\right\}\right] +$$
$$+ 2GF_3 + 3F_3'dF_2 = 0$$

che dev'essere indipendente da a, perchè, moltiplicando le x e quindi anche le ξ per uno stesso fattore, la (20) resta equivalente a sè stessa. Sviluppando la formola precedente si trova infatti che (20) si può scrivere quando si consideri u come funzione della v $\left(\text{e si ponga } u' = \dfrac{du}{dv}, \; u'' = \dfrac{d^2u}{dv^2}\right)$:

$$(20)_{\text{ter}} \qquad 2\,\frac{\beta u'^3 + \gamma}{u'^3}\,u'' = \left(\frac{\gamma_v}{u'^2} - \beta_u u'^2\right) + 2\left(\frac{\gamma_u}{u'} - \beta_v u'\right) = 0.$$

Le curve C definite da questa equazione hanno un importante significato geometrico. Sia π un piano osculatore in x ad una di queste curve C, contenente perciò anche 2 altri punti consecutivi ad x sulla curva C. Consideriamo un quarto punto consecutivo preso *non su* C, ma sull'intersezione della superficie con π. Il primo membro di (20), e quindi per la $(20)_{\text{ter}}$ anche il secondo membro sarà nullo. Perciò i piani tangenti alla superficie in questi quattro punti concorreranno in un'unico punto. Al § 24 del Cap. III° troveremo che $(20)_{\text{ter}}$ definisce le *pangeodetiche*. Abbiamo dunque:

In un punto O *di una superficie il piano osculatore* π *di una qualsiasi pangeodetica uscente da* O gode della proprietà *che i* 4 *piani tangenti in* O *ed in* 3 *punti consecutivi dell'intersezione di* π *con la nostra superficie passano per un medesimo punto.*

Al § 24 del Cap. III° studieremo il cono inviluppato da que-

(*) Per superficie ad asintotiche non reali, alla (20) si dovrebbe sostituire l'equazione ottenuta, moltiplicando per ε uno solo dei due membri.

sti piani: cono che per la prima volta è stato considerato dal Segre. La equazione (20) è dovuta al Čech; essa è molto notevole, perchè permette di fare i calcoli in coordinate u, v qualsiasi. Si veda anche l'ultimo teorema del § 22. Il Fubini trovò per la prima volta le forme F, studiando appunto l'espressione (x, dx, d^2x, d^3x).

F) Confronto con le formole della Geom. metrica.

Supposto $t = 1$, siano x, y, z coordinate cartesiane ortogonali. Sarà:

$$(19)\quad x_{uu} = \left\{ {11 \atop 1} \right\} x_u + \left\{ {11 \atop 2} \right\} x_v \;, \qquad x_{vv} = \left\{ {22 \atop 1} \right\} x_u + \left\{ {22 \atop 2} \right\} x_v \;,$$

ove $\left\{ {i\,j \atop h} \right\}$ sono calcolati per l'elemento lineare di Gauss. Confrontate con le precedenti, si deduce:

$$(20)\quad \theta_u = \left\{ {11 \atop 1} \right\}, \quad \theta_v = \left\{ {22 \atop 2} \right\}, \quad \beta = \left\{ {11 \atop 2} \right\}, \quad \gamma = \left\{ {22 \atop 1} \right\}$$

Ne segue che i nostri β, γ *non sono che i simboli* $\left\{ {11 \atop 2} \right\}$, $\left\{ {22 \atop 1} \right\}$ *per l'elemento lineare di Gauss;* se p. es. $\beta = 0$, sará $\left\{ {11 \atop 2} \right\} = 0$, cioè le $v = cost.$ avranno curvatura geodetica nulla ed, essendo asintotiche, saranno rette, come già sapevamo. Sarà poi:

$$(21)\quad \left\{ \begin{aligned} &(x\, x_u\, x_v\, x_{uv}) = \omega a_{12}^2 = \pm D'\sqrt{EG - F^2}\,, \\ &a_{12} = \sqrt{D'\sqrt{EG-F^2}} = \sqrt{\frac{EG - F^2}{\rho}}\,, \end{aligned} \right.$$

ove $K = -\dfrac{1}{\rho^2}$ è la curvatura totale della superficie, in completo accordo con la (21) del § 12 C.

La coordinate normali si ottengono dalle precedenti, moltiplicando per

$$(22) \qquad \sqrt{\frac{\beta\gamma}{\sqrt{D'\sqrt{EG-F^2}}}} = \sqrt{\beta\gamma}\, e^{-\theta:2}$$

Si noti che, posto $E_{11} = E$, $E_{12} = F$, $E_{22} = G$, conseguenza differenziale delle

$$\frac{\partial E_{ik}}{\partial x_l} = \sum_\mu E_{i\mu} \left\{ \begin{matrix} kl \\ \mu \end{matrix} \right\} + \sum_\mu E_{k\mu} \left\{ \begin{matrix} il \\ \mu \end{matrix} \right\}$$

sono le formole:

$$(23) \left\{ \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} &= \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \frac{F}{\rho^2} \\ \frac{\partial}{\partial u} \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} &= \frac{\partial}{\partial v} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \frac{F}{\rho^2} \end{aligned} \right.$$

e che conseguenza delle equazioni di Codazzi (essendo ora $D = D'' = 0$) sono le:

$$\left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \log \sqrt{\rho}}{\partial v}, \qquad \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} = \frac{\partial \log \sqrt{\rho}}{\partial u}$$

E, per le (20), (21):

$$\theta_{uv} + \beta\gamma = \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 1 \end{matrix} \right\}_v + \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 2 \end{matrix} \right\}_u + \left\{ \begin{matrix} 22 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 11 \\ 2 \end{matrix} \right\} =$$

$$= \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\}_u + \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 1 \end{matrix} \right\} \left\{ \begin{matrix} 12 \\ 2 \end{matrix} \right\} + \frac{F}{\rho^2} =$$

$$= \frac{\partial^2 \log \sqrt{\rho}}{\partial u \partial v} + \frac{\partial \log \sqrt{\rho}}{\partial u} \frac{\partial \log \sqrt{\rho}}{\partial v} - f$$

cioè

$$(24) \qquad a_{12}\, \Omega = \theta_{uv} + \beta\gamma = \frac{1}{\sqrt{\rho}} \frac{\partial^2 \sqrt{\rho}}{\partial u \partial v} - f,$$

che è la quantità che si presenta nella celebre equazione di Moutard.

§ 17. — Applicazione agli invarianti di un sistema coniugato.

A) Calcolo di tali invarianti.

Le $\bar{u}$, $\bar{v}$ formino un sistema coniugato; sia

(1) $$du = rd\bar{u} + sd\bar{v} \quad , \quad dv = Sd\bar{u} + Rd\bar{v}$$

cosicchè:

(1) bis $$\frac{\partial}{\partial\bar{u}} = r\frac{\partial}{\partial u} + S\frac{\partial}{\partial v} \qquad \frac{\partial}{\partial\bar{v}} = s\frac{\partial}{\partial u} + R\frac{\partial}{\partial v},$$

(2) $$rR + sS = 0,$$

(3) $$d\bar{u} = \frac{1}{2r}du + \frac{1}{2S}dv \quad , \quad d\bar{v} = \frac{1}{2s}du + \frac{1}{2R}dv.$$

Per la (2) le condizioni d'integrabilità danno:

(4) $$\left\{\begin{aligned} s_{\bar{u}} &= r_{\bar{v}} = rs_u + Ss_v = rs_u + \frac{Ss^2}{R^2}R_u = \\ &= rs\left(\frac{s_u}{s} - \frac{R_u}{R}\right) = rs\frac{\partial log(s:R)}{\partial u}, \\ R_{\bar{u}} &= S_{\bar{v}} = rR_u + SR_v = rR^2\frac{s_v}{s^2} + SR_v = \\ &= RS\left(\frac{R_v}{R} - \frac{s_v}{s}\right) = RS\frac{\partial log R:s}{\partial v}. \end{aligned}\right.$$

Sarà poi:

(5) $$\frac{\partial^2}{\partial\bar{u}\partial\bar{v}} = rs\frac{\partial^2}{\partial u^2} + RS\frac{\partial^2}{\partial v^2} + rs\frac{\partial \log s:R}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u} +$$

$$+ RS \frac{\partial \log R : s}{\partial v} \frac{\partial}{\partial v}.$$

Sarà dunque (posto $a = a_{12}$)

$$(6) \qquad \frac{\partial^2 x}{\partial \bar{u} \partial \bar{v}} = \left(rs\theta_u + RS\gamma + rs \frac{\partial \log s : R}{\partial u} \right) x_u +$$

$$+ \left(rs\beta + RS\theta_v + RS \frac{\partial \log R : s}{\partial v} \right) x_v + (rsp_{11} + RSp_{22}) x =$$

$$= \left\{ \frac{1}{2r} \left(rs \frac{\partial \log as : R}{\partial u} + RS\gamma \right) + \frac{1}{2S} \left(rs\beta + RS \frac{\partial \log aR : s}{\partial v} \right) \right\} x_{\bar{u}}$$

$$+ \left\{ \frac{1}{2s} \left(rs \frac{\partial \log as : R}{\partial u} + RS\gamma \right) + \frac{1}{2R} \left(rs\beta + RS \frac{\partial \log aR : s}{\partial v} \right) \right\} x_{\bar{v}}$$

$$+ (rsp_{11} + RSp_{22}) x.$$

Questa è una equazione di Laplace per le coordinate x di punto, di cui il primo invariante è:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} I = {} & \frac{1}{4rs} \left(rs \frac{\partial \log as : R}{\partial u} + RS\gamma \right)^2 + \frac{1}{4RS} \left(RS \frac{\partial \log aR : s}{\partial v} + rs\beta \right)^2 \\ & + rsp_{11} + RSp_{22} - \\ & - \left[\frac{1}{2r} \left(rs \frac{\partial \log as : R}{\partial u} + RS\gamma \right) + \frac{1}{2S} \left(rs\beta + RS \frac{\partial \log aR : s}{\partial v} \right) \right]_{\bar{u}} \end{aligned} \right.$$

Poniamo:

$$(8) \qquad \frac{s}{R} = - \frac{r}{S} = \rho;$$

allora

(9) $\quad du - \rho dv = 0$ è l'equazione delle $\bar{u} = \text{cost}$.

(10) $\quad \dfrac{\partial}{\partial \bar{u}} = S \left(\dfrac{\partial}{\partial v} - \rho \dfrac{\partial}{\partial u} \right)$. (Qui S *non* è un simbolo di somma).

L' ultimo termine del secondo membro di (7) diventa:

$$-\frac{1}{2}\left[s\theta_u + s\frac{\rho_u}{\rho} - R\frac{\gamma}{\rho} - \rho s\beta + R\theta_v - R\frac{\rho_v}{\rho}\right]_{\bar{u}} =$$

$$= -\frac{1}{2}\left\{R\left[\rho\theta_u + \rho_u - \frac{\gamma}{\rho} - \beta\rho^2 + \theta_v - \frac{\rho_v}{\rho}\right]\right\}_{\bar{u}}$$

$$= -\frac{1}{2}S(R_v - \rho R_u)\left(\rho\theta_u + \rho_u - \frac{\gamma}{\rho} - \beta\rho^2 + \theta_v - \frac{\rho_v}{\rho}\right)$$

$$-\frac{1}{2}RS\left(\frac{\partial}{\partial v} - \rho\frac{\partial}{\partial u}\right)\left(\rho\theta_u + \rho_u - \frac{\gamma}{\rho} - \beta\rho^2 + \theta_v - \frac{\rho_v}{\rho}\right).$$

Per le condizioni d'integrabilità è $R_u : R^2 = s_v : s^2$; e perciò il fattore

$$-\frac{1}{2}S(R_v - \rho R_u)$$

del primo termine dell' ultimo membro vale $\frac{1}{2}RS\frac{\rho_v}{\rho}$.

Se ne deduce, ricordando (2) e le (13) del § 16 D che:

$$(11)\quad \left\{\begin{aligned} \frac{2I}{Ss} &= \left(L\rho - \frac{M}{\rho}\right) + \\ &+ \left[\rho_{uu} - \frac{1}{2}\frac{\rho_u^2}{\rho} - 2\frac{\partial^2 \log\rho}{\partial u\partial v} + \frac{\rho_{vv}}{\rho^2} - \frac{3}{2}\frac{\rho_v^2}{\rho^3}\right] \\ &+ \left(-\frac{2}{\rho}\gamma_u - 2\gamma\frac{\rho_v}{\rho^3} - \frac{1}{2}\frac{\gamma^2}{\rho^3} + 2\gamma\frac{\rho_u}{\rho^2} + \gamma_v\frac{1}{\rho^2}\right) \\ &+ \left(2\beta_v\rho - \beta_u\rho^2 - 2\beta\rho\rho_u + \frac{1}{2}\beta^2\rho^3 + 2\beta\rho_v\right). \end{aligned}\right.$$

Dunque: (F)

La forma $8\mathrm{I}d\bar{u}\,d\bar{v} = \frac{2\mathrm{I}}{\mathrm{Ss}}\left(-\frac{1}{\rho}du^2 + \rho dv^2\right)$, *che ha un significato indipendente dal modo con cui sono stati scelti i parametri*

$\bar{u}$, $\bar{v}$ *del sistema coniugato che si considera, si calcola appena data l'equazione* $du - \rho dv = 0$ *delle* $\bar{u} =$ cost. *oppure* $du + \rho dv = 0$ *delle* $\bar{v} =$ cost. *senza che si debbano calcolare le equazioni di queste curve in termini finiti o ricorrere a quadrature.*

L'altro invariante se ne deduce scambiando r con s, R con S, cioè cambiando ρ in $-\rho$ ed Ss in $Rr = -Ss$. Lo diremo il *secondo* invariante.

Gli invarianti per l'equazione di Laplace relativa ai piani tangenti se ne deducono semplicemente sostituendo $-\beta$, $-\gamma$ a β, γ.

B) Sistemi coniugati ad invarianti uguali.

La differenza dei due invarianti per l'equazione di Laplace relativa alle coordinate di punto è quindi il prodotto di Ss per

$$-2\frac{\partial^2 \log\rho}{\partial u \partial v} - 2\gamma\frac{\rho_v}{\rho^3} + \gamma_v\frac{1}{\rho^2} - \beta_u\rho^2 - 2\beta\rho\rho_u$$

che vale, (F), posto $-\frac{1}{\rho^2} = \frac{C}{D}$:

$$\frac{\partial^2 \log \frac{C}{D}}{\partial u \partial v} - \left(\gamma\frac{C}{D}\right)_v + \left(\beta\frac{D}{C}\right)_u \tag{12}$$

Dunque: *Il sistema coniugato* $Cdu^2 + Ddv^2 = 0$ *ha invarianti di punto uguali, se* (12) *è nullo.*

L'uguagliare a zero il solo primo termine caratterizza, si noti, i sistemi isotermi coniugati.

L'uguagliare a zero la (12), *in cui si cambino i segni di* β, γ, *caratterizza similmente i sistemi coniugati a invarianti tangenziali uguali.*

Poichè cambiare i segni di β, γ equivale a cambiare il segno di $\frac{C}{D}$, cioè a sostituire al sistema coniugato $Cdu^2 + Ddv^2 = 0$ il sistema coniugato armonico (che lo divide armonicamente) $Cdu^2 -$

$- Ddv^2 = 0$, ne deduciamo (Fubini) il teor. di Darboux (Théorie des surf. 1896 Tomo 4, p. 72):

Se un sistema coniugato ha invarianti di punto uguali, il sistema coniugato armonico ha uguali invarianti tangenziali e viceversa.

Segue pure immediatamente: *Se un sistema coniugato gode di due delle tre proprietà seguenti: di avere uguali invarianti di punto, di avere uguali invarianti tangenziali, di essere isotermo coniugato, gode pure della terza; ed anche il sistema coniugato armonico gode delle stesse proprietà.*

Se una superficie contiene un tale sistema coniugato, potremo cambiare i parametri u, v *delle asintotiche in guisa che* $C = D = 1$. Risulterà perciò dall'annullarsi di (12) *che* $\beta_u = \gamma_v$. Tali superficie diconsi di *Ionas.*

Notiamo ancora: *Se due superficie hanno le stesse* β, γ *cioè lo stesso elemento lineare proiettivo, cioè se, come vedremo, sono proiettivamente applicabili, su di esse si corrispondono i sistemi coniugati ad invarianti uguali.* (F).

All'equazione ottenuta uguagliando (12) a zero, si possono sostituire delle equazioni più semplici. Tale equazione dice infatti che

$$\left(\frac{\partial}{\partial u} \log D + \gamma \frac{C}{D}\right) du + \left(\frac{\partial}{\partial v} \log C + \beta \frac{D}{C}\right) dv$$

è un differenziale esatto $d\log\varphi$, cioè che:

$$\frac{\partial}{\partial u} \log \frac{D}{\varphi} + \gamma \frac{C:\varphi}{D:\varphi} = 0 \qquad \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{C}{\varphi} + \beta \frac{D:\varphi}{C:\varphi} = 0$$

Posto $\varphi = \psi H$, ove H è una funzione arbitraria, e sostituito $C:\psi$ e $D:\psi$ alle C, D, col che il rapporto $C:D$ resta immutato, queste equazioni diventano

$$\frac{\partial}{\partial u} \log \frac{D}{H} + \gamma \frac{C}{D} = \frac{\partial}{\partial v} \log \frac{C}{H} + \beta \frac{D}{C} = 0,$$

ossia:

$$D_u + \gamma C = D \frac{H_u}{H}; \quad C_v + \beta D = C \frac{H_v}{H}, \tag{13}$$

che sono lineari in C, D. Poichè H è arbitrario, si può, volendo, scegliere $H = 1$; e le (13) diventano allora:

$$D_u = -\gamma C , \qquad C_v = -\beta D. \tag{14}$$

La determinazione dei sistemi coniugati a invarianti uguali è ridotta al semplicissimo sistema **lineare** (14) (F).

C) Un'altra applicazione.

La differenza tra il *primo* invariante dell'equazione di Laplace per le coordinate di punto ed il *secondo* invariante tangenziale vale dunque il prodotto di Ss per

$$-2\frac{\partial^2 \log\rho}{\partial u \partial v} - \frac{2}{\rho}\gamma_u + 2\gamma\frac{\rho_u}{\rho^2} + 2\rho\beta_v + 2\beta\rho_v$$

cioè vale

$$2Ss\left\{(\beta\rho)_v - \left(\frac{\gamma}{\rho}\right)_u - \frac{\partial^2 \log\rho}{\partial u \partial v}\right\} \tag{15}$$

Posto $\rho = +\dfrac{A}{B}$, l'eguagliare a zero questa espressione (15) equivale, (quando si moltiplichino A, B per uno stesso opportuno fattore) a imporre le:

$$A_v + \gamma B = 0 \qquad B_u + \beta A = 0 \tag{16}$$

affatto analoghe alle (14); vedremo che queste equazioni equivalgono a dire che le tangenti alle linee $\dfrac{du}{A} = \dfrac{dv}{B}$ cioè alle $\bar{u} =$ cost. $(du - \rho dv = 0)$ formano una congruenza W. Se ne deduce il teor. (F):

Se il primo invariante in coordinate di punto è uguale al secondo invariante tangenziale, le rette tangenti alle curve del primo sistema ($\bar{u} =$ cost.) *formano una congruenza* W.

Se questo avviene anche per le linee coniugate $\bar{v} =$ cost., *cioè se le equazioni di Laplace per i punti o per i piani tangenti* *hanno uguali invarianti, scambiati di posto, cioè se tali equazioni sono aggiunte, allora, scegliendo opportunamente i parametri* u , v *delle asintotiche, potremo supporre* $\rho = 1$; *il sistema coniugato che si considera è pertanto isotermo coniugato ; e,* come si vede da (15) , $\beta_v = \gamma_u$. *Le superficie, su cui esiste un tale sistema, sono le superficie* R *di Tzitzeica e Demoulin.*

L'analogia tra le (14) e (16) non è soltanto formale; vedremo che, *integrate le* (16) *cioè trovate le congruenze* W *di cui* S *è prima falda focale, si sanno integrare le* (14), *cioè trovare i sistemi coniugati a invarianti uguali con sole derivazioni ; e viceversa, integrate le* (14), *si sanno integrare le* (16) *con sole quadrature.*

Notiamo ancora che se due superficie sono in corrispondenza biunivoca, e se per la seconda β' e γ' sono i valori delle β , γ , la differenza dei due invarianti citati ha uguali valori sulle due superficie [per il sistema coniugato, a cui appartengono le $du - \rho dv = 0$] soltanto se :

$$(16) \qquad \frac{\partial}{\partial v}\left[(\beta' - \beta)\rho\right] = \frac{\partial}{\partial u}\left[(\gamma' - \gamma)\frac{1}{\rho}\right].$$

Supponiamo che le due superficie debbano aver uguale tanto il primo invariante in coordinate di punto che il secondo invariante tangenziale. Allora basterà che sia soddisfatta la (16), e che siano uguali i primi invarianti in coordinate di punto; cioè, indicando con L' , M' i valori di L , M per le due superficie, dovrà essere soddisfatta, oltre alla (16), anche la :

$$(17) \qquad \begin{aligned} &\rho^2\left(L - \rho\beta_u - 2\beta\rho_u + \frac{1}{2}\beta^2\rho^2\right) - \\ &\qquad - \left(M + 2\gamma\frac{\rho_v}{\rho^2} + \frac{1}{2}\gamma^2\frac{1}{\rho^2} - \frac{\gamma_v}{\rho}\right) = \\ &= \rho^2\left(L' - \rho\beta'_u - 2\beta'\rho_u + \frac{1}{2}\beta'^2\rho^2\right) - \\ &\qquad - \left(M' + 2\gamma'\frac{\rho_v}{\rho^2} + \frac{1}{2}\frac{\gamma'^2}{\rho^2} - \frac{\gamma'_v}{\rho}\right). \end{aligned}$$

Le (16), (17) hanno un ufficio fondamentale nella teoria della deformazione delle congruenze.

Ancora una osservazione: *Per le superficie isotermo asintotiche* $\left(\text{per cui } \frac{\partial^2}{\partial u \partial v} \log \frac{\beta}{\gamma} = 0\right)$ *si possono mutare i parametri* u, v *delle asintotiche in guisa che* $\beta = \gamma$.

Per tali superficie le equazioni (14) *e* (16) *sono perfettamente equivalenti. Si ha così una trasformazione* (F) *delle congruenze* W *che hanno una tale superficie come prima falda focale; la soluzione di* (14) *che, come abbiamo enunciato, si deduce con sole derivazioni da una soluzione di* (16) *è ancora una soluzione di* (16) *e individua pertanto ancora una congruenza* W.

§ 18. — Nuovi studii in coordinate asintotiche u, v.

A) Coordinate non omogenee e di Lelieuvre.

Sia $t = 1$; e quindi x, y, z siano *non* omogenee. Le equazioni

$$S\Xi x_u = S\Xi x_v = 0 \,, \qquad S\xi x_u = S\xi x_v = 0$$

(i cui primi membri si riducono a tre soli termini perchè $t_u = t_v = 0$) provano che esiste una quantità λ tale che

$$\Xi = \lambda\xi \qquad \mathrm{H} = \lambda\eta \qquad \mathrm{Z} = \lambda\zeta \,.$$

Poichè $\Xi = \frac{1}{2}\Delta_2\xi$, sarà:

$$\varphi_{uv} = \lambda a_{12}\varphi \qquad (\text{per } \varphi = \xi, \eta, \zeta, \textbf{ non} \text{ per } \varphi = \tau)$$

Ora

$$\Omega = SX\Xi = \lambda SX\xi = \lambda \,.$$

Perciò (§ 16 C) sarà:

(1) $\qquad \varphi_{uv} = (\theta_{uv} + \beta\gamma)\varphi \qquad (\text{per } \varphi = \xi, \eta, \zeta, \textit{ non} \text{ per } \varphi = \tau)$

che è la classica equazione di Moutard.

Se ne deduce:

I piani tangenti alle asintotiche di una superficie tagliano un piano qualunque t $= 0$ *in un sistema coniugato ad invarianti tangenziali uguali.* Questo teorema è il duale del seguente, che è ben noto, e che si dimostra supponendo $\tau = 1$. *Proiettando da un punto su un piano le asintotiche d'una superficie si ottiene un sistema coniugato ad invarianti* (di punto) *uguali.*

Viceversa siano ξ, η, ζ tre soluzioni indipendenti di una equazione di Laplace ad invarianti uguali, che potremo supporre ridotta alla forma

$$(1)_{\text{bis}} \qquad \varphi_{uv} = R\varphi\,.$$

Costruiamo le equazioni

$$(2) \qquad \xi_{uu} = \alpha\xi_u - \beta\xi_v + \pi_{11}\xi \qquad \xi_{vv} = -\gamma\xi_u + \varepsilon\xi_v + \pi_{22}\xi\,,$$

a cui soddisfano le funzioni ξ, η, ζ. Le $(1)_{\text{bis}}$ e (2) hanno 3 soluzioni indipendenti comuni, e soddisfano perciò alle condizioni d'integrabilità. Da queste si trae innanzi tutto $\alpha_v = \varepsilon_u$, cosicchè si può porre $\alpha = \theta_u$, $\varepsilon = \theta_v$, e inoltre si trae che:

$$(3) \qquad R = \theta_{uv} + \beta\gamma\,, \qquad \pi_{11} = \beta_v + \beta\theta_v\,, \qquad \pi_{22} = \gamma_u + \gamma\theta_u\,.$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\theta_{uu} - \frac{1}{2}\theta_u^2 - \beta_v - \beta\theta_v\right) = -\,2\beta\gamma_u - \gamma\beta_u\,,$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\theta_{vv} - \frac{1}{2}\theta_v^2 - \gamma - \gamma\theta_u\right) = -\,2\gamma_v\beta - \gamma\beta_v\,.$$

In particolare sono dunque soddisfatte, com'era prevedibile *a priori,* le condizioni d'integrabilità per il sistema formato dalle *sole* (2); ed esisterà pertanto una quarta funzione $\tau(u, v)$, linearmente indipendente dalle precedenti che soddisfa a (2), ma non ad $(1)_{\text{bis}}$. Ciò che del resto si potrebbe dimostrare *a posteriori,* verificando direttamente i seguenti risultati. Il piano ξ, η, ζ, τ inviluppera una superficie S, su cui le u, v saranno le asintotiche.

La $S\xi x_u = 0$ diventa per $(1)_{\text{bis}}$

$$\frac{1}{R}\left(\xi_{uv}x_u + \eta_{yv}y_u + \zeta_{uv}z_u\right) + \tau t_u = 0.$$

Confrontando con la $S\Xi x_u = 0$, ossia $S\xi_{uv} x_u = 0$ si deduce:

$$(\tau_{uv} - R\tau)t_u = 0$$

ossia, poichè τ non soddisfa ad $(1)_{\text{bis}}$, $t_u = 0$; similmente si prova che $t_v = 0$, ossia che $t = cost.$, ossia che x, y, z daranno coordinate non omogenee [e quindi che $p_{11} = \pi_{11} - (\beta_v + \beta\theta_v)$ e p_{22} sono nulle, come si poteva dedurre anche da (3)]. Dalle $S\xi x_u = S\xi_u x_u = 0$, che si riducono a somme di soli *tre* termini, si trae:

$$(4) \qquad x_u = \rho \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \eta_u & \zeta_u \end{vmatrix} \qquad \begin{pmatrix} \text{e analoghe in } y, z \\ \rho = \text{fattore di proporzionalità} \end{pmatrix}$$

Similmente, se σ è un altro fattore, si trae:

$$(4)_{\text{bis}} \qquad x_v = -\sigma \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \eta_v & \zeta_v \end{vmatrix} \qquad (\text{e analoghe in } y, z).$$

Dovendo essere $S\xi_v x_u = S\xi_u x_v$, sarà $\rho = \sigma$. Si riconosce poi che le condizioni d'integrabilità sono soddisfatte se $\rho_u = \rho_v = 0$, p. es. per $\rho = 1$. Si ha così:

$$(5) \quad dx = \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \eta_u du - \eta_v dv & \zeta_u du - \zeta_v dv \end{vmatrix} \qquad (\text{e analoghe in } y, z).$$

Queste sono le ben note formole di Lelieuvre, che permettono di calcolare x, y, z *con sole quadrature.* Sarà inoltre:

$$(x \; x_u \; x_v \; x_{uv}) = -(x_u \; x_v \; x_{uv}) =$$

$$= \left(\begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \eta_u & \zeta_u \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \eta & \zeta \\ \eta_v & \zeta_v \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} \eta_v & \zeta_v \\ \eta_u & \zeta_u \end{vmatrix} \right) = \begin{vmatrix} \xi & \xi_u & \xi_v \\ \eta & \eta_u & \eta_v \\ \zeta & \zeta_u & \zeta_v \end{vmatrix}^2 .$$

Calcolando le derivate di quest'ultimo determinante, si trova per le $(1)_{\text{bis}}$, (2) che esso vale ke^θ con $k = cost.$ D'altra parte

$$(\xi \; \xi_u \; \xi_v \; \xi_{uv}) = \begin{vmatrix} \xi & \xi_u & \xi_v \\ \eta & \eta_u & \eta_v \\ \zeta & \zeta_u & \zeta_v \end{vmatrix} (\tau_{uv} - R\tau).$$

E, calcolando le derivate di $\tau_{uv} - R\tau$, si trova che, moltiplicando la τ per un fattore costante, si può rendere $\tau_{uv} - R\tau = ke^{\theta}$.

Perciò,

$$(\xi \ \xi_u \ \xi_v \ \xi_{uv}) = k^2 e^{2\theta} = (x \ x_u \ x_v \ x_{uv}).$$

E si ritorna completamente alle usuali formole della teoria delle superficie appena si osservi che, essendo θ determinata a meno di una costante additiva dalle $\theta_u = \alpha$, $\theta_v = \varepsilon$, possiamo servirci di tale indeterminazione per rendere $k = 1$.

Abbiamo conseguito *un ulteriore risultato che cioè la* τ, la quale *non soddisfa alla* $(1)_{\text{bis}}$ *soddisfa invece alla :*

$$\tau_{uv} = R\tau + e^{\theta} = R\tau + a_{12}, \tag{6}$$

completando così il risultato di Lelieuvre.

Si capisce ora perchè il Lelieuvre, nella geometria metrica, *sostituisca le precedenti* ξ, η, ζ *ai coseni direttori della normale. Le* ξ, η, ζ *insieme alla* τ sono proprio quelle coordinate del piano tangente che corrispondono alle coordinate non omogenee x, y, z, 1 secondo le nostre convenzioni $(x \ x_u \ x_v \ x_{uv}) = (\xi \ \xi_u \ \xi_v \ \xi_{uv})$ relative al caso $\varepsilon = 1$ di asintotiche reali.

B) Asintotiche appartenenti a complessi lineari.

Nella teoria delle curve avevamo scelto coordinate corrispondenti di punto x e di piano osculatore ξ in guisa che $(x\, dx\, d^2x\, d^3x) = (\xi\, d\xi\, d^2\xi\, d^3\xi)$. Ora, se x descrive una superficie di cui ξ è il piano tangente, allora ξ è anche osculatore ad ogni asintotica; Čech ha fatto l'importante osservazione che *le coordinate* ξ *scelte con le nostre convenzioni per le superficie sono proprio le stesse, cui giungeremmo con le convenzioni relative alle asintotiche.* Infatti, se ci muoviamo su una asintotica $v = cost.$, e se ξ è il piano tangente alla superficie, allora per le equazioni fondamentali (I) e (II)

$$(\xi \ d\xi \ d^2\xi \ d^3\xi) = (\xi \ \xi_u \ \xi_{uu} \ \xi_{uuu})du^3 = (\xi \ \xi_u \ \xi_v \ \xi_{uv})\beta^2 du^3 =$$

$$= (x \ x_u \ x_v \ x_{uv})\beta^2 du^3 = (x \ dx \ d^2x \ d^3x).$$

Dunque tutte le nostre formole relative alle curve si possono senz'altro applicare alle asintotiche. Così p. es. *le* $\mathrm{v} = \mathrm{cost.}$ *apparteranno ad un complesso lineare se lungo* $\mathrm{v} = \mathrm{cost.}$ *è* $\mathrm{Sd^3xd^3\xi} = 0$, *ossia* $\mathrm{Sx_{uuu}\xi_{uuu}} = 0$, *equazione che, tenuto conto delle equazioni fondamentali* I° e II°, *diventa l'equazione di Čech :*

$$\frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u \partial v} = \beta\gamma. \tag{7}$$

Se $\gamma = 0$, e quindi le $u = cost.$ sono rette, allora questa equazione ci dice che β è prodotto di due funzioni, una della sola u, una della sola v.

La linea flecnodale $\beta = 0$ sarà perciò contemporaneamente definita da una equazione $v = cost.$, e perciò sarà un'asintotica, oppure una coppia di asintotiche (cfr. 16 B pag. 92), e quindi sarà una retta o una coppia di rette, direttrici della rigata. Ne segue, come del resto apparirà ancora più chiaro dal capitolo sulle rigate, che :

Le superficie rigate, per cui le asintotiche curve appartengono ad un complesso lineare, sono tutte e sole le rigate appartenenti ad una congruenza lineare a direttrici coincidenti o distinte, le quali sulla superficie esauriranno la linea flecnodale.

Si può poi dimostrare: *Tutte le asintotiche curve* ($\mathrm{v} = \mathrm{cost.}$) *di una di queste rigate sono* (proiettivamente) *identiche* (*).

Escludiamo ora il caso $\gamma = 0$ delle rigate; più tardi noi troveremo *le superficie qui cercate come tutte quelle che sono trasformate*

(*) Nel Capitolo dedicato alle rigate vedremo che, se $\gamma = 0$, si può supporre θ funzione della sola u, supporre $p_{22} = 0$, $\beta = U(av^2 + bv + c)$ con U, a, b, c funzioni della sola u; e infine $p_{11} = p - aUv$ con p funzione della sola u. Nel nostro caso potremo anzi supporre le a, b, c costanti e, mutando v in $v +$ cost. $\left(\text{oppure } \dfrac{1}{v}\right)$ supporre anche $c = 0$. Dalle equazioni fondamentali si trae che le x, y, z, t soddisfano tutte all'equazione $\varphi_{uu} - \theta_u \varphi_u - p\varphi = 0$, ove $\varphi = -\dfrac{1}{U}(x_{uu} - \theta_u x_u - [p + bU]x)$. Questa equaz. di quarto ordine nelle x, y, z, t ha coefficienti indipendenti dalla v, ed è perciò la stessa per tutte le asintotiche $v = \mathrm{cost.}$; le quali sono dunque proiettivamente identiche.

di una rigata mediante una congruenza W. Noi qui le determineremo per via puramente analitica. Dai valori di L_v, M_u dati dalle prime due condizioni d'integrabilità (pag. 95) si deduce per la (7):

$$(8)\qquad \begin{aligned} L &= \frac{1}{2}\left(\frac{\beta_u}{\beta}\right)^2 - 2\,\frac{\partial^2 \log\beta}{\partial u^2} + U\,, \\ M &= -\frac{\partial^2 \log\beta}{\partial v^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log\beta}{\partial v}\right)^2 + V\,, \end{aligned}$$

ove U è funzione della sola u, V della v. L'ultima condizione d'integrabilità dà poi:

$$(9)\qquad \beta V' + 2V\beta_v = \gamma\frac{\partial}{\partial u}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_u}{\beta}\right)^2 - 2\,\frac{\partial^2\log\beta}{\partial u^2}\right\} +$$

$$+\,2\gamma_u\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_u}{\beta}\right)^2 - 2\,\frac{\partial^2\log\beta}{\partial u^2}\right\} + \gamma_{uuu} + \gamma U' + 2\gamma_u U\,.$$

Ora hanno, come sappiamo (pag. 96), significato *intrinseco*, sia

$$\left[L - \frac{1}{2}\,\frac{\partial^2\log\beta}{\partial u^2} + \frac{1}{8}\left(\frac{\partial\log\beta}{\partial u}\right)^2\right]du^2$$

che

$$\left[M + \frac{\partial^2\log\beta}{\partial v^2} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\log\beta}{\partial v^2}\right)\right]dv^2$$

cioè sia

$$\left[-4\,\frac{\partial^2\log\beta}{\partial u^2} + \left(\frac{\partial\log\beta}{\partial u}\right)^2 + \frac{8}{5}\,U\right]du^2 \quad \text{che} \quad V dv^2.$$

Poichè anche $\beta\,\dfrac{du^2}{dv}$ è intrinseco, segue che possiamo cambiare i parametri u, v delle asintotiche in guisa che $U = 0$ e che V sia uguale a 0, oppure ad 1. Sostituendo questi valori di U, V e quello di γ dedotto da (7) nella (9), si trova un'equazione nella sola β, di cui è inutile occuparci, perchè, come dicemmo, affronteremo il problema per altra via.

C) Superficie di cui tutte le asintotiche appartengono a complessi lineari.

Supponiamo che tanto le $u = cost.$ che le $v = cost.$ appartengano a complessi lineari. Insieme alla (7) varrà la

$$\frac{\partial^2 \log \gamma}{\partial u \partial v} = \beta\gamma\,, \tag{10}$$

dalle quali si deduce $\dfrac{\partial^2 \log \dfrac{\beta}{\gamma}}{\partial u \partial v} = 0$. *Le superficie cercate sono dunque isotermo-asintotiche; con un cambiamento di parametri* u, v *si potrà perciò rendere* $\beta = \gamma$; e le (7), (10) *si ridurranno alla equazione di Liouville*

$$\frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u \partial v} = \beta^2, \tag{11}$$

di cui l'integrale generale è

$$\beta = \frac{\sqrt{U' V'}}{U + V}, \tag{12}$$

ove U è funzione della sola u, V della v.

Si avrà poi, come in B,

$$\begin{aligned} L &= -\frac{\partial^2 \log \beta}{\partial u^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log \beta}{\partial u}\right)^2 + U_1\,, \\ M &= -\frac{\partial^2 \log \beta}{\partial v^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial \log \beta}{\partial v}\right)^2 + V_1\,, \end{aligned} \tag{13}$$

con U_1 nuova funzione della sola u, V_1 della v. E le condizioni d'integrabilità danno $(\beta^2 V_1)_v = (\beta^2 U_1)_u$, cosicchè

$\beta^2(V_1 du + U_1 dv)$ è un differenziale esatto $d\varphi$.

Integrando si trova:

$$\varphi = -\frac{V' V_1}{U+V} + V_2 = -\frac{U' U_1}{U+V} + U_2 ,$$

dove U_2 è una nuova funzione della sola u, V_2 della v. Identificando i due valori di φ, si trova:

$$V_2 U - U_2 V + V_2 V - V_1 V' - U_2 U + U_1 U' = 0$$

che, derivata rispetto ad u ed a v, dà: $V_2' U' = U_2' V'$, cioè:

$$V_2 = kV + h , \qquad U_2 = kU + l \qquad (k , h , l = cost.)$$

che, sostituiti nella precedente, danno:

$$U_1 U' - kU^2 + (h-l)U = V_1 V' - kV^2 + (l-h)V.$$

Essendo i due membri uno funzione della sola u, l'altro della sola v, saranno una stessa costante p. E quindi:

$$(13)_{\text{bis}} \quad U_1 = \frac{kU^2 + (l-h)U + p}{U'} , \quad V_1 = \frac{kV^2 + (h-l)V + p}{U'}$$

$$(h , k , l , p = cost.)$$

Le (12), (13), $(13)_{\text{bis}}$ individuano le nostre superficie; *al variare delle costanti* h , k , l , p *non tutte essenziali, non varia* $\beta = \gamma$, *cioè non varia l'elemento lineare proiettivo; e perciò le superficie corrispondenti sono tutte proiettivamente applicabili tra di loro.*

Per k = p = l — h = 0 *si hanno le superficie di Tzitzeica-Wilczynski,* che ritroveremo più tardi per tutt'altra via; così pure soltanto più tardi studieremo le relazioni *tra i precedenti risultati, la teoria delle congruenze* W *che hanno una quadrica per falda focale, e le superficie a curvatura nulla negli spazi di curvatura costante.*

§ 19. — Le rette tangenti.

Accanto ai punti ed ai piani tangenti studiamo ora le rette tangenti. Siano $dv : du$ e $\delta v : \delta u$ i parametri corrispondenti a direzioni coniugate. Sarà:

$$\delta u = a_{12}\,du + a_{22}\,dv \qquad \delta v = -\,a_{11}\,du - a_{12}\,dv .$$

La retta congiungente i punti x e $\delta x = x_u\,\delta u + x_v\,\delta v$ coinciderà con la intersezione dei piani ξ e $d\xi = \xi_u\,du + \xi_v\,dv$; cosicchè, se λ è un fattore di proporzionalità, sarà $(\xi d\xi) = \lambda(x\,,dx)$, o, più precisamente:

$$(\xi\,\xi_u)du + (\xi\,\xi_v)dv = \lambda\left[(x\,x_u)\delta u + (x\,x_v)\delta v\right]$$

che, per evitare equivoci, scriveremo per disteso:

$$\begin{vmatrix} \xi & \eta \\ \xi_u & \eta_u \end{vmatrix} du + \begin{vmatrix} \xi & \eta \\ \xi_v & \eta_v \end{vmatrix} dv = \lambda \left\{ \begin{vmatrix} z & t \\ z_u & t_u \end{vmatrix} \delta u + \begin{vmatrix} z & t \\ z_v & t_v \end{vmatrix} \delta v \right\}$$

insieme alle analoghe ottenute con permutazione circolare di $\eta\,,\zeta\,,\tau$ nei primi membri, di $z\,,t\,,y$ nei secondi.

Moltiplicandole rispettivamente per $y_u\,,z_u\,,t_u$ e sommando si trova

$$-\lambda \begin{vmatrix} y & z & t \\ y_u & z_u & t_u \\ y_v & z_v & t_v \end{vmatrix} \delta v = \lambda\sqrt{|A|}\;\xi\delta v =$$

$$= \xi(y_u\eta_u + z_u\zeta_u + t_u\tau_u)du - \xi_u(\eta y_u + \zeta z_u + \tau t_u)du +$$

$$+ \xi(y_u\eta_v + z_u\zeta_v + t_u\tau_v)dv - \xi_v(\eta y_u + \zeta z_u + \tau t_u)dv$$

$$= \xi(-\,a_{11} - \xi_u x_u)du - \xi_u(-\,\xi x_u)du +$$

$$+ \xi(-\,a_{12} - x_u\xi_v)dv - \xi_v(-\,\xi x_u)dv$$

$$= \xi(-\,a_{11}\,du - a_{12}\,dv) = \xi\delta v .$$

Perciò $\lambda = \dfrac{1}{\sqrt{|A|}}$ e si hanno le equazioni del Fubini:

$$
(\mathrm{V}) \quad \left\{ \begin{aligned} (\xi\eta_u - \eta\xi_u) &= \frac{1}{\sqrt{|A|}} \left\{ - a_{11}(zt_v - tz_v) + a_{12}(zt_u - tz_u) \right\} \\ (\xi\eta_v - \eta\xi_v) &= \frac{1}{\sqrt{|A|}} \left\{ - a_{12}(zt_v - tz_v) + a_{22}(zt_u - tz_u) \right\} \end{aligned} \right.
$$

che sono equazioni analoghe a quelle che in geometria metrica danno le derivate dei coseni direttori della normale in funzione lineare delle derivate delle coordinate di punto.

Čech ha osservato che

$$
d'u = du \pm \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{|A|}} \delta u \,, \qquad d'v = dv \pm \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{|A|}} \delta v
$$

soddisfano identicamente alla

$$
a_{11}(d'u)^2 + 2a_{12}\, d'u\, d'v + a_{22}(d'v)^2 = 0
$$

cosicchè, comunque siano state scelte le du, dv, il rapporto $d'u : d'v$ caratterizza le direzioni asintotiche. Le tangenti asintotiche sono dunque le rette

$$
(x\, dx) \pm \frac{\sqrt{\varepsilon}}{\sqrt{|A|}} (x\,,\, \delta x) = (x\,,\, dx) \pm \sqrt{\varepsilon}\, (\xi\,,\, d\xi)\,,
$$

comunque siano scelte le du, dv (Č).

§ 20. — Applicabilità proiettiva.

A) Il teorema fondamentale.

Siano date due superficie S, $\bar{S}$ in corrispondenza biunivoca, che noi rappresenteremo dando le coordinate x ed $\bar{x}$ dei loro punti come funzioni degli stessi parametri u, v. Noi, estendendo le definizioni del § 2, diremo col Fubini che:

Le superficie S , $\overline{\mathrm{S}}$ *si diranno proiettivamente applicabili se, per ogni coppia di punti omologhi* O , $\overline{\mathrm{O}}$ *esiste una collineazione* M *che porta* $\overline{\mathrm{S}}$ *in una superficie* S′, $\overline{\mathrm{O}}$ *nel punto* O *in guisa che curve omologhe tracciate su* S *ed* S′ *ed uscenti da* O *vi abbiano un contatto del secondo ordine.* (Se ciò avvenisse per una sola coppia di punti omologhi, le superficie sarebbero applicabili soltanto in essa). Notiamo :

1°) Se la M non variasse al variare di O, $\overline{O}$, le S, $\overline{S}$ sarebbero (proiettivamente) identiche, perchè M le porterebbe l'una nell'altra.

2°) Non si è parlato di contatti del *primo* ordine, perchè dalla corrispondenza biunivoca segue che i fasci di tangenti omologhe uscenti da due punti omologhi O, O' sono collineari; perciò una definizione che parlasse di *soli* contatti del primo ordine condurrebbe a chiamare proiettivamente applicabili due superficie qualunque in corrispondenza biunivoca.

3°) Il *contatto,* di cui abbiamo parlato, può essere *geometrico* od *analitico.* Questi due casi (di cui gli analoghi nella geometria metrica portano l'uno all'applicabilità *effettiva,* l'altro all'applicabilità o corrispondenza *conforme*) non sono distinti, come risulterà da quanto segue, nella geom. proiettiva.

Siano dunque S ed $\overline{S}$ due superficie proiettivamente applicabili nella coppia di punti omologhi x ed $\overline{x}$. Se con x' indico il trasformato di $\overline{x}$ mediante la collineazione M, allora

$$(x' \; x_u' \; x_v' \; d^2x') = \mu(\overline{x} \; \overline{x}_u \; \overline{x}_v \; d^2\overline{x}) \, ,$$

ove μ è il modulo di M. Avendo 2 curve omologhe di S ed S' uscenti da $O = O'$ un contatto del secondo ordine, varranno le equazioni (8) $_{\text{ter}}$ del § 3 dell'Introduz. ; e perciò

$$(x \; x_u \; x_v \; d^2x) = \rho^4 (x' \; x_u' \; x_v' \; d^2x') = \mu\rho^4 (\overline{x} \; \overline{x}_u \; \overline{x}_v \; d^2\overline{x})$$

Perciò le forme F_2 ed $\overline{F}_2$ per le due superficie saranno in O, O' proporzionali, cioè in O, O' si corrisponderanno *le asintotiche.* Supponiamo *questa condizione soddisfatta in ogni coppia di punti omologhi ;* le superficie S ed $\overline{S}$ avranno forme F_2 ed $\overline{F}_2$ proporzionali. E, moltiplicando le coordinate dei punti di $\overline{S}$ per un opportuno fattore, e trasformando, se necessario, la $\overline{S}$ con una collineazione a modulo negativo, potremo supporre che le forme F_2 ed $\overline{F}_2$ siano identiche.

Se $\overline{x}$, x sono una coppia di punti omologhi, potremo ancora supporre $x' = x$. Le relazioni che legano in tali punti le x'_u, x'_{uu}, ecc. alle x, x_{uu} ecc. date dalle $(8)_{ter}$ del § 3 dell'Introd. varranno anche (essendo $F_2 = F_2'$) quando alle derivate ordinarie si sostituiscono le covarianti; e allora, scritte le F_3, F_3' servendoci della $(9)_{bis}$ del § 12 concludiamo che $F_3 - F_3'$ è divisibile per F_2 e quindi, essendo apolare ad F_2, è identicamente nulla. Perciò $F_3 = F_3' = \overline{F}_3$; cioè *le due superficie avranno uguale elemento lineare proiettivo.* Ad ugual risultato si giungerebbe confrontando le equazioni fondamentali (I) per le x_{rs}, x'_{rs} e le equaz. citate che esprimono il contatto di curve omologhe.

Viceversa se F_2 ed $\overline{F}_2$ sono identiche e se in una coppia di punti omologhi è $F_3 = \overline{F}_3$, sarà in tale coppia di punti $(x\, x_u\, x_v\, X) = (\overline{x}\, \overline{x}_u\, \overline{x}_v\, \overline{X})$, perchè le forme F_2 ed $\overline{F}_2$ coincidono, e noi potremo con una collineaz. unimodulare trasformare $\overline{S}$ in una superficie S' tale che, per i valori considerati delle u, v, sia $x = x'$, $x_u = x_u'$, $x_v = x_v'$, $X = X'$, $F_3 = F_3'$. Dalle equazioni fondamentali si deduce che allora $x_{rs} - x'_{rs} = (p_{rs} - p'_{rs})x$, che cioè nei punti considerati le S, S' hanno il contatto voluto. Perciò: (F)

Condizione necessaria per l'applicabilità proiettiva di due superficie poste in corrispondenza biunivoca in una coppia di punti omologhi è che in questi si corrispondano le asintotiche. Se poi questa prima condizione è soddisfatta per ogni coppia di punti omologhi, condizione necessaria e sufficiente per l'applicabilità proiettiva in una coppia di punti omologhi è che in questa coppia di punti le superficie abbiano uguale elemento lineare proiettivo $\mathrm{F}_3 : \mathrm{F}_2$, *o, ciò che è lo stesso, abbiano le stesse forme* φ_2, φ_3, *e differiscano soltanto per la forma* P (*o* Π *o* Q).

B) Una proprietà caratteristica di due superficie proiettivamente applicabili.

Due superficie S, $\overline{\mathrm{S}}$ *in corrispondenza biunivoca sono proiettivamente applicabili in una coppia di punti omologhi* A, $\overline{\mathrm{A}}$, *se i piani osculatori alle linee di* S *uscenti da* A, *e i piani osculatori* *alle linee omologhe di* $\overline{S}$ *uscenti da* $\overline{A}$ *formano due stelle collineari.* Ecco una semplice dimostrazione (F) di questo teorema di Čech.

In tale collineazione a piani passanti per una retta tangente in A ad S corrispondono piani passanti per la tangente omologa di $\overline{S}$. Usando coordinate non omogenee x, y, z nulle in A, potremo quindi trasformare $\overline{S}$ in una superficie S' passante per A in guisa che in A cioè in $x = y = z = 0$ sia

$$x' = y' = z' = 0 \qquad x_u = \sigma x_u' \qquad x_v = \sigma x_v' \qquad \text{(e analoghe in } y, z)$$

e che piani osculatori a curve omologhe delle S ed S' coincidano; con una conveniente omologia di centro A potrò rendere $\sigma = 1$; ma, poichè questa omologia lascia fermo ogni piano uscente da A, in particolare i piani osculatori citati, piani osculatori a curve omologhe uscenti da A continueranno ancora a coincidere. Cioè il piano per tre punti

$$x = 0\,, \qquad x + dx\,, \qquad x + dx + \frac{1}{2}\, d^2x$$

di S, cioè il piano per l'origine che contiene i punti $dx = dx'$ e d^2x dovrà contenere anche il piano d^2x'. E perciò sarà:

$$(1)\quad 0 = (dx\,, d^2x\,, d^2x' - d^2x) = (x_u\, x_v\, D_2x' - D_2x)(du\, d^2v - dv\, d^2u) + (dx\, D_2x\, D_2x')$$

ove è posto

$$D_2x = x_{uu}\, du^2 + 2x_{uv}\, du\, dv + x_{vv}\, dv^2 \text{ ed analoghe.}$$

Annullando i termini in d^2u, d^2v si trova

$$\left[x_u\; x_v\; D_2(x' - x) \right] = 0$$

cosicchè [essendo per le ipotesi fatte fin dal principio del libro $(x_u\, x_v) \neq 0$, perchè i punti singolari sono esclusi] sarà:

$$D_2x' - D_2x = \lambda x_u + \mu x_v \qquad \text{(e analoghe in } y, z),$$

ove λ, μ sono forme quadratiche in du, dv. La (1) diventa così:

$$0 = (dx\,, D_2 x\,, \lambda x_u + \mu x_v) = (\lambda dv - \mu du)\,(x_v\, x_u\, D_2 x).$$

Non potendo essere identicamente nullo il secondo fattore (perchè altrimenti in A la S avrebbe asintotiche indeterminate, caso da noi sempre escluso) sarà $\lambda dv - \mu du = 0$. Cioè

$$\frac{\lambda}{du} = \frac{\mu}{dv}$$

sarà una forma $\rho du + \sigma dv$ in du, dv. Si avrà pertanto

$$D_2 x' = D_2 x + (\rho du + \sigma dv) dx\;;$$

formola che, per i risultati dell'introduzione, prova appunto che curve omologhe di S, S' uscenti da A vi hanno un contatto del secondo ordine. A questo teorema si può dare col prof. Bianchi il seguente enunciato:

Se S *ed* S′ *sono superficie in corrispondenza biunivoca e, ad ogni sistema di curve di* S *uscenti da un punto fisso* O *di* S *coi piani osculatori formanti fascio corrispondono curve di* S′ *uscenti dal punto omologo* O′ *con piani osculatori ancora formanti fascio, le due superficie sono in* O , O′ *proiettivamente applicabili.*

Escluso questo caso, allora, se tra S, S' si corrispondono le asintotiche, a nessuno dei precedenti sistemi di curve di S uscenti da O corrisponde un sistema analogo di curve su S'.

Se tra S, S' le asintotiche non si corrispondono, esiste una sola retta r uscente da O tale che alle curve di S, i cui piani osculatori in O contengono r, corrispondono curve di S', i cui piani osculatori in O' formano ancora un fascio. La r si può chiamare l'asse della corrispondenza tra S ed S' nel punto O.

C) Un'altra proprietà caratteristica delle superficie proiettivamente applicabili.

Se S *ed* $\overline{\text{S}}$ *sono proiettivamente applicabili, ed* A , $\overline{\text{A}}$ *è una coppia di punti omologhi, esiste una collineazione che porta* S *in una superficie* S′ *dotata della seguente proprietà: Ogni striscia di* *elementi del primo ordine relativa alla superficie* S, *la quale contenga l'elemento formato da* A *e dal relativo piano tangente e la striscia omologa di* S' *hanno in* A *tre elementi successivi comuni* (Čech).

In altre parole, se in A *è* $\mathrm{u}=\mathrm{v}=0$, *gli sviluppi delle coordinate non omogenee* x, y, z, *e di* $\mathrm{p}=\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{x}}$, $\mathrm{q}=\frac{\partial \mathrm{z}}{\partial \mathrm{y}}$ *secondo le potenze di* u, v *relativi ad* S *oppure ad* S' *hanno comuni i termini di grado inferiore al terzo.* Usiamo nella dim. coordinate *omogenee.*

Nelle nostre ipotesi si può supporre che S, $\overline{S}$ abbiano le stesse forme F_2, F_3. Potremo scegliere il tetraedro di riferimento, e trasformare $\overline{S}$ con una collineazione in una superficie S' in guisa che per $u=v=0$ i punti x, x' coincidano con $(0,0,0,1)$, i punti x_u, x_u' con $(1,0,0,0)$, i punti x_v, x_v' con $(0,1,0,0)$, i punti X, X' con $(0,0,1,k)$.

Allora dalle equazioni fondamentali segue che

$$x=u+A+\ldots, \quad y=v+B+\ldots, \quad z=C+\ldots, \quad t=1+D+\ldots$$

ove A, B, C, D sono forme di secondo grado in u, v, di cui le prime tre *non* dipendono dalle p_{rs}, che sulle due superficie possono anche avere valori distinti; cosicchè per le x', y', z' varranno sviluppi del tipo:

$$x'=u+A+\ldots., \quad y'=v+B+\ldots., \quad z=C+\ldots.$$

mentre invece

$$t'=1+D'+\ldots.,$$

ove D' può essere una forma di secondo grado, distinta da D.

Dunque $\frac{x}{t}$, $\frac{y}{t}$, $\frac{z}{t}$ hanno sviluppi in serie che, fino ai termini di secondo grado inclusi, coincidono con gli sviluppi di $\frac{x'}{t'}$, $\frac{y'}{t'}$, $\frac{z'}{t'}$. L'equazione del piano tangente è nelle notazioni di Monge $\frac{z}{t}=p\frac{x}{t}+q\frac{y}{t}$. Quindi le p, q coincidono con $-\xi:\zeta$ ed $-\eta:\zeta$, cioè, a meno del segno, sono

$$(y\,z\,t):(x\,y\,t), \quad \text{e} \quad (x,z,t):(x,y,t),$$

ove sia posto

$$(y\,z\,t) = \begin{vmatrix} y & z & t \\ y_u & z_u & t_u \\ y_v & z_v & t_v \end{vmatrix} \quad \text{ed analoghe.}$$

Anche gli sviluppi di p, q coincidono dunque, fino ai termini di secondo grado inclusi con quelli di p', q', come si era enunciato.

Ne segue anche facilmente che in A le S, S' hanno un contatto del terzo ordine, ma questa non è affatto una proprietà caratteristica.