Tereza Bártlová
Archimedova úloha o dobytku

In: Zdeněk Halas (editor); Jindřich Bečvář (author); Martina Bečvářová (author); Zdeněk Halas (author); Tereza Bártlová (author); Vlasta Moravcová (author): Archimédés. Několik pohledů do jeho života a díla. (Czech). Praha: MATFYZPRESS, Vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty v Praze, 2012. pp. 99–[108].

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402381

ARCHIMÉDOVA ÚLOHA O DOBYTKU

Tereza Bártlová

1 Objev úlohy

Píše se rok 1770 a knihovna v dolnosaském Wolfenbüttelu se těší slávě po celém Německu. Léta, po která v ní shromažďovali knihy brunšvičtí vévodové, v ní skryly velmi cenné písemnosti. Však je kdysi opatroval sám Gottfried Wilhelm Leibniz a nyní zde sedí na místě knihovníka německý novinář, kritik a teolog Gotthold Ephraim Lessing (1729–1781). A právě zde G. E. Lessing objevil v jednom starém řeckém kodexu dosud neznámou úlohu zapsanou 22 řeckými distichy. V roce 1773 pak tuto úlohu zveřejnil ve své knize [Les]. V 19. století byla stejná úloha objevena také v jednom z kodexů Bibliothèque nationale v Paříži.

2 Zadání úlohy

Dnes je tato úloha nazývána jako *Úloha o dobytku, Kraví úloha, Úloha o Héliových býcích, Probléma boeikon, Problema Archimedis, The Cattle Problem, Die Rinder-Aufgabe* a podobně. Dochovaný řecký text úlohy je psán ve verších. Jeho český překlad, který je formulován v próze, zní takto:

Problém, který Archimédés vymyslel a v epigramech jej těm, kteří se v Alexandrii zabývají podobnými otázkami, poslal v dopise Eratosthenovi Kyrénskému.

Řekni mi, příteli, přesný počet Héliova skotu. Pečlivě mi vypočítej, není-li ti moudrost cizí, kolik ho bylo, když se jednou pásl na nivách ostrova Sicílie, rozdělen do čtyř stád. Každé stádo bylo jinak zbarveno; první bylo mléčně bílé, ale druhé zářilo zcela tmavou černí. Třetí pak bylo hnědé, čtvrté strakaté; v každém měli býci v počtu velikou převahu. A tito [býci] *byli nyní v takovémto poměru: bílí se rovnali v počtu hnědým vzatým dohromady s třetinou a polovinou černých, ó příteli. Dále množství černých bylo rovno čtvrtině a pětině strakatých zvětšených o všechny hnědé. Nakonec musíš počet strakatých býků položit rovný, příteli, šestině a sedmině bílých s přičteným ještě množstvím hnědých.*

Jinak však tomu bylo s kravami: ty s bílou srstí byly rovny třetině a čtvrtině černého skotu, krav i býků. Dále černé krávy byly rovny čtvrtině a pětině strakatého stáda, když byli počítáni jak býci, tak krávy. Právě tak byly strakaté krávy pětinou a šestinou všeho [skotu] *s hnědou srstí, když šel na pastvu. Nakonec hnědé krávy byly šestinou a sedminou celého stáda s bílou srstí.*

Můžeš-li mi říci přesně, můj příteli, kolik skotu tam bylo dohromady a také kolik bylo krav každé barvy a dobře živených býků, pak tě věru právem nazývají zdatným v počtech.

Ještě tě však nepočítají k mudrcům; nuže pojď tedy a řekni mi, jak se to má dále:

Když se spojil celkový počet černých a bílých býků, pak zde stáli uspořádáni stejně do šířky jako do hloubky; širé sicilské nivy byly zcela zaplněny tím množstvím býků. Když se však postavili dohromady hnědí a strakatí, pak byl vytvořen trojúhelník, jeden stál na špičce a nechyběl žádný z hnědých a strakatých býků, ani jeden jiné barvy se mezi nimi nenašel.

Když jsi to také vypátral a v duchu pochopil a uvedeš mi poměr, příteli, který se nalézá v každém stádu, pak můžeš pyšně vykračovat jako vítěz, protože teď tvá vědecká sláva jasně září.

Uvedené znění úlohy je citováno z knihy [BŠ], kde je uveden mírně upravený překlad z knihy [Mač]. Navíc je znění úlohy doplněno ještě o překlad úvodu, který v knize [Mač] chybí.

Úkolem Archimédovy úlohy je tedy vypočítat, kolik je bílých, černých, strakatých a hnědých býků a krav pasoucích se na Sicílii ve čtyřech stádech boha Hélia.

3 Výpočet první části úlohy

Podmínky první části úlohy můžeme vyjádřit pomocí sedmi lineárních rovnic o osmi neznámých:

$$\begin{aligned}
X &= \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) \cdot Y + T,\\
Y &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \cdot Z + T,\\
Z &= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \cdot X + T,\\
x &= \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) \cdot (Y + y),\\
y &= \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5}\right) \cdot (Z + z),\\
z &= \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6}\right) \cdot (T + t),\\
t &= \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) \cdot (X + x),
\end{aligned}$$

kde X, Y, Z, T značí počet bílých, černých, strakatých a hnědých býků a analogicky x, y, z, t je počet bílých, černých, strakatých a hnědých krav. Ve skutečnosti jde o takzvanou diofantickou úlohu, neboť hledáme řešení úlohy v oboru přirozených čísel. Výše uvedenou soustavu rovnic budeme řešit standardním způsobem – nejprve provedeme eliminaci neznámých v prvních třech rovnicích

$$\begin{aligned}
Z = \frac{13}{42}\, X + T &= \\
= \frac{13}{42}\left(\frac{5}{6}\, Y + T\right) + T &= \\
= \frac{13}{42}\left[\frac{5}{6}\left(\frac{9}{20}\, Z + T\right) + T\right] &+ T\,.
\end{aligned}$$

Odtud dostáváme

$$891\,Z = 1\,580\,T.$$

Protože jsou čísla 981 a 1 580 navzájem nesoudělná, rovnost nastává pro

$$Z = 1\,580\,k \quad \text{a} \quad T = 891\,k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Nyní již snadno vyjádříme hodnoty X a Y pomocí k:

$$X = 2\,226\,k \quad \text{a} \quad Y = 1\,602\,k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Dosadíme-li získané řešení do zbylých rovnic, vypočítáme tak hodnoty x, y, z, t:

$$\begin{aligned}
t &= \frac{13}{42}\,(X + x)\\
&= \frac{13}{42}\left[X + \frac{7}{12}\,(Y + y)\right]\\
&= \frac{13}{42}\left[X + \frac{7}{12}\left(Y + \frac{9}{20}\,(Z + z)\right)\right]\\
&= \frac{13}{42}\left[X + \frac{7}{12}\left[Y + \frac{9}{20}\left(Z + \frac{11}{30}\,(T + t)\right)\right]\right]\\
&= \frac{13}{42}\left[2\,226\,k + \frac{7}{12}\left[1\,602\,k + \frac{9}{20}\left(1\,580\,k + \frac{11}{30}\,(891\,k + t)\right)\right]\right]\\
&= \frac{5\,439\,213}{4\,657}\,k,
\end{aligned}$$

a dále pak:

$$x = \frac{7\,206\,360}{4\,657}\,k, \quad y = \frac{4\,893\,246}{4\,657}\,k, \quad z = \frac{3\,515\,820}{4\,657}\,k, \quad k \in \mathbb{N}.$$

My však hledáme celočíselná řešení, proto nejmenší možné řešení zadané úlohy odpovídá 4 657násobku námi získaného řešení:

$$\begin{aligned}
X &= 2\,226 \cdot 4\,657\,n = 10\,366\,482\,n & x &= 7\,206\,360\,n\\
Y &= 1\,602 \cdot 4\,657\,n = 7\,460\,514\,n & y &= 4\,893\,246\,n\\
Z &= 1\,580 \cdot 4\,657\,n = 7\,358\,060\,n & z &= 3\,515\,820\,n\\
T &= 891 \cdot 4\,657\,n \;= 4\,149\,387\,n & t &= 5\,439\,213\,n
\end{aligned}$$

kde opět n musí být nějaké přirozené číslo. Pomocí těchto výsledků můžeme odpovědět na první část Archimédovy úlohy. Celkový počet býků je 29 334 443, celkový počet krav činí 21 054 639, a tudíž celkový počet kusů dobytka Héliových stád na Sicílii je 50 389 082. Uvážíme-li, že rozloha Sicílie je něco přes 25 700 km^2, má pro sebe jeden kus dobytka přibližně 510 m^2.

Všimněme si, že v zadání úlohy se hovoří o tom, že býků je vždy více než krav: *... v každém* [stádu] *měli býci v počtu velikou převahu.* Což ovšem neodpovídá našemu řešení, neboť jsme vypočítali, že počet hnědých býků je menší než počet hnědých krav.

Poznamenejme také, že k úloze bylo později připojeno scholion[1], které publikoval zároveň s úlohou již G. E. Lessing. Toto scholion obsahuje řešení úlohy, jež je 80násobkem námi vypočteného řešení. Celkový počet kusů dobytka pak činí 4 031 126 560. Což vzhledem k rozloze Sicílie znamená, že by měl jeden kus dobytka k dispozici jen o něco málo více než 6 m^2. Z jakého důvodu je však ve scholiu uvedeno větší řešení, které navíc nevyhovuje dodatečným podmínkám z druhé části úlohy, není dosud známo.

4 Výpočet druhé části úlohy

Nezapomeňme, že v druhé části úlohy jsou uvedeny ještě další dvě podmínky. Někteří badatelé je považují za původní, jiní se domnívají, že byly přidány později. Podle doplňujících podmínek je možno bílé a černé býky seřadit do čtverce, zatímco strakaté a hnědé býky je možno seřadit do trojúhelníku. Číslo $X+Y$ má být tedy takzvaným čtvercovým figurálním číslem a číslo $Z+T$ trojúhelníkovým figurálním číslem:

$$X+Y=u^2, \qquad Z+T=\frac{1}{2}\,v\,(v+1), \qquad \text{kde } u,v\in\mathbb{N}.$$

Zaměřme se nejprve na výpočet čtvercového čísla:

$$\begin{aligned} X+Y &= 2\,226\cdot 4\,657\,n+1\,602\cdot 4\,657\,n=\\ &=3\,828\cdot 4\,657\,n=u^2. \end{aligned}$$

Chceme určit $n\in\mathbb{N}$ tak, aby součin $3\,828\cdot 4\,657\,n$ byl celočíselně odmocnitelný. Využijeme k tomu prvočíselný rozklad:

$$\begin{aligned} X+Y &= 3\,828\cdot 4\,657\,n=\\ &=2^2\cdot 3\cdot 11\cdot 29\cdot 4\,657\,n=u^2. \end{aligned}$$

Odtud vidíme, že číslo n musí být ve tvaru

$$n=3\cdot 11\cdot 29\cdot 4\,657\,l^2, \quad \text{kde } l\in\mathbb{N}.$$

Získaný výsledek využijeme k určení trojúhelníkového čísla:

$$\begin{aligned} Z+T &= 1\,580\cdot 4\,657\,n+891\cdot 4\,657\,n=\\ &=2\,471\cdot 4\,657\,n=\\ &=2\,471\cdot 4\,657^2\cdot 3\cdot 11\cdot 29\cdot l^2=\\ &=2\,364\,747\cdot 4\,657^2\cdot l^2=\frac{1}{2}\,v\,(v+1). \end{aligned}$$

[1]Scholion je výkladová poznámka k textu. Scholia byla psána přímo na okraj textu nebo jako samostatná díla.

Dostáváme tak kvadratickou rovnici

$$v^2 + v - 4\,729\,494 \cdot 4\,657^2\, l^2 = 0,$$

pro jejíž kořeny platí známý vzorec

$$v_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 4 \cdot 4\,729\,494 \cdot 4\,657^2\, l^2}}{2},$$

kde v musí být přirozené číslo. Abychom tuto podmínku splnili, musí být čitatel tohoto zlomku sudé číslo, odmocnina diskriminantu $\sqrt{D}$ tedy musí být číslo přirozené a liché. Hledáme tedy $p \in \mathbb{N}$ takové, že

$$D = 1 + 4 \cdot 4\,729\,494 \cdot 4\,657^2\, l^2 = p^2.$$

Výpočet diskriminantu však není vůbec triviální, neboť vede na řešení Pellovy rovnice, které se zpravidla provádí pomocí řetězových zlomků. Pro přehlednost označme $m = 2 \cdot 4\,657\, l$, a tedy zřejmě $m \in \mathbb{N}$, čímž přejde zmíněná Pellova rovnice na tvar

$$p^2 - 4\,729\,494\, m^2 = 1,$$

kde p hledáme v oboru přirozených čísel.

Z výpočtu je vidět, že ačkoliv na první pohled působí zadání Archimédovy úlohy jednoduše, její řešení je dosti obtížné. Jako první provedl odhad řešení, které vyhovuje i dodatečným podmínkám, matematik A. Amthor (viz druhou část článku [KrA] z roku 1880), který vypočetl, že celkový počet kusů dobytka začíná číslicemi 7 766 a skládá se z 206 545 cifer. Platné jsou však pouze první tři číslice.

Na jeho výpočet navázala skupina matematiků s názvem Hillsboro Mathematical Club z Illinois, kteří spočítali prvních 31 číslic a posledních 12 číslic z celkového počtu dobytka:

$$7\,760\,271\,406\,486\,818\,269\,530\,232\,833\,2\underline{09} \ldots 719\,455\,081\,800.$$

Výsledek jejich čtyřleté práce publikoval A. H. Bell ve svém článku [Bel]. Správných je však pouze prvních 29 cifer, neboť místo podtržených číslic 09 má být 13.

S nástupem počítačů přichází v roce 1965 první úplné řešení problému. První výpočet pomocí počítače byl proveden matematiky z Univerzity ve Waterloo a uveřejněn H. C. Williamsem, R. A. Germanem a C. R. Zarnkem v článku [WGZ]. Autoři článku uvádějí, že výpočet trval 7 hodin a 49 minut a byl vytištěn na 42 arších papíru. Pro představu si uvedeme prvních a posledních padesát číslic:

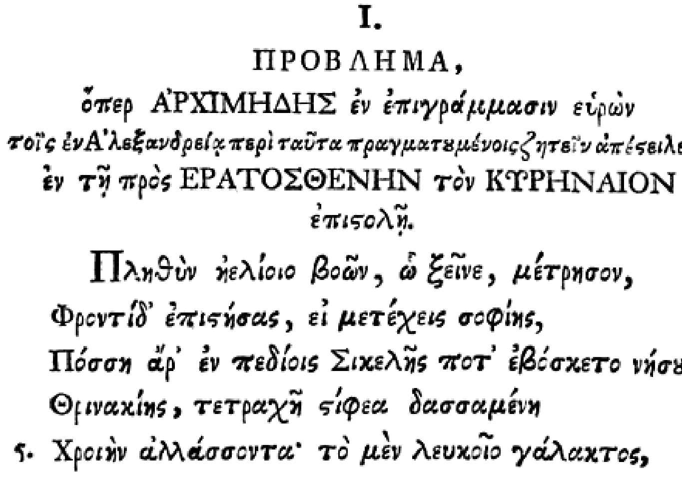
$$7\,760\,271\,406\,486\,818\,269\,530\,232\,833\,213\,886\,664\,232\,322\,405\,923\,3 \ldots$$
$$\ldots 05\,994\,630\,144\,292\,500\,354\,883\,118\,973\,723\,406\,626\,719\,455\,081\,800.$$

V roce 1981 dokázal správnost výsledku Harry L. Nelson ve svém článku [Nel1], ale také ve své zprávě [Nel2]. Díky dokonalejšímu přístroji bylo řešení úlohy nalezeno už po 10 minutách.

Dnes můžeme k výpočtu řešení úlohy využít matematické programy[2] podobně, jako je využívá například matematik I. Vardi ve svém článku [Var]. V závěru této studie uvádíme kompletní zdrojový kód pro řešení Archimédovy úlohy o dobytku zapsaný pomocí vestavěných funkcí programu Mathematica. Spustíme-li tento kód v programu Mathematica (verze 8), dostaneme řešení Archimédovy úlohy i s jejími dodatečnými podmínkami za pouhou jednu sekundu.

5 Historické poznámky

Co se týče Archimédova autorství, ani v dnešní době nepanuje na původ úlohy o dobytku jednotný názor. Od 18. století se jich objevilo hned několik. Jeden z nich se opírá o fakt, že starověk připisoval úlohu právě Archimédovi, z čehož se v souhlasu s nadpisem připojeným k úloze vyvozuje, že je Archimédés skutečně jejím původcem.



I.

ΠΡΟΒΛΗΜΑ,

ὅπερ ἈΡΧΙΜΗΔΗΣ ἐν ἐπιγράμμασιν εὑρὼν
τοῖς ἐν Ἀλεξανδρείᾳ περὶ ταῦτα πραγματευομένοις ζητεῖν ἀπέστειλεν,
ἐν τῇ πρὸς ΕΡΑΤΟΣΘΕΝΗΝ τὸν ΚΥΡΗΝΑΙΟΝ
ἐπιστολῇ.

Πληθὺν ἠελίοιο βοῶν, ὦ ξεῖνε, μέτρησον,
Φροντίδ' ἐπιστήσας, εἰ μετέχεις σοφίης,
Πόσση ἄρ' ἐν πεδίοις Σικελῆς ποτ' ἐβόσκετο νήσου
Θρινακίης, τετραχῆ στίφεα δασσαμένη
5. Χροιὴν ἀλλάσσοντα· τὸ μὲν λευκοῖο γάλακτος,

Začátek úlohy o dobytku z Lessingova vydání.

Většina historiků a filologů se však domnívá, že podoba, v jaké známe úlohu dnes, od samotného Archiméda nepochází. Nepovažují totiž za příliš pravděpodobné, že by Archimédés úlohu sepsal přímo ve verších. Pokud je tedy jejím autorem, tak ji nejspíše sepsal v próze a do veršované podoby byla přebásněna později.

Nelze však vyloučit, že Archimédés úlohu nevytvořil, ale byla podle něj později nazývána díky své náročnosti. Archimédovy spisy totiž získaly už ve sta-

[2] Například Mathematica nebo Maple, zdarma je dostupná Maxima.

rověku punc příslovečné obtížnosti.[3] Velmi zajímavá zmínka o této úloze se objevuje ve scholiu k Platónově dialogu Charmidés[4], kde se píše o úloze „nazvané Archimédem úloha o dobytku.“ Ovšem ani tyto údaje nám definitivní rozřešení problému autorství nedávají. Slovním spojením *Archimédem nazvaná* může být označena jak úloha, kterou Archimédés vymyslel, tak úloha, kterou pouze pojmenoval.

V 19. století se objevila hypotéza o sporu Archiméda ze Syrákús s Apollóniem z Pergé. Podle ní se prý Apollónios snažil dokázat svou matematickou převahu tím, že sledoval Archimédovu práci a precizoval jeho výpočty. Určil například mnohem přesnější odhad čísla π, než jaký je uveden v Archimédově spise *Měření kruhu.* Archimédés na to reagoval tak, že vymyslel slovní úlohu, která ve svém zadání obsahuje pouze malá čísla; při jejím řešení se však objeví čísla nesrovnatelně větší, jež by podle Archiméda zvládl vypočítat zdatný počtář. Na závěr k úloze připojil dovětek, se kterým si už poradí pouze mudrc. Zde mohla být narážka právě na Apollónia a jeho snahu Archiméda překonat. Hypotéza, kterou jsme zde popsali, se objevila například v hesle *Archimedes* Paulyho encyklopedie (viz [Pau1]), které napsal F. O. Hultsch. Tuto hypotézu však není možno nijak ověřit, a tak už o ní v novém vydání [Pau2] nenajdeme ani zmínku.

W. Knorr v [Kno3] na str. 295 naopak uvažuje, že první část úlohy mohl sepsat Eratosthenés z Kyrény, který ji poslal v dopise Archimédovi, neboť byl zvědav, zda Archimédés úlohu vyřeší. Archimédovi se patrně idea úlohy velmi líbila, a tak k ní připsal malý dovětek. Díky tomuto na první pohled nenápadnému dovětku se stalo řešení úlohy nepoměrně obtížnější.

Zatímco první část úlohy bez dodatečných podmínek není příliš náročná a její vyřešení bylo zcela v Archimédových možnostech, dodatečné podmínky činí úlohu značně obtížnou. Zejména řešení Pellovy rovnice je početně velmi náročné a prakticky jej bylo možno provést až s nástupem výpočetní techniky.[5] Považujeme tedy za nereálné, že by Archimédés mohl úlohu zcela vyřešit i s dodatečnými podmínkami. Otázkou zůstává, zda alespoň znal nějakou efektivní cestu, která by vedla k jejímu řešení.

Na závěr se zastavme ještě u překladu Archimédovy úlohy. Údaj o seřazení bílých a černých býků na začátku předposledního odstavce lze totiž interpretovat dvojím způsobem: buď jako seřazení do čtverce (z čehož jsme v našem řešení vycházeli), nebo jako seřazení do obdélníka. Varianta s řazením býků do obdélníka je podstatně jednodušší než s řazením do čtverce. Nicméně ani další část textu, která se týká seřazení hnědých a strakatých býků, není zcela jasná.

---

[3] Marcus Tullius Cicero použil v dopisech Attikovi na dvou místech (Cic. Att. XII,4 a XIII,28) ustálené spojení *probléma Archimédeion,* resp. *probléma Archimédú,* ve významu *velmi obtížný úkol.*

[4] Jedná se o scholion k odstavci 165e; přesně tytéž věty se také nacházejí v byzantském soupisu definic *Definitiones 135,5,8* chybně připsaném Hérónovi

[5] Pokud bychom psali rychlostí tři číslice za sekundu, trval by nám zápis čísla udávajícího celkový počet dobytka více než devatenáct hodin. Je pochopitelné, že vyřešit takovou úlohu pouze s pomocí tužky a papíru je prakticky nemožné.

Existují varianty překladu, které pracují s trojúhelníkovým číslem zvětšeným o 1, například [Wer]. Do podrobného rozboru jednotlivých variant překladů se již pouštět nebudeme. Čtenáře se zájmem o jednotlivá řešení můžeme odkázat na [KrA] nebo [Hea], kde jsou různá řešení naznačena.

Ať už zvolíme jakoukoli variantu překladu, stále dostáváme obrovský počet kusů dobytka. I s dodatkem tedy úloha vyznívá poněkud absurdně, neboť tak početné stádo je vůči rozloze ostrova Sicílie (i vůči velikosti celé zeměkoule) neúměrně veliké. Jisté však je, že dodnes můžeme obdivovat jednoduchou formulaci úlohy a zároveň překvapivou obtížnost jejího řešení.

6 Zdrojový kód programu pro řešení úlohy o dobytku v softwaru Mathematica

```
     (* zadání první části úlohy *)
Podminka1 =
Solve[{byciBILI == (1/3 + 1/2) byciCERNI + byciHNEDI &&
 byciCERNI == (1/4 + 1/5) byciSTRAKATI + byciHNEDI &&
 byciSTRAKATI == (1/6 + 1/7) byciBILI + byciHNEDI &&
 kravyBILE == (1/3 + 1/4) (byciCERNI + kravyCERNE) &&
 kravyCERNE == (1/4 + 1/5) (byciSTRAKATI + kravySTRAKATE) &&
 kravySTRAKATE == (1/5 + 1/6) (byciHNEDI + kravyHNEDE) &&
 kravyHNEDE == (1/6 + 1/7) (byciBILI + kravyBILE) &&
 X > 0 && Y > 0 && Z > 0 && T > 0 &&
 x > 0 && y > 0 && z > 0 && t > 0},
 {byciBILI, byciCERNI, byciSTRAKATI, byciHNEDI,
 kravyBILE, kravyCERNE, kravySTRAKATE, kravyHNEDE},
 Integers];

     (* výpis řešení první části úlohy *)
X = Podminka1[[1, 1, 2, 1, 1]]
Y = Podminka1[[1, 2, 2, 1, 1]]
Z = Podminka1[[1, 3, 2, 1, 1]]
T = Podminka1[[1, 4, 2, 1, 1]]
x = Podminka1[[1, 5, 2, 1, 1]]
y = Podminka1[[1, 6, 2, 1, 1]]
z = Podminka1[[1, 7, 2, 1, 1]]
t = Podminka1[[1, 8, 2, 1, 1]]


     (* druhá část úlohy - dodatečné podmínky *)
     (* podmínka pro čtvercové číslo *)
u = Sqrt[X + Y]
n = u[[2,1]]

     (* podmínka pro trojúhelníkové číslo *)
castDISKRIMINANTU = Sqrt[4 2 n (Z + T)];
m = castDISKRIMINANTU[[1]]
const = castDISKRIMINANTU[[2,1]]
```

```
     (* určení délky periody *)
delkaperiody = Length[ContinuedFraction[Sqrt[const]][[2]]];
     (* rozhodování, zda je perioda sudá či lichá *)
If[Mod[delkaperiody,2] == 0, , delkaperiody = 2 delkaperiody];

     (* výpočet konvergentů *)
konvergenty = Convergents[Sqrt[const], delkaperiody];
p0 = pi = Numerator[konvergenty[[delkaperiody]]];
q0 = qi = Denominator[konvergenty[[delkaperiody]]];
matice1 = SparseArray[{{1,1} -> p0, {1,2} -> const*q0,
                        {2,1} -> q0, {2,2} -> p0}];
matice2 = SparseArray[{{1,1} -> p0, {2,1} -> q0}];

While[Mod[qi,m] > 0,
 pi = matice2[[1,1]];
 qi = matice2[[2,1]];
 matice2 = matice1.matice2;]
IntegerLength[qi];
const2 = (qi/m)^2 * n;


     (* výpis výsledku - celkového počtu dobytka p *)
p = (X + Y + Z + T + x + y + z + t) * const2;
     (* počet číslic řešení p *)
IntegerLength[p]
     (* prvních a posledních 50 číslic řešení p *)
Take[IntegerDigits[p], 50]
Take[IntegerDigits[p], -50]
     (* výpis všech číslic celkového počtu dobytka *)
p
```

Výstup programu:

```
Out[1]= 10366482    Out[5]= 7206360
Out[2]= 7460514     Out[6]= 4893246
Out[3]= 7358060     Out[7]= 3515820
Out[4]= 4149387     Out[8]= 5439213

Out[10]= 2 Sqrt[4456749]
Out[11]= 4456749
Out[13]= 9314
Out[14]= 4729494

Out[26]= 206545
Out[27]= {7,7,6,0,2,7,1,4,0,6,4,8,6,8,1,8,2,6,9,5,\
 3,0,2,3,2,8,3,3,2,1,3,8,8,6,6,6,4,2,3,2,3,2,2,4,0,5,9,2,3,3}
Out[28]= {0,5,9,9,4,6,3,0,1,4,4,2,9,2,5,0,0,3,5,4,\
 8,8,3,1,1,8,9,7,3,7,2,3,4,0,6,6,2,6,7,1,9,4,5,5,0,8,1,8,0,0}
Out[29]= 7 760 271 406 486 818 269 530 232 833 213...
```