Úvod do integrálního počtu

Kapitola 5. Obsah rovinných oborů a délka rovinné křivky

In: Vojtěch Jarník (author): Úvod do integrálního počtu. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1938. pp. 149–160.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402397

42. $$\int \frac{1}{\lg x + \sqrt{\lg x + 1}} \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lg|\lg x + \sqrt{\lg x + 1}| - \frac{1}{\sqrt{5}} \lg \left| \frac{2\sqrt{\lg x + 1} + 1 - \sqrt{5}}{2\sqrt{\lg x + 1} + 1 + \sqrt{5}} \right| .$$

KAPITOLA V.

Obsah rovinných oborů a délka rovinné křivky.

1. Obsah rovinných oborů. V kap. II, odst. 1 provedli jsme malou orientační úvahu (ovšem nikterak průkaznou!) o „plošné velikosti“ jistých rovinných oborů. Věty, odvozené v kap. II, dovolují nám nyní formulovati tyto úvahy přesněji a dospěti tak k vhodné definici „plošné velikosti“ nebo kratčeji „obsahu“ těchto oborů. Z elementární geometrie znáte obsah trojúhelníka a obsah oněch útvarů, jež se dají složiti z konečného počtu trojúhelníků, t. j. obsah mnohoúhelníků. Na př. obsah obdélníka rovná se součinu ze základny a výšky. Naším cílem jest nyní, tuto definici vhodně zobecniti na obory, o nichž jsme mluvili v kap. II, odst. 1. Budeme vyšetřovati rovinné obory (t. j. množiny bodů v rovině) tohoto tvaru: dána jsou dvě čísla a, b $(a < b)$ a funkce $f(x)$, spojitá a nezáporná v intervalu $\langle a, b \rangle$.[1])

Tím je definována určitá množina bodů v rovině, totiž množina všech bodů $[x, y]$, pro něž je $a \leq x \leq b$, $0 \leq y \leq f(x)$ (na obr. 5 je tato množina šrafována). Tuto množinu (jež závisí na a, na b a na tvaru funkce $f(x)$) označme znakem $M(a, b, f(x))$.[2]) Budeme se nyní snažiti přiřaditi *každé* takové množině $M(a, b, f(x))$ jisté číslo $P(a, b, f(x))$[3]), [které nazveme „obsahem“ množiny $M(a, b, f(x))$] tak, aby byly splněny tyto čtyři požadavky:

[1]) T. j.: je-li $a \leq x \leq b$, je $f(x) \geq 0$ (názorně: všechny body „čáry“ $y = f(x)$ leží nad osou x nebo na ní; žádný bod neleží pod osou x. V kap. II, odst. 1 jsme pro větší jednoduchost požadovali $f(x) > 0$; nyní připouštíme i $f(x) = 0$).

[2]) Na př. $M(1, 3, x^2)$ je množina, omezená „dole“ osou x, „vlevo“ přímkou $x = 1$, „vpravo“ přímkou $x = 3$ a „nahoře“ parabolou $y = x^2$.

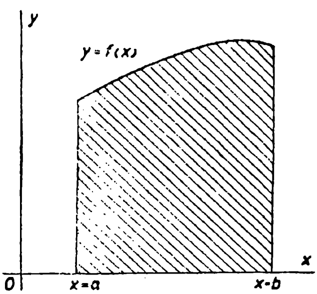
[3]) Toto číslo závisí ovšem na množině $M(a, b, f(x))$, t. j. na číslech a, b a na tvaru funkce $f(x)$.

I. Vždy je $P(a, b, f(x)) \geqq 0$ (slovo „vždy" znamená ovšem: pro každou dvojici čísel $a < b$ a pro každou funkci $f(x)$, spojitou a nezápornou v int. $\langle a, b\rangle$).

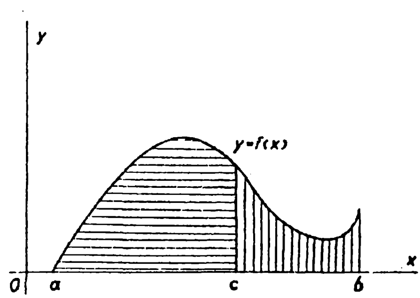
II. Je-li $a < c < b$ a je-li funkce $f(x)$ spojitá a nezáporná v intervalu $\langle a, b\rangle$, je

$$P(a, b, f(x)) = P(a, c, f(x)) + P(c, b, f(x)).$$

(Názorný význam je jasný: viz obr. 6, kde $P(a, b, f(x))$ je číslo, přiřazené celé šrafované množině, kdežto $P(a, c, f(x))$ resp. $P(c, b, f(x))$ jsou čísla, přiřazená množině vodorovně resp. svisle šrafované.) Indukcí plyne ovšem z požadavku II okamžitě: je-li funkce $f(x)$ spojitá a nezáporná v intervalu $\langle a, b\rangle$, a je-li $a =$ $= x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, je $P(a, b, f(x)) = \sum_{i=1}^{n} P(x_{i-1}, x_i, f(x))$.



Obr. 5.



Obr. 6.

III. Jsou-li

$$M(a, b, f(x)), \tag{1}$$
$$M(\alpha, \beta, \varphi(x)) \tag{2}$$

dvě množiny vyšetřovaného typu a je-li množina (2) částí množiny (1),[4]) je $P(\alpha, \beta, \varphi(x)) \leqq P(a, b, f(x))$.[5]) Všimněme si, kdy množina (2) je částí množiny (1). Předně musí býti $\alpha \geqq a$; neboť kdyby bylo $\alpha < a$, patřil by bod $[\alpha, 0]$ k množině (2), ale nepatřil by k množině (1); z podobného důvodu musí býti $\beta \leqq b$. Konečně pro $\alpha \leqq x \leqq \beta$ musí býti $\varphi(x) \leqq f(x)$; neboť kdyby pro nějaké x intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ bylo $\varphi(x) > f(x)$, patřil by bod $[x, \varphi(x)]$ k množině (2), ale nepatřil by k množině (1).

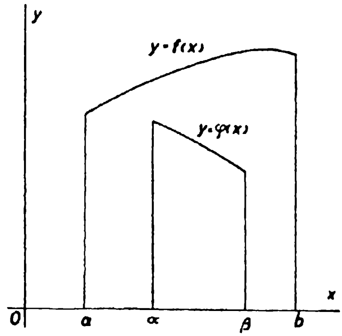
---

[4]) Říkáme, že množina M_2 je částí množiny M_1, jestliže každý prvek množiny M_2 je prvkem množiny M_1.

[5]) Zkrátka: „části" není nikdy přiřazeno číslo větší než „celku".

Naopak, jsou-li tyto podmínky splněny, t. j. je-li $a \leqq \alpha < < \beta \leqq b$ a je-li $\varphi(x) \leqq f(x)$ pro každé x intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$, je množina (2) částí množiny (1) (t. j. je-li $\alpha \leqq x \leqq \beta$, $0 \leqq y \leqq \varphi(x)$, je tím spíše $a \leqq x \leqq b$, $0 \leqq y \leqq f(x)$). (Viz obr. 7.)

IV. Je-li množina $M(a, b, f(x))$ obdélník o stranách z, v, je $P(a, b, f(x)) = zv$ (t. j. číslo $P(a, b, f(x))$ rovná se obsahu obdélníka, počítanému podle definice, známé z elementární geometrie.) Kdy je množina $M(a, b, f(x))$ obdélník? Tehdy, je-li funkce $f(x)$ rovna



Obr. 7.

v intervalu $\langle a, b\rangle$ kladné konstantě v. Požadavek IV lze vysloviti tedy také takto: Je-li $a < b$, $v > 0$, je

$$M(a, b, v) = (b - a)\, v. \tag{3}$$

Poznamenejme ještě toto: jsou-li splněny požadavky I, III, IV, platí (3) i pro $v = 0$. Neboť, je-li ε libovolné kladné číslo, je množina $M(a, b, 0)$[6]) částí oboru $M(a, b, \varepsilon)$ a tedy podle I, III, IV je $0 \leqq M(a, b, 0) \leqq M(a, b, \varepsilon) = (b - a)\,\varepsilon$. Ježto nerovnost $M(a, b, 0) \leqq \varepsilon\,(b - a)$ platí pro každé kladné ε, nemůže číslo $M(a, b, 0)$ býti kladné, t. j. je $M(a, b, 0) = 0 = (b - a) \,.\, 0$, t. j. vzorec (3) platí i pro $v = 0$.

Ukážeme nyní především toto: je-li vůbec možno každé množině $M(a, b, f(x))$ vyšetřovaného typu přiřaditi číslo $P(a, b, f(x))$ tak, aby byly splněny požadavky I, II, III, IV, je to možno *jen jedním* způsobem a sice tak, že položíme

$$P(a, b, f(x)) = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{4}$$

[6]) Tato množina je množina všech bodů $[x, 0]$ na ose x, pro něž je $a \leqq x \leqq b$.

Důkaz. Předpokládejme, že každé množině $M(a, b, f(x))$ vyšetřovaného typu je přiřazeno číslo $P(a, b, f(x))$ tak, že jsou splněny požadavky I, II, III, IV. Buďte a, b dvě libovolná čísla taková, že $a < b$ a budiž $f(x)$ libovolná funkce spojitá a nezáporná v intervalu $\langle a, b \rangle$. Zvolme libovolné rozdělení D intervalu $\langle a, b \rangle$ s dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Znakem m_i označme nejmenší hodnotu funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ (t. j. dolní hranici funkce $f(x)$ v tomto intervalu), znakem M_i označme největší hodnotu (t. j. horní hranici) funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$[7]); pišme konečně $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Podle požadavku II je

$$P(a, b, f(x)) = \sum_{i=1}^{n} P(x_{i-1}, x_i, f(x)). \tag{5}$$

V intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ je $0 \leqq m_i \leqq f(x) \leqq M_i$; tedy množina $P(x_{i-1}, x_i, m_i)$ (to jest obdélník o výšce m_i) je částí množiny $P(x_{i-1}, x_i, f(x))$ a množina $P(x_{i-1}, x_i, f(x))$ je částí množiny $P(x_{i-1}, x_i, M_i)$. Podle požadavku III je tedy $P(x_{i-1}, x_i, m_i) \leqq$ $\leqq P(x_{i-1}, x_i, f(x)) \leqq P(x_{i-1}, x_i, M_i)$. Ale podle rovnice (3) (jež plyne z požadavků I, III, IV pro $v \geqq 0$) je

$$P(x_{i-1}, x_i, m_i) = m_i \Delta x_i, \quad P(x_{i-1}, x_i, M_i) = M_i \Delta x_i;$$

tedy

$$m_i \Delta x_i \leqq P(x_{i-1}, x_i, f(x)) \leqq M_i \Delta x_i.$$

Sečteme-li tyto nerovnosti pro $i = 1, 2, \ldots, n$, dostáváme podle (5) nerovnosti

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \leqq P(a, b, f(x)) \leqq \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i.$$

Platí však

$$\sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i = s(D), \qquad \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i = S(D),$$

kde $s(D)$, $S(D)$ znamená dolní a horní součet, příslušný k rozdělení D.[8]) Pro každé rozdělení D platí tedy nerovnost

$$s(D) \leqq P(a, b, f(x)) \leqq S(D). \tag{6}$$

Budiž nyní D_m ono rozdělení, jímž se interval $\langle a, b \rangle$ dělí na m

[7]) Tato nejmenší a největší hodnota existuje podle věty 15.
[8]) Užívám zde i v násl. odstavci označení kap. II odst. 2.

stejných dílů (tedy $x_i = a + \frac{i}{m}(b - a)$ pro $i = 0, 1, \ldots, m$).

Je tedy[9] $\varrho(D_m) = \frac{1}{m}(b - a)$ a tedy $\lim_{m \to \infty} \varrho(D_m) = 0$. Podle vět 27, 29 je

$$\lim_{m\to\infty} s(D_m) = \lim_{m\to\infty} S(D_m) = \int_a^b f(x)\,dx.^{10)}$$

Podle (6) je však pro každé m

$$s(D_m) \leqq P(a, b, f(x)) \leqq S(D_m)$$

a tedy též

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} s(D_m) \leqq P(a, b, f(x)) \leqq \lim_{m\to\infty} S(D_m) = \int_a^b f(x)\,dx;$$

tedy skutečně platí rovnice (4).

Je tedy skutečně *nejvýše* jedna možnost, jak uspokojiti podmínky I, II, III, IV a to ta, že definujeme $P(a, b, f(x))$ rovnicí (4). A nyní ještě ukážeme: definujeme-li $P(a, b, f(x))$ rovnicí (4), jsou požadavky I, II, III, IV splněny.

Vskutku, je-li $a < b$ a je-li $f(x)$ funkce spojitá a nezáporná v int. $\langle a, b\rangle$, je předně $\int_a^b f(x)\,dx \geqq 0$ (viz větu 36); je-li ještě $a < c < b$, je $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$; je-li $a < b$, $v > 0$, je $\int_a^b v\,dx = v\,(b - a)$, takže požadavky I, II, IV jsou splněny. Budiž nyní $a < b$, $\alpha < \beta$, budiž $f(x)$ funkce spojitá a nezáporná v int. $\langle a, b\rangle$ a budiž funkce $\varphi(x)$ spojitá a nezáporná v int. $\langle \alpha, \beta\rangle$. Budiž konečně množina $M(\alpha, \beta, \varphi(x))$ částí množiny $M(a, b, f(x))$. Potom, jak víme, je $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$ a v intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ je stále $\varphi(x) \leqq f(x)$. Tedy je

$$\int_a^\alpha f(x)\,dx \geqq 0,^{11)} \quad \int_\beta^b f(x)\,dx \geqq 0, \quad \int_\alpha^\beta f(x)\,dx \geqq \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx$$

---

[9]) Užívám označení $\varrho(D)$, zavedeného v kap. II, odst. 3.

[10]) Horní integrál (z věty 27) a dolní integrál (z věty 29) mohu totiž nahraditi prostě integrálem, ježto spojitá funkce $f(x)$ má podle věty 47 integrál od a do b.

a tedy

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^\alpha f(x)\,dx + \int_\alpha^\beta f(x)\,dx + \int_\beta^b f(x)\,dx \geqq$$

$$\geqq 0 + \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx + 0 = \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,dx$$

a tedy je splněn též požadavek III.

Tedy celkem vidíme: vskutku je možno *jedním a jen jedním způsobem* přiřaditi každé množině $M(a, b, f(x))$ vyšetřovaného typu číslo $P(a, b, f(x))$ tak, že jsou splněny požadavky I až IV, a to tak, že definujeme $P(a, b, f(x))$ rovnicí (4).

Číslo $\int_a^b f(x)\,dx$ nazýváme proto *obsahem* nebo také *měrou* množiny $M(a, b, f(x))$.

Poznámka 1. Vyšetřovali jsme jenom množiny $M(a, b, f(x))$ velmi specielního typu; mohli bychom sice rozšířiti předešlé úvahy na množiny poněkud obecnější, upouštím však od toho. Neboť k obecné teorii míry, vyhovující všem požadavkům, které analysa na ni klade, bychom takto nedospěli. Takovou obecnou a zcela vyhovující teorii míry podal Lebesgue a český čtenář může se o této teorii velmi důkladně poučiti z citované knihy Čechovy.

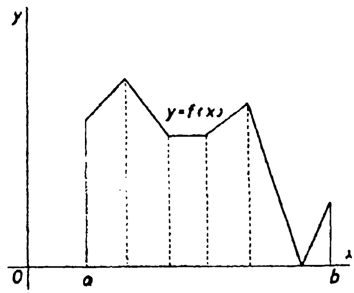
Poznámka 2. Jestliže „čára" $y = f(x)$ se v intervalu $\langle a, b\rangle$ skládá z konečného počtu úseček, t. j. jestliže interval $\langle a, b\rangle$ lze rozděliti na konečný počet částečných intervalů tak, že v každém částečném intervalu je funkce $f(x)$ lineární (viz obr. 8), je množina $M(a, b, f(x))$ mnohoúhelníkem a pro obsah této množiny máme *dvě* definice: jednak definici, známou z elementární geometrie, jednak definici podle vzorce (4). Ukážeme, že obě tyto definice dávají stejný výsledek. Ježto obsah množiny takové, jaká je nakreslena na obr. 8, se počítá podle obou definic jako součet obsahů lichoběžníků[12]) na obr. 8 vyznačených, stačí dokázati, že obsah každého takového lichoběžníka, počítaný podle elementární definice (t. j. poloviční součet základen, násobený výškou) se rovná obsahu, počítanému podle vzorce (4). Budiž tedy $a < b$ a v intervalu $\langle a, b\rangle$ budiž $f(x) = kx + q \geqq 0$; množina $M(a, b, f(x))$ je lichoběžník o základnách $f(a) = ka + q$,

[11]) To platí — se znamením rovnosti — i pro $a = \alpha$.

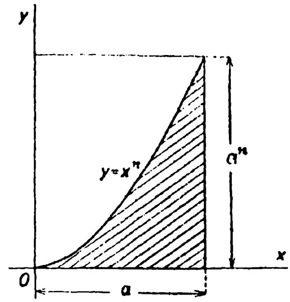
[12]) Tyto lichoběžníky mohou přejíti ovšem též v obdélníky nebo trojúhelníky.

$f(b) = kb + q$ a o výšce $b - a$. Jeho obsah podle elementární definice je $(b - a)\left(\frac{1}{2}k(a + b) + q\right) = \frac{1}{2}k(b^2 - a^2) + q(b - a)$, podle naší nové definice je jeho obsah $\int_a^b (kx + q)\, dx = \frac{1}{2}k(b^2 - a^2) + q(b - a)$, čímž souhlas obou výsledků dokázán.

Příklad 1. Obsah množiny šrafované na obr. 9 ($f(x) = x^n$, $n > 0$, $a > 0$) je[13])



Obr. 8.



Obr. 9.

$$\int_0^a x^n\, dx = \frac{1}{n + 1}\, a^{n+1} = \frac{1}{n + 1}\, a \,.\, a^n$$

(všimněte si, že $a \,.\, a^n$ je obsah obdélníka o základně a a výšce a^n).

Příklad 2. Obsah množiny šrafované na obr. 10 ($f(x) = \sin x$) je

$$\int_0^\pi \sin x\, dx = -\cos \pi + \cos 0 = 2.$$

2. Délka rovinné křivky. Nechť $f(x)$ je funkce, která má v intervalu $\langle a, b \rangle$ spojitou derivaci $f'(x)$ (v bodě a rozumím slovem „derivace" a znakem f' derivaci zprava, v bodě b zleva); funkce $f(x)$ je tedy spojitá v int. $\langle a, b \rangle$ (viz obdobnou úvahu v pozn. [17]) na str. 97). Množinu všech bodů $[x, f(x)]$, kde x probíhá všechny hodnoty intervalu $\langle a, b \rangle$, označme písmenem C a budeme ji nazývati „křivkou".[14]) Z analytické geometrie

---

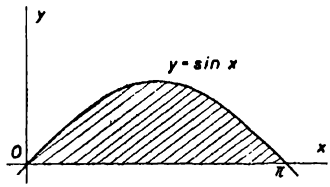
[13]) Viz pozn. [4]) na str. 81—82.

víte, jak se počítá délka úsečky; naším cílem bude pak v tomto odstavci, definovati vhodným způsobem délku křivky C.

Sestrojme libovolné rozdělení D intervalu $\langle a, b \rangle$ dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ $(n \geq 1)$[15]; sestrojme body

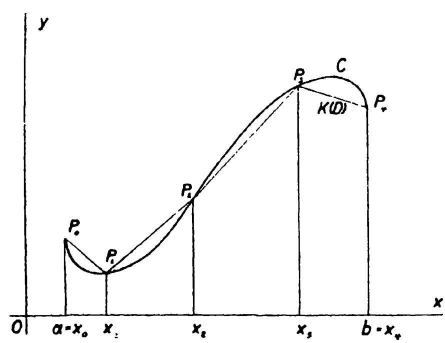
$$[x_0, f(x_0)] = P_0,\ [x_1, f(x_1)] = P_1, \ldots, [x_n, f(x_n)] = P_n;$$

znakem $K(D)$ označme lomenou čáru, sestrojenou z úseček $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_1P_2}, \ldots, \overline{P_{n-1}P_n}$ (viz obr. 11) a znakem $L(D)$ označme „délku"



Obr. 10.

lomené čáry $K(D)$, t. j. součet délek úseček $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_1P_2}, \ldots, \overline{P_{n-1}P_n}$. Tímto způsobem je každému rozdělení D intervalu $\langle a, b \rangle$ přiřazeno určité kladné číslo $L(D)$. Množina všech těchto čísel $L(D)$



Obr. 11.

---

[14]) Slovem „křivka" se označují také množiny mnohem obecnější; ale těmito věcmi se zde nebudu zabývati. Názorný význam „křivky" C je jasný: ke každé hodnotě x intervalu $\langle a, b \rangle$ sestrojím bod $[x, y]$, jehož pořadnice je dána rovnicí $y = f(x)$; C je pak množina všech těchto bodů.

[15]) Užívám zde podobného označení jako v kap. II, odst. 2 a 3.

(příslušných ke všem možným rozdělením D intervalu $\langle a, b\rangle$) je — jak za okamžik ukážeme — shora ohraničená a má tedy jistou horní hranici L a toto číslo L nazveme „délkou křivky C". Tím je tedy délka křivky C definována — musíme jenom ukázati, že čísla $L(D)$ tvoří množinu shora ohraničenou. Úsečka $\overline{P_{i-1}P_i}$ spojuje bod $[x_{i-1}, f(x_{i-1})]$ s bodem $[x_i, f(x_i)]$; její délka je tedy rovna číslu

$$l_i = \sqrt{(x_i - x_{i-1})^2 + (f(x_i) - f(x_{i-1}))^2}, \tag{7}$$

takže

$$L(D) = l_1 + l_2 + \ldots + l_n. \tag{8}$$

Funkce $f(x)$ je spojitá v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ a má v každém vnitřním bodě tohoto intervalu derivaci: podle věty o střední hodnotě (věta 18) existuje tedy číslo ξ_i tak, že je

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(\xi_i)\,(x_i - x_{i-1}), \qquad x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i$$

(ba dokonce $x_{i-1} < \xi_i < x_i$). Píšeme-li ještě $x_i - x_{i-1} = \Delta x_i$, máme podle (7)

$$l_i = \sqrt{(\Delta x_i)^2 + (f'(\xi_i)\,\Delta x_i)^2} = \sqrt{1 + (f'(\xi_i))^2}\,\Delta x_i. \tag{9}$$

Funkce $f'(x)$, jsouc spojitá v int. $\langle a, b\rangle$, je v něm též ohraničena (věta 16) a existuje tedy kladné číslo M tak, že pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ je $|f'(x)| < M$ a tedy je $l_i < \sqrt{1 + M^2}\,\Delta x_i$ a tedy (podle (8))

$$L(D) = l_1 + l_2 + \ldots + l_n < \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + M^2}\,\Delta x_i = \sqrt{1 + M^2} \sum_{i=1}^{n} \Delta x_i =$$
$$= (b - a)\sqrt{1 + M^2}.$$

Všechna čísla $L(D)$ jsou tedy menší než číslo $(b - a)\sqrt{1 + M^2}$ a tedy množina všech čísel $L(D)$ je shora ohraničena a tedy její horní hranice L existuje. Dokážeme nyní, že platí vzorec

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\,dx. \tag{10}$$

Především integrál vpravo existuje, neboť podle věty C na str. 23 je funkce $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$ spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$.[16]) Označme tuto funkci znakem $g(x)$, t. j. $g(x) = \sqrt{1 + (f'(x))^2}$.

[16]) Funkce $1 + (f'(x))^2$ je totiž spojitá v int. $\langle a, b\rangle$ a její hodnoty leží vesměs v intervalu $\langle 1, 1 + M^2\rangle$; funkce $u^{\frac{1}{2}}$ je pak spojitá v int. $\langle 1, 1 + M^2\rangle$; tedy podle citované věty C je funkce $(1 + (f'(x))^2)^{\frac{1}{2}}$ spojitá v int. $\langle a, b\rangle$.

Podle vzorce (9) je $l_i = g(\xi_i)\,\Delta x_i$ a tedy podle (8)

$$L(D) = \sum_{i=1}^{n} g(\xi_i)\,\Delta x_i \qquad (x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i).$$

Ježto funkce $g(x)$ má určitý integrál od a do b, můžeme užíti věty 31 a dostáváme: je-li $D_1, D_2, \ldots$ posloupnost rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ taková, že $\lim\limits_{m\to\infty} \varrho(D_m) = 0$,[17]) je

$$\lim_{m\to\infty} L(D_m) = \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{11}$$

Učiňme ještě tuto poznámku: je-li D nějaké rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, dané dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ a je-li D' rozdělení, které vznikne z D tím, že k dělicím bodům $x_0, x_1, \ldots, x_n$ přidáme ještě jeden nový dělicí bod x', je $L(D) \leqq \leqq L(D')$.

Důkaz je jasný: nechť x' leží třeba mezi dělicími body x_{i-1}, x_i $(x_{i-1} < x' < x_i)$; sestrojme bod $P' = [x', f(x')]$. Lomená čára $L(D')$ se liší od $L(D)$ jen tím, že úsečka $\overline{P_{i-1}P_i}$ je nahrazena dvěma úsečkami $\overline{P_{i-1}P'}$, $\overline{P'P_i}$; ale — jak víte z elementů — součet délek úseček $\overline{P_{i-1}P'}$, $\overline{P'P_i}$ je nejméně roven délce úsečky $\overline{P_{i-1}P_i}$,[18]) takže vskutku $L(D') \geqq L(D)$.

Z tohoto výsledku plyne dále: je-li rozdělení $\bar{D}$ zjemněním rozdělení D,[19]) je $L(D) \leqq L(\bar{D})$. Vskutku: buďto je rozdělení $\bar{D}$ totožné s D a potom je nerovnost platna (se znamením $=$). Nebo rozdělení $\bar{D}$ není totožné s D; potom dostanu $\bar{D}$ tak, že k dělicím bodům $x_0, x_1, \ldots, x_n$ rozdělení D přidám ještě nějaké další dělicí body $x', x'', \ldots, x^{(m)}$. Přidám-li k rozdělení D dělicí bod x', dostanu jisté rozdělení D' a podle předešlého je $L(D) \leqq \leqq L(D')$; přidám-li k rozdělení D' další dělicí bod x'', dostanu další rozdělení D'' a bude opět $L(D') \leqq L(D'')$ atd.; po m krocích dospěji tak k rozdělení $D^{(m)} = \bar{D}$ a bude $L(D) \leqq L(D') \leqq \leqq L(D'') \leqq \ldots \leqq L(D^{(m)}) = L(\bar{D})$.

[17]) V souhlasu s kap. II, odst. 3 klademe

$$\varrho(D) = \mathrm{Max}\,(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n).$$

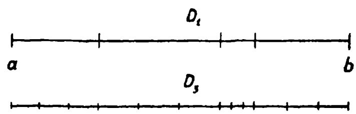
[18]) Znamení rovnosti nastane, jak víte, tehdy a jen tehdy, leží-li bod P' na úsečce $\overline{P_{i-1}P_i}$.

[19]) To znamená, že všechny dělicí body rozdělení D jsou také dělicími body rozdělení $\bar{D}$; ovšem rozdělení $\bar{D}$ může míti ještě další dělicí body.

Chceme nyní dokázati vzorec (10), t. j. vzorec $L = \int_a^b g(x)\,dx$. K tomu cíli stačí ovšem dokázati toto: je-li ε jakékoliv kladné číslo, platí nerovnosti

$$L \geqq \int_a^b g(x)\,dx \geqq L - \varepsilon. \tag{12}$$

Budiž tedy dáno kladné číslo ε. Ježto L je horní hranicí čísel $L(D)$, existuje rozdělení D_1 tak, že je $L(D_1) > L - \varepsilon$. Pro $m = 2, 3, \ldots$



Obr. 12.

označme znakem D_m ono rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, které vznikne, když každý částečný interval rozdělení D_1 rozdělíme na m stejných dílů (viz obr. 12, kde je nahoře nakresleno rozdělení D_1, dole D_3). Jest $\lim\limits_{m\to\infty} \varrho(D_m) = 0$, takže platí rovnice (11). Ježto L je horní hranicí čísel $L(D)$, je $L(D_m) \leqq L$ pro každé m. Ježto D_m je zjemněním rozdělení D_1, je $L(D_m) \geqq L(D_1) > L - \varepsilon$ pro každé m.

Máme tedy pro každé m nerovnosti

$$L \geqq L(D_m) > L - \varepsilon$$

a tedy též

$$L \geqq \lim_{m\to\infty} L\,(D_m) \geqq L - \varepsilon;$$

použijeme-li vzorce (11), dostaneme hledané nerovnosti (12).

Poznámka. Je-li funkce $f(x)$ lineární v int. $\langle a, b\rangle$, t. j. je-li $f(x) = kx + q$, je množina C úsečkou, spojující bod $[a, ka + q]$ s bodem $[b, kb + q]$; máme tedy v tomto případě dvě definice pro délku „křivky" C; podle elementární definice je tato délka dána číslem

$$\sqrt{(b - a)^2 + (kb + q - ka - q)^2} = \sqrt{1 + k^2}\,(b - a);$$

podle nové definice je dána integrálem

$$\int_a^b \sqrt{1 + k^2}\, dx = \sqrt{1 + k^2}\,(b - a);$$

oba výsledky tedy jsou stejné.

Příklad 1. Počítejme délku L oblouku paraboly $y = x^2$, jehož koncové body jsou: vrchol paraboly a bod o úsečce $a > 0$ (t. j. bod $[0, 0]$ a bod $[a, a^2]$). Jest $L = \int_0^a \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$. Substituce

$$\sqrt{4x^2 + 1} = 2x + t, \quad x = \frac{1 - t^2}{4t}, \quad \sqrt{4x^2 + 1} = \frac{1 + t^2}{2t},$$

$$dx = -\frac{1 + t^2}{4t^2}\, dt,$$

$$L = -\frac{1}{8} \int_1^{\sqrt{4a^2+1}-2a} \frac{(1 + t^2)^2}{t^3}\, dt =$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{(\sqrt{4a^2+1} - 2a)^2} - 1\right) - \frac{1}{16}\left((\sqrt{4a^2 + 1} - 2a)^2 - 1\right) -$$

$$- \frac{1}{4} \lg (\sqrt{4a^2 + 1} - 2a).$$

Užijeme-li rovnice $(\sqrt{4a^2 + 1} - 2a)(\sqrt{4a^2 + 1} + 2a) = 1$, dostaneme snadno $L = \frac{1}{2} a \sqrt{4a^2 + 1} + \frac{1}{4} \lg (\sqrt{4a^2 + 1} + 2a)$.