Úvod do integrálního počtu

Kapitola 2. Teorie určitého integrálu

In: Vojtěch Jarník (author): Úvod do integrálního počtu. (Czech). Praha: Jednota československých matematiků a fyziků, 1938. pp. 27–77.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402394

předpokládati, že je $a < t \leq b$. Na interval $\langle a, t\rangle$ můžeme užíti věty 18; existuje tedy číslo c tak, že je $a < c < t$ (tedy i $a < c < b$), $f(t) - f(a) = (t - a) f'(c)$. Je však $f'(c) = 0$, a tedy vskutku $f(t) = f(a)$.

Věta 20. *Má-li funkce $f(x)$ derivaci rovnou nule v každém bodě otevřeného*[32]) *intervalu (a, b), je funkce $f(x)$ konstantní v intervalu (a, b).*

Důkaz. Zvolme nějaké číslo d v intervalu (a, b); máme dokázati: je-li t libovolné číslo intervalu (a, b), je $f(t) = f(d)$. Budiž tedy t libovolné číslo intervalu (a, b). Ježto žádné číslo intervalu (a, b) není ani jeho nejmenším ani jeho největším číslem, lze nalézti v otevřeném intervalu (a, b) dvě čísla α, β tak, že $\alpha < \operatorname{Min}(t, d) \leq \operatorname{Max}(t, d) < \beta$. Funkce $f(x)$ má derivaci (rovnou nule) nejenom ve vnitřních, nýbrž i v koncových bodech intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$ a je tedy v tomto *uzavřeném* intervalu spojitá.[33]) Můžeme tedy na interval $\langle\alpha, \beta\rangle$ užíti věty 19 a dostáváme, že funkce $f(x)$ je konstantní v intervalu $\langle\alpha, \beta\rangle$; ježto však t, d jsou dvě hodnoty z tohoto intervalu, je vskutku $f(t) = f(d)$.

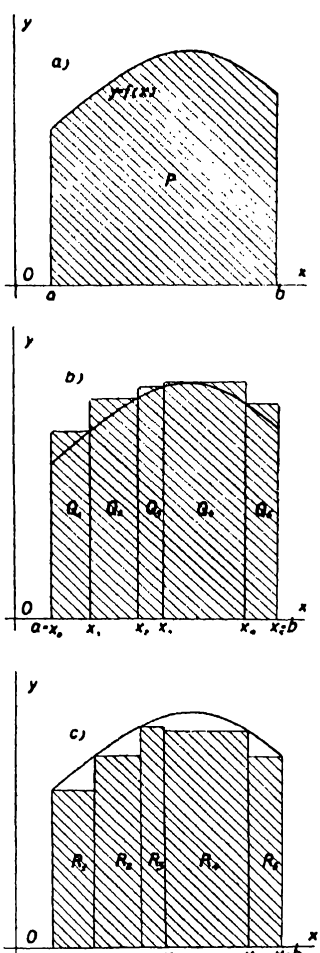
KAPITOLA II.

Teorie určitého integrálu.

1. Úvod. K pojmu určitého integrálu — jímž se budeme v následujících odstavcích zabývati — byli matematikové přivedeni — mimo jiné — také geometrickým problémem, totiž otázkou po plošné míře rovinných oborů. V elementární geometrii definuje se plošná velikost neboli obsah trojúhelníka (jako polovina součinu základny a výšky) a dále plošná velikost neboli obsah oborů, jež se dají rozložiti na konečný počet trojúhelníků, t. j. plošná velikost mnohoúhelníků. Vzniká otázka, jakým způsobem jest vhodno definovati obsah oborů obecnějších, jež nelze rozložiti na konečný počet trojúhelníků; vezměme jeden takový jednoduchý případ.

Budiž dána funkce $f(x)$, spojitá a kladná v intervalu $\langle a, b\rangle$. Sestrojme obor P (viz obr. 1a), ohraničený jednak osou x, jednak přímkami $x = a$ a $x = b$, jednak křivkou $y = f(x)$. Jak defino-

[32]) Konečného nebo nekonečného.
[33]) Podle poznámky 1 na str. 24.



Obr. 1.

vati obsah oboru P? Zde se přirozeně nabízí tato myšlenka: rozdělme interval $\langle a, b\rangle$ na několik dílků „dělicími body“ $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ (viz obr. 1b nebo 1c, kde jest $n = 5$; pro větší pohodlí píšeme $a = x_0$, $b = x_n$, takže jest $a = x_0 < x_1 < < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$); nad každým z těchto n intervalů $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ jakožto základnou sestrojíme dva obdélníky: obdélník Q_i, jehož výška rovná se *největší* hodnotě funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ (viz obr. 1b) a obdélník R_i, jehož výška se rovná *nejmenší* hodnotě funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ (viz obr. 1c).[1]) Označíme-li znakem M_i největší hodnotu a znakem m_i nejmenší hodnotu funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, jest obsah obdélníka Q_i roven číslu $M_i\,(x_i - x_{i-1})$ a obsah obdélníka R_i roven číslu $m_i\,(x_i - x_{i-1})$. Obdélníky $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$ tvoří jistý mnohoúhelník Q, „opsaný“ oboru P (na obr. 1b je šrafován); jeho obsah je roven číslu

$$\sum_{i=1}^{n} M_i\,(x_i - x_{i-1}). \qquad (1)$$

Obdobně obdélníky $R_1, R_2, \ldots, R_n$ tvoří jistý mnohoúhelník R, „vepsaný“ oboru P (na obr. 1c je šrafován); jeho obsah je roven číslu

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i - x_{i-1}). \qquad (2)$$

---

[1]) Podle věty 15 jest mezi hodnotami, kterých funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ nabývá, skutečně jedna největší a jedna nejmenší.

Když nyní počet dílků (na něž jsme rozdělili interval $\langle a, b\rangle$) necháme vzrůstati nade všechny meze, při čemž délky jednotlivých těchto dílků konvergují k nule, zdá se býti pravděpodobno, že obsah „opsaného" mnohoúhelníka Q (t. j. číslo (1)) i obsah „vepsaného" mnohoúhelníka R (t. j. číslo (2)) budou konvergovati k téže limitě a jest docela přirozeno, nazvati tuto společnou limitu „obsahem oboru P".

Ovšem dosud nevíme, existuje-li vskutku tato společná limita — to budeme musit teprve dokázati. Půjde nám tedy v dalším především o to, studovati součty (1) a (2) a hlavně o to, sledovati, co se s těmito součty děje, když délky jednotlivých dílků (t. j. čísla $x_i - x_{i-1}$) konvergují k nule. To je již otázka, kterou nikterak nemusíme vázati na geometrický problém, z něhož jsme vyšli. Bude pro nás důležito, abychom tuto otázku řešili co nejobecněji a zbavili se všech zbytečných omezení, ke kterým nás vedla původní geometrická formulace problému. Především je pro studium součtů (1) a (2) zbytečný předpoklad, že funkce $f(x)$ je kladná; součty (1) a (2) můžeme sestrojiti, i když funkce $f(x)$ není stále kladná. Za druhé číslo M_i, jakožto největší hodnota funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, je zároveň také horní hranicí funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$[2]) a obdobně číslo m_i je dolní hranicí funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Tato horní a dolní hranice existuje pro každou funkci $f(x)$, ohraničenou v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, i když tato funkce není spojitá[3]); tedy i předpoklad spojitosti funkce $f(x)$ je zbytečný a stačí, nahradíme-li jej předpokladem, že funkce $f(x)$ je ohraničená v každém z intervalů $\langle x_0, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \ldots, \langle x_{n-1}, x_n\rangle$, čili že je ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$. Proto o funkci $f(x)$ nebudeme v dalším — aspoň prozatím — předpokládati nic jiného, nežli že jest ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$ a budeme svůj problém formulovati v plné obecnosti takto:

Budiž $f(x)$ funkce ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$. Rozdělme interval $\langle a, b\rangle$ na několik dílů dělicími body

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$$

---

[2]) Viz poznámku 1 k větě 4.

[3]) Tato horní hranice u *nespojité* funkce nemusí ovšem již býti největší hodnotou funkce. Příklad: definujme $f(x)$ v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ takto: pro $0 \leq x < 1$ budiž $f(x) = x$, pro $x = 1$ budiž $f(1) = 0$. Horní hranice funkce $f(x)$ v intervalu $\langle 0, 1\rangle$ je zřejmě číslo 1, ač funkce této hodnoty vůbec nenabývá.

a sestrojme součty

$$\sum_{i=1}^{n} M_i\,(x_i - x_{i-1}), \qquad \sum_{i=1}^{n} m_i\,(x_i - x_{i-1}),$$

kde M_i značí horní hranici a m_i dolní hranici funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$.

Našim úkolem jest studovati tyto součty a hlavně vyšetřovati, co se s těmito součty děje, když počet dílků, na něž jsme rozdělili interval $\langle a, b\rangle$, vzrůstá nade všechny meze, při čemž současně čísla $x_i - x_{i-1}$ konvergují k nule.

Tím jest dán program; provedení tohoto programu jsou věnovány další odstavce této kapitoly.[4])

2. Součtová definice určitého integrálu. Budiž dán interval $\langle a, b\rangle$ a budiž dána funkce $f(x)$, ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$.

Je-li dáno celé kladné číslo n a je-li dáno $n + 1$ bodů[5]) $x_0, x_1, x_2, \ldots, x_n$, jež splňují vztahy

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b, \tag{3}$$

říkáme, že tyto body definují určité *rozdělení* intervalu $\langle a, b\rangle$. Body $x_0, x_1, \ldots, x_n$ budeme nazývati *dělicími body* tohoto rozdělení; tyto body dělí interval $\langle a, b\rangle$ na n částečných intervalů $\langle x_0, x_1\rangle, \langle x_1, x_2\rangle, \ldots, \langle x_{n-1}, x_n\rangle$.[6])

Toto rozdělení, definované dělicími body $x_0, x_1, \ldots, x_n$, označme písmenem D.[7]) Označme znakem Δx_i délku i-tého částečného intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, t. j. položme $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$. Označme dále znakem M_i horní hranici a znakem m_i dolní hranici funkce

[4]) Zdůrazňuji, že tento odstavec měl pouze informativní charakter; chtěl jsem zde čtenáři pouze ukázati, že otázka, jíž bude věnována tato kapitola, není nijak uměle sestrojena, nýbrž že jsme k ní vedeni zcela přirozeným způsobem. Pro logickou výstavbu teorie, jež bude podána v dalších odstavcích, je ovšem tento úvodní odstavec vlastně zbytečný. Proto přirozeně tento odstavec neobsahuje žádných positivních výsledků a také při stylisaci tohoto odstavce jsem nekladl velkou váhu na obvyklé požadavky matematické přesnosti.

[5]) Míním body na ose číselné, čili reálná čísla (Kössler 16); této terminologie budeme často užívati.

[6]) Nejjednodušší „rozdělení" intervalu $\langle a, b\rangle$ dostaneme, vezmeme-li $n = 1$; potom jest $x_0 = a$, $x_1 = b$; při tomto „rozdělení" máme ovšem jediný částečný interval $\langle x_0, x_1\rangle = \langle a, b\rangle$.

[7]) Takových rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ je ovšem nekonečně mnoho: především můžeme zvoliti libovolně celé kladné číslo n a za druhé, když číslo n jest již zvoleno, můžeme ještě zvoliti dělicí body $x_0, x_1, \ldots, x_n$ libovolně, až na to, že musí vyhovovati podmínce (3). Různá rozdělení budeme rozlišovati čárkami, indexy a pod.

$f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$.[8]) Danému rozdělení D přiřadíme nyní dvě čísla: číslo

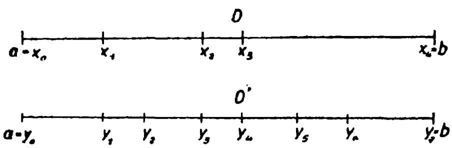
$$S(D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i,$$

jež budeme nazývati *horním součtem, příslušným k rozdělení D*, a číslo

$$s(D) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i,$$

jež budeme nazývati *dolním součtem, příslušným k rozdělení D*. Tyto horní a dolní součty budeme nyní podrobně vyšetřovati.[9])

Pro každé i platí ovšem nerovnost $m_i \leqq M_i$, tedy $m_i \Delta x_i \leqq M_i \Delta x_i$ a sečteme-li od $i = 1$ do $i = n$, dostaneme nerovnost $s(D) \leqq S(D)$, čili slovy:



Obr. 2.

Tvrzení A. *Dolní součet, příslušný k rozdělení D, je nejvýše roven hornímu součtu, příslušnému k témuž rozdělení.*

V dalším budeme však nuceni srovnávati též součty, příslušné ke dvěma *různým* rozdělením intervalu $\langle a, b \rangle$.

Buďtež D, D' dvě rozdělení intervalu $\langle a, b \rangle$; budeme říkati, že rozdělení D' je *zjemněním* rozdělení D, jestliže každý dělicí bod rozdělení D je také dělicím bodem rozdělení D'. (Viz obr. 2, kde rozdělení D', dané dělicími body $y_0, y_1, \ldots, y_7$ je zjemněním rozdělení D, daného dělicími body $x_0, x_1, \ldots, x_4$; zde jest $x_0 = y_0$, $x_1 = y_1$, $x_2 = y_3$, $x_3 = y_4$, $x_4 = y_7$.) Budiž nyní rozdělení D', dané dělicími body $a = y_0 < y_1 < \ldots < y_{m-1} < y_m = b$, vskutku zjemněním rozdělení D, daného dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Označme znakem M_i horní hranici funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ a znakem M'_k horní hranici funkce v intervalu $\langle y_{k-1}, y_k \rangle$; položme $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $\Delta y_k = y_k - y_{k-1}$; potom jest

---

[8]) Funkce $f(x)$ jest v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ ohraničena podle věty 8.

[9]) Je viděti, že postupujeme přesně podle programu, stanoveného v odst. 1.

$$S(D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \; S(D') = \sum_{k=1}^{m} M'_k \Delta y_k.$$

Srovnejme tato dvě čísla. Vezměme určitý interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$; body x_{i-1}, x_i jsou ovšem také dělicími body rozdělení D'; budiž třeba $x_{i-1} = y_r$, $x_i = y_s$ (jest ovšem $r < s$). Částečný interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ přispívá k součtu $S(D)$ příspěvkem[10]) $M_i \Delta x_i$, kdežto k součtu $S(D')$ přispívá příspěvkem $\sum_{k=r+1}^{s} M'_k \Delta y_k$. Je-li $r + 1 \leqq k \leqq s$, jest interval $\langle y_{k-1}, y_k \rangle$ částečným intervalem intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ a tedy podle věty 8 jest $M'_k \leqq M_i$. Tedy jest (viz poznámku [10])

$$\sum_{k=r+1}^{s} M'_k \Delta y_k \leqq M_i \sum_{k=r+1}^{s} \Delta y_k = M_i (y_s - y_r) =$$
$$= M_i (x_i - x_{i-1}) = M_i \Delta x_i.$$

Je tedy příspěvek, kterým interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ přispívá k součtu $S(D')$, nejvýše roven příspěvku, kterým týž interval přispívá k součtu $S(D)$. Ježto to platí pro každý částečný interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$, jest $S(D') \leqq S(D)$; obdobně se dokáže nerovnost $s(D') \geqq s(D)$. Dokázali jsme tedy toto

Tvrzení B. *Je-li rozdělení D' zjemněním rozdělení D, jest* $S(D') \leqq S(D)$, $s(D') \geqq s(D)$.

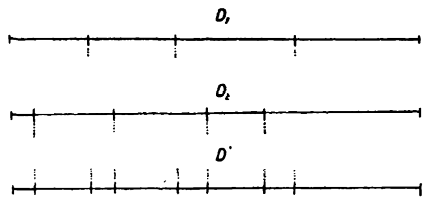
Z tvrzení B učiníme ihned jeden důsledek: Budiž D_0 ono rozdělení intervalu $\langle a, b \rangle$, jež je definováno dělicími body $x_0 = a$, $x_1 = b$. Zřejmě jest $S(D_0) = M(x_1 - x_0) = M(b - a)$, $s(D_0) =$

---

[10]) Co tím rozumíme, je snad jasno. Budeme říkati, že interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ přispívá k součtu $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ příspěvkem $M_i \Delta x_i$; obecněji, je-li $p < q$, budeme říkati, že interval $\langle x_p, x_q \rangle$ přispívá k součtu $\sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$ příspěvkem $\sum_{i=p+1}^{q} M_i \Delta x_i = M_{p+1}(x_{p+1} - x_p) + M_{p+2}(x_{p+2} - x_{p+1}) + \ldots + M_q(x_q - x_{q-1})$. Učiňme ještě jednu poznámku, které často použijeme. Je-li $p < q$, je $\sum_{i=p+1}^{q} \Delta x_i = (x_{p+1} - x_p) + (x_{p+2} - x_{p+1}) + \ldots + (x_q - x_{q-1}) = x_q - x_p$; specielně tedy $\sum_{i=1}^{n} \Delta x_i = x_n - x_0 = b - a$. Geometrický význam těchto rovnic je jasný: délka intervalu $\langle x_p, x_q \rangle$ rovná se součtu délek intervalů $\langle x_p, x_{p+1} \rangle, \langle x_{p+1}, x_{p+2} \rangle, \ldots, \langle x_{q-1}, x_q \rangle$.

$= m(b-a)$, kde M značí horní hranici, m dolní hranici funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$. Ježto každé rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ je zřejmě zjemněním rozdělení D_0 (ježto body a, b jsou dělicími body každého rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$), jest podle tvrzení B součet $S(D_0)$ největší ze všech horních součtů, příslušných všem možným rozdělením intervalu $\langle a, b\rangle$[11]; obdobně součet $s(D_0)$ jest nejmenší ze všech dolních součtů. Dostáváme tedy tuto větu:

Věta 21. *Je-li M horní hranice a m dolní hranice funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$, jest největší hodnota horního součtu rovna číslu $M(b-a)$, nejmenší hodnota dolního součtu rovna číslu $m(b-a)$. Je-li tedy D libovolné rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, platí nerovnosti $m(b-a) \leqq s(D) \leqq S(D) \leqq M(b-a)$.*[12]



Obr. 3.

Buďtež nyní D_1, D_2 dvě zcela libovolná rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Označme znakem D' rozdělení, jež je zjemněním rozdělení D_1 a rovněž zjemněním rozdělení D_2. (Takové zjemnění D' se dá snadno sestrojiti na př. tím, že za dělicí body rozdělení D' vezmeme jednak všechny dělicí body rozdělení D_1, jednak všechny dělicí body rozdělení D_2; tak je to provedeno na obr. 3.) Podle tvrzení B je $S(D_1) \geqq S(D')$; podle tvrzení A je $S(D') \geqq s(D')$; podle tvrzení B je $s(D') \geqq s(D_2)$; odtud plyne $S(D_1) \geqq s(D_2)$. Platí tedy

Tvrzení C. *Jsou-li D_1, D_2 dvě libovolná rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$* (totožná nebo navzájem různá), *jest* $S(D_1) \geqq s(D_2)$. (Čili: každý dolní součet je nejvýše roven kterémukoliv hornímu součtu.)

Každému rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ přísluší určité číslo $S(D)$; všechna čísla $S(D)$, příslušná všem možným rozdělením intervalu $\langle a, b\rangle$, tvoří jistou množinu číselnou; označme ji zna-

[11]) To znamená, že žádný z horních součtů není větší než číslo $S(D_0)$.

[12]) Nerovnost $s(D) \leqq S(D)$ plyne z tvrzení A.

kem $\mathfrak{M}$. Rovněž tak každému rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ přísluší určité číslo $s(D)$; všechna čísla $s(D)$, příslušná všem možným rozdělením intervalu $\langle a, b\rangle$, tvoří jistou množinu číselnou; označme ji znakem $\mathfrak{m}$.

Čísla množiny $\mathfrak{M}$ (jinými slovy: horní součty $S(D)$) jsou podle věty 21 vesměs nejvýše rovna číslu $M(b-a)$ a nejméně rovna číslu $m(b-a)$; tedy množina $\mathfrak{M}$ je ohraničena, má tedy podle věty 1 a 2 horní a dolní hranici. Horní hranici snadno stanovíme: největší horní součet, čili největší číslo množiny $\mathfrak{M}$, jest podle věty 21 číslo $M(b-a)$; podle poznámky 1 k větě 1 jest toto číslo horní hranicí množiny $\mathfrak{M}$. Nás bude však zajímati hlavně *dolní* hranice množiny $\mathfrak{M}$. *Tuto dolní hranici množiny* $\mathfrak{M}$ (čili dolní hranici horních součtů) *označíme znakem* $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ a budeme ji nazývati *horním integrálem funkce* $f(x)$ *od* a *do* b.

Rovněž čísla množiny $\mathfrak{m}$ (jinými slovy: dolní součty $s(D)$) jsou podle věty 21 vesměs nejvýše rovna číslu $M(b-a)$ a nejméně rovna číslu $m(b-a)$; tedy množina $\mathfrak{m}$ je ohraničena. Nejmenší číslo (a tedy dolní hranice) množiny $\mathfrak{m}$ je podle věty 21 číslo $m(b-a)$. Nás bude však zajímati hlavně *horní* hranice množiny $\mathfrak{m}$. *Tuto horní hranici množiny* $\mathfrak{m}$ (čili horní hranici dolních součtů) *označíme znakem* $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ a budeme ji nazývati *dolním integrálem funkce* $f(x)$ *od* a *do* b.

Funkci $f(x)$ nazýváme v obou případech (při horním i dolním integrálu) funkcí integrovanou nebo integrandem; čísla a, b nazýváme *mezemi* horního (dolního) integrálu, a sice číslo a nazýváme *dolní mezí*, číslo b *horní mezí*. Proměnnou x, která vystupuje ve funkci $f(x)$ a v symbolu $\mathrm{d}x$, nazýváme *integrační proměnnou.*[13])

[13]) Integrační proměnná nemusí vždy býti označena písmenem x, může býti označena třeba písmenem t, u, y a pod.; horní (dolní) integrál píšeme pak $\overline{\int_a^b} f(t)\,\mathrm{d}t$ atd. Hodnota horního (a rovněž dolního) integrálu nezávisí na označení integrační proměnné; to znamená: je-li funkce $f(x)$ ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$, jest

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(t)\,\mathrm{d}t = \overline{\int_a^b} f(u)\,\mathrm{d}u = \ldots \qquad \text{(neboť}$$

Věta 22. *Budiž $a < b$; budiž $f(x)$ funkce ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$. Označíme-li písmenem M horní hranici a písmenem m dolní hranici funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$, jest*

$$m(b-a) \leqq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq M(b-a).$$

Důkaz. Položme pro zkrácení

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = s, \quad \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = S.$$

Číslo S je *dolní* hranicí množiny $\mathfrak{M}$, kdežto číslo $M(b-a)$, jak jsme zjistili před okamžikem, jest *horní* hranicí množiny $\mathfrak{M}$; tedy jest $S \leqq M(b-a)$. Obdobně se dokáže nerovnost $m(b-a) \leqq s$. Zbývá tedy ještě dokázati nerovnost $s \leqq S$. Důkaz provedeme nepřímo; předpokládejme, že je $s > S$, a z toho odvodíme spor. Položme $\varepsilon = \frac{1}{2}(s - S)$; tedy $\varepsilon > 0$. Ježto číslo S je dolní hranicí horních součtů a ježto $S + \varepsilon > S$, existuje (viz větu 2) aspoň jeden horní součet $S(D_1)$ — příslušný k jistému rozdělení D_1 — takový, že jest $S(D_1) < S + \varepsilon$. Ježto číslo s je horní hranicí dolních součtů a ježto $s - \varepsilon < s$, existuje (viz větu 1) aspoň jeden dolní součet $s(D_2)$ — příslušný k jistému rozdělení D_2 — takový, že jest $s(D_2) > s - \varepsilon$. Jest však $s - S = 2\varepsilon$ a tedy $s - \varepsilon = S + \varepsilon$, takže jest $S(D_1) < S + \varepsilon = s - \varepsilon < s(D_2)$; to je však ve sporu s tvrzením C, podle kterého jest $S(D_1) \geqq s(D_2)$. Tím jest věta 22 dokázána.

Uveďme ještě dva jednoduché důsledky věty 22:

Věta 23. *Budiž $a < b$; nerovnosti $A \leqq f(x) \leqq B$ buďtež splněny pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom jest*

$$A(b-a) \leqq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq B(b-a).$$

---

funkce f nabývá v kterémkoliv bodě intervalu $\langle a, b\rangle$ stejné hodnoty, ať v ní nezávisle proměnnou značím písmenem x či t). Tedy na př.

$$\overline{\int_2^5} (x^2 - x + 2)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_2^5} (t^2 - t + 2)\,\mathrm{d}t, \quad \underline{\int_0^\pi} \sin u\,\mathrm{d}u = \underline{\int_0^\pi} \sin y\,\mathrm{d}y \text{ atd.}$$

Důkaz. Budiž M horní a m dolní hranice funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$; podle poznámky 2 k větě 4 a 5 jest $A \leqq m$, $B \geqq M$ a tedy podle věty 22

$$A(b-a) \leqq m(b-a) \leqq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq$$

$$\leqq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq M(b-a) \leqq B(b-a).$$

Věta 24. *Budiž $a < b$; nerovnost $|f(x)| \leqq K$ budiž splněna pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$; potom jest*

$$\left|\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq K(b-a), \quad \left|\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq K(b-a).$$

Důkaz. Pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ jest $-K \leqq f(x) \leqq K$; podle věty 23 je tedy

$$-K(b-a) \leqq \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq K(b-a) \quad \text{čili} \quad \left|\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq K(b-a);$$

obdobně pro horní integrál.

Ve větě 22 jsme zjistili, že vždy platí vztah $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$. Platí-li v tomto vztahu znamení rovnosti, nazýváme společnou hodnotu horního a dolního integrálu krátce *integrálem* (obšírněji *určitým integrálem*[14]) *funkce $f(x)$ od a do b a označujeme ji znakem $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Říkáme v tomto případě* (t. j. tehdy, když horní integrál rovná se dolnímu), *že $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje, nebo že funkce $f(x)$ má určitý integrál od a do b nebo také, že funkce $f(x)$ jest integrace schopna v intervalu $\langle a, b\rangle$.*[15]) Tím jsme podali t. zv.

[14]) Název „určitý integrál“ volíme proto, abychom tento integrál zřetelněji odlišili od t. zv. „integrálu neurčitého“, kterým se budeme zabývati v kapitole III.

[15]) Jinak se u určitého integrálu užívá téhož názvosloví jako u horního a dolního integrálu: a je dolní mez, b je horní mez atd.

Cauchy-Riemannovu součtovou definici určitého integrálu.[16])

Podle této definice tedy integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (kdež $a < b$) existuje tehdy a jen tehdy, je-li $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$; je-li tato rovnost splněna, jest integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ definován vztahem

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.^{17})$$

Příklady. 1. Budiž $a < b$; budiž funkce $f(x)$ konstantní v intervalu $\langle a, b\rangle$, třeba $f(x) = c$. Potom dolní hranice i horní hranice funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ je rovna číslu c; podle věty 22 jest tedy

$$c(b-a) \leqq \underline{\int_a^b} c\,\mathrm{d}x \leqq \overline{\int_a^b} c\,\mathrm{d}x \leqq c(b-a).$$

Ježto oba krajní členy jsou si rovny, musí v těchto nerovnostech vesměs platiti znamení rovnosti; tedy konstanta c má určitý integrál od a do b a jest

$$\int_a^b c\,\mathrm{d}x = c(b-a).^{18})$$

[16]) Vedle této definice Cauchy-Riemannovy jsou známy ještě jiné, obecnější definice určitého integrálu; nejdůležitější z nich je definice Lebesgueova. V této knížce omezíme se však na definici Cauchy-Riemannovu. O Lebesgueově teorii může se čtenář poučiti z citované Čechovy knihy (Bodové množiny I); její 4. kapitola je věnována obšírnému výkladu o této teorii.

[17]) $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ jsme tedy dosud definovali jen pro $a < b$. Později rozšíříme tuto definici i na případy $a = b$, $a > b$.

[18]) Je-li $c = 1$, budeme místo $\int_a^b 1\,\mathrm{d}x$ psáti kratčeji $\int_a^b \mathrm{d}x$, jak je zvykem.

2. Definujme funkci $f(x)$ takto: pro racionální x budiž $f(x) = 0$, pro iracionální x budiž $f(x) = 1$. Budiž $\langle a, b \rangle$ libovolný interval. Budiž D libovolné rozdělení intervalu $\langle a, b \rangle$, definované dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Budiž M_i horní hranice a m_i dolní hranice funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$. Zřejmě jest $M_i = 1$, $m_i = 0$ a tedy $S(D) = \sum_{i=1}^{n} 1 \,.\, \Delta x_i = b - a$, $s(D) = \sum_{i=1}^{n} 0 \,.\, \Delta x_i = 0$. Ježto všechny horní součty jsou rovny číslu $b - a$, jest i jejich dolní hranice rovna číslu $b - a$; jest tedy $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = b - a$ a obdobně $\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Tedy $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ neexistuje.

Poznamenejme ještě: Má-li funkce $f(x)$ určitý integrál od a do b, můžeme ve větách 22, 23, 24 nahraditi horní a dolní integrál prostě integrálem. Tím dostáváme tuto větu:

Věta 25. *Budiž $a < b$; funkce $f(x)$ nechť má určitý integrál od a do b. Potom platí:*

1. Je-li M horní hranice a m dolní hranice funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b \rangle$, jest

$$m(b - a) \leqq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq M(b - a).$$

2. Jsou-li nerovnosti $A \leqq f(x) \leqq B$ splněny pro všechna x intervalu $\langle a, b \rangle$, jest

$$A(b - a) \leqq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq B(b - a).$$

3. Platí-li nerovnost $|f(x)| \leqq K$ pro všechna x intervalu $\langle a, b \rangle$, jest

$$\left| \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \right| \leqq K(b - a).$$

3. Horní (dolní) integrál jako limita horních (dolních) součtů. V předešlém odstavci definovali jsme horní integrál funkce $f(x)$ (ohraničené v intervalu $\langle a, b \rangle$) od a do b jako dolní hranici horních součtů; ukážeme nyní, že tento horní integrál jest nejenom dolní hranicí horních součtů, nýbrž také — zhruba řečeno — limitou, ke které konvergují horní součty $S(D)$, jestliže rozdělení D se mění tak, že čísla Δx_i konvergují k nule.[19]) Tento výrok nemá ovšem dosud přesného smyslu, neboť není jasno, jak jest zde rozuměti slovům „limita" a „konvergovati k nule" (pojem limity posloupnosti ani pojem limity funkce jedné nebo několika proměnných se nám — aspoň prozatím — nehodí). Musíme se tedy vysloviti přesněji, a to učiníme v *tomto odstavci.*

Budiž D libovolné rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, definované dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$. Znakem $\varrho(D)$ označíme největší z čísel $\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$ ($\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$); *toto označení podržíme v celé této kapitole.* Naším cílem bude především důkaz této věty:

Věta 26. *Budiž $a < b$; budiž $f(x)$ funkce ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že nerovnosti*

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq S(D) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon \tag{4}$$

jsou splněny pro každé rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$, jež splňuje podmínku $\varrho(D) < \delta$.

Důkaz. Budiž $f(x)$ funkce ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$ a budiž dáno libovolné kladné číslo ε. Naším cílem jest dokázati existenci takového kladného čísla δ, že nerovnosti (4) jsou splněny pro všechna rozdělení D, vyhovující podmínce $\varrho(D) < \delta$. Ježto $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$ je dolní hranicí horních součtů a ježto $\varepsilon/2$ je kladné, existuje (podle věty 2) aspoň jedno rozdělení D_1 tak, že

$$S(D_1) < \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5}$$

Toto rozdělení D_1 až do konce důkazu podržíme.

Rozdělení D_1 budiž definováno dělicími body $a = y_0 < < y_1 < \ldots < y_{p-1} < y_p = b$. Ježto funkce $f(x)$ jest ohraničena v intervalu $\langle a, b\rangle$, existuje (podle věty 6) kladné číslo K tak, že

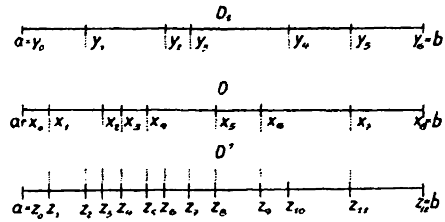
[19]) To je ve shodě s naším programem, vytčeným v odst. 1; jedním z našich cílů jest právě sledovati, co se děje s horními a dolními součty, když čísla Δx_i konvergují k nule.

pro všechna x intervalu $\langle a, b \rangle$ jest $| f(x) | \leq K$. Položme nyní

$$\delta = \frac{\varepsilon}{4Kp}; \tag{6}$$

tedy je $\delta > 0$. Budiž nyní D libovolné rozdělení intervalu $\langle a, b \rangle$, jež vyhovuje podmínce $\varrho(D) < \delta$; dokážeme, že potom platí nerovnosti (4); tím bude věta 26 dokázána.

Buďtež $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$ dělicí body rozdělení D. Sestrojme rozdělení D' tak, že za dělicí body rozdělení D' vezmeme jednak všechny dělicí body rozdělení D_1, jednak všechny dělicí body rozdělení D (viz obr. 4, kde jsou zakreslena rozdělení D_1, D, D'). Dělicí body rozdělení D' označíme $z_0, z_1, z_2, \ldots, z_m$ $(a = z_0 < z_1 < \ldots < z_{m-1} < z_m = b)$.



Obr. 4.

Vyšetřujme součty

$$S(D) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i, \quad S(D') = \sum_{k=1}^{m} M'_k \Delta z_k.$$

$(\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$; $\Delta z_k = z_k - z_{k-1}$; M_i značí horní hranici funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$; M'_k značí horní hranici funkce $f(x)$ v intervalu $\langle z_{k-1}, z_k \rangle$.) Částečné intervaly $\langle x_0, x_1 \rangle$, $\langle x_1, x_2 \rangle, \ldots$ $\ldots, \langle x_{n-1}, x_n \rangle$ rozdělení D rozdělme na dvě třídy: interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ budeme nazývati intervalem prvního druhu, není-li žádný z bodů $y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}$ *vnitřním* bodem intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$; interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ budeme nazývati intervalem druhého druhu, je-li aspoň jeden z bodů $y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}$ *vnitřním* bodem intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$. [Na obr. 4 jsou $\langle x_0, x_1 \rangle$, $\langle x_2, x_3 \rangle$, $\langle x_3, x_4 \rangle$, $\langle x_5, x_6 \rangle$, $\langle x_7, x_8 \rangle$ intervaly prvního druhu (jest $y_5 = x_7$, takže bod y_5 není vnitřním bodem intervalu $\langle x_7, x_8 \rangle$); intervaly $\langle x_1, x_2 \rangle$ $\langle x_4, x_5 \rangle$, $\langle x_6, x_7 \rangle$ jsou intervaly druhého druhu.] Ježto každý interval druhého druhu obsahuje aspoň jeden z bodů $y_1, y_2, \ldots, y_{p-1}$

jako vnitřní bod, je počet intervalů druhého druhu nejvýše roven číslu $p - 1$.

Vyšetřujme nyní příspěvky, jimiž jednotlivé intervaly $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ přispívají jednak k součtu $S(D)$, jednak k součtu $S(D')$. Je-li $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ interval *prvního* druhu, jest interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ též částečným intervalem rozdělení D', třeba $x_{i-1} = z_{k-1}$, $x_i = z_k$ a tedy přispívá zřejmě interval $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ týmž příspěvkem k součtu $S(D)$ jako k součtu $S(D')$. Je-li však $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ interval *druhého* druhu, jest tento interval v rozdělení D' rozdělen na dva nebo více intervalů, takže jest $x_{i-1} = z_r$, $x_i = z_s$, kde $s - r > 1$. Příspěvek intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ k součtu $S(D)$ jest tedy $M_i \Delta x_i$, kdežto příspěvek téhož intervalu k součtu $S(D')$ jest $\sum\limits_{k=r+1}^{s} M'_k \Delta z_k$. Pro všechna x intervalu $\langle a, b \rangle$ platí nerovnost $|f(x)| \leqq K$; podle poznámky k větě 6 je tedy $|M_i| \leqq K$, $|M'_k| \leqq K$; dále jest $\Delta x_i \leqq \varrho(D) < \delta$; tedy jest

$$| M_i \Delta x_i | < K\delta, \tag{7}$$

$$\left| \sum_{k=r+1}^{s} M'_k \Delta z_k \right| \leqq K \sum_{k=r+1}^{s} \Delta z_k = K(z_s - z_r) = \\ = K(x_i - x_{i-1}) = K \Delta x_i < K\delta. \tag{8}$$

Vyšetřujme nyní rozdíl $S(D) - S(D')$; příspěvky, kterými přispívají intervaly *prvního* druhu k součtu $S(D)$ a k součtu $S(D')$, jsou si rovny a v rozdílu $S(D) - S(D')$ se tedy zruší. Každý interval *druhého* druhu přispívá k součtu $S(D)$ i k součtu $S(D')$ příspěvkem, jehož prostá hodnota podle (7), (8) jest menší než $K\delta$. Tedy takový interval druhého druhu přispívá k rozdílu $S(D) - S(D')$ příspěvkem, jehož prostá hodnota je menší než $2K\delta$. Ježto pak počet intervalů druhého druhu není větší než $p - 1$, jest podle (6)

$$| S(D) - S(D') | \leqq (p-1) \,.\, 2K\delta < 2pK\delta = \frac{\varepsilon}{2};$$

tedy jest

$$S(D) < S(D') + \frac{\varepsilon}{2}. \tag{9}$$

Dále jest rozdělení D' zjemněním rozdělení D_1 a tedy podle tvrzení B z odst. 2

$$S(D') \leqq S(D_1). \tag{10}$$

Ze vztahů (9), (10), (5) plyne

$$S(D) < S(D') + \frac{\varepsilon}{2} \leqq S(D_1) + \frac{\varepsilon}{2} < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon,$$

čímž druhá nerovnost (4) je dokázána. První nerovnost (4)

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq S(D)$$

je však samozřejmá, ježto horní integrál je dolní hranicí horních součtů. Tím je věta 26 dokázána.

Z této věty učiníme ihned jeden důsledek:

Věta 27. *Budiž $a < b$; budiž $f(x)$ funkce ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$. Budiž $D_1, D_2, D_3, \ldots, D_m, \ldots$ posloupnost rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ taková, že $\lim\limits_{m\to\infty} \varrho(D_m) = 0$. Potom posloupnost čísel $S(D_1), S(D_2), \ldots, S(D_m), \ldots$ má limitu, rovnou hornímu integrálu $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$ (čili $\lim\limits_{m\to\infty} S(D_m) = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx$).*

Důkaz. Budiž dáno libovolné kladné číslo ε. Máme dokázati, že existuje číslo m_0 tak, že nerovnost

$$|S(D_m) - \overline{\int_a^b} f(x)\,dx\,| < \varepsilon \tag{11}$$

platí pro všechna m, jež jsou větší než m_0. Podle věty 26 existuje kladné číslo δ takové, že nerovnosti

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq S(D) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon$$

platí pro všechna rozdělení D, jež hoví vztahu $\varrho(D) < \delta$. Ježto $\lim\limits_{m\to\infty} \varrho(D_m) = 0$, existuje číslo m_0 takové, že nerovnost $\varrho(D_m) < \delta$ platí pro všechna m, jež jsou větší než m_0. Je-li tedy $m > m_0$, platí nerovnosti

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx \leqq S(D_m) < \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \varepsilon$$

a tedy tím spíše nerovnost (11), jak bylo dokázati.

Význam věty 27 spočívá v této okolnosti: chceme-li nalézti $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$, nemusíme vyšetřovati *všechna* rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ a sestrojiti dolní hranici příslušných horních součtů $S(D)$, nýbrž stačí, sestrojíme-li nějakou *posloupnost* rozdělení $D_1, D_2, D_3, \ldots$ takovou, že $\lim\limits_{m\to\infty} \varrho(D_m) = 0$ a najdeme-li limitu posloupnosti $S(D_1), S(D_2), S(D_3), \ldots$ Objasníme za chvíli tu výhodu na příkladě; napřed však poznamenávám ještě, že obdobné věty platí také pro dolní integrál:

Věta 28. *Budiž $a < b$; budiž $f(x)$ funkce ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že nerovnosti*

$$\underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x \geqq s(D) > \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon$$

jsou splněny pro každé rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$, jež splňuje podmínku $\varrho(D) < \delta$.

Věta 29. *Budiž $a < b$; budiž $f(x)$ funkce ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$. Budiž $D_1, D_2, D_3, \ldots$ posloupnost rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ taková, že $\lim\limits_{m\to\infty} \varrho(D_m) = 0$. Potom jest*

$$\lim_{m\to\infty} s(D_m) = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkazy vět 28, 29 neprovádím, ježto jsou zcela obdobné důkazům vět 26 a 27.

Příklad. Budiž $f(x) = x$ a počítejme $\overline{\int_2^3} x\,\mathrm{d}x$, $\underline{\int_2^3} x\,\mathrm{d}x$. Sestrojme rozdělení $D_1, D_2, \ldots, D_m, \ldots$ tak, že D_m jest ono rozdělení intervalu $\langle 2, 3\rangle$, jež dělí tento interval na m stejných dílů; dělicí body rozdělení D_m jsou tedy $x_0 = 2$, $x_1 = 2 + 1/m$, $x_2 = 2 + 2/m, \ldots, x_i = 2 + i/m, \ldots, x_m = 2 + m/m = 3$. Jest $\varrho(D_m) = 1/m$, tedy $\lim\limits_{m\to\infty} \varrho(D_m) = 0$; tedy podle vět 27, 29 jest

$$\lim_{m\to\infty} s(D_m) = \underline{\int_2^3} x\,dx, \quad \lim_{m\to\infty} S(D_m) = \overline{\int_2^3} x\,dx.$$

Počítejme $S(D_m)$, $s(D_m)$. Největší hodnota (a tedy i horní hranice) funkce $f(x) = x$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle = \left\langle 2 + \frac{i-1}{m}, 2 + \frac{i}{m}\right\rangle$ jest $2 + i/m$; obdobně nejmenší hodnota (a tedy i dolní hranice) funkce $f(x)$ v tomto intervalu jest $2 + (i-1)/m$. Tedy jest

$$S(D_m) = \sum_{i=1}^{m}\left(2 + \frac{i}{m}\right)\frac{1}{m} = 2 + \frac{1}{m^2}(1 + 2 + \ldots + m) =$$
$$= 2 + \frac{m(m+1)}{2m^2} = \frac{5}{2} + \frac{1}{2m};$$

$$s(D_m) = \sum_{i=1}^{m}\left(2 + \frac{i-1}{m}\right)\frac{1}{m} = 2 + \frac{1}{m^2}(0 + 1 + \ldots + (m-1)) =$$
$$= 2 + \frac{m(m-1)}{2m^2} = \frac{5}{2} - \frac{1}{2m}.$$

Tedy jest

$$\overline{\int_2^3} x\,dx = \lim_{m\to\infty} S(D_m) = \frac{5}{2}, \quad \underline{\int_2^3} x\,dx = \lim_{m\to\infty} s(D_m) = \frac{5}{2}.$$

Tedy funkce x má integrál od 2 do 3 a jest $\int_2^3 x\,dx = \frac{5}{2}$. Později odvodíme ovšem jinou, pohodlnější metodu pro výpočet tohoto integrálu.

Věty 26 až 29 týkaly se libovolných funkcí ohraničených v intervalu $\langle a, b\rangle$. Odvodíme ještě dvě obdobné věty, jež se však týkají pouze funkcí, jež mají integrál od a do b.

Věta 30. *Budiž $a < b$; budiž $f(x)$ funkce, jež má určitý integrál od a do b. Potom ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že platí toto: je-li D libovolné rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, definované dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{n-1} < x_n = b$, které vyhovuje podmínce $\varrho(D) < \delta$, a jsou-li $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ libovolná čísla, hovící podmínce $x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, platí nerovnost*

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i\right| < \varepsilon. \tag{12}$$

Důkaz. Budiž $f(x)$ funkce, jež má integrál od a do b. Budiž dáno libovolné kladné číslo ε. Podle věty 26 existuje kladné číslo δ_1 tak, že nerovnost[20])

$$S(D) < \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon \tag{13}$$

platí pro všechna rozdělení D, hovící podmínce $\varrho(D) < \delta_1$. Podle věty 28 existuje kladné číslo δ_2 tak, že nerovnost

$$s(D) > \int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon \tag{14}$$

platí pro všechna rozdělení D, hovící podmínce $\varrho(D) < \delta_2$. Položme $\delta = \mathrm{Min}\,(\delta_1, \delta_2)$; tedy $\delta > 0$. Budiž D libovolné rozdělení, hovící podmínce $\varrho(D) < \delta$; potom platí nerovnost (13) i nerovnost (14). Buďte $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ dělicí body rozdělení D. Označme znakem M_i horní hranici a znakem m_i dolní hranici funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Jsou-li $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ libovolná čísla, vyhovující nerovnostem $x_{i-1} \leqq \xi_i \leqq x_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, jest ovšem $m_i \leqq f(\xi_i) \leqq M_i$ a tedy

$$s(D) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i \leqq \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i \leqq \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i = S(D); \tag{15}$$

odtud a z nerovností (13), (14) plyne pak

$$\int_a^b f(x)\,dx - \varepsilon < \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\,\Delta x_i < \int_a^b f(x)\,dx + \varepsilon;$$

to je však právě hledaná nerovnost (12).

Věta 31. *Budiž $a < b$; budiž $f(x)$ funkce, jež má určitý integrál od a do b. Budiž dále $D_1, D_2, \ldots$ posloupnost rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, jež hoví podmínce $\lim_{m\to\infty} \varrho(D_m) = 0$. Dělicí body rozdělení D_m buďte*

[20]) Místo horního a dolního integrálu píšeme ovšem krátce integrál.

$$a = x_{0,m} < x_{1,m} < x_{2,m} < \ldots < x_{n_m-1,m} < x_{n_m,m} = b.$$[21]

Pro každou hodnotu m *budiž dáno* n_m *čísel* $\xi_{1,m}, \xi_{2,m}, \ldots, \xi_{n_m,m}$ *tak, že platí* $x_{i-1,m} \leqq \xi_{i,m} \leqq x_{i,m}$ *pro* $i = 1, 2, \ldots, n_m$. *Potom jest*

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{n_m} f(\xi_{i,m})\, \Delta x_{i,m} = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{16}$$

(Při tom značíme $\Delta x_{i,m} = x_{i,m} - x_{i-1,m}$.)

Důkaz. Podle věty 27 a 29 jest

$$\lim_{m\to\infty} S(D_m) = \int_a^b f(x)\, dx,\ \lim_{m\to\infty} s(D_m) = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{17}$$

Jest však zřejmě (viz důkaz nerovnosti (15) v důkazu věty 30)

$$s(D_m) \leqq \sum_{i=1}^{n_m} f(\xi_{i,m})\, \Delta x_{i,m} \leqq S(D_m). \tag{18}$$

Ze vztahů (17), (18) plyne však okamžitě rovnice (16).[22]

Všimněme si, jaký je rozdíl na př. mezi větou 27 a větou 31. Existuje-li $\int_a^b f(x)\, dx$, můžeme jej podle věty 27 počítati takto: sestrojíme posloupnost rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle : D_1, D_2, \ldots$ takovou, že $\lim_{m\to\infty} \varrho(D_m) = 0$; limita posloupnosti $S(D_1), S(D_2), \ldots$ je potom hledaný integrál. Abychom však stanovili horní součet $S(D_m)$, musíme stanoviti horní hranici funkce $f(x)$ ve všech částečných intervalech, na které jest interval $\langle a, b\rangle$ rozdělen rozdě-

[21]) Tyto body, jakož i jejich počet závisí ovšem na m — v označení byl na tuto okolnost vzat zřetel. Číslo n_m značí na př. počet částečných intervalů, na něž je interval $\langle a, b\rangle$ rozdělen rozdělením D_m.

[22]) Podle známé věty: je-li $a_m \leqq c_m \leqq b_m$, $\lim_{m\to\infty} a_m = \lim_{m\to\infty} b_m = \alpha$, jest též $\lim_{m\to\infty} c_m = \alpha$.

Důkaz: budiž ε libovolné kladné číslo. Z rovnic $\lim_{m\to\infty} a_m = \alpha$, $\lim_{m\to\infty} b_m = \alpha$ plyne existence čísel m_1, m_2 takových, že pro $m > m_1$ je $\alpha - \varepsilon < a_m < \alpha + \varepsilon$ a pro $m > m_2$ je $\alpha - \varepsilon < b_m < \alpha + \varepsilon$. Položíme-li $m_0 = \text{Max}\,(m_1, m_2)$, potom pro $m > m_0$ bude $\alpha - \varepsilon < a_m \leqq c_m \leqq b_m < \alpha + \varepsilon$ a tedy bude $|\, c_m - \alpha\, | < \varepsilon$ pro všechna m, jež jsou větší než m_0; tedy vskutku existuje limita $\lim_{m\to\infty} c_m = \alpha$.

lením D_m. Věta 31 praví pak — zhruba řečeno — že můžeme místo této horní hranice funkce $f(x)$ v takovém částečném intervalu vzíti namátkou hodnotu funkce $f(x)$ v *kterémkoliv* bodě toho částečného intervalu. Poznamenávám ovšem ještě jednou, že vět 26 až 29 můžeme použíti pro jakoukoliv ohraničenou funkci, kdežto vět 30 a 31 můžeme použíti jen tehdy, víme-li již předem, že funkce $f(x)$ má určitý integrál od a do b. Jak se to pozná, o tom si odvodíme některé věty v odst. 4, 5, 6, hlavně však v odst. 8.

4. Integrace součtu. Věta 32. *Budiž $a < b$; buďtež $f_1(x)$, $f_2(x)$ funkce ohraničené v intervalu $\langle a, b\rangle$; potom jest*

$$\overline{\int_a^b}(f_1(x) + f_2(x))\,\mathrm{d}x \leqq \overline{\int_a^b} f_1(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_a^b} f_2(x)\,\mathrm{d}x; \qquad (19)$$

$$\underline{\int_a^b}(f_1(x) + f_2(x))\,\mathrm{d}x \geqq \underline{\int_a^b} f_1(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_a^b} f_2(x)\,\mathrm{d}x. \qquad (20)$$

Důkaz. Budiž D libovolné rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, definované dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Budiž M'_i horní hranice funkce $f_1(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, budiž M''_i horní hranice funkce $f_2(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, budiž M_i horní hranice funkce $f_1(x) + f_2(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$. Pro všechna x intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ platí nerovnost $f_1(x) + f_2(x) \leqq M'_i + M''_i$ a tedy jest (podle poznámky 2 k větě 4) $M_i \leqq M'_i + M''_i$. Označím-li tedy znaky $S'(D)$, $S''(D)$, $S(D)$ horní součty, příslušné k funkcím $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_1(x) + f_2(x)$, jest

$$S(D) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i \leqq \sum_{i=1}^{n} (M'_i + M''_i)\,\Delta x_i = S'(D) + S''(D). \qquad (21)$$

Sestrojme posloupnost rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$: $D_1, D_2, D_3, \ldots$ tak, že $\lim\limits_{m\to\infty} \varrho(D_m) = 0$ (můžeme třeba zvoliti za D_m ono rozdělení, jež dělí interval $\langle a, b\rangle$ na m stejných dílů). Potom jest podle (21) pro každé m

$$S(D_m) \leqq S'(D_m) + S''(D_m);$$

přechodem k limitě dostáváme podle věty 27 vztah (19). Vztah (20) se dokáže obdobně.

Věta 33. *Budiž $a < b$; existují-li integrály $\int_a^b f_1(x)\,dx$, $\int_a^b f_2(x)\,dx$, existuje i integrál $\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))\,dx$ a jest*

$$\int_a^b (f_1(x) + f_2(x))\,dx = \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx.$$

Důkaz. Podle věty 32 a 22 jest

$$\int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx \leq \underline{\int_a^b} (f_1(x) + f_2(x))\,dx \leq$$

$$\leq \overline{\int_a^b} (f_1(x) + f_2(x))\,dx \leq \int_a^b f_1(x)\,dx + \int_a^b f_2(x)\,dx;$$

oba krajní výrazy (vpravo i vlevo) jsou si rovny, tedy platí vesměs znamení rovnosti, čímž je věta 33 dokázána.

Věta 34. *Budiž $a < b$: má-li funkce $f(x)$ určitý integrál od a do b a je-li c libovolné číslo, má i funkce $c\,f(x)$ určitý integrál od a do b a jest*

$$\int_a^b c\,f(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$$

Důkaz. Předpokládejme, že funkce $f(x)$ má určitý integrál od a do b. Rozeznávejme tři případy:

1. Je-li $c = 0$, jest podle příkladu 1 v odst. 2

$$\int_a^b 0\,.\,f(x)\,dx = \int_a^b 0\,dx = 0 = 0\,.\int_a^b f(x)\,dx.$$

2. Je-li $c > 0$, vyšetřujme libovolné rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$, definované dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Budiž $S'(D)$ horní a $s'(D)$ dolní součet, příslušný k funkci $cf(x)$; $S(D)$ budiž horní a $s(D)$ dolní součet, příslušný k funkci $f(x)$. Je-li M_i horní hranice a m_i dolní hranice funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, jest podle věty 7 horní hranice funkce $c\,f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ rovna číslu cM_i a dolní hranice rovna číslu cm_i. Tedy

$$S'(D) = \sum_{i=1}^{n} cM_i \Delta x_i = c\, S(D), \quad s'(D) = \sum_{i=1}^{n} cm_i \Delta x_i = c\, s(D).$$

Budiž $D_1, D_2, \ldots, D_m, \ldots$ posloupnost rozdělení intervalu $\langle a, b \rangle$ taková, že $\lim\limits_{m\to\infty} \varrho(D_m) = 0$. Potom je pro každé m

$$S'(D_m) = c\, S(D_m), \quad s'(D_m) = c\, s(D_m);$$

podle věty 27 a 29 získáme odtud přechodem k limitě rovnice

$$\overline{\int_a^b} c\, f(x)\, \mathrm{d}x = c \overline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{d}x = c \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x;$$

$$\underline{\int_a^b} c\, f(x)\, \mathrm{d}x = c \underline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{d}x = c \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x,$$

jak bylo dokázati.

3. Budiž konečně $c < 0$; zachováme-li totéž označení jako v případě $c > 0$, dostáváme nyní podle věty 7, že horní hranice funkce $c\, f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i \rangle$ je rovna číslu cm_i a dolní hranice je rovna číslu cM_i; z toho

$$S'(D) = \sum_{i=1}^{n} cm_i \Delta x_i = c\, s(D), \quad s'(D) = \sum_{i=1}^{n} cM_i \Delta x_i = c\, S(D),$$

odkudž stejně jako dříve $S'(D_m) = c\, s(D_m)$, $s'(D_m) = c\, S(D_m)$ a tedy přechodem k limitě

$$\overline{\int_a^b} c\, f(x)\, \mathrm{d}x = c \underline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{d}x = c \int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x,$$

$$\underline{\int_a^b} c\, f(x)\, \mathrm{d}x = c \overline{\int_a^b} f(x)\, \mathrm{d}x = c \int_a^b f(x)\, dx,$$

jak bylo dokázati.

Poznámka. Větu 33 jsme dokázali pro dva sčítance; úplnou indukcí lze okamžitě odvoditi obdobnou větu pro libovolný počet sčítanců. Kombinujeme-li tuto větu s větou 34 (o násobení integrované funkce konstantou), dostáváme konečně tuto větu:

Věta 35. *Budiž $a < b$; jsou-li $f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)$ funkce, mající určitý integrál od a do b a jsou-li $c_1, c_2, \ldots, c_n$ libovolná* *čísla, má i funkce* $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x)$ *určitý integrál od* a *do* b *a jest*

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x))\,\mathrm{d}x =$$
$$= c_1 \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + c_2 \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + c_n \int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

Jako specielní případ dostáváme tento výsledek (pro $n = 2$, $c_1 = 1, c_2 = -1$): Mají-li funkce $f_1(x), f_2(x)$ určitý integrál od a do b ($a < b$), má i funkce $f_1(x) - f_2(x)$ určitý integrál od a do b a jest

$$\int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 36. *Budiž* $a < b$; $f(x)$ *budiž funkce, jež má určitý integrál od* a *do* b; *budiž* $f(x) \geqq 0$ *pro všechna* x *intervalu* $\langle a, b\rangle$; *potom jest*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqq 0.$$

Důkaz plyne okamžitě z věty 25 (z druhé její části, klademe-li v ní $A = 0$ a klademe-li za B třeba horní hranici funkce $f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$.

Věta 37. *Budiž* $a < b$; $f_1(x), f_2(x)$ *buďtež funkce, mající určitý integrál od* a *do* b; *budiž* $f_1(x) \geqq f_2(x)$ *pro všechna* x *intervalu* $\langle a, b\rangle$: *potom jest*

$$\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x \geqq \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Podle věty 35 existuje $\int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x$; podle věty 36 jest $\int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x \geqq 0$; podle věty 35 jest tedy

$$\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b (f_1(x) - f_2(x))\,\mathrm{d}x \geqq 0.$$

5. Integrál od a do c, vyjádřený integrály od a do b a od b do c.

Věta 38. *Budiž $a < b < c$ a budiž $f(x)$ funkce ohraničená v intervalu $\langle a, c\rangle$. Potom jest*

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \overline{\int_b^c} f(x)\,dx;$$
$$\underline{\int_a^c} f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx + \underline{\int_b^c} f(x)\,dx. \tag{22}$$

Důkaz. Budiž $D'_m (m = 1, 2, 3, \ldots)$ ono rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, jež dělí tento interval na m stejných dílů; dělicí body tohoto rozdělení jsou tedy

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_m = b, \text{ kdež } x_i = a + \frac{i}{m}(b - a);$$

zřejmě jest $\varrho(D'_m) = (b - a) : m$. Obdobně budiž $D''_m (m = 1, 2, 3, \ldots)$ ono rozdělení intervalu $\langle b, c\rangle$, jež dělí tento interval na m stejných dílů; dělicí body tohoto rozdělení jsou tedy

$$b = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_m = c, \text{ kdež } y_i = b + \frac{i}{m}(c - b);$$

zřejmě jest $\varrho(D''_m) = (c - b) : m$. Dělicí body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < b < y_1 < y_2 < \ldots < y_{m-1} < y_m = c$ definují jisté rozdělení D_m intervalu $\langle a, c\rangle$, při čemž

$$\varrho(D_m) = \operatorname{Max}((b - a) : m, (c - b) : m);$$

zřejmě jest

$$S(D_m) = S(D'_m) + S(D''_m) \tag{23}$$

pro každé m. Ježto $\lim_{m\to\infty} \varrho(D'_m) = \lim_{m\to\infty} \varrho(D''_m) = \lim_{m\to\infty} \varrho(D_m) = 0$, jest podle (23) a podle věty 27

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,dx = \lim_{m\to\infty} S(D_m) = \lim_{m\to\infty} S(D'_m) + \lim_{m\to\infty} S(D''_m) =$$
$$= \overline{\int_a^b} f(x)\,dx + \overline{\int_b^c} f(x)\,dx,$$

čímž je dokázán vztah (22) pro horní integrál. Důkaz pro dolní integrál jest obdobný.

Věta 39. *Budiž $a < b < c$; nechť existuje integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ i integrál $\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$; potom existuje i integrál $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ a jest*

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Z předpokládané existence integrálu od a do b a integrálu od b do c plyne, že funkce $f(x)$ jest ohraničena v intervalu $\langle a, b\rangle$ i v intervalu $\langle b, c\rangle$ a tedy i v intervalu $\langle a, c\rangle$ (podle věty 9); podle věty 38 jest tedy

$$\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x \text{ a rovněž } \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x,$$

jak bylo dokázati.

Poznámka. Věty 38 a 39 týkaly se dvou „sousedních" intervalů $\langle a, b\rangle$, $\langle b, c\rangle$. Úplnou indukcí lze z nich okamžitě odvoditi obdobné věty pro libovolný počet takových intervalů; na př.: je-li $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots < a_n$ a je-li funkce $f(x)$ ohraničená v intervalu $\langle a_1, a_n\rangle$, jest

$$\overline{\int_{a_1}^{a_n}} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_{a_1}^{a_2}} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_{a_2}^{a_3}} f(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \overline{\int_{a_{n-1}}^{a_n}} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Věta 40. *Budiž $a < b$; funkce $f(x)$ nechť má určitý integrál od a do b. Nechť $\langle c, d\rangle$ jest částečný interval intervalu $\langle a, b\rangle$.*[23]) *Potom funkce $f(x)$ má též určitý integrál od c do d.*

Důkaz. Podle věty 38 (a podle poslední poznámky) jest

---

[23]) To znamená $a \leqq c < d \leqq b$.

[24]) První sčítanec ovšem odpadne, je-li $a = c$; třetí sčítanec odpadne, je-li $d = b$.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_c^d} f(x)\,\mathrm{d}x + \overline{\int_d^b} f(x)\,\mathrm{d}x,$$ [24]

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_c^d} f(x)\,\mathrm{d}x + \underline{\int_d^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$ [24]

Z toho odečtením

$$\left(\overline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_a^c} f(x)\,\mathrm{d}x\right) + \left(\overline{\int_c^d} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_c^d} f(x)\,\mathrm{d}x\right) +$$

$$+ \left(\overline{\int_d^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \underline{\int_d^b} f(x)\,\mathrm{d}x\right) = 0. \qquad (24)$$ [24]

Žádný sčítanec na levé straně rovnice (24) není záporný (podle věty 22); tedy musí každý z těchto sčítanců býti roven nule (neboť kdyby některý z nich byl různý od nuly — a tedy kladný — byl by i součet na levé straně rovnice (24) kladný a nemohl by se rovnati nule). Specielně tedy prostřední člen se rovná nule, t. j.

$$\overline{\int_c^d} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_c^d} f(x)\,\mathrm{d}x,$$

jak bylo dokázati.

6. Změna funkce integrované v konečném počtu bodů.

Věta 41. *Budiž $a < b$. Budiž $f(x)$ funkce ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$. Budiž $g(x)$ funkce, jež se liší od funkce $f(x)$ jen v konečném počtu bodů intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom jest*

$$\overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x, \quad \underline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Důkaz. Ježto funkce $f(x)$ je ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$, je podle věty 10 též funkce $g(x)$ ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$, takže horní integrál $\overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x$ má smysl. Abychom dokázali, že

$$\overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x, \qquad (25)$$

stačí, dokážeme-li toto: nerovnost

$$\left| \int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^{\overline{b}} g(x)\,\mathrm{d}x \right| < \varepsilon \tag{26}$$

platí, ať je ε jakékoliv kladné číslo. Budiž tedy dáno libovolné kladné číslo ε. Zvolme čísla $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{p-1} < a_p = b$ tak, že rovnost $f(x) = g(x)$ platí pro každé x intervalu $\langle a, b\rangle$, jež se nerovná žádnému z čísel $a_0, a_1, \ldots, a_p$.[25]) Existují (podle věty 6) dvě kladná čísla K_1, K_2 tak, že pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ platí $|f(x)| \leqq K_1$, $|g(x)| \leqq K_2$; položme $K = \mathrm{Max}\,(K_1, K_2)$; potom jest

$$|f(x)| \leqq K,\quad |g(x)| \leqq K \tag{27}$$

pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$.

Zvolme nyní kladné číslo δ tak malé, aby byly splněny tyto podmínky:

$$\delta < \frac{1}{2}\,\mathrm{Min}\,(a_1 - a_0, a_2 - a_1, \ldots, a_p - a_{p-1}), \tag{28}$$

$$\delta < \frac{\varepsilon}{4Kp}. \tag{29}$$

Z nerovnosti (28) plyne

$$a = a_0 < a_0 + \delta < a_1 - \delta < a_1 + \delta < a_2 - \delta < \ldots < a_{p-1} + \delta < a_p - \delta < a_p = b;$$

podle věty 38 a podle poznámky k větám 38, 39 jest tedy

$$\int_a^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a_0}^{\overline{a_0+\delta}} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a_0+\delta}^{\overline{a_1-\delta}} + \int_{a_1-\delta}^{\overline{a_1+\delta}} + \int_{a_1+\delta}^{\overline{a_2-\delta}} + \ldots + \int_{a_{p-1}+\delta}^{\overline{a_p-\delta}} + \int_{a_p-\delta}^{\overline{a_p}}\,;\text{[26])}$$

$$\int_a^{\overline{b}} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{a_0}^{\overline{a_0+\delta}} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a_0+\delta}^{\overline{a_1-\delta}} + \int_{a_1-\delta}^{\overline{a_1+\delta}} + \int_{a_1+\delta}^{\overline{a_2-\delta}} + \ldots + \int_{a_{p-1}+\delta}^{\overline{a_p-\delta}} + \int_{a_p-\delta}^{\overline{a_p}}\,.$$

---

[25]) Nejjednodušeji mohu tedy čísla $a_0, a_1, \ldots, a_p$ voliti takto: vezmu všechny hodnoty x intervalu $\langle a, b\rangle$, pro něž platí nerovnost $f(x) \neq g(x)$ a přidám k nim ještě hodnoty a, b (ať nerovnosti $f(a) \neq g(a)$, $f(b) \neq g(b)$ platí nebo neplatí). Tato čísla, seřazená podle velikosti, označím $a_0, a_1, \ldots, a_p$.

[26]) Za integračním znamením má ovšem všude státi $f(x)\,\mathrm{d}x$; v následujícím vzorci má zase všude státi $g(x)\,\mathrm{d}x$.

Odečtěme tyto dvě rovnice člen po členu. V intervalech $\langle a_{i-1} + \delta, a_i - \delta\rangle$ jest $f(x) = g(x)$ (pro $i = 1, 2, \ldots, p$) a tedy

$$\overline{\int_{a_{i-1}+\delta}^{a_i-\delta}} f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_{a_{i-1}+\delta}^{a_i-\delta}} g(x)\,\mathrm{d}x,$$

takže tito členové se zruší. Zbude tedy

$$\left.\begin{aligned}\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x = \left(\overline{\int_{a_0}^{a_0+\delta}} f(x)\,\mathrm{d}x - \overline{\int_{a_0}^{a_0+\delta}} g(x)\,\mathrm{d}x\right) + \\ + \sum_{i=1}^{p-1}\left(\overline{\int_{a_i-\delta}^{a_i+\delta}} f(x)\,\mathrm{d}x - \overline{\int_{a_i-\delta}^{a_i+\delta}} g(x)\,\mathrm{d}x\right) + \\ + \left(\overline{\int_{a_p-\delta}^{a_p}} f(x)\,\mathrm{d}x - \overline{\int_{a_p-\delta}^{a_p}} g(x)\,\mathrm{d}x\right).\end{aligned}\right\} \quad (30)$$

Podle věty 24 a podle nerovností (27) jest

$$\left|\overline{\int_{a_0}^{a_0+\delta}} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq K\delta, \quad \left|\overline{\int_{a_p-\delta}^{a_p}} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq K\delta,$$

$$\left|\overline{\int_{a_i-\delta}^{a_i+\delta}} f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq 2K\delta \text{ pro } i = 1, 2, \ldots, p - 1$$

a obdobné nerovnosti platí, píšeme-li v nich funkci $g(x)$ místo funkce $f(x)$. Z rovnice (30) plyne tedy

$$\left|\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x - \overline{\int_a^b} g(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq 2\,(K\delta + (p - 1)\,.\,2K\delta + K\delta) = 4pK\delta;$$

podle (29) je však $4pK\delta < \varepsilon$, platí tedy nerovnost (26); tím je dokázána rovnice (25). Obdobná rovnice pro dolní integrál se dokáže zcela analogicky.

Věta 42. *Budiž $a < b$; nechť existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$; funkce $g(x)$ nechť se liší od funkce $f(x)$ jen v konečném počtu bodů intervalu*

$\langle a, b\rangle$. *Potom existuje též* $\int_a^b g(x)\,dx$ *a jest*

$$\int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Důkaz. Podle předpokladu jest

$$\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx;$$

tedy podle věty 41 jest

$$\overline{\int_a^b} g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \text{ a rovněž } \underline{\int_a^b} g(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx,$$

jak bylo dokázati.

Celkem jest možno vysloviti výsledek tohoto odstavce zhruba asi takto: změním-li funkci integrovanou pouze v konečném počtu bodů, nezmění se horní (dolní) integrál (po příp. integrál). Tento výsledek dá se ještě podstatně zobecniti; tato zobecnění vyžadují však hlubšího studia číselných množin a proto se jimi zde nebudeme zabývati.

7. Integrál jako funkce horní meze. Doplňme především poněkud definici integrálu, jakož i definici horního a dolního integrálu. Dosud (v odst. 2) jsme definovali $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx$, $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$, $\int_a^b f(x)\,dx$ jen tehdy, bylo-li $a < b$. Doplňme nyní tuto definici též pro $a = b$ tímto dodatkem:

Dodatek k definici integrálu. *Je-li funkce $f(x)$ definována pro $x = a$, klademe definitoricky* $\overline{\int_a^a} f(x)\,dx = \underline{\int_a^a} f(x)\,dx = \int_a^a f(x)\,dx = 0$.[27])

[27]) Tedy $\int_a^a f(x)\,dx$ existuje vždy, je-li funkce $f(x)$ definována pro $x = a$. Pojmenování dříve zavedená, jako horní mez, dolní mez, funkce integrovaná atd. podržíme i zde.

Připomeňme, že nerovnost $\int_{\underline{a}}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq \int_{a}^{\overline{b}} f(x)\,\mathrm{d}x$, kterou jsme dříve (viz větu 22) dokázali pro $a < b$, platí podle této definice i pro $a = b$ (potom je totiž na obou stranách nula).

Budiž nyní $a < b$; budiž $f(x)$ funkce ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$; potom existuje nejenom horní integrál $\int_{a}^{\overline{b}} f(t)\,\mathrm{d}t$, nýbrž též horní integrál $\int_{a}^{\overline{x}} f(t)\,\mathrm{d}t$[28]) pro každé x, jež hoví nerovnostem $a \leqq x \leqq b$. Tento horní integrál jest tedy funkcí proměnné x, definovanou v intervalu $\langle a, b\rangle$; obdobně dolní integrál $\int_{\underline{a}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ jest funkcí proměnné x, definovanou v intervalu $\langle a, b\rangle$. Dokážeme nyní dvě důležité věty o těchto funkcích.

Věta 43. *Budiž $a < b$. Funkce $f(x)$ budiž ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom funkce $\int_{a}^{\overline{x}} f(t)\,\mathrm{d}t$ je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$ a rovněž funkce $\int_{\underline{a}}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$ je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$.*

Důkaz. Ježto funkce $f(x)$ je ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$, existuje podle věty 6 kladné číslo K tak, že nerovnost $|\, f(t)\,| \leqq K$ je splněna pro všechna t intervalu $\langle a, b\rangle$. Pro zkrácení pišme

$$F(x) = \int_{a}^{\overline{x}} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Máme dokázati, že funkce $F(x)$ je spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$, t. j. máme dokázati[29]) (viz pozn. 1 na str. 22): je-li předně

[28]) Měním označení integrační proměnné (viz pozn. [13]) na str. 34—35), aby se integrační proměnná t nepletla s horní mezí x. Často se to nečiní a píše se $\int_{a}^{\overline{x}} f(x)\,\mathrm{d}x$.

[29]) Prosím čtenáře, aby až do konce této kapitoly si stále uvědomoval definice a věty z kap. I, odst. 2, 3, 4, ježto jich nyní budeme neustále používati.

$a \leqq x_0 < b$, je funkce $F(x)$ spojitá zprava v bodě x_0; je-li za druhé $a < x_0 \leqq b$, je funkce $F(x)$ spojitá zleva v bodě x_0.

Budiž tedy předně $a \leqq x_0 < b$; budiž ε libovolné kladné číslo. Položme

$$\delta = \operatorname{Min}\left(b - x_0, \frac{\varepsilon}{K}\right), \tag{31}$$

tedy $\delta > 0$. Dokážeme: je-li $x_0 < x < x_0 + \delta$, je

$$| F(x) - F(x_0) | < \varepsilon;$$

tím bude dokázáno, že funkce $F(x)$ je spojitá zprava v bodě x_0.

Budiž tedy x číslo takové, že jest $x_0 < x < x_0 + \delta$[30]; potom jest

$$F(x) = \overline{\int_a^x} f(t)\,dt = \overline{\int_a^{x_0}} f(t)\,dt + \overline{\int_{x_0}^{x}} f(t)\,dt = F(x_0) + \overline{\int_{x_0}^{x}} f(t)\,dt;$$ [31]

tedy $F(x) - F(x_0) = \overline{\int_{x_0}^{x}} f(t)\,dt$. Pro $x_0 \leqq t \leqq x$ jest $| f(t) | \leqq K$; podle věty 24 jest tedy

$$| F(x) - F(x_0) | = \left| \overline{\int_{x_0}^{x}} f(t)\,dt \right| \leqq K(x - x_0);$$

jest však $x - x_0 < \delta$; podle (31) je tedy

$$| F(x) - F(x_0) | < K\delta \leqq \varepsilon,$$

jak bylo dokázati.

Budiž za druhé $a < x_0 \leqq b$; budiž ε libovolné kladné číslo; položme

$$\delta = \operatorname{Min}\left(x_0 - a, \frac{\varepsilon}{K}\right);$$

tedy $\delta > 0$. Dokážeme: je-li $x_0 - \delta < x < x_0$, je

---

[30]) Ježto podle (31) jest $x_0 + \delta \leqq x_0 + (b - x_0) = b$, jest též $x < b$.

[31]) Je-li $a < x_0$, plyne tato rovnice z věty 38; je-li $a = x_0$, je tato rovnice též správná, ježto potom je $\overline{\int_a^{x_0}} f(t)\,dt = 0$.

$$|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon.$$

Tím bude dokázáno, že funkce $F(x)$ je v bodě x_0 spojitá zleva.

Budiž tedy x takové číslo, že platí $x_0 - \delta < x < x_0$[32]; potom jest

$$F(x_0) = \overline{\int_a^{x_0}} f(t)\,dt = \overline{\int_a^{x}} f(t)\,dt + \overline{\int_x^{x_0}} f(t)\,dt = F(x) + \overline{\int_x^{x_0}} f(t)\,dt,$$

z čehož jako dříve plyne

$$|F(x) - F(x_0)| = \left|\overline{\int_x^{x_0}} f(t)\,dt\right| \leqq K(x_0 - x) < K\delta \leqq \varepsilon,$$

jak bylo dokázati. Tím je dokázána ona část věty 43, jež se týká horního integrálu; pro dolní integrál je důkaz obdobný.

Věta 44. *Budiž $a < b$; funkce $f(x)$ budiž ohraničena v intervalu $\langle a, b\rangle$. Je-li $a \leqq x_0 < b$ a je-li funkce $f(x)$ spojitá zprava v bodě x_0, má funkce $\overline{\int_a^x} f(t)\,dt$ v bodě x_0 derivaci zprava rovnou číslu $f(x_0)$ a rovněž funkce $\underline{\int_a^x} f(t)\,dt$ má v bodě x_0 derivaci zprava rovnou číslu $f(x_0)$. Obdobně, je-li $a < x_0 \leqq b$ a je-li funkce $f(x)$ spojitá zleva v bodě x_0, má funkce $\overline{\int_a^x} f(t)\,dt$ i funkce $\underline{\int_a^x} f(t)\,dt$ v bodě x_0 derivaci zleva, rovnou číslu $f(x_0)$.*

Dodatek. *Je-li tedy $a < x < b$ a je-li funkce $f(t)$ spojitá v bodě x,*[33] *existují v tomto bodě derivace*

$$\frac{d}{dx}\left(\overline{\int_a^x} f(t)\,dt\right) = f(x), \quad \frac{d}{dx}\left(\underline{\int_a^x} f(t)\,dt\right) = f(x).\text{[34]}$$

[32] Tedy jest $x > a$, neboť $x_0 - \delta \geqq x_0 - (x_0 - a) = a$.

[33] To znamená: spojitá zprava i zleva; viz větu 14.

[34] Neboť potom derivace zprava i zleva podle věty 44 existují a rovnají se témuž číslu $f(x)$; podle věty 17 existuje tedy derivace a rovná se rovněž číslu $f(x)$.

Důkaz věty 44. Položme pro zkrácení $F(x) = \overline{\int_a^x} f(t)\,dt$; budiž $a \leqq x_0 < b$; budiž funkce $f(x)$ spojitá zprava v bodě x_0.

Je-li $0 < h < b - x_0$, jest

$$F(x_0 + h) = \overline{\int_a^{x_0+h}} f(t)\,dt = \overline{\int_a^{x_0}} f(t)\,dt + \overline{\int_{x_0}^{x_0+h}} f(t)\,dt = F(x_0) + \overline{\int_{x_0}^{x_0+h}} f(t)\,dt$$

a tedy

$$\frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = \frac{1}{h} \overline{\int_{x_0}^{x_0+h}} f(t)\,dt. \tag{32}$$

Budiž dáno libovolné kladné číslo ε; ježto funkce $f(t)$ je spojitá zprava v bodě x_0, existuje kladné číslo δ takové, že nerovnost $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon/2$ je splněna pro každé t, pro něž platí $x_0 \leqq t < x_0 + \delta$. Při tom mohu předpokládati, že platí $\delta \leqq b - x_0$.[35] Je-li $0 < h < \delta$, platí nerovnost $x_0 \leqq t < x_0 + \delta$ pro všechna čísla t intervalu $\langle x_0, x_0 + h\rangle$; pro všechna čísla t intervalu $\langle x_0, x_0 + h\rangle$ je tedy $|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon/2$ čili

$$f(x_0) - \varepsilon/2 < f(t) < f(x_0) + \varepsilon/2;$$

podle věty 23 platí tedy nerovnost

$$f(x_0) - \varepsilon < f(x_0) - \frac{\varepsilon}{2} \leqq \frac{1}{h} \overline{\int_{x_0}^{x_0+h}} f(t)\,dt \leqq f(x_0) + \frac{\varepsilon}{2} < f(x_0) + \varepsilon.$$

Podle (32) platí tedy nerovnosti

$$f(x_0) - \varepsilon < \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} < f(x_0) + \varepsilon$$

čili

$$\left| \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} - f(x_0) \right| < \varepsilon$$

pro každé h, splňující podmínky $0 < h < \delta$. To však znamená právě, že funkce $F(x)$ má v bodě x_0 derivaci zprava rovnou číslu $f(x_0)$, jak bylo dokázati. Důkaz, že také *dolní* integrál má v bodě x_0 derivaci zprava, rovnou číslu $f(x_0)$, provádí se stejně,

[35]) Kdyby totiž bylo náhodou $\delta > b - x_0$, mohli bychom místo čísla δ vzíti menší číslo $b - x_0$.

jen místo horního integrálu je všude nutno psáti dolní integrál. Konečně tvrzení o derivaci *zleva* se dokáže opět zcela analogicky, takže není snad zapotřebí, abych tento důkaz uváděl. Tím je věta 44 dokázána.

Jestliže jest $a < b$ a jestliže existuje $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$, potom podle věty 40 a podle dodatku k definici integrálu existuje též integrál $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ pro každé x intervalu $\langle a, b\rangle$. V tomto případě můžeme tedy ve větě 43 a 44 na př. místo horního integrálu psáti prostě integrál a dostáváme tak tuto větu:

Věta 45. *Budiž $a < b$; nechť existuje $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Potom platí tato tvrzení:*

1. Funkce $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$[36]) jest spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$.

2. Je-li $a < x < b$ a je-li funkce $f(t)$ spojitá v bodě x, existuje v tomto bodě derivace

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x).^{37)}$$

8. Funkce spojitá v $\langle a, b\rangle$ má určitý integrál od a do b. Z vět 43 a 44 učiníme tento důležitý důsledek:

Věta 46. *Budiž $a < b$; budiž $f(x)$ funkce ohraničená v inter-*

[36]) Tento integrál je funkcí proměnné x.

[37]) Použil jsem jen dodatku k větě 44; pro derivaci zprava a zleva máme tento výsledek: Je-li $a \leqq x < b$ a je-li funkce $f(x)$ spojitá zprava v bodě x, má integrál $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ v bodě x derivaci zprava, rovnou číslu $f(x)$. Obdobně: je-li $a < x \leqq b$ a je-li funkce $f(x)$ spojitá zleva v bodě x, má integrál $\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ v bodě x derivaci zleva, rovnou číslu $f(x)$ (viz větu 44).

valu $\langle a, b\rangle$, jež má v intervalu $\langle a, b\rangle$ nejvýše konečný počet bodu nespojitosti[38]; *potom* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *existuje.*

Důkaz. Sestrojme body $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{p-1} < < a_p = b$ tak, že funkce $f(x)$ je spojitá v každém bodě intervalu $\langle a, b\rangle$, jenž nesplývá s žádným z bodů $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p$.[39] Vezměme kterýkoliv interval $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$; funkce $f(x)$ je v tomto intervalu ohraničená a je spojitá v každém *vnitřním* bodě tohoto intervalu. Pro zkrácení položme

$$\overline{\int_{a_{i-1}}^{x}} f(t)\,\mathrm{d}t = F(x),\quad \underline{\int_{a_{i-1}}^{x}} f(t)\,\mathrm{d}t = G(x);$$

použijeme-li vět 43 a 44 (při čemž místo intervalu $\langle a, b\rangle$ klademe interval $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$), dostáváme tento výsledek:

1. Funkce $F(x)$, $G(x)$ jsou spojité v intervalu $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$.

2. V každém vnitřním bodě intervalu $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$ existují derivace $F'(x) = f(x)$, $G'(x) = f(x)$. Funkce $F(x) - G(x)$ je tedy spojitá v *uzavřeném* intervalu $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$ a má derivaci rovnou nule v každém bodě *otevřeného* intervalu (a_{i-1}, a_i). Podle věty 19 je tedy funkce $F(x) - G(x)$ konstantní v intervalu $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$, t. j. $F(x) - G(x) = c$ pro $a_{i-1} \leqq x \leqq a_i$. Abychom stanovili konstantu c, dosaďme za x nějakou hodnotu intervalu $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$; nejlépe se nám hodí hodnota $x = a_{i-1}$; jest však

$$F(a_{i-1}) = \overline{\int_{a_{i-1}}^{a_{i-1}}} f(t)\,\mathrm{d}t = 0,\quad G(a_{i-1}) = \underline{\int_{a_{i-1}}^{a_{i-1}}} f(t)\,\mathrm{d}t = 0,$$

tedy $c = 0$. Tedy jest $F(x) = G(x)$ pro všechna x intervalu $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$. Specielně pro $x = a_i$ jest

$$F(a_i) = G(a_i),\ \text{čili}\ \overline{\int_{a_{i-1}}^{a_i}} f(t)\,\mathrm{d}t = \underline{\int_{a_{i-1}}^{a_i}} f(t)\,\mathrm{d}t,$$

[38]) Funkce $f(x)$ nemusí míti po případě vůbec žádný bod nespojitosti.

[39]) Takové body $a_0, a_1, \ldots, a_p$ mohu dostati třeba takto: vezmu body a, b, přidám k nim všechny body intervalu $\langle a, b\rangle$, v nichž funkce $f(x)$ není spojitá a všechny tyto body, seřazené podle velikosti, označíme znaky $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_p$.

takže $\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(t)\,\mathrm{d}t$ existuje. Tedy existují integrály

$$\int_{a_0}^{a_1} f(t)\,\mathrm{d}t, \int_{a_1}^{a_2} f(t)\,\mathrm{d}t, \ldots, \int_{a_{p-1}}^{a_p} f(t)\,\mathrm{d}t;$$

podle věty 39 (a podle poznámky k této větě) existuje tedy též integrál

$$\int_{a_0}^{a_p} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t,$$

jak bylo dokázati.

Uveďme tento speciální případ věty 46:

Věta 47. *Budiž $a < b$; budiž $f(x)$ funkce spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a; b\rangle$; potom $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje.*

Důkaz. Podle věty 16 jest funkce $f(x)$ ohraničena v intervalu $\langle a, b\rangle$; tedy mohu použíti věty 46 a tedy $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje.

Věta 46 dala by se podstatně zobecniti, tím se však nebudeme zabývati.

9. Funkce primitivní a její souvislost s určitým integrálem.

Věta 48. *Budiž $a < b$; nechť existuje integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Budiž $F(x)$ funkce spojitá v uzavřeném intervalu $\langle a, b\rangle$, jež v každém bodě otevřeného intervalu (a, b) má derivaci $F'(x) = f(x)$. Potom jest*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

Důkaz. Budiž D_m $(m = 1, 2, \ldots)$ ono rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, jež dělí interval $\langle a, b\rangle$ na m stejných dílů. Dělicí body rozdělení D_m jsou tedy body $a = x_{0,m} < x_{1,m} < x_{2,m} < \ldots$ $\ldots < x_{m-1,m} < x_{m,m} = b$, kde jest

$$x_{i,m} = a + \frac{i}{m}(b - a) \text{ pro } i = 0, 1, 2, \ldots, m;$$

tedy $\Delta x_{i,m} = x_{i,m} - x_{i-1,m} = (b-a)/m$, tedy $\varrho(D_m) = (b-a)/m$, tedy $\lim\limits_{m\to\infty} \varrho(D_m) = 0$. Ježto funkce $F(x)$ jest spojitá v uzavřeném intervalu $\langle x_{i-1,m}, x_{i,m}\rangle$ a má derivaci v každém bodě otevřeného intervalu $(x_{i-1,m}, x_{i,m})$, lze podle věty o střední hodnotě (věta 18) každému i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ přiřaditi jisté číslo $\xi_{i,m}$, vyhovující nerovnostem $x_{i-1,m} < \xi_{i,m} < x_{i,m}$ tak, že jest

$$F(x_{i,m}) - F(x_{i-1,m}) = (x_{i,m} - x_{i-1,m}) \cdot F'(\xi_{i,m}).$$

Vzhledem k tomu, že podle předpokladu jest $F'(\xi_{i,m}) = f(\xi_{i,m})$, lze tuto rovnici psáti též ve tvaru

$$F(x_{i,m}) - F(x_{i-1,m}) = f(\xi_{i,m})\, \Delta x_{i,m} \quad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Sečteme-li tyto rovnice pro $i = 1, 2, \ldots, m$, dostaneme vlevo $F(x_{m,m}) - F(x_{0,m})$ čili $F(b) - F(a)$, takže dostáváme rovnici

$$\sum_{i=1}^{m} f(\xi_{i,m})\, \Delta x_{i,m} = F(b) - F(a). \tag{33}$$

Uvažme především, že jest $x_{i-1,m} \leq \xi_{i,m} \leq x_{i,m}$ (znamení rovnosti bychom dokonce mohli potlačiti); za druhé uvažme, že jest $\lim\limits_{m\to\infty} \varrho(D_m) = 0$. Můžeme tedy použíti věty 31 (v našem případě jest ovšem $n_m = m$); platí tedy vztah

$$\lim_{m\to\infty} \sum_{i=1}^{m} f(\xi_{i,m})\, \Delta x_{i,m} = \int_a f(x)\, \mathrm{d}x. \tag{34}$$

Podle rovnice (33) jest výraz

$$\sum_{i=1}^{m} f(\xi_{i,m})\, \Delta x_{i,m}$$

roven číslu $F(b) - F(a)$ pro každé m; tedy i jeho limita je rovna číslu $F(b) - F(a)$, takže podle rovnice (34) jest

$$\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = F(b) - F(a),$$

jak bylo dokázati.

Věta 48 je důležitá z mnoha důvodů. Upozorňuji především na to, že nám velmi často umožňuje výpočet určitého integrálu.

Je-li $a < b$, existuje-li $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ (to nastane podle věty 47 na př. tehdy, je-li funkce $f(x)$ spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$) a podaří-li se nám nalézti funkci $F(x)$, spojitou v intervalu $\langle a, b\rangle$, jež splňuje rovnici $F'(x) = f(x)$ v každém vnitřním bodě tohoto intervalu, můžeme $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ okamžitě (podle věty 48) vypočísti z rovnice $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$. Objasníme si to na **příkladech:**

1. Integrál $\int_2^7 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ jistě existuje. Funkce[40]) $\lg x$ je spojitá v intervalu $\langle 2, 7\rangle$ a má derivaci rovnou $\frac{1}{x}$ dokonce pro každé kladné x. Tedy jest $\int_2^7 \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lg 7 - \lg 2 = \lg \frac{7}{2}$.

2. Obdobně počítám $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x$; funkce $-\cos x$ je všude spojitá a má všude derivaci $\sin x$. Tedy jest $\int_0^\pi \sin x\,\mathrm{d}x =$ $= (-\cos \pi) - (-\cos 0) = -(-1) - (-1) = 2.$

Jestliže funkce $F(x)$ má derivaci rovnou funkci $f(x)$ pro všechna x otevřeného intervalu (a, b), říkáme, že funkce $F(x)$ je *primitivní funkcí* k funkci $f(x)$ v intervalu (a, b). Je viděti, že funkce $F(x)$, o níž se mluví ve větě 48, je funkce spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$, jež je v intervalu (a, b) primitivní funkcí k funkci $f(x)$. Z věty 48 a z příkladů, jež jsme právě uvedli, je jasná důležitost primitivních funkcí pro výpočet určitých integrálů; následující kapitola III bude věnována hlavně metodám pro výpočet primitivních funkcí.

Větu 48 lze velmi podstatně zobecniti; uvedeme zde jen jedno velmi jednoduché zobecnění:

---

[40]) Přidržuji se Kösslerova označení $\lg x$ pro přirozený logaritmus čísla x.

Věta 49. *Budiž $a < b$; nechť existuje integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Budiž $F(x)$ funkce spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$, jež má derivaci $F'(x) = f(x)$ ve všech bodech intervalu (a, b), vyjma nejvýše v konečném počtu bodů. Potom jest*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).^{41)}$$

Důkaz. Sestrojme čísla $a = a_0 < a_1 < a_2 < \ldots < a_{p-1} < a_p = b$ tak, že rovnice $F'(x) = f(x)$ je splněna v každém bodě intervalu (a, b), jenž nesplývá s žádným z bodů $a_0, a_1, \ldots, a_p$. Vezměme kterýkoliv interval $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, p)$. Podle věty 40 existuje $\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,\mathrm{d}x$. Ježto funkce $F(x)$ je spojitá v intervalu $\langle a_{i-1}, a_i\rangle$ a ježto rovnice $F'(x) = f(x)$ platí v každém bodě otevřeného intervalu (a_{i-1}, a_i), můžeme použíti věty 48 a dostáváme

$$\int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,\mathrm{d}x = F(a_i) - F(a_{i-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, p).$$

Podle věty 39 a podle poznámky k této větě je tedy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{p} \int_{a_{i-1}}^{a_i} f(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^{p} (F(a_i) - F(a_{i-1})) =$$
$$= F(a_p) - F(a_0) = F(b) - F(a),$$

jak bylo dokázati.

10. Definice integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pro $a > b$.

Dosud jsme

---

[41]) Rozdíl proti větě 48 jest v tom, že nepožadujeme, aby rovnice $F'(x) = f(x)$ byla splněna ve *všech* bodech intervalu (a, b), nýbrž připouštíme, aby existoval v intervalu (a, b) *konečný* počet bodů, v nichž rovnice $F'(x) = f(x)$ neplatí (buď proto, že $F'(x)$ v takovém bodě vůbec neexistuje nebo proto, že $F'(x)$ má hodnotu různou od čísla $f(x)$). Naproti tomu spojitost funkce $F(x)$ požadujeme v *celém* intervalu $\langle a, b\rangle$ bez výjimky.

definovali integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pro $a < b$ (v odst. 2) a pro $a = b$ (na počátku odst. 7). Doplníme tuto definici ještě pro případ $a > b$ takto:

Druhý dodatek k definici integrálu. *Budiž $a > b$; potom definujeme určitý integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ rovnicí $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$, jestliže ovšem $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje.*[42])

Tím máme definován určitý integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ pro $a < b$, pro $a = b$ i pro $a > b$. Přehlédněme ještě jednou, jak jsme jej definovali:

1. Je-li $a = b$, potom existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ tehdy a jen tehdy, je-li funkce $f(x)$ definována pro $x = a$; potom jest $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

2. Je-li $a < b$, potom existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ tehdy a jen tehdy, je-li funkce $f(x)$ ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$ a je-li $\overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$; potom jest $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \overline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x = \underline{\int_a^b} f(x)\,\mathrm{d}x$.

3. Je-li $a > b$, potom existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ tehdy a jen tehdy, existuje-li $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$; potom jest $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$.

---

[42]) Jest $b < a$, takže $\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x$ se béře ve smyslu, zavedeném v odst. 2. Obvyklé názvosloví (funkce integrovaná, integrační proměnná, meze integrálu) zachováváme i zde; v integrálu $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nazýváme číslo a vždy dolní mezí, číslo b horní mezí, i když jest $a > b$.

V předcházejících odstavcích odvodili jsme řadu vět pro integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ v případě $a < b$; podíváme se nyní, platí-li tyto věty též bez tohoto omezení (t. j. platí-li též pro $a = b$, $a > b$). Při tom se omezíme na nejdůležitější věty. Především ve větě 35 lze předpoklad $a < b$ vynechati; platí totiž

Věta 50. *Existují-li integrály* $\int_a^b f_1(x)\,dx$, $\int_a^b f_2(x)\,dx, \ldots, \int_a^b f_n(x)\,dx$ *a jsou-li* $c_1, c_2, \ldots, c_n$ *libovolná čísla, existuje i integrál* $\int_a^b (c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x))\,dx$ *a jest*

$$\int_a^b (c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) + \ldots + c_n f_n(x))\,dx = c_1 \int_a^b f_1(x)\,dx + c_2 \int_a^b f_2(x)\,dx + \ldots + c_n \int_a^b f_n(x)\,dx. \tag{35}$$

Důkaz. 1. Je-li $a = b$, je věta samozřejmá (všechny vyšetřované integrály se rovnají nule). 2. Je-li $a < b$, je tato věta totožná s větou 35. 3. Je-li konečně $a > b$, použijme toho, že existují podle předpokladu integrály $\int_b^a f_1(x)\,dx$, $\int_b^a f_2(x)\,dx, \ldots, \int_b^a f_n(x)\,dx$. Ježto je $b < a$, můžeme použíti věty 35. Tedy existuje $\int_b^a (c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x))\,dx$ a jest

$$\int_b^a (c_1 f_1(x) + \ldots + c_n f_n(x))\,dx = c_1 \int_b^a f_1(x)\,dx + \ldots + c_n \int_b^a f_n(x)\,dx;$$

násobíme-li tento vztah na obou stranách číslem -1, dostáváme hledaný vztah (35). Rovněž ve větě 39 lze předpoklad $a < b < c$ vynechati; platí totiž

Věta 51. *Existují-li integrály* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$, *existuje i integrál* $\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ *a jest*

$$\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{36}$$

Důkaz. 1. Jsou-li aspoň dvě ze tří čísel a, b, c sobě rovna, je věta 51 správná. Neboť je-li předně $a = b$, jest $\int_a^b = 0$[43]) a tedy vzorec (36) platí. Je-li za druhé $b = c$, je $\int_b^c = 0$ a vzorec (36) opět platí; je-li konečně $a = c$, jest podle 2. dodatku k definici integrálu $\int_a^b + \int_b^c = 0 = \int_a^c$, takže vzorec (36) opět platí.

2. Zbývá tedy případ, že všechna tři čísla a, b, c jsou navzájem různá; zde je možno šest různých pořadí podle velikosti:

I) $a < b < c$: v tomto případě platí vzorec (36) podle věty 39.

II) $a < c < b$; zde jest podle věty 39 a 40 $\int_a^b = \int_a^c + \int_c^b$, tedy $\int_a^c = \int_a^b - \int_c^b = \int_a^b + \int_b^c$, jak bylo dokázati.

III) $b < a < c$; zde jest podle věty 39 a 40 $\int_b^c = \int_b^a + \int_a^c$, čili $\int_a^c = \int_b^c - \int_b^a = \int_a^b + \int_b^c$, jak bylo dokázati.

---

[43]) Pro zkrácení vynechávám $f(x)\,\mathrm{d}x$; místo $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ píši tedy $\int_a^b$ atd.

IV) $b < c < a$; zde jest $\int\limits_b^a = \int\limits_b^c + \int\limits_c^a$, čili $\int\limits_a^c = -\int\limits_c^a =$
$= \int\limits_b^c - \int\limits_b^a = \int\limits_a^b + \int\limits_b^c$.

V) $c < a < b$; zde jest $\int\limits_c^b = \int\limits_c^a + \int\limits_a^b$, čili $\int\limits_a^c = -\int\limits_c^a =$
$= \int\limits_a^b - \int\limits_c^b = \int\limits_a^b + \int\limits_b^c$.

VI) $c < b < a$; zde jest $\int\limits_c^a = \int\limits_c^b + \int\limits_b^a$; násobím-li číslem -1,
dostanu $\int\limits_a^c = \int\limits_a^b + \int\limits_b^c$.

Úplnou indukcí plyne z věty 51 okamžitě

Věta 52. *Existují-li integrály* $\int\limits_{a_1}^{a_2} f(x)\,\mathrm{d}x, \int\limits_{a_2}^{a_3} f(x)\,\mathrm{d}x, \ldots, \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x$, *existuje i integrál* $\int\limits_{a_1}^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x$ *a jest*

$$\int\limits_{a_1}^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{a_1}^{a_2} f(x)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{a_2}^{a_3} f(x)\,\mathrm{d}x + \ldots + \int\limits_{a_{n-1}}^{a_n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Větu 45 lze zobecniti takto:

Věta 53. *Budiž $a < b$; nechť existuje integrál* $\int\limits_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. *Budiž c libovolné číslo intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom platí tato tvrzení:*

1. Funkce $\int\limits_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$[44]) *jest spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$.*

---

[44]) Tento integrál je funkcí proměnné x.

2. *Je-li $a < x < b$ a je-li funkce $f(t)$ spojitá v bodě x, existuje v tomto bodě derivace*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t\right) = f(x).^{45)}$$

Důkaz. Jest $\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_c^a f(t)\,\mathrm{d}t + \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ (podle věty 51); ježto $\int_c^a$ jest konstanta (t. j. číslo nezávislé na x), plyne věta 53 okamžitě z věty 45.

Ve větě 53 jsme vyšetřovali integrál jakožto funkci *horní* meze; obdobně můžeme vyšetřovati integrál jako funkci *dolní* meze; dostáváme tuto větu:

Věta 54. *Budiž $a < b$; nechť existuje integrál $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$. Budiž c libovolné číslo intervalu $\langle a, b\rangle$. Potom platí tato tvrzení:*

1. *Funkce $\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t$ jest spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$.*

2. *Je-li $a < x < b$ a je-li funkce $f(t)$ spojitá v bodě x, existuje v tomto bodě derivace*

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t\right) = -f(x).^{46)}$$

Důkaz. Ježto jest $\int_x^c f(t)\,\mathrm{d}t = -\int_c^x f(t)\,\mathrm{d}t$, plyne věta 54 okamžitě z věty 53.

Ve větách 42, 46, 47, 48, 49 jsme předpokládali $a < b$; jak tyto věty nutno upraviti, když jest $a > b$, není snad třeba obšírně vypisovati; omezme se na to, že ukážeme, jak vypadá obdoba k větám 47 a 48 pro $a > b$:

---

[45]) Jediný rozdíl proti větě 45 je tedy ten, že dolní mez nemusí býti právě rovna číslu a, nýbrž může býti rovna libovolnému číslu c z intervalu $\langle a, b\rangle$; platí ovšem též poznámka obdobná k pozn. [37]) na str. 61 o derivaci zprava a zleva.

[46]) Platí ovšem zase příslušná poznámka o derivaci zprava a zleva.

Věta 55. *Budiž $a > b$; budiž $f(x)$ funkce spojitá v uzavřeném intervalu $\langle b, a\rangle$*[47]*; potom $\int_a^b f(x)\,dx$ existuje.*

Důkaz. Jest $b < a$; podle věty 47 existuje tedy $\int_b^a f(x)\,dx$, a tedy — podle definice — existuje též $\int_a^b f(x)\,dx$.

Věta 56. *Budiž $a > b$; nechť existuje integrál $\int_a^b f(x)\,dx$. Budiž $F(x)$ funkce spojitá v uzavřeném intervalu $\langle b, a\rangle$, jež v každém bodě otevřeného intervalu (b, a) má derivaci $F'(x) = f(x)$. Potom jest*

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a). \tag{37}$$

Důkaz. Podle předpokladu existuje $\int_a^b f(x)\,dx$, tedy existuje též $\int_b^a f(x)\,dx$; ježto je $b < a$, můžeme použíti věty 48, čímž dostáváme rovnici $\int_b^a f(x)\,dx = F(a) - F(b)$; násobíme-li tuto rovnici číslem -1, dostáváme hledaný vztah (37).

Obdobně mohli bychom i k ostatním větám, jež jsme pro integrál $\int_a^b f(x)\,dx$ odvodili v případě $a < b$, nalézti věty obdobné pro případ $a > b$. Na př. věta 37 zněla takto: Budiž $a < b$; nechť existují integrály $\int_a^b f_1(x)\,dx$, $\int_a^b f_2(x)\,dx$; budiž $f_1(x) \geqq f_2(x)$ pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$; potom jest $\int_a^b f_1(x)\,dx \geqq \int_a^b f_2(x)\,dx$. Příslušná věta pro $a > b$ zní takto: Budiž $a > b$; nechť existují

[47]) Píši ovšem $\langle b, a\rangle$ a nikoliv $\langle a, b\rangle$, ježto je $b < a$.

integrály $\int_a^b f_1(x)\,dx$, $\int_a^b f_2(x)\,dx$; budiž $f_1(x) \geqq f_2(x)$ pro všechna x intervalu $\langle b, a\rangle$; potom jest $\int_a^b f_1(x)\,dx \leqq \int_a^b f_2(x)\,dx$.[48]) Neboť — ježto $b < a$ — plyne z věty 37 nerovnost $\int_b^a f_1(x)\,dx \geqq \int_b^a f_2(x)\,dx$; násobíme-li obě strany této nerovnosti *záporným* číslem -1, musíme současně obrátiti smysl této nerovnosti, čímž dostáváme hledanou nerovnost $\int_a^b f_1(x)\,dx \leqq \int_a^b f_2(x)\,dx$.

CVIČENÍ.

1. Budiž $f(x)$ funkce ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$[49]); její horní (resp. dolní) hranici v intervalu $\langle a, b\rangle$ označme znakem M (resp. m). Rozdíl $M - m$ nazýváme *oscilací* funkce $f(x)$ v int. $\langle a, b\rangle$ a označíme jej znakem $\Omega(f(x); \langle a, b\rangle)$, takže $\Omega(f(x); \langle a, b\rangle) = M - m$.

Dokažte toto: označíme-li znakem $\mathfrak{M}$ množinu všech čísel $f(x') - f(x'')$, kde čísla x', x'' probíhají všechny hodnoty intervalu $\langle a, b\rangle$, je oscilace funkce $f(x)$ v int. $\langle a, b\rangle$ rovna horní hranici množiny $\mathfrak{M}$. To znamená tedy: Jsou-li x', x'' dvě libovolná čísla int. $\langle a, b\rangle$, je

$$f(x') - f(x'') \leqq \Omega(f(x); \langle a, b\rangle); \tag{38}$$

je-li však ε libovolné kladné číslo, pak existují čísla x', x'' intervalu $\langle a, b\rangle$ tak, že je

$$f(x') - f(x'') > \Omega(f(x); \langle a, b\rangle) - \varepsilon. \tag{39}$$

Dokažte ještě, že poslední věta zůstane správnou i tehdy, nahradíme-li v nerovnostech (38), (39) výraz $f(x') - f(x'')$ výrazem $|f(x') - f(x'')|$.

2. Budiž $f(x)$ funkce ohraničená v intervalu $\langle a, b\rangle$; budiž D libovolné rozdělení int. $\langle a, b\rangle$, definované dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Jako obvykle budiž M_i (resp. m_i) horní (resp. dolní) hranice funkce $f(x)$ v int. $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$, $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$, $S(D) = \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i$, $s(D) = \sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i$. Položme $\Omega_i = M_i - m_i$, takže Ω_i je oscilace funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$; položme ještě $\omega(D) = S(D) - s(D) = \sum_{i=1}^{n} \Omega_i\,\Delta x_i$.

---

[48]) Smysl nerovnosti je tedy v případě $a > b$ opačný než v případě $a < b$.

[49]) Ve všech cvičeních ke kap. II předpokládám $a < b$.

Dokažte tyto dvě věty:

I. Má-li funkce $f(x)$ určitý integrál od a do b, potom ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že nerovnost $\omega(D) < \varepsilon$ platí pro všechna rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$, pro něž je $\varrho(D) < \delta$ (znak $\varrho(D)$ byl zaveden před větou 26).

II. Existuje-li ke každému kladnému číslu ε rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ tak, že je $\omega(D) < \varepsilon$, má funkce $f(x)$ urč. integrál od a do b.

3. Dokažte: Jsou-li funkce $f_1(x)$, $f_2(x)$ ohraničené v int. $\langle a, b\rangle$ a jsou-li c_1, c_2 libovolná čísla, je

$$\Omega(c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x); \langle a, b\rangle) \leqq |c_1|\, \Omega(f_1(x); \langle a, b\rangle) + \\ + |c_2|\, \Omega(f_2(x); \langle a, b\rangle).$$

4. Užívajíce cvič. 2 a 3, odvoďte nový důkaz této věty: jsou-li c_1, c_2 libovolná čísla a má-li funkce $f_1(x)$ i funkce $f_2(x)$ urč. integrál od a do b, má i funkce $c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x)$ urč. integrál od a do b.

5. Dokažte: Funkce $f(x), g(x)$ nechť jsou ohraničené v intervalu $\langle a, b\rangle$, takže existuje číslo K tak, že pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ je $|f(x)| \leqq K$, $|g(x)| \leqq K$. Potom je

$$\Omega(f(x)\, g(x); \langle a, b\rangle) \leqq K(\Omega(f(x); \langle a, b\rangle) + \Omega(g(x); \langle a, b\rangle)).$$ [50])

6. Užívajíce cvič. 2 a 5, dokažte tuto větu: má-li funkce $f(x)$ i funkce $g(x)$ urč. integrál od a do b, má i funkce $f(x)\, g(x)$ urč. integrál od a do b.

7. Dokažte: Funkce $f(x)$ budiž ohraničena v int. $\langle a, b\rangle$; také funkce $\frac{1}{f(x)}$ budiž ohraničena v int. $\langle a, b\rangle$,[51]) takže existuje číslo K takové, že pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ je $\left|\frac{1}{f(x)}\right| \leqq K$. Potom je

$$\Omega\left(\frac{1}{f(x)}; \langle a, b\rangle\right) \leqq K^2\, \Omega(f(x); \langle a, b\rangle).$$

8. Užívajíce cvič. 2 a 7, dokažte tuto větu: má-li funkce $f(x)$ urč. integrál od a do b a je-li funkce $\frac{1}{f(x)}$ ohraničena v int. $\langle a, b\rangle$, má i funkce $\frac{1}{f(x)}$ urč. integrál od a do b.

9. Z cvič. 7 a 8 plyne: Má-li funkce $f(x)$ i funkce $g(x)$ urč. integrál od a do b a je-li funkce $\frac{1}{g(x)}$ ohraničena v int. $\langle a, b\rangle$, má i funkce $\frac{f(x)}{g(x)}$ urč. integrál od a do b.

---

[50]) K důkazu užijte vzorce $f(x')\, g(x') - f(x'')\, g(x'') = f(x')\,(g(x') - g(x'')) + g(x'')\,(f(x') - f(x''))$.

[51]) V tomto předpokladu je již obsažen předpoklad, že funkce $\frac{1}{f(x)}$ je definována v intervalu $\langle a, b\rangle$, t. j. že je $f(x) \neq 0$ pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$. Tuto poznámku mějte na paměti i při cvič. 8, 9.

10. Dokažte: Je-li funkce $f(x)$ ohraničena v intervalu $\langle a, b\rangle$, je

$$\Omega(|f(x)|; \langle a, b\rangle) \leqq \Omega(f(x); \langle a, b\rangle)$$

(užijte toho, že $|f(x')| - |f(x'')| \leqq |f(x') - f(x'')|$).

11. Z cvičení 2 a 10 plyne tato věta: Má-li funkce $f(x)$ urč. integrál od a do b, má i funkce $|f(x)|$ urč. integrál od a do b.

12. Používajíce věty 31 a cvič. 11, dokažte tuto větu: Má-li funkce $f(x)$ urč. integrál od a do b, jest

$$\left|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leqq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x.$$

Místo věty 31 lze též užíti vět 37, 35.

13. O funkci $f(x)$ říkáme, že je *neklesající* (resp. *nerostoucí*) v int. $\langle a, b\rangle$, jestliže nerovnost

$$f(x_1) \leqq f(x_2) \quad (\text{resp. } f(x_1) \geqq f(x_2))$$

platí pro všechny hodnoty x_1, x_2, jež splňují nerovnosti $a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$. Funkce neklesající a nerostoucí v int. $\langle a, b\rangle$ zahrnujeme pod společný název „funkce *monotonní* v. int. $\langle a, b\rangle$". Užívajíce cvič. 2, dokažte, že každá funkce monotonní v int. $\langle a, b\rangle$ má urč. integrál od a do b.

14. Dokažte tuto větu (t. zv. *1. větu o střední hodnotě integrálního počtu*): Buďte m, M dvě čísla a $f(x)$, $g(x)$ dvě funkce, jež mají urč. integrál od a do b. Pro všechna x intervalu $\langle a, b\rangle$ budiž $m \leqq f(x) \leqq M$, $g(x) \geqq 0$. Potom je

$$m \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqq \int_a^b f(x)\,g(x)\,\mathrm{d}x \leqq M \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x.$$

15. Dokažte: je-li funkce $f(x)$ nerostoucí v intervalu $\langle a, a + kh\rangle$ (k celé kladné, $h > 0$), je

$$h(f(a + h) + f(a + 2h) + \ldots + f(a + kh)) \leqq \int_a^{a+kh} f(x)\,\mathrm{d}x \leqq$$

$$\leqq h(f(a) + f(a + h) + \ldots + f(a + (k - 1)\,h)).$$

(Je-li $f(x)$ neklesající, obrátí se znamení nerovnosti. Existence integrálu plyne z cvič. 13.)

16. Dokažte, že existuje limita (zvaná „Eulerova konstanta")

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \lg n\right).$$

Návod. Položme $v_n = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n} - \lg n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Pro $0 < a < b$ dostanete z věty 48 snadno

$$\int_a^b \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lg \frac{b}{a}.$$

Kladouce ve cvič. 15 $a = n$, $k = h = 1$, $f(x) = 1/x$, obdržíte

$$v_{n+1} - v_n = \frac{1}{n+1} - \lg \frac{n+1}{n} \leqq 0;$$

kladouce ve cvič. 15 $a = 1$, $h = 1$, $k = n - 1$, $f(x) = 1/x$, obdržíte $1/n \leqq v_n \leqq 1$.

Hledaný výsledek plyne pak z vět o limitách monotonních posloupností (Kössler 22—23).

17. Dokažte: budiž $f(x)$ funkce kladná a nerostoucí v intervalu $\langle a, \infty)$ (t. j. pro $a \leqq x_1 < x_2$ je $0 < f(x_2) \leqq f(x_1)$). Potom nekonečná řada $f(a) + f(a + 1) + f(a + 2) + \ldots$ je konvergentní tehdy a jen tehdy, existuje-li číslo K tak, že pro všechna kladná n jest

$$\int_a^{a+n} f(x)\,\mathrm{d}x < K.$$

Návod: užijte cvičení 15 a věty, že řada s kladnými členy konverguje tehdy a jen tehdy, je-li posloupnost jejích částečných součtů shora ohraničena (Kössler 38).

18. Dokažte: řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ je konvergentní pro $\alpha > 1$, divergentní pro $\alpha \leqq 1$.

Návod: Je-li $\alpha \geqq 1$, užijte výsledku cvičení 17 pro $a = 1$, $f(x) = x^{-\alpha}$; příslušný integrál vypočtete podle věty 48, uvážíte-li, že[52])

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\lg x) = \frac{1}{x}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right) = x^{-\alpha} \text{ pro } \alpha \neq 1.$$

Pro $\alpha < 1$ je pak $n^{-\alpha} > n^{-1}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ a princip přirovnávání řad[53]) dává divergenci.

19. Dokažte: řada $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha (\lg n)^\beta}$ je konvergentní, je-li buďto $\alpha > 1$ nebo $\alpha = 1$, $\beta > 1$; ve všech ostatních případech je řada divergentní.

Návod: Napřed rozřešte případ $\alpha = 1$, $\beta \geqq 1$, užívajíce cvičení 17 pro

$$a = 2, \ f(x) = \frac{1}{x (\lg x)^\beta};$$

příslušný integrál vypočtete podle věty 48, uvážíte-li, že

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\Big(\lg (\lg x)\Big) = \frac{1}{x \lg x}, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{(\lg x)^{1-\beta}}{1-\beta}\right) = \frac{1}{x (\lg x)^\beta} \text{ pro } \beta \neq 1.$$

Ostatní případy převedete na případ $\alpha = 1$, $\beta \geqq 1$ takto: budiž ε kladné, γ libovolné; potom je

---

[52]) Čtenář sám nechť uváží, pro která x tyto a podobné vzorce ve cvič. 18, 19, 20 platí.

[53]) Kössler str. 39, řádek 1—17.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\lg x)^{\gamma}}{x^{\varepsilon}} = 0$$

(pro $\gamma \leqq 0$ je tento výsledek samozřejmý; pro $\gamma > 0$ viz Kössler, str. 99 dole).

Je-li tedy $\alpha > 1$, je pro dosti velká n

$$\frac{1}{n^{\alpha}(\lg n)^{\beta}} < \frac{1}{n(\lg n)^2}$$

a řada konverguje[54]); je-li $\alpha < 1$, je pro dosti velká n

$$\frac{1}{n^{\alpha}(\lg n)^{\beta}} > \frac{1}{n \lg n}$$

a řada diverguje[54]); tentýž výsledek platí konečně pro $\alpha = 1$, $\beta < 1$.

20. (Trochu těžší; zobecnění cvič. 18 a 19.) Položte $\lg_2 x = \lg(\lg x)$, $\lg_3 x = \lg(\lg_2 x), \ldots$, obecně $\lg_m x = \lg(\lg_{m-1} x)$ $(m = 3, 4, \ldots)$. Dokažte: řada

$$\sum_{n=a}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha_0}(\lg n)^{\alpha_1}(\lg_2 n)^{\alpha_2}\ldots(\lg_k n)^{\alpha_k}}$$ [55])

konverguje tehdy a jen tehdy, má-li řada čísel

$$\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$$

tuto vlastnost: v této řadě existuje aspoň jedno číslo různé od 1 a první z těch čísel různých od 1 je větší než 1. Na př. pro $k = 2$ je řada konvergentní, je-li buďto $\alpha_0 > 1$, nebo $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 > 1$, nebo $\alpha_0 = \alpha_1 = 1$, $\alpha_2 > 1$; v ostatních případech je divergentní.

Návod: podobně jako v cvič. 19 rozřešte napřed případ $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{k-1} = 1$, $\alpha_k \geqq 1$, užívajíce vzorců

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\lg_{k+1} x) = \frac{1}{x \lg x \lg_2 x \ldots \lg_k x},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{(\lg_k x)^{1-\alpha_k}}{1-\alpha_k}\right) = \frac{1}{x \lg x \lg_2 x \ldots \lg_{k-1} x (\lg_k x)^{\alpha_k}} \text{ pro } \alpha_k \neq 1.$$

Ostatní případy lze — podobně jako v cvič. 19 — na tento případ převésti.

---

[54]) Podle principu přirovnávání řad.

[55]) Celé číslo a je voleno tak, aby všichni členové řady měli smysl.