Úvod do integrálního počtu

Kapitola 3. Teorie neurčitého integrálu

In: Vojtěch Jarník (author): Úvod do integrálního počtu. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1938. pp. 78–109.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402395

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://dml.cz

KAPITOLA III.

Teorie neurčitého integrálu.

V této kapitole budeme se zabývati teorií primitivních funkcí, jejichž důležitost jsme poznali v předešlé kapitole při větě 48 a 56.

1. Definice primitivní funkce. Buďte $F(x)$, $f(x)$ dvě funkce, definované v otevřeném intervalu (a, b) (konečném nebo nekonečném). Platí-li pro všechna x intervalu (a, b) rovnice $F'(x) = f(x)$, říkáme, že funkce $F(x)$ je *primitivní funkcí* k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b).[1])

Na př. funkce $\frac{1}{3}x^3$ je v intervalu $(-\infty, \infty)$ primitivní funkcí k funkci x^2; funkce $\operatorname{tg} x$ je primitivní funkcí k funkci $1 : \cos^2 x$ v intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ a také v intervalech $(\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$, $(\frac{3}{2}\pi, \frac{5}{2}\pi)$ atd., nikoliv však na př. v intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{3}{2}\pi)$ (zde vadí hodnota $x = \frac{1}{2}\pi$).

Je-li funkce $F(x)$ primitivní funkcí k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b), je ovšem též každá funkce $F(x) + c$ (kde c je libovolná konstanta) primitivní funkcí k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b), neboť je $(F(x) + c)' = F'(x)$. Tím jsou však všechny primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b) vyčerpány, neboť platí tato věta:

Věta 57. *Jsou-li funkce $F(x)$, $G(x)$ dvě primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b), platí v celém intervalu (a, b) rovnice $G(x) = F(x) + c$, kde c je konstanta.* (Znám-li tedy k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b) jednu primitivní funkci $F(x)$, jsou *všechny* primitivní funkce dány výrazem $F(x) + c$, kde c je libovolná konstanta.)

Důkaz. V intervalu (a, b) je $F'(x) = G'(x) = f(x)$; položíme-li tedy $H(x) = G(x) - F(x)$, je $H'(x) = 0$ v int. (a, b) a tedy podle věty 20 je $H(x) = c$ v int. (a, b), kde c je konstanta; tedy $G(x) = F(x) + c$.

Zbývá ovšem otázka: existuje ke každé funkci funkce primitivní? Tuto otázku je nutno zodpověděti *záporně.* Definujme na př. funkci $f(x)$ takto: $f(x) = 0$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 1$. Kdyby k funkci $f(x)$ existovala v intervalu $(-\infty, \infty)$ primitivní funkce

[1]) Je možno definovati primitivní funkci též obecněji; na elementárním stupni této knížky je však snad nejvhodnější podaná definice.

$F(x)$, bylo by $F'(x) = 0$ pro $x < 0$, $F'(0) = 1$, $F'(x) = 0$ pro $x > 0$. Podle věty 20 by funkce $F(x)$ byla konstantní v intervalu $(-\infty, 0)$ i v intervalu $(0, \infty)$, t. j. bylo by $F(x) = a$ pro $x < 0$, $F(x) = b$ pro $x > 0$. Z existence derivace v bodě $x = 0$ by plynula spojitost funkce $F(x)$ v bodě 0 (viz pozn. 1 na str. 24), tedy by bylo $\lim\limits_{x \to 0-} F(x) = \lim\limits_{x \to 0+} F(x) = F(0)$; ale zřejmě $\lim\limits_{x \to 0-} F(x) = a$, $\lim\limits_{x \to 0+} F(x) = b$, takže by bylo $a = b = F(0)$, takže by bylo $F(x) = a$ pro všechna x vůbec a tedy $F'(x) = 0$ pro každé x, tedy i pro $x = 0$, což je ve sporu s rovnicí $F'(0) = 1$. Tedy k funkci $f(x)$ neexistuje v intervalu $(-\infty, \infty)$ primitivní funkce.

Ale alespoň ke každé funkci *spojité* existuje primitivní funkce, jak nás poučuje tato věta:

Věta 58. *Budiž $f(x)$ funkce spojitá v otevřeném* (konečném nebo nekonečném) *intervalu (a, b); zvolme libovolné číslo c v intervalu (a, b). Potom integrál*

$$\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$$

je primitivní funkcí k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b). (Tedy ke každé funkci, spojité v intervalu (a, b), existuje v tomto intervalu primitivní funkce.)

Důkaz. Budiž x_0 libovolné číslo intervalu (a, b). Ježto žádné číslo intervalu (a, b) není jeho nejmenším ani největším číslem, lze zvoliti dvě čísla α, β intervalu (a, b) tak, že je $\alpha < \mathrm{Min}\,(c, x_0) \leq \mathrm{Max}\,(c, x_0) < \beta$. Ježto funkce $f(t)$ je spojitá v intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ a ježto c, x_0 jsou dva vnitřní body tohoto intervalu, existuje především $\int_\alpha^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ (věta 47), dále existuje integrál $\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pro každé x intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$ a konečně platí, že derivace integrálu $\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ je rovna číslu $f(x)$ pro každé x intervalu (α, β) (věta 53), tedy specielně pro $x = x_0$. Ježto x_0 bylo libovolné číslo intervalu (a, b), platí tedy: pro každé x intervalu (a, b) existuje $\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$ a platí $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x)$, jak bylo dokázati.

Věta 58 ukazuje, že — aspoň pro funkce spojité — je velmi úzký vztah mezi určitým integrálem a primitivní funkcí.[2]) Není proto divu, že pro primitivní funkci bylo zavedeno ještě jiné pojmenování a označení, připomínající pojmenování a označení určitého integrálu. Primitivní funkci k funkci $f(x)$ v int. (a, b) nazýváme také *neurčitým integrálem funkce* $f(x)$ v int. (a, b) a značíme ji znakem

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jinými slovy: neurčitým integrálem funkce $f(x)$ v intervalu (a, b) nazýváme každou funkci (definovanou v int. (a, b)), jež má pro každé x intervalu (a, b) derivaci rovnou číslu $f(x)$.

Poznámka. Určitý integrál dané funkce v daných mezích je určité *číslo;* na př. $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x = 2$ (viz příkl. 2 u věty 48); naproti tomu neurčitý integrál funkce $f(x)$ je opět *funkce* proměnné x, a to ještě ne zcela určitá — je určena pouze až na „aditivní konstantu", kterou často nazýváme „integrační konstantou"; na př. je $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c$, kde „integrační konstanta" c může býti libovolné číslo.

Podobně jako při určitém integrálu užívá se i při neurčitém integrálu pro „integrační proměnnou" (tak se nazývá proměnná, stojící za symbolem d) vedle znaku x i jiných písmen; na př.

$$\int 2x\,\mathrm{d}x = x^2 + c, \quad \int 2t\,\mathrm{d}t = t^2 + c.$$

2. Nejjednodušší formule a věty pro výpočet neurčitých integrálů. Známé vzorce diferenciálního počtu dávají nám ihned tyto výsledky (c je integrační konstanta):

$$\left.\begin{aligned} &\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + c, && \int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + c,\\ &\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + c,^{3)} && \int e^x\,\mathrm{d}x = e^x + c; \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

zobecněním posledního vzorce je vzorec

$$\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lg a}\,.\,a^x + c, \text{ platný pro } a > 0,\ a \neq 1. \qquad (2)$$

---

[2]) U nespojitých funkcí jsou tyto vztahy složitější.

Vzorce (1) a (2) platí v intervalu $(-\infty, \infty)$ a plynou ihned ze vzorců $(\cos x)' = -\sin x$, $(\sin x)' = \cos x$, $(\operatorname{arctg} x)' = 1 : (1 + x^2)$, $(e^x)' = e^x$, $(a^x)' = a^x . \lg a$ pro $a > 0$; z posledního vzorce plyne totiž $\left(\dfrac{a^x}{\lg a}\right)' = a^x$ pro $a > 0$, pokud je $\lg a \neq 0$, t. j. pokud je $a \neq 1$. Stejně se dokáží vzorce

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c \text{ (v interv. } (-1, 1)); \qquad (3)$$

$$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + c \qquad (4)$$

(v každém otevřeném intervalu neobsahujícím žádný bod, pro nějž $\cos x = 0$);

$$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{cotg} x + c \qquad (5)$$

(v každém otevřeném intervalu, neobsahujícím žádný bod, pro nějž $\sin x = 0$).

Obraťme se nyní k mocnině. Jest $(x^{n+1})' = (n+1)\, x^n$ a tedy

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n, \qquad (6)$$

není-li $n + 1 = 0$, t. j. není-li $n = -1$. Kdy platí vzorec (6)? Je-li n celé kladné, platí pro každé x; rovněž je-li $n = 0$ (ve tvaru $(x)' = 1$). Je-li n celé záporné (a $n \neq -1$), platí (6) pro každé $x \neq 0$; není-li n celé, platí vzorec (6) pro každé kladné x.[4])

---

[3]) Píšeme $\int \frac{dx}{1+x^2}$ místo $\int \frac{1}{1+x^2}\,dx$; obdobně často píšeme pro zkrácení $\int \frac{dx}{g(x)}$ místo $\int \frac{1}{g(x)}\,dx$, $\int \frac{f(x)\,dx}{g(x)}$ místo $\int \frac{f(x)}{g(x)}\,dx$, $\int dx$ místo $\int 1 dx$.

[4]) Přidržuji se Kösslera, str. 23—25, který definuje a^n při necelém n jen pro $a > 0$. Zde je snad na místě malá poznámka. Pro *necelé* n byla v Kösslerově knížce definována mocnina x^n jen pro $x > 0$ (a to je $x^n > 0$ pro $x > 0$). Definujme ještě pro *necelé kladné* n výraz 0^n rovnicí $0^n = 0$. Tím je tedy funkce x^n definována v intervalu $\langle 0, \infty)$ (až do konce této poznámky předpokládám, že je n číslo necelé kladné). V otevřeném intervalu $(0, \infty)$ má funkce x^n kladnou

Z formule (6) plyne specielně pro $n = 0$

$$\int \mathrm{d}x = \int 1\,\mathrm{d}x = x + c \tag{7}$$

(v intervalu $(-\infty, \infty)$) a obecně pro každé $n \neq -1$

$$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}\,x^{n+1} + c; \tag{8}$$

při tom vzorec (8) platí v intervalu $(-\infty, \infty)$, je-li n celé kladné; platí v intervalu $(-\infty, 0)$ i v intervalu $(0, \infty)$, je-li n celé záporné ($n \neq -1$); a platí konečně v intervalu $(0, \infty)$, je-li n číslo necelé.

Zbývá vyšetřiti případ $n = -1$, t. j. $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$. Je-li $x > 0$, je $(\lg x)' = 1 : x$, a tedy

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lg x + c$$

v intervalu $(0, \infty)$; je-li $x < 0$, je $-x > 0$ a tedy $(\lg(-x))' = \frac{1}{-x} \cdot (-1) = \frac{1}{x}$ a tedy

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lg(-x) + c$$

v interv. $(-\infty, 0)$. Oba tyto vzorce lze shrnouti ve vzorec

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x} = \lg |x| + c, \tag{9}$$

platný jak v intervalu $(-\infty, 0)$, tak v intervalu $(0, \infty)$.

---

derivaci nx^{n-1} a tedy je x^n v tomto intervalu spojitá a rostoucí (t. j. je-li $0 < x_1 < x_2$, je $x_1^n < x_2^n$; důkaz: podle věty o střední hodnotě (věta 18) existuje ξ tak, že je $x_1 < \xi < x_2$, $x_2^n - x_1^n = n\xi^{n-1}(x_2 - x_1)$, tedy $x_2^n - x_1^n > 0$). Tvrdím nyní: *funkce x^n je rovněž spojitá zprava v bodě $x = 0$* (pro kladné necelé n). Důkaz: budiž dáno libovolné kladné číslo ε. Položme $\delta = \varepsilon^{\frac{1}{n}}$, takže je $\delta > 0$. Je-li $0 < x < \delta$, je $0 < x^n < \delta^n = \varepsilon$. T. j.: ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ, mající tuto vlastnost: je-li $0 < x < \delta$, je $0 < x^n < \varepsilon$ a tedy $|x^n - 0^n| < \varepsilon$. Tím je důkaz proveden.

Dovedeme tedy integrovati funkce x^n [pozor na rozdíl mezi případem $n \neq -1$ (vzorec (8)) a $n = -1$ (vzorec (9))], e^x, a^x ($a > 0$, $a \neq 1$), $\sin x$, $\cos x$, $1 : \sin^2 x$, $1 : \cos^2 x$, $1 : \sqrt{1 - x^2}$, $1 : (1 + x^2)$. Samozřejmě jest

$$\int 0 \, \mathrm{d}x = c \tag{10}$$

v intervalu $(-\infty, \infty)$, ježto derivace konstanty je nula. Vzorce (1) až (10), jichž budeme často užívati, je nutno si bezpečně zapamatovati.

Poznámka. Třetí vzorec (1) jsme dostali ze vzorce $(\operatorname{arctg} x)' = 1 : (1 + x^2)$; použitím vzorce $(-\operatorname{arccotg} x)' = 1 : (1 + x^2)$ bychom dostali obdobně vzorec

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{1 + x^2} = -\operatorname{arccotg} x + c \tag{11}$$

(v int. $(-\infty, \infty)$). Z tohoto vzorce a z třetího vzorce (1) plyne, že i funkce $\operatorname{arctg} x$ i funkce $-\operatorname{arccotg} x$ jsou v intervalu $(-\infty, \infty)$ primitivními funkcemi k jedné a téže funkci $1 : (1 + x^2)$. Z věty 57 tedy plyne, že jejich rozdíl je konstantní, t. j.

$$\operatorname{arctg} x - (-\operatorname{arccotg} x) = C.$$

Konstantu C určíme, dosadíme-li $x = 0$; dostaneme $C = \operatorname{arctg} 0 + \operatorname{arccotg} 0 = 0 + \frac{1}{2}\pi = \frac{1}{2}\pi$, takže $\operatorname{arctg} x + \operatorname{arccotg} x = \frac{1}{2}\pi$, což je známý vztah (Kössler 68). Nedává nám tedy vzorec (11) vlastně nic nového; z téhož důvodu jsem neuváděl zvláště vzorec

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - x^2}} = -\arccos x + c$$

(v int. $(-1, 1)$).

V tomto odstavci — a též ve dvou následujících odstavcích — odvodíme několik vět, jež nám často dovolují převésti výpočet integrálů složitějších na výpočet integrálů jednodušších.

Věta 59. *Existují-li v intervalu* (a, b) *neurčité integrály funkcí* $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ *a jsou-li* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *konstanty, existuje též neurčitý integrál funkce* $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x)$ *v intervalu* (a, b) *a jest*

$$\int (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x))\,dx = c_1 \int f_1(x)\,dx + c_2 \int f_2(x)\,dx + \\ + \ldots + c_n \int f_n(x)\,dx + C \qquad (12)$$

v intervalu (a, b), kde C je konstanta.[5])

Důkaz. Položme (vše stále v intervalu (a, b)) $F_1(x) = \int f_1(x)\,dx, \ldots, F_n(x) = \int f_n(x)\,dx$, takže je $F'_i(x) = f_i(x)$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Podle známých vět diferenciálního počtu (Kössler 74) je $(c_1 F_1(x) + \ldots + c_n F_n(x))' = c_1 F'_1(x) + \ldots + c_n F'_n(x) = c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x)$; tedy funkce

$$c_1 F_1(x) + \ldots + c_n F_n(x) = c_1 \int f_1(x)\,dx + \ldots + c_n \int f_n(x)\,dx$$

je primitivní funkcí k funkci $c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x)$ a liší se tedy od levé strany rovnice (12) pouze o jistou konstantu, jak bylo dokázati.

Poznámka: Všimněme si zvláštních případů rovnice (12):

$$\int (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int f_1(x)\,dx + \int f_2(x)\,dx, \quad \int (f_1(x) - f_2(x))\,dx = \\ = \int f_1(x)\,dx - \int f_2(x)\,dx, \quad \int c\,f(x)\,dx = c \int f(x)\,dx$$

(kde c je konstanta).

Příklad:

$$\int \left(3 \sin x - \sqrt{2}\,.\,x^3 + \frac{2}{1 + x^2}\right) dx = \\ = 3 \int \sin x\,dx - \sqrt{2} \int x^3\,dx + 2 \int \frac{dx}{1 + x^2} = -3 \cos x - \\ - \frac{\sqrt{2}}{4}\,x^4 + 2 \operatorname{arctg} x$$

[5]) „Integrační konstantu" C mohu ovšem libovolně změniti, změním-li hodnotu integrační konstanty v integrálu na levé straně rovnice (12); mohu též docíliti toho, že $C = 0$. My budeme obyčejně v takových rovnicích mezi neurčitými integrály tuto integrační konstantu vynechávati a psáti na př. místo rovnice (12) rovnici

$$\int (c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x))\,dx = c_1 \int f_1(x)\,dx + \ldots + c_n \int f_n(x)\,dx. \qquad (12')$$

Této rovnici je ovšem nutno rozuměti takto: zvolím-li libovolně integrační konstanty v integrálech $\int f_1(x)\,dx, \ldots, \int f_n(x)\,dx$, mohu integrační konstantu v integrálu $\int (c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x))\,dx$ zvo-

(integrační konstantu budu od nynějška skoro vždy vynechávati).

3. Integrace per partes. Věty předešlého odstavce spočívaly na vzorcích pro počítání derivace. Také metody tohoto a následujícího odstavce spočívají na vzorcích pro počítání derivace. Vzorec pro derivování součinu (Kössler 74) dává nám tuto důležitou větu:

Věta 60. *Funkce $u(x)$, $v(x)$ nechť mají v intervalu (a, b) spojité derivace. Potom jest*

$$\int u(x)\, v'(x)\, dx = u(x)\, v(x) - \int u'(x)\, v(x)\, dx \tag{13}$$

v intervalu (a, b).

Důkaz. Funkce $u(x)\, v(x)$ má v intervalu (a, b) derivací $u(x)\, v'(x) + u'(x)\, v(x)$, takže je

$$u(x)\, v(x) = \int (u(x)\, v'(x) + u'(x)\, v(x))\, dx \tag{14}$$

v int. (a, b). Funkce $u(x)$, $v(x)$ jsou spojité v (a, b) (ježto tam mají derivaci, viz pozn. 1 na str. 24); ježto také funkce $u'(x)$, $v'(x)$ jsou spojité v (a, b) podle předpokladu, jsou tam spojité též funkce $u(x)\, v'(x)$ a $u'(x)\, v(x)$ (Kössler 60). Podle věty 58 existují tedy v (a, b) integrály $\int u(x)\, v'(x)\, dx$, $\int u'(x)\, v(x)\, dx$. Podle věty 59 lze tedy rovnici (14) psáti ve tvaru $u(x)\, v(x) = \int u(x)\, v'(x)\, dx + \int u'(x)\, v(x)\, dx$; převedeme-li v této rovnici druhý integrál na levou stranu rovnice, dostaneme rovnici (13).

Vzorec (13) dává nám důležitou metodu k výpočtu neurčitých integrálů, t. zv. *metodu integrace per partes* nebo *metodu částečné integrace*. Jak se jí používá, objasním na příkladech.

Příklad 1. Vypočtěte $\int xe^x\, dx$ (v intervalu $(-\infty, \infty)$). Položme $u(x) = x$, tedy musíme položiti $v'(x) = e^x$. Potom je $u'(x) = 1$; za $v(x)$ musíme vzíti nějakou primitivní funkci k funkci $v'(x) = e^x$, zvolme tedy třeba $v(x) = e^x$ (mohli bychom ovšem též voliti třeba $v(x) = e^x + 3$ nebo vůbec $v(x) = e^x + c$, kde c je

liti tak, aby platila rovnice (12′); kdybych ovšem tuto konstantu zvolil jinak, nebyly by obě strany rovnice (12′) sobě rovny, nýbrž lišily by se o konstantu. Obdobně je nutno rozuměti i všem dalším rovnicím mezi neurčitými integrály, v nichž integrační konstanta je vynechána. Doufám, že čtenáři je věc dostatečně jasná a nebudu proto tuto poznámku již později opakovati.

libovolná konstanta, ale to by vedlo jen ke komplikaci výpočtu). Podle vzorce (13) je

$$\int xe^x \, dx = xe^x - \int 1 \, . \, e^x \, dx = xe^x - e^x = e^x (x - 1).$$

Příklad 2. $\int x^2 \sin x \, dx$ (v intervalu $(-\infty, \infty)$). Položme $u = x^2$, $v' = \sin x$, tedy $u' = 2x$, $v = -\cos x$; dostaneme

$$\int x^2 \sin x \, dx = - x^2 \cos x + 2 \int x \cos x \, dx;$$

zbývá vypočísti integrál na pravo; položme $u = x$, $v' = \cos x$, $u' = 1$, $v = \sin x$, takže

$$\int x \cos x \, dx = x \sin x - \int \sin x \, dx = x \sin x + \cos x;$$

tedy celkem

$$\int x^2 \sin x \, dx = - x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x.$$

(Chceme-li se přesvědčiti, že jsme se při výpočtech nezmýlili, stačí zjistiti, že je vskutku $(- x^2 \cos x + 2x \sin x + 2 \cos x)' = x^2 \sin x$.)

Příklad 3. $\int \lg x \, dx$ (v intervalu $(0, \infty)$). Položme $u = \lg x$, tedy $v' = 1$ ($u = 1$, $v' = \lg x$ by nevedlo k cíli, ježto bychom neuměli vypočísti $v = \int \lg x \, dx$); tedy $u' = 1 : x$, $v = x$,

$$\int \lg x \, dx = x \lg x - \int 1 \, . \, dx = x \lg x - x.$$

Příklad 4. $\int x^n e^x \, dx$ (n celé, $n \geqq 0$; interval $(-\infty, \infty)$). Položme pro zkrácení $\int x^n e^x \, dx = I_n$; známe tedy $I_0 = \int e^x \, dx = e^x$. Položme (je-li $n > 0$) $u = x^n$, $v' = e^x$, $u' = nx^{n-1}$, $v = e^x$, takže $\int x^n e^x \, dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x \, dx$, t. j.

$$I_n = x^n e^x - n I_{n-1} \tag{15}$$

(n celé, $n > 0$). Vzorec (15) nám dovoluje „rekurentně" určiti I_n: rovnice (15) nám dovoluje vyjádřiti I_n pomocí I_{n-1}, potom (dosadíme-li do ní $n - 1$ místo n) I_{n-1} pomocí I_{n-2} atd. až na konec I_1 pomocí I_0; a integrál I_0 známe. Na př.: $I_3 = x^3 e^x - 3 I_2$,

$I_2 = x^2e^x - 2I_1$, $I_1 = xe^x - 1 \,.\, e^x$. Tedy celkem $I_3 = (x^3 - 3x^2 + 6x - 6)\, e^x$.

Příklad 5. (Interval $(-\infty, \infty)$.) Položme

$$K_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^n}$$

(n celé, $n > 0$). Známe $K_1 = \operatorname{arctg} x$ a hledáme tedy obdobnou rekurentní formuli, jako byla formule (15). Položíme

$$u = \frac{1}{(1 + x^2)^n},\ v' = 1,\ u' = -\frac{2nx}{(1 + x^2)^{n+1}},\ v = x$$

a obdržíme:

$$K_n = \int \frac{\mathrm{d}x}{(1 + x^2)^n} = \frac{x}{(1 + x^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(1+x^2)^{n+1}}\, \mathrm{d}x =$$
$$= \frac{x}{(1 + x^2)^n} + 2n \int \frac{(1 + x^2) - 1}{(1 + x^2)^{n+1}}\, \mathrm{d}x = \frac{x}{(1 + x^2)^n} +$$
$$+ 2n\, (K_n - K_{n+1});$$

tedy $K_n = x : (1 + x^2)^n + 2n\, (K_n - K_{n+1})$ a odtud řešením hledaný rekurentní vzorec

$$K_{n+1} = \frac{x}{2n\, (1 + x^2)^n} + \frac{2n - 1}{2n} K_n \tag{16}$$

(n celé kladné).

Příklad 6. $\int \frac{\lg x}{x}\, \mathrm{d}x$ (interval $(0, \infty)$). Položme $u = \lg x$, $v' = 1 : x$, $u' = 1 : x$, $v = \lg x$; dostáváme

$$\int \frac{\lg x}{x}\, \mathrm{d}x = (\lg x)^2 - \int \frac{\lg x}{x}\, \mathrm{d}x. \tag{17}$$

Zdánlivě jsme nepokročili: integrál vpravo není jednodušší než integrál vlevo. Ale ve skutečnosti je příklad již vyřešen; neboť z rovnice (17) je možno hledaný integrál vypočísti:

$$2 \int \frac{\lg x}{x}\, \mathrm{d}x = (\lg x)^2, \quad \int \frac{\lg x}{x}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} (\lg x)^2.$$

Příklad 7. $\int e^x \sin x \, dx$ (interval $(-\infty, \infty)$). Zde vede k cíli podobná myšlenka jako v příkl. 6, ale integrace per partes se musí provésti dvakráte. Položme jednou $u = e^x$, $v' = \sin x$, $u' = e^x$, $v = -\cos x$; dostaneme

$$\int e^x \sin x \, dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x \, dx.$$

Po druhé položme $u = \sin x$, $v' = e^x$, $u' = \cos x$, $v = e^x$: dostaneme

$$\int e^x \sin x \, dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x \, dx.\text{[6])}$$

Sečtením a odečtením těchto dvou rovnic dostaneme hledaný integrál a k tomu ještě $\int e^x \cos x \, dx$:

$$\int e^x \sin x \, dx = \tfrac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x),$$

$$\int e^x \cos x \, dx = \tfrac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x).$$

Z těchto příkladů je snad aspoň částečně viděti, jak se metody integrace per partes užívá. Obyčejně se snažíme daný integrál upraviti na tvar $\int uv' \, dx$ tak, aby integrál $\int u'v \, dx$ byl jednodušší než integrál daný; dovedeme-li $\int u'v \, dx$ vypočísti, jsme hotovi (příkl. 1, 3). Někdy musíme této metody použíti několikráte (příkl. 2), při čemž leckdy dospějeme k užitečným rekurentním vzorcům (příkl. 4, 5). Při takovém rekurentním vzorci není neštěstí, vyjádříme-li naopak jednodušší integrál složitějším; na př. v příkladě 5 jsme integrál K_n vyjádřili integrály K_n, K_{n+1}; pomohli jsme si potom tím, že jsme z oné rovnice vyjádřili integrál K_{n+1} integrálem K_n. Někdy dojdeme k cíli tím, že dostaneme ve formuli (13) tentýž integrál vpravo jako vlevo (příkl. 6); potom nám vzorec (13) dává rovnici, z níž lze hledaný integrál vypočísti (v příkl. 7 jsme obdobně našli dvě rovnice pro dva neznámé integrály). Máme-li touto metodou počítati $\int f(x) \, dx$, záleží úspěch na tom, podaří-li se nám vhodným způsobem uvésti funkci $f(x)$ na tvar $f(x) = u(x) \, v'(x)$; jak se to v jednotlivých případech dělá, tomu lze se naučiti hlavně z prakse; je proto vhodno vypočísti hodně příkladů toho druhu.

[6]) Tím jsme tedy dostali dvě rovnice pro dva neznámé integrály $\int e^x \sin x \, dx$, $\int e^x \cos x \, dx$.

4. Metoda substituční. Věty o derivování „složených funkcí" (viz věty A′, B′, C′ na str. 24—25) vedou k důležité větě pro výpočet neurčitých integrálů:

Věta 61. *Funkce* $f(x)$ *budiž spojitá v intervalu* (a, b); *funkce* $\varphi(t)$ *nechť má v intervalu* (α, β) *derivaci* $\varphi'(t)$; *pro každé* t *intervalu* (α, β) *nechť hodnota* $\varphi(t)$ *leží v intervalu* (a, b). *Potom platí v intervalu* (α, β) *rovnice*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t, \tag{18}$$

dosadíme-li do primitivní funkce, kterou nám představuje integrál na levé straně, $\varphi(t)$ *za* x.

Důkaz. V intervalu (a, b) položme $F(x) = \int f(x)\,\mathrm{d}x$.[7]) Naše věta nyní tvrdí, že v intervalu (α, β) je funkce $F(\varphi(t))$ primitivní funkcí k funkci $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$. To plyne však okamžitě z věty B′ na str. 25. Neboť funkce $\varphi(t)$ má derivaci v int. (α, β) a funkce $F(x)$ má derivaci $F'(x) = f(x)$ v int. (a, b); pro každé t intervalu (α, β) leží hodnota funkce $\varphi(t)$ v intervalu (a, b). Tedy podle citované věty B′ má funkce $F(\varphi(t))$ v intervalu (α, β) derivaci, jejíž hodnota je $F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$; tedy je vskutku funkce $F(\varphi(t))$ v intervalu (α, β) primitivní funkcí k funkci $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$.

Poznámka. Vzorec (18) se pamatuje velmi snadno: abychom z integrálu $\int f(x)\,\mathrm{d}x$, který stojí vlevo, dostali integrál vpravo, dosazujeme především do integrované funkce $f(x)$ za x podle rovnice

$$x = \varphi(t); \tag{19}$$

za druhé dosazujeme formálně za symbol $\mathrm{d}x$ podle rovnice

$$\mathrm{d}x = \varphi'(t)\,\mathrm{d}t; \tag{20}$$

všimněme si, že je to právě rovnice, kterou dostaneme diferencováním rovnice (19). Výsledek je rovnice (18), kde vlevo je funkce proměnné x, vpravo funkce proměnné t; rovnice tato je (jsou-li splněny předpoklady věty 61) správná, dosadíme-li do levé strany za x podle rovnice (19). Celý postup se tedy redukuje na mechanické dosazování (čili „substituci") podle rovnice (19)[8]) a proto se metodě, obsažené ve větě 61, říká „metoda substituční".

---

[7]) Tento integrál existuje, ježto $f(x)$ je spojitá v (a, b); viz větu 58.
[8]) Ale nezapomeňte nikdy dosaditi také za $\mathrm{d}x$ podle rovnice (20)!

Vzorce (18) můžeme užíti dvojím způsobem.

1. způsob. Máme vypočísti $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$. Jsou-li splněny předpoklady věty 61, můžeme výpočet převésti na výpočet integrálu $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Dovedeme-li vypočísti tento integrál, t. j. dovedeme-li nalézti funkci $F(x)$, jež je primitivní funkcí k funkci $f(x)$, je předložený integrál vypočten; postup výpočtu lze naznačiti stručně takto:

$$\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) = F(\varphi(t)).$$

Příklad 1. $\int \sin^3 t \cos t\,\mathrm{d}t$[9]) (interval $(-\infty, \infty)$). Na první pohled je patrno, že $\cos t\,\mathrm{d}t$ je diferenciál funkce $\sin t$. Zavedeme proto substituci $x = \sin t$ a máme (předpoklady věty 61 jsou zřejmě splněny):

$$\int \sin^3 t \cos t\,\mathrm{d}t = \int x^3\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{4}x^4 = \tfrac{1}{4}\sin^4 t.$$

Příklad 2. $\int (1 + x^2)^n\,x\,\mathrm{d}x$[10]) (interval $(-\infty, \infty)$). Vidíme: $x\,\mathrm{d}x$ je (až na scházející činitel 2) diferenciálem funkce $1 + x^2$; položme proto $1 + x^2 = u$, $2x\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}u$ a počítejme (uvažme, že je zde stále $u > 0$):

a) pro $n \neq -1$ jest $\int (1+ x^2)^n\,x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int (1+ x^2)^n \,.\, 2x\,\mathrm{d}x =$

$$= \frac{1}{2}\int u^n\,\mathrm{d}u = \frac{u^{n+1}}{2\,(n+1)} = \frac{(1 + x^2)^{n+1}}{2\,(n+1)};$$

b) pro $n = -1$ jest $\displaystyle\int \frac{x\,\mathrm{d}x}{1 + x^2} = \frac{1}{2}\int\frac{\mathrm{d}u}{u} = \frac{1}{2}\lg|u| =$

$$= \frac{1}{2}\lg u = \lg\sqrt{u} = \lg\sqrt{1 + x^2}.$$

Příklad 3. $\displaystyle\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin x}$. Zde musíme se omeziti na nějaký interval, v němž $\sin x$ se nikdy nerovná nule; proveďme výpočet pro jednoduchost v intervalu $(0, \pi)$.[11]) Je $\sin x = 2 \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x$;

[9]) Užívám obvyklého označení $\sin^n x$, $\cos^n x$, $\lg^n x$ místo $(\sin x)^n$, $(\cos x)^n$, $(\lg x)^n$ a pod.

[10]) Integrační proměnnou značím zde x a nikoliv t; volím úmyslně různá označení pro integr. proměnnou, aby si čtenář na to zvykl.

zavedeme-li tedy $\frac{1}{2}x = t$, $\frac{1}{2}\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$ (tedy $0 < t < \frac{1}{2}\pi$), máme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2 \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x} = \int \frac{\mathrm{d}t}{\sin t \cos t} = \int \frac{1}{\operatorname{tg} t} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t}.$$

Ale $\mathrm{d}t : \cos^2 t$ je diferenciál funkce $\operatorname{tg} t$; zaveďme tedy $\operatorname{tg} t = u$ (tedy $u > 0$), $\mathrm{d}t : \cos^2 t = \mathrm{d}u$; dostaneme

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{1}{\operatorname{tg} t} \frac{\mathrm{d}t}{\cos^2 t} = \int \frac{\mathrm{d}u}{u} = \lg|u| = \lg u = \lg \operatorname{tg} t = \lg \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x.$$

2. způsob. Máme vypočísti $\int f(x)\,\mathrm{d}x$; snažíme se převésti tento integrál substitucí $x = \varphi(t)$ na integrál $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$, který může býti jednodušší než integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x$. Abych věc učinil přehlednější, vyslovím výsledek jako zvláštní větu, ač v podstatě jde opět jen o větu 61.

Napřed však musíme předeslati jednu poznámku. Budiž $\varphi(t)$ funkce, definovaná v intervalu (α, β); když t probíhá interval (α, β), nechť hodnota $\varphi(t)$ nabývá všech hodnot jistého intervalu (a, b) a žádných jiných.[12] Potom tedy každé hodnotě x intervalu (a, b) odpovídá *aspoň* jedna hodnota t intervalu (α, β) tak, že platí rovnice

$$\varphi(t) = x. \tag{21}$$

Vyberme pro každé x intervalu (a, b) jednu hodnotu t intervalu (α, β) tak, aby platila rovnice (21)[13]; potom toto t bude funkcí proměnné x, definovanou v intervalu (a, b); označme je znakem $\psi(x)$; hodnoty funkce $\psi(x)$ leží ovšem v intervalu (α, β). Pro každé x intervalu (a, b) bude pak splněna rovnice (21), dosadíme-li do ní za t hodnotu $\psi(x)$; t. j. pro každé x intervalu (a, b) je $\varphi(\psi(x)) = x$.

Zvláště jednoduchý případ je ten, že funkce $\varphi(t)$ (nabývající v intervalu (α, β) všech hodnot intervalu (a, b) a žádných jiných)

---

[11]) Doporučuji čtenáři, aby jako cvičení ukázal, že v každém intervalu $(k\pi, k\pi + \pi)$, kde k je libovolné celé číslo, jest $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \lg |\operatorname{tg} \frac{1}{2}x| = \lg ((-1)^k \operatorname{tg} \frac{1}{2}x)$.

[12]) To znamená: 1. je-li t libovolné číslo intervalu (α, β), leží hodnota $\varphi(t)$ v intervalu (a, b); 2. je-li naopak x libovolné číslo intervalu (a, b), existuje aspoň jedna hodnota t intervalu (α, β) tak, že je $\varphi(t) = x$.

[13]) Existuje-li ovšem *jen* jedna taková hodnota t, odpadá výběr.

je buď rostoucí nebo klesající v intervalu (α, β).[14]) Potom totiž funkce $\varphi(t)$ nemůže nabývati jedné a téže hodnoty pro dvě různé hodnoty proměnné t z intervalu (α, β); tedy ke každé hodnotě x intervalu (a, b) existuje jedna a *jen* jedna hodnota t intervalu (α, β), pro kterou platí rovnice $\varphi(t) = x$. Tato hodnota t je tedy funkcí proměnné x

$$t = \psi(x), \tag{22}$$

definovanou v intervalu (a, b), a tuto funkci $\psi(x)$ nazýváme, jak víte, funkcí *inversní* k funkci φ. Rovnice $\varphi(t) = x$ spolu s podmínkou, že t leží v intervalu (α, β), je potom splněna tehdy a jen tehdy, leží-li x v intervalu (a, b) a platí-li rovnice (22).

Nyní můžeme již vysloviti ohlášenou větu:

Věta 62. *Funkce $\varphi(t)$ nechť má derivaci v intervalu (α, β); když t probíhá interval (α, β), nechť hodnota $\varphi(t)$ nabývá právě všech hodnot intervalu (a, b) a žádných jiných. Definujme funkci $\psi(x)$ v intervalu (a, b) tak, aby pro každé x tohoto intervalu platila rovnice* (21), *když do ní za t dosadíme $\psi(x)$.*[15]) *Funkce $f(x)$ budiž spojitá v intervalu (a, b). Potom je v intervalu (a, b)*

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t,$$

položíme-li v primitivní funkci, kterou nám představuje integrál vpravo, $t = \psi(x)$.

Poznámka. V praksi se zvláště často vyskytuje ten případ, že funkce $\varphi(t)$ je buď rostoucí nebo klesající v intervalu (α, β); potom ovšem funkce ψ je prostě funkcí inversní k funkci φ.

Důkaz. Budiž $G(x)$ nějaká primitivní funkce k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b), t. j. nechť platí $G'(x) = f(x)$ v intervalu (a, b) (existence funkce $G(x)$ plyne ze spojitosti funkce $f(x)$, viz větu 58). V intervalu (α, β) je (protože hodnoty funkce $\varphi(t)$ leží v (a, b), viz větu B′ na str. 25)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(G(\varphi(t))) = G'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t);$$

funkce $G(\varphi(t))$ je tedy primitivní funkcí k funkci $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$

[14]) O funkci $f(x)$ říkáme, že je *rostoucí* v jistém intervalu (nemusí to být zrovna interval otevřený), má-li tuto vlastnost: jsou-li x_1, x_2 jakákoliv dvě čísla tohoto intervalu, pro něž je $x_1 < x_2$, je $f(x_1) < f(x_2)$. Nahradíme-li poslední nerovnost nerovností $f(x_1) > f(x_2)$, dostaneme definici funkce *klesající*.

[15]) Viz to, co jsme řekli před větou 62.

v intervalu (α, β). Budiž $H(t)$ libovolná primitivní funkce k funkci $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ v intervalu (α, β) (existenci takové primitivní funkce jsme právě dokázali, neboť $G(\varphi(t))$ je taková primitivní funkce); t. j. budiž

$$H(t) = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$$

(v int. (α, β)).

Máme dokázati, že funkce $H(\psi(x))$ je v intervalu (a, b) funkcí primitivní k funkci $f(x)$.

Ježto funkce $G(\varphi(t))$ je — stejně jako funkce $H(t)$ — primitivní funkcí k funkci $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ v (α, β), jest (podle věty 57)

$$G(\varphi(t)) = H(t) + c \tag{23}$$

v int. (α, β), kde c je konstanta. Budiž x libovolné číslo intervalu (a, b) a položme $t = \psi(x)$, takže je $x = \varphi(t)$ a t leží v intervalu (α, β); z rovnice (23) plyne pak

$$G(x) = H(\psi(x)) + c;$$

tato rovnice platí v celém intervalu (a, b). Ježto funkce $G(x)$ je primitivní funkcí k funkci $f(x)$ v (a, b), platí ovšem totéž o funkci $H(\psi(x)) = G(x) - c$, jak bylo dokázati.

Použití této věty se opět snadno pamatuje. Chci vypočísti $\int f(x)\,\mathrm{d}x$; substitucí $x = \varphi(t)$ dostanu $\int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$; předpokládejme, že tento integrál dovedeme vypočísti — tento integrál je tedy jistou funkcí $H(t)$; zavedeme-li do této funkce $H(t)$ opět x podle rovnice $t = \psi(x)$, dostaneme hledaný integrál $\int f(x)\,\mathrm{d}x = H(\psi(x))$ (jsou-li ovšem všechny podmínky věty 62 splněny). Stručně lze znázorniti postup počtu tímto schematem:

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = H(t) = H(\psi(x)).$$

Příklad 4. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 4}$ (interval $(-\infty, \infty)$). Zavedu $x = 2t$ (tedy $t = \frac{1}{2}x$), $\mathrm{d}x = 2\,\mathrm{d}t$; $x^2 + 4 = 4\,(t^2 + 1)$, takže

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{x^2 + 4} = \int \frac{2\,\mathrm{d}t}{4\,(t^2 + 1)} = \frac{1}{2}\operatorname{arctg} t = \frac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{1}{2}\,x.$$

Příklad 5. $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + 1}}$ (interval $(-\infty, \infty)$). Položme $x =$

$= \operatorname{cotg} t$ $(0 < t < \pi)$. Probíhá-li t interval $(0, \pi)$, probíhá $\operatorname{cotg} t$ vskutku klesajíc právě celý interval $(-\infty, \infty)$. Jest pak (ježto $\sin t > 0$)

$$\sqrt{1 + x^2} = \sqrt{1 + \frac{\cos^2 t}{\sin^2 t}} = \sqrt{\frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\sin^2 t}} = \left|\frac{1}{\sin t}\right| = \frac{1}{\sin t},$$

$dx = -\dfrac{dt}{\sin^2 t}$; tedy (viz příkl. 3)

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = -\int \frac{dt}{\sin t} = -\lg \operatorname{tg} \frac{t}{2} = \lg \operatorname{cotg} \frac{t}{2}; \qquad (24)$$

do posledního výrazu musíme za t dosaditi příslušnou inversní funkci, t. j. $t = \operatorname{arccotg} x$ (Kössler 68), takže

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1 + x^2}} = \lg \operatorname{cotg} \left(\frac{1}{2} \operatorname{arccotg} x\right) \qquad (25)$$

(v int. $(-\infty, \infty)$).

Ale výsledek lze psáti v jednodušším tvaru. Podle rovnice (24) je naší úlohou, vyjádřiti funkci $\lg \operatorname{cotg} \frac{1}{2}t$ pomocí x; je však $x = \operatorname{cotg} t$, takže v podstatě jde o to, vyjádřiti $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}t$ pomocí $\operatorname{cotg} t$. Jak známo z goniometrie, je

$$x = \operatorname{cotg} t = \frac{\operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2}t - 1}{2 \operatorname{cotg} \frac{1}{2}t},$$

odtud pak $(\operatorname{cotg} \frac{1}{2}t)^2 - 2x \operatorname{cotg} \frac{1}{2}t - 1 = 0$, což je kvadratická rovnice pro $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}t$; řešením dostaneme $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}t = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$. Které znamení platí? Jest $x^2 + 1 > x^2 \geqq 0$ a tedy $\sqrt{x^2 + 1} > \sqrt{x^2} = |x|$; je tedy $|x| < \sqrt{x^2 + 1}$, a tedy $x - \sqrt{x^2 + 1} < 0 < x + \sqrt{x^2 + 1}$. Ježto je $0 < \frac{1}{2}t < \frac{1}{2}\pi$, je $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}t > 0$; nemůže tedy býti $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}t = x - \sqrt{x^2 + 1}$ a tedy je $\operatorname{cotg} \frac{1}{2}t = x + \sqrt{x^2 + 1}$. Podle (24) je tedy

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 1}} = \lg (x + \sqrt{x^2 + 1})$$

(v int. $(-\infty, \infty)$), což je hledaný výsledek. Srovnáním s rovnicí (25) plyne, že je $\lg \operatorname{cotg} (\frac{1}{2} \operatorname{arccotg} x) = \lg (x + \sqrt{x^2 + 1}) + c$, kde c je konstanta; dosadíme-li $x = 0$, dostaneme, že $c = 0$.

Odlogaritmováním dostáváme pak rovnici $\operatorname{cotg}(\frac{1}{2}\operatorname{arccotg} x) = x + \sqrt{x^2+1}$, kterou bychom ovšem mohli jednodušeji odvoditi přímo.[16])

Následuje několik příkladů na metodu substituční v jednom nebo druhém tvaru.

Příklad 6. $\displaystyle\int \frac{dx}{ax+b}$ $\left(a \neq 0, \text{ intervaly } \left(-\infty, -\frac{b}{a}\right)\right.$ a $\left.\left(-\frac{b}{a}, \infty\right)\right)$. Položme $ax + b = t$, $a\,dx = dt$, tedy

$$\int \frac{dx}{ax+b} = \frac{1}{a}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{a}\lg|t| = \frac{1}{a}\lg|ax+b|.$$

Příklad 7. Předešlý příklad je speciálním případem integrálu $\int f(ax+b)\,dx$ $(a \neq 0)$. Substitucí $ax + b = t$, $a\,dx = dt$ dostaneme $\int f(ax+b)\,dx = a^{-1}\int f(t)\,dt$. Známe-li $\int f(x)\,dx = F(x)$, bude tedy

$$\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}\int f(t)\,dt = \frac{1}{a}F(t) = \frac{1}{a}F(ax+b).$$

Tedy: z integrálu $\int f(x)\,dx$ dostaneme ihned $\int f(ax+b)\,dx$, píšeme-li ve funkci $F(x) = \int f(x)\,dx$ výraz $ax + b$ místo x a dělíme-li číslem a. Tohoto obratu se velmi často užívá, a nebudu jej proto příště podrobně uváděti. Na př.

$$\int e^{2x+3}\,dx = \tfrac{1}{2}e^{2x+3}, \qquad \int \cos 3x\,dx = \tfrac{1}{3}\sin 3x,$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-4x^2}} = \frac{1}{2}\arcsin 2x,$$

$$\int (-x+2)^7\,dx = -\frac{1}{8}(-x+2)^8$$

atd. Čtenář nechť si v tomto a v následujícím příkladě sám rozváží, v kterých intervalech uvedené výsledky platí.

---

[16]) Vlastně jsme toto přímé odvození již před chvílí provedli. Najde to čtenář?

Příklad 8. Často se užívá tohoto obratu: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x$ počítáme substitucí $f(x) = t$, $f'(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t} = \lg |t| = \lg |f(x)|$. Derivováním snadno zjistíme, že tento vzorec platí v každém otevřeném intervalu, v němž $f'(x)$ existuje a v němž je stále $f(x) \neq 0$. Na př.:

$$\int \frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^3 + 1} = \frac{1}{3} \int \frac{3x^2\,\mathrm{d}x}{x^3 + 1} = \frac{1}{3} \lg |x^3 + 1|;$$

$$\int \operatorname{tg} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\sin x}{\cos x} \mathrm{d}x = -\int \frac{-\sin x}{\cos x} \mathrm{d}x = -\lg |\cos x|;$$

$$\int \operatorname{cotg} x\,\mathrm{d}x = \int \frac{\cos x}{\sin x} \mathrm{d}x = \lg |\sin x|.$$

Příklad 9. $\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n} \mathrm{d}x$; při tom nechť je n celé kladné a rovnice $x^2 + px + q = 0$ nechť nemá reálných kořenů, takže jmenovatel $(x^2 + px + q)^n$ je různý od nuly pro všechna reálná x. To nastane — jak víte ze střední školy — tehdy a jen tehdy, je-li $\frac{1}{4}p^2 - q < 0$. Integrál budeme hledati v intervalu $(-\infty, \infty)$. Derivace výrazu $x^2 + px + q$ je $2x + p$; upravme tedy daný integrál takto:

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^n} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} A \int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n} \mathrm{d}x + \left(B - \frac{1}{2} Ap\right) \int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + px + q)^n} \tag{26}$$

(to je pravda, neboť $Ax + B = \frac{1}{2}A\,(2x + p) + B - \frac{1}{2}Ap$).

V prvním integrálu proveďme substituci $x^2 + px + q = t$, $(2x + p)\,\mathrm{d}x = \mathrm{d}t$, takže je

$$\int \frac{2x + p}{(x^2 + px + q)^n} \mathrm{d}x = \int \frac{\mathrm{d}t}{t^n};$$

tento integrál dovedeme vypočísti.

Druhý integrál snažíme se převésti na $\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2 + 1)^n}$, který též umíme vypočísti (viz odst. 3, příkl. 5). To provedeme takto:

první dva členy trojčlenu $x^2 + px + q$ doplníme na čtverec dvojčlenu prvního stupně, t. j. píšeme $x^2 + px + q = (x + \frac{1}{2}p)^2 + q - \frac{1}{4}p^2 = (x + \frac{1}{2}p)^2 + r$, kde klademe $r = q - \frac{1}{4}p^2$; je ovšem $r > 0$. Výraz $(x + \frac{1}{2}p)^2 + r$ se snažíme uvésti na tvar $rt^2 + r = r(t^2 + 1)$; toho dosáhneme substitucí $x + \frac{1}{2}p = \sqrt{r}\,.\,t$ (čili $x = \sqrt{r}\,.\,t - \frac{1}{2}p$), $\mathrm{d}x = \sqrt{r}\,.\,\mathrm{d}t$ (odmocnina nám nevadí, ježto je $r > 0$). Dostáváme tedy $x^2 + px + q = rt^2 + r = r(t^2 + 1)$ a tedy

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2 + px + q)^n} = \int \frac{\sqrt{r}\,\mathrm{d}t}{r^n (t^2 + 1)^n} = \frac{1}{r^{n-\frac{1}{2}}} \int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2 + 1)^n};$$

tím je tedy též druhý integrál z rovnice (26) převeden na integrál známý.

5. Integrace per partes a metoda substituční pro určité integrály. Metody integrace per partes a metody substituční můžeme užíti také přímo pro integrály určité. Odvodím dvě příslušné věty:

Věta 63. *Funkce $u(x)$, $v(x)$ nechť mají v $\langle a, b\rangle$ derivace $u'(x)$, $v'(x)$,*[17]) *jež jsou spojité v $\langle a, b\rangle$. Potom jest*

$$\int_a^b u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x = u(b)\, v(b) - u(a)\, v(a) - \int_a^b u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x. \qquad (27)$$

Poznámka. Rozdíl $f(b) - f(a)$, který se zde i v dalším často vyskytuje, značíme pro zkrácení též $[f(x)]_{x=a}^{x=b}$ nebo ještě kratčeji $[f(x)]_a^b$; tedy na př. $[\sin x]_0^{\frac{1}{2}\pi} = \sin \frac{1}{2}\pi - \sin 0 = 1$, $[x^2]_1^2 = 2^2 - 1^2 = 3$, $[u(x)\, v(x)]_a^b = u(b)\, v(b) - u(a)\, v(a)$.

Důkaz. Z existence derivací plyne spojitost funkcí $u(x)$, $v(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ (viz pozn. [17]); tedy existují integrály $\int_a^b u(x)\, v'(x)\, \mathrm{d}x$, $\int_a^b u'(x)\, v(x)\, \mathrm{d}x$ (viz větu 47) a podle věty 33 je

---

[17]) Znakem $u'(x)$ a slovem „derivace" rozumím zde pro $x = a$ derivaci zprava $u'_+(a)$, pro $x = b$ derivaci zleva $u'_-(b)$, pro $a < x < b$ pak vskutku derivaci $u'(x)$. Podobně pro funkci $v'(x)$.
Poznamenejme: ježto funkce $u(x)$ má derivaci v každém bodě intervalu (a, b) a mimo to derivaci zprava v bodě a a derivaci zleva v bodě b, je podle poznámky 1 na str. 24 funkce $u(x)$ spojitá v int. (a, b) a mimo to spojitá zprava v bodě a a zleva v bodě b, t. j. $u(x)$ je funkce spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$. Podobně funkce $v(x)$ je spojitá v int. $\langle a, b\rangle$.

$$\int_a^b u(x)\,v'(x)\,dx + \int_a^b u'(x)\,v(x)\,dx = \int_a^b (u(x)\,v'(x) + u'(x)\,v(x))\,dx. \quad (28)$$

Funkce $u(x)\,v(x)$ je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$ a má v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) derivaci $u(x)\,v'(x) + u'(x)\,v(x)$. Podle věty 48 je tedy

$$\int_a^b (u(x)\,v'(x) + u'(x)\,v(x))\,dx = u(b)\,v(b) - u(a)\,v(a). \quad (29)$$

Ze vzorců (28), (29) plyne však okamžitě hledaný vzorec (27).

Poznámka. Vzorec (27) platí — za obdobných předpokladů — též tehdy, je-li $a > b$. Neboť vyměním-li v tomto vzorci a a b, změní obě strany pouze své znamení.

Příklad 1. $\int_0^\pi x^2 \sin x\,dx$; položme $u = x^2$, $v' = \sin x$, $u' = 2x$, $v = -\cos x$; dostaneme $\int_0^\pi x^2 \sin x\,dx = [-x^2 \cos x]_0^\pi + 2\int_0^\pi x \cos x\,dx = \pi^2 + 2\int_0^\pi x \cos x\,dx$. Položme nyní $u = x$, $v' = \cos x$, $u' = 1$, $v = \sin x$; dostaneme $\int_0^\pi x \cos x\,dx = [x \sin x]_0^\pi - \int_0^\pi \sin x\,dx = 0 + [\cos x]_0^\pi = -2$. Tedy celkem $\int_0^\pi x^2 \sin x\,dx = \pi^2 - 4$.

Příklad 2. Položme $I_n = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^n x\,dx$ (n celé, $n \geqq 0$). Pro $n > 1$ položme $u = \sin^{n-1} x$, $v' = \sin x$, $u' = (n-1)\sin^{n-2} x \cos x$, $v = -\cos x$, takže je

$$I_n = -[\sin^{n-1} x \cos x]_0^{\frac{1}{2}\pi} + (n-1)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n-2} x \cos^2 x\,dx =$$

$$= (n-1)\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{n-2} x\,(1 - \sin^2 x)\,dx = (n-1)\,I_{n-2} - (n-1)\,I_n,$$

tedy

$$nI_n = (n-1)\,I_{n-2}, \quad I_n = \frac{n-1}{n}\,I_{n-2}.$$

Z této rekurentní formule plyne ihned pro sudé $n > 1$ ($n = 2m$, m celé kladné)

$$I_{2m} = \frac{2m-1}{2m}\cdot\frac{2m-3}{2m-2}\cdot\frac{2m-5}{2m-4}\cdots\frac{1}{2}\,I_0$$

a pro liché $n > 1$ ($n = 2m+1$, m celé kladné)

$$I_{2m+1} = \frac{2m}{2m+1}\cdot\frac{2m-2}{2m-1}\cdot\frac{2m-4}{2m-3}\cdots\frac{2}{3}\,I_1.$$

Tyto dva vzorce nám okamžitě dávají I_n pro každé celé $n > 0$, neboť I_0 a I_1 dovedeme vypočísti:

$$I_0 = \int_0^{\frac12\pi} \mathrm{d}x = [x]_0^{\frac12\pi} = \tfrac12\pi, \quad I_1 = \int_0^{\frac12\pi} \sin x\,\mathrm{d}x = -[\cos x]_0^{\frac12\pi} = 1.$$

O metodě substituční pro určité integrály jedná tato věta:

Věta 64. *Funkce $\varphi(t)$ nechť má v intervalu $\langle\alpha,\beta\rangle$ spojitou derivaci $\varphi'(t)$ (při čemž slovo „derivace" a znak $\varphi'(t)$ nechť pro $t=\alpha$ znamená derivaci zprava a pro $t=\beta$ derivaci zleva.[18]) Funkce $f(x)$ nechť je spojitá v intervalu $\langle A, B\rangle$ a pro každé t intervalu $\langle\alpha,\beta\rangle$ budiž $A \leqq \varphi(t) \leqq B$. Položíme-li $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$, jest*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,\mathrm{d}t. \tag{30}$$

Poznámka 1. Zde jsme mluvili o intervalu $\langle\alpha,\beta\rangle$, takže jsme předpokládali $\alpha < \beta$; ale také pro $\alpha > \beta$ platí vzorec (30) za příslušných předpokladů: neboť ve vzorci (30) vlevo i vpravo můžeme vyměniti dolní integrační mez za horní a naopak (násobíme prostě obě strany činitelem -1).

Poznámka 2. Vzorce (30) můžeme použíti buď k výpočtu integrálu vlevo, známe-li integrál vpravo nebo k výpočtu integrálu vpravo, známe-li integrál vlevo. Mechanismus je stejný jako u neurčitých integrálů, jen musíme dáti pozor na to, že se také

[18]) Funkce $\varphi(t)$ je tedy spojitá v intervalu $\langle\alpha,\beta\rangle$; viz obdobnou úvahu o funkci $u(x)$ v pozn. [17]) pod čarou.

meze mění podle substituce $x = \varphi(t)$, totiž $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$. Zde musíme dáti vždy pozor na to, jsou-li podmínky věty splněny: u neurčitých integrálů můžeme se po výpočtu dodatečně derivováním přesvědčiti, zda jsme správně počítali; u *určitých* integrálů tuto možnost zkoušky nemáme.

Důkaz věty 64. Ježto funkce $f(x)$ je spojitá v intervalu $\langle A, B\rangle$, existuje podle věty 47 integrál $\int_A^B f(u)\,du$. Položme

$$F(x) = \int_A^x f(u)\,du; \tag{31}$$

podle věty 45 (a podle poznámky[37]) pod čarou k větě 45) je funkce $F(x)$ definována v intervalu $\langle A, B\rangle$ a má v tomto uzavřeném intervalu derivaci $F'(x) = f(x)$ (při čemž ovšem znak $F'(A)$ značí derivaci zprava v bodě A a znak $F'(B)$ značí derivaci zleva v bodě B). Ježto funkce $\varphi(t)$ má derivaci v int. $\langle\alpha, \beta\rangle$,[19]) a ježto hodnoty funkce $\varphi(t)$ leží v intervalu $\langle A, B\rangle$, má funkce $F(\varphi(t))$ podle věty C' na str. 25 v int. $\langle\alpha, \beta\rangle$ derivaci $F'(\varphi(t))\,\varphi'(t) = f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ (v bodě $t = \alpha$ rozumím slovem „derivace" opět derivaci zprava, v bodě $t = \beta$ derivaci zleva). Funkce $F(\varphi(t))$ je tedy spojitá v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$[20]) a má v každém bodě otevřeného intervalu(α,β) derivaci $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$. Funkce $f(\varphi(t))\,\varphi'(t)$ je spojitá v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$[21]) a tedy existuje integrál $\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$ (podle věty 47). Podle věty 48 je tedy

$$\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) \tag{32}$$

(neboť $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$). Ale podle (31) je (ježto hodnoty $a = \varphi(\alpha)$, $b = \varphi(\beta)$ leží v intervalu $\langle A, B\rangle$)

$$F(b) - F(a) = \int_A^b f(u)\,du - \int_A^a f(u)\,du = \int_a^b f(u)\,du;$$

---

[19]) V bodě α zprava, v bodě β zleva.

[20]) Viz obdobnou úvahu o funkci $u(x)$ v pozn. [17]) pod čarou.

[21]) Neboť $\varphi(t)$ je spojitá v $\langle\alpha, \beta\rangle$ a nabývá jen hodnot intervalu $\langle A, B\rangle$ a funkce $f(x)$ je spojitá v $\langle A, B\rangle$; tedy funkce $f(\varphi(t))$ je spojitá v $\langle\alpha, \beta\rangle$ podle věty C str. 23 a funkce $\varphi'(t)$ je spojitá v $\langle\alpha, \beta\rangle$ podle předpokladu.

dosadíme-li z této rovnice do pravé strany rovnice (32), dostáváme rovnici (30), neboť $\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

Příklad 3. $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2+3x+1}}$; zkusme substituci $\sqrt{x^2+3x+1} = x + t$, tedy

$$x^2 + 3x + 1 = x^2 + 2xt + t^2, \quad x = \frac{t^2 - 1}{3 - 2t}, \tag{33}$$

$$\mathrm{d}x = \frac{-2t^2 + 6t - 2}{(3-2t)^2}\,\mathrm{d}t.$$

Z rovnice $t = \sqrt{x^2 + 3x + 1} - x$ plyne: pro $x = 0$ je $t = 1$, pro $x = 1$ je $t = \sqrt{5} - 1$. Zkusme, jsou-li splněny všechny předpoklady: máme zde $\varphi(t) = \frac{t^2 - 1}{3 - 2t}$; to je v intervalu $\langle 1, \sqrt{5} - 1\rangle$ funkce rostoucí (neboť čitatel $t^2 - 1$ je nezáporný a roste, jmenovatel $3 - 2t$ je kladný a klesá), mající v tomto intervalu spojitou derivaci. Pro $t = 1$ je $\varphi(t) = 0$, pro $t = \sqrt{5} - 1$ je $\varphi(t) = \frac{5 - 2\sqrt{5} + 1 - 1}{3 - 2\sqrt{5} + 2} = 1$, takže pro každé t intervalu $\langle 1, \sqrt{5} - 1\rangle$ je $0 \leq \varphi(t) \leq 1$. Funkce $f(x) = 1 : \sqrt{x^2 + 3x + 1}$ je pak v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ spojitá. Můžeme tedy použíti věty 64.[22]) Musíme ještě do $\sqrt{x^2 + 3x + 1}$ zavésti proměnnou t; $\sqrt{x^2 + 3x + 1} = x + t = \frac{t^2 - 1}{3 - 2t} + t = \frac{-t^2 + 3t - 1}{3 - 2t}$. Tedy

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 + 3x + 1}} = \int_1^{\sqrt{5}-1} \frac{3 - 2t}{-t^2 + 3t - 1} \cdot \frac{-2t^2 + 6t - 2}{(3 - 2t)^2}\,\mathrm{d}t =$$

$$= 2\int_1^{\sqrt{5}-1} \frac{\mathrm{d}t}{3 - 2t} = \frac{2}{-2}\left[\lg|3 - 2t|\right]_1^{\sqrt{5}-1} = -\lg|3 - 2\sqrt{5} + 2| =$$

[22]) Připomeňme, že pro naše hodnoty t, x plyne z druhé rovnice (33) první rovnice (33) a z této rovnice odmocněním rovnice $\sqrt{x^2 + 3x + 1} = x + t$ (znamení je totiž správně voleno, ježto obě strany jsou kladné); můžeme tedy této rovnice — z níž jsme vlastně vyšli — skutečně použíti při provádění substituce.

$$= -\lg\sqrt{5}\,(\sqrt{5}-2) = \lg\frac{1}{\sqrt{5}\,(\sqrt{5}-2)} = \lg\frac{\sqrt{5}+2}{\sqrt{5}} = \lg\left(1+\frac{2\sqrt{5}}{5}\right).$$

Příklad 4.[23] $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+x+1}$; podle vzoru příkl. 9, odst. 4 píšeme $x^2+x+1=(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}$ a klademe $x+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{3}\,t$, $dx=\frac{1}{2}\sqrt{3}\,dt$, takže $x^2+x+1=\frac{3}{4}(t^2+1)$. Je $t=\frac{2x+1}{\sqrt{3}}$ a tedy platí: roste-li x od -1 do $+1$, roste t od $-1:\sqrt{3}$ do $\sqrt{3}$. Tedy

$$\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{x^2+x+1} = \int\limits_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}}\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{t^2+1}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{3}\,dt = \frac{2}{\sqrt{3}}[\operatorname{arctg} t]_{-\frac{1}{\sqrt{3}}}^{\sqrt{3}} =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{3}-\left(-\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{\pi}{\sqrt{3}}.$$

Příklad 5. $\int\limits_{1}^{2}\frac{x\,dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}}$; substituce $x^2+1=t$; roste-li x od 1 do 2, roste též t od 2 do 5; dále je $2x\,dx=dt$ a tedy

$$\int\limits_{1}^{2}\frac{x\,dx}{(x^2+1)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{2}\int\limits_{2}^{5}\frac{dt}{t^{\frac{3}{2}}} = -\left[\frac{1}{\sqrt{t}}\right]_2^5 = \frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{\sqrt{5}}.$$

CVIČENÍ.[24]

1. $\int x^n \lg x\,dx = \frac{x^{n+1}}{n+1}\lg x - \frac{x^{n+1}}{(n+1)^2}$ (pro $n \neq -1$; případ $n=-1$ byl vyřešen v odst. 3, příkl. 6).

2. $\int \operatorname{arctg} x\,dx = x\operatorname{arctg} x - \frac{1}{2}\lg(1+x^2)$.

---

[23]) V příkl. 4 a 5 přenechávám podrobné vyšetření podmínek čtenáři.

[24]) Při neurčitých integrálech nechť čtenář sám uváží, ve kterých intervalech uvedené výsledky platí.

3. $\int \arcsin x \, dx = x \arcsin x + \sqrt{1 - x^2}$.

4. Z výsledku odst. 3, příkl. 4 odvoďte pro celé $n > 0$

$$\int x^n e^x \, dx = n ! \, e^x \left(\frac{x^n}{n!} - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} + \right.$$
$$\left. + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} - \ldots + \frac{(-1)^{n-1} x}{1!} + (-1)^n \right).$$

5. Položme $I_n = \int x^n \cos x \, dx$, $K_n = \int x^n \sin x \, dx$; potom je

$$I_n = x^n \sin x - nK_{n-1}, \quad K_n = - x^n \cos x + nI_{n-1}.$$

Vypočtěte z těchto vzorců třeba I_3.

6. Pro $n \geqq 0$ položme $I_n = \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} x^n \cos x \, dx$, $K_n = \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} x^n \sin x \, dx$; z výsledku předcházejícího cvičení odvoďte vzorce (pro $n \geqq 2$)

$$I_n = (\tfrac{1}{2}\pi)^n - n(n-1) I_{n-2}, \quad K_n = n (\tfrac{1}{2}\pi)^{n-1} - n(n-1) K_{n-2}.$$

Odtud na př. pro sudé $n > 0$

$$I_n = (\tfrac{1}{2}\pi)^n - n(n-1)(\tfrac{1}{2}\pi)^{n-2} +$$
$$+ n(n-1)(n-2)(n-3)(\tfrac{1}{2}\pi)^{n-4} - \ldots + (-1)^{\frac{1}{2}n} \, . \, n! \, (\tfrac{1}{2}\pi)^0.$$

Odvoďte obdobný vzorec pro liché $n > 0$ a též pro K_n (přechod ke K_n je snadný, neboť pro $n \geqq 1$ je $K_n = nI_{n-1}$).

7. Z odst. 3, příkl. 7 znáte vzorce

$$\int e^x \sin x \, dx = \tfrac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x), \quad \int e^x \cos x \, dx = \tfrac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x).$$

Položíme-li

$$I_n = \int x^n e^x \sin x \, dx, \quad K_n = \int x^n e^x \cos x \, dx,$$

platí

$$I_n = \tfrac{1}{2} x^n e^x (\sin x - \cos x) - \tfrac{1}{2} n (I_{n-1} - K_{n-1}),$$
$$K_n = \tfrac{1}{2} x^n e^x (\sin x + \cos x) - \tfrac{1}{2} n (I_{n-1} + K_{n-1}).$$

Ježto I_0, K_0 známe, dovedeme vypočísti I_n, K_n pro každé celé $n > 0$ (proveďte to pro některá n).

8. Položme $I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x \, dx$; odvodíme vzorce, kterými je možno vypočísti $I_{m,n}$ pro všechna celá m, n. Položíme-li $(m+1) \sin^m x \cos x = u'$, $\cos^{n-1} x = v$, máme ihned

$$(\alpha) \qquad (m+1) I_{m,n} = \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n-1) I_{m+2,n-2}.$$

Užijeme-li vztahu $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$, máme $I_{m+2,n-2} = I_{m,n-2} - I_{m,n}$ a tedy

$$(\beta) \qquad (m + n)\, I_{m,n} = \sin^{m+1} x \cos^{n-1} x + (n - 1)\, I_{m,n-2}.$$

Píšeme-li v (α) m, n místo $m + 2$, $n - 2$, máme

$$(\gamma) \qquad (m - 1)\, I_{m-2,n+2} = \sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + (n + 1)\, I_{m,n}$$

a odtud podobně jako před tím

$$(\delta) \qquad (m + n)\, I_{m,n} = -\sin^{m-1} x \cos^{n+1} x + (m - 1)\, I_{m-2,n}.$$

Ze vzorců (β), (δ) plyne: je-li $m + n \neq 0$, lze $I_{m,n}$ vyjádřiti integrálem $I_{m,n-2}$ nebo $I_{m-2,n}$; čteme-li tyto vzorce pozpátku, vidíme: je-li $n + 1 \neq 0$ resp. $m + 1 \neq 0$, lze integrál $I_{m,n}$ vyjádřiti integrálem $I_{m,n+2}$ resp. $I_{m+2,n}$. Tedy lze každý integrál $I_{m,n}$ vyjádřiti oněmi integrály $I_{m,n}$, kde m a n jsou rovny některému z čísel 0, 1, -1. Těchto 9 integrálů však dovedeme vypočísti, viz násl. cvičení.

9. $I_{0,0}$, $I_{0,1}$, $I_{1,0}$ známe; $I_{1,1} = \int \sin x \cos x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2} \sin^2 x$;

$$I_{-1,-1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x \cos x} = \int \frac{1}{\operatorname{tg} x} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^2 x} = \lg |\operatorname{tg} x|;$$

$$I_{-1,0} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{2 \sin \frac{1}{2}x \cos \frac{1}{2}x} = \lg |\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}x|;$$

$$I_{0,-1} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\cos x} = \int \frac{\mathrm{d}x}{\sin(\frac{1}{2}\pi - x)} = \lg |\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2}x + \tfrac{1}{4}\pi)|;$$

$$I_{1,-1} = \int \frac{\sin x}{\cos x} \mathrm{d}x = -\lg |\cos x|; \quad I_{-1,1} = \int \frac{\cos x}{\sin x} \mathrm{d}x = \lg |\sin x|.$$

10. Ze vzorců cvičení 8 a 9 odvoďte

$$\int \frac{\sin^6 x}{\cos^3 x} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin^7 x}{\cos^2 x} + \sin^5 x + \tfrac{5}{3} \sin^3 x + 5 \sin x - 5 \lg |\operatorname{tg}(\tfrac{1}{2} x + \tfrac{1}{4}\pi)| \right);$$

$$\int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^4 x \cos^2 x \,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{32}\pi; \quad \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\sin^2 x}{\cos^4 x} \mathrm{d}x = \tfrac{1}{3}; \quad \int_0^{\frac{1}{4}\pi} \frac{\mathrm{d}x}{\cos^4 x} = \tfrac{4}{3}.$$

11. Ze vzorce $\operatorname{tg}^n x = \operatorname{tg}^{n-2} x \cdot \dfrac{1}{\cos^2 x} - \operatorname{tg}^{n-2} x$ plyne pro $n \neq 1$

$$\int \operatorname{tg}^n x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n-1} \operatorname{tg}^{n-1} x - \int \operatorname{tg}^{n-2} x \,\mathrm{d}x.$$

Tento vzorec je obsažen jako speciální případ v jednom ze vzorců (α), (β), (γ), (δ) (cvič. 8); v kterém?

12. Integrál $I_{m,n} = \int \sin^m x \cos^n x \, dx$ z cvičení 8 lze ještě jinak počítati, je-li aspoň jedno z čísel m, n liché. Budiž na př. $n = 2k + 1$ liché. Substituce $\sin x = t$, $\cos^2 x = 1 - t^2$ dává

$$\int \sin^m x \cos^{2k+1} x \, dx = \int t^m (1 - t^2)^k \, dt.$$

Tím je výpočet převeden na výpočet integrálu racionální funkce (je-li ovšem m, k celé); integrály racionálních funkcí naučíme se obecně počítati v kap. IV. Zvláště jednoduchý je případ $k \geqq 0$. Proveďte obdobnou úvahu pro m liché.

13. Podle metody cvič. 12 vypočtěte

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^6 x} dx = -\frac{1}{5 \sin^5 x} + \frac{1}{3 \sin^3 x},$$

$$\int \frac{\sin^5 x}{\cos^7 x} dx = \frac{1}{6 \cos^6 x} - \frac{1}{2 \cos^4 x} + \frac{1}{2 \cos^2 x},$$

$$\int \sin^4 x \cos^3 x \, dx = \tfrac{1}{5} \sin^5 x - \tfrac{1}{7} \sin^7 x.$$

14. $\int \sqrt{1 - x^2} \, dx = \frac{1}{2} (x\sqrt{1 - x^2} + \arcsin x).$

Návod: integrujte per partes; v integrálu vpravo pište $\frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}} =$
$= -\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}}.$

15. $\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 - 1}} = -\arcsin \left| \frac{1}{x} \right|$ $\left(\text{substituce } x = \frac{1}{t}\right)$. (Při výpočtu dávejte pozor na to, že je $\sqrt{a^2} = |a|$; v kterých intervalech platí odvozený vzorec?)

16. $\int_{-\frac{1}{4}}^{\frac{5}{4}} \frac{dx}{\sqrt{\frac{1}{2} + x - x^2}} = \frac{2}{3}\pi$ (substituce $x - \frac{1}{2} = t$ a potom

$$t = \tfrac{1}{2} \sqrt{3}\, u).$$

17. $\int_0^1 \frac{dx}{(4 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{4\sqrt{3}} \left(\text{substituce } \frac{2 - x}{2 + x} = t\right).$

18. Substitucí $\left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^2 = t$ obdržíme

$$\int \frac{(x^2 + 1)^3}{(x^2 - 1)^3 (x + 1)^2} dx = \frac{1}{32} \int \frac{(1 + t)^3}{t^2} dt =$$

$$= \frac{1}{32} \left(\frac{1}{2} \left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^4 + 3 \left(\frac{x - 1}{x + 1}\right)^2 - \left(\frac{x + 1}{x - 1}\right)^2 + 6 \lg \left|\frac{x - 1}{x + 1}\right| \right).$$

19. Integrály tvaru

$$\int x^n e^{\alpha x} \cos(\beta_1 x + \lambda_1) \dots \cos(\beta_k x + \lambda_k) \sin(\gamma_1 x + \mu_1) \dots$$
$$\dots \sin(\gamma_l x + \mu_l)\, dx$$

(n, k, l celá nezáporná, $k + l > 0$) můžeme počítati takto: užitím vzorce $\cos y \cos z = \frac{1}{2}(\cos(y + z) + \cos(y - z))$ a obdobných vzorců pro $\sin y \sin z$, $\sin y \cos z$ můžeme počet trigonometrických činitelů (který je roven $k + l$) snižovati tak dlouho, dokud se nerovná jedné. Tím je předložený integrál převeden na integrály tvaru

$$\int x^n e^{\alpha x} \cos(Ax + B)\, dx, \quad \int x^n e^{\alpha x} \sin(Ax + B)\, dx.$$

Je-li $\alpha \neq 0$, $A \neq 0$, vypočteme tyto integrály metodou, jež byla ve speciálním případě $\alpha = A = 1$, $B = 0$ vyložena ve cvič. 7; je-li $\alpha = 0$ nebo $A = 0$, je ovšem výpočet ještě jednodušší (podle vzoru cvič. 4 nebo příkl. 7, kap. III). Vypočtěte touto metodou

$$\int xe^{3x} \cos(2x + \lambda) \sin^2(x + \mu)\, dx =$$
$$= \tfrac{1}{4} e^{3x} \left(\frac{-7 - 75x}{625} \cos(4x + \lambda + 2\mu) + \right.$$
$$+ \frac{24 - 100x}{625} \sin(4x + \lambda + 2\mu) + \frac{1 - 3x}{9} \cos(\lambda - 2\mu) +$$
$$\left. + \frac{-10 + 78x}{169} \cos(2x + \lambda) + \frac{-24 + 52x}{169} \sin(2x + \lambda) \right).$$

20. Větu 60 jsme dokázali za předpokladu, že derivace $u'(x)$, $v'(x)$ jsou spojité v intervalu (a, b). Dokažte, že větu 60 lze takto zobecniti: v intervalu (a, b) nechť existují derivace $u'(x)$, $v'(x)$ funkcí $u(x)$, $v(x)$; dále nechť existuje v int. (a, b) integrál $\int u'(x) v(x)\, dx$; potom existuje v intervalu (a, b) též integrál $\int u(x) v'(x)\, dx$ a platí vzorec (13) (v intervalu (a, b)). (Předpoklad o spojitosti funkcí $u'(x)$, $v'(x)$ je tedy nahrazen obecnějším předpokladem o existenci integrálu $\int u'(x) v(x)\, dx$.)

21. Dokažte: je-li funkce $f(x)$ neklesající[25]) v intervalu $\langle a, b\rangle$, potom pro žádnou hodnotu x intervalu $\langle a, b)$ není $f'_+(x) < 0$[26]) a pro žádnou hodnotu x intervalu $(a, b\rangle$ není $f'_-(x) < 0$.

Návod: jako vzoru užijte úvahy v Kösslerovi, str. 82 nahoře (v ř. 3 je tam str. 00 místo str. 70).

22. Dokažte tuto větu: $f(x)$ budiž funkce spojitá v int. $\langle a, b\rangle$; $g(x)$ budiž funkce monotonní[25]) v int. $\langle a, b\rangle$, jež má v tomto intervalu spojitou derivaci.[27]) Potom existuje v intervalu $\langle a, b\rangle$ číslo ξ

---

[25]) Viz cvič. 13 ke kap. II, kde jsou tyto pojmy vysvětleny.

[26]) T. j. je-li $a \leq x < b$, je buďto $f'_+(x) \geq 0$ nebo $f'_+(x)$ vůbec neexistuje. Cvičení 21 nepatří vlastně do integrálního počtu, ale použijeme ho v cvič. 22.

[27]) Slovem „derivace“ a znakem $g'(x)$, po příp. $F'(x)$ rozumím v tomto cvičení pro $x = a$ derivaci zprava a pro $x = b$ derivaci zleva.

takové, že jest

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = g(a)\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x + g(b)\int_\xi^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{34}$$

Návod. Budiž předně $g(x)$ neklesající, takže podle cvič. 21 je $g'(x) \geqq 0$ v int. $\langle a, b\rangle$. Položme $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$, takže je $F'(x) = f(x)$ v int. $\langle a, b\rangle$. Podle věty 63 o integraci per partes je

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b F'(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)\,g(x)]_a^b - \int_a^b F(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x. \tag{35}$$

Budiž m nejmenší, M největší hodnota funkce $F(x)$ v int. $\langle a, b\rangle$; podle 1. věty o stř. hodnotě (cvič. 14 ke kap. II) je

$$m(g(b) - g(a)) \leqq \int_a^b F(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x \leqq M(g(b) - g(a)).$$

Existuje tedy číslo μ tak, že je

$$m \leqq \mu \leqq M, \quad \int_a^b F(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = \mu(g(b) - g(a)).$$

Konečně existuje v int. $\langle a, b\rangle$ číslo ξ tak, že je

$$F(\xi) = \int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x = \mu,\text{[28]}$$

takže

$$\int_a^b F(x)\,g'(x)\,\mathrm{d}x = (g(b) - g(a))\int_a^\xi f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Dosadíte-li odtud do (35) a uvážíte-li, že je $F(a) = 0$, $F(b) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, obdržíte (34).

Je-li za druhé $g(x)$ nerostoucí, aplikujte vzorec (34) na funkci $-g(x)$.

Prosím čtenáře, aby při provádění tohoto důkazu dbal pozorně toho, zda všechny kroky jsou oprávněny.

Poznámka. Věta právě dokázaná, t. zv. *2. věta o střední hodnotě integrálního počtu*, je velmi důležitá. Předpoklady o funkcích $f(x)$, $g(x)$ daly by se ještě podstatně zobecniti; viz Petr, Počet integrální, 2. vyd., str. 240—242.

---

[28]) Proč existuje takové ξ? Odpověď najde čtenář v Kösslerovi 63.

23. Dokažte: je-li $0 < a < b$, je

$$\left|\int_a^b \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\right| \leqq 2(\sqrt{b} - \sqrt{a}),\quad \left|\int_a^b \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\right| \leqq \frac{2}{\sqrt{a}} + \frac{2}{\sqrt{b}}$$

(první nerovnost plyne z první věty, druhá z druhé věty o střední hodnotě). Na př. pro $b = 4a > 0$ dostáváme

$$\left|\int_a^{4a} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\right| \leqq 2\sqrt{a},\quad \left|\int_a^{4a} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x\right| \leqq \frac{3}{\sqrt{a}};$$

pro velké hodnoty čísla a je tedy druhá nerovnost mnohem výhodnější než první. Zde vidíte na malém příkladě význam 2. věty o stř. hodnotě.

Poznámka. 2. věta o stř. hodnotě by se stala nesprávnou, kdybychom vynechali předpoklad, že funkce $g(x)$ je monotonní v intervalu $\langle a, b\rangle$. Příklad: položme $f(x) = g(x) = \sin x$, $a = 0$, $b = \pi$. Potom pro žádné číslo ξ neplatí rovnost

$$\int_0^\pi f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x = g(0)\int_0^\xi f(x)\,\mathrm{d}x + g(\pi)\int_\xi^\pi f(x)\,\mathrm{d}x;$$

neboť pravá strana je rovna nule (ježto $g(0) = g(\pi) = 0$), levá pak je rovna

$$\int_0^\pi \sin^2 x\,\mathrm{d}x = \tfrac{1}{2}\pi.$$

Učiňme ještě podobnou poznámku k 1. větě o střední hodnotě (viz cvič. 14 ke kap. II). Buďte m, M dvě čísla a $f(x)$, $g(x)$ dvě funkce, jež mají určitý integrál od a do b. Pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ buďiž $m \leqq f(x) \leqq M$.

Je-li $g(x) \geqq 0$ pro všechna x int. $\langle a, b\rangle$, je podle 1. věty o stř. hodnotě

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqq \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \leqq M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x; \tag{36}$$

je-li $g(x) \leqq 0$ pro všechna x int. $\langle a, b\rangle$, obdržíme ihned (použitím 1. věty o stř. hodnotě na funkce $f(x)$, $-g(x)$) nerovnosti

$$m\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \geqq \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \geqq M\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x. \tag{37}$$

Nabývá-li však $g(x)$ v int. $\langle a, b\rangle$ jak kladných, tak záporných hodnot, nemusí platiti ani nerovnosti (36) ani nerovnosti (37).

Příklad: položme $f(x) = g(x) = \sin x$, $a = -\frac{1}{2}\pi$, $b = \frac{1}{2}\pi$, $m = -1$, $M = 1$; potom je

$$m \int_a^b g(x)\,dx - M \int_a^b g(x)\,dx = 0 \quad (\text{ježto} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \sin x\,dx = 0),$$

ale

$$\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2 x\,dx = \tfrac{1}{2}\pi.$$

KAPITOLA IV.

Integrace některých speciálních typů funkcí, zvláště funkcí racionálních.

1. Rozklad mnohočlenu v součin kořenových činitelů. V tomto odstavci připomenu některé známé věci z algebry; nebudu je všechny dokazovati, nýbrž budu předpokládati, že je z algebry znáte. Při tom je nutno, abychom se neomezovali jen na čísla reálná, nýbrž abychom připustili do svých úvah i čísla komplexní, t. j. obecně čísla tvaru $a + bi$ (a, b reálná čísla),[1]) kde i je známá imaginární jednotka; písmena i budu v *této* kapitole užívati jen v tomto významu. Předpokládám, že čtenář zná první počátky teorie komplexních čísel z algebry; podotýkám však, že o komplexních číslech budeme mluviti pouze v prvních dvou odstavcích této kapitoly, obsahujících algebraické úvahy. Jakmile však se v 3. odst. obrátíme opět k integraci, budeme se opět omezovati jen na čísla reálná (to je také nutno, neboť věty z diferenciálního a integrálního počtu, kterých užíváme, odvodili jsme pouze pro reálné funkce reálných proměnných.[2])

Výraz tvaru

$$Q(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}x + a_n, \quad (1)$$

---

[1]) Reálná čísla jsou ovšem speciálním případem čísel komplexních: komplexní číslo $a + bi$ (a, b reálná) je reálné tehdy a jen tehdy, je-li $b = 0$.

[2]) Bylo by ovšem možno zavésti do našich úvah též komplexní funkce a komplexní proměnnou; některé výpočty by se tímto způsobem podstatně zjednodušily. Kdo se o této věci chce poučiti, nechť si přečte str. 16—57 z 2. vydání Petrova „Počtu integrálního“. Také mnohé trigonometrické integrály, na př. integrály z cvič. 19 ke kap. III, lze jednodušeji počítati, zavedeme-li funkci e^x též pro *komplexní* x. Viz Petrovu knihu, str. 133.