Jindřich Bečvář

Pískový počet

In: Zdeněk Halas (editor); Jindřich Bečvář (author); Martina Bečvářová (author); Zdeněk Halas (author); Tereza Bártlová (author); Vlasta Moravcová (author): Archimédés. Několik pohledů do jeho života a díla. (Czech). Praha: MATFYZPRESS, Vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty v Praze, 2012. pp. 55–[62].

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402377

PÍSKOVÝ POČET

Jindřich Bečvář

Ve spise *Psammítés* (*Pískový počet*)[1] prezentoval Archimédés číselný systém umožňující vyjádřit obrovská přirozená čísla a na poměrně absurdním příkladu ukázal jeho možnosti. Zvolil sféru hvězd, největší prostor, který byl v tehdejší době vůbec představitelný, a vypočetl horní odhad množství zrnek písku, které tento prostor zaplní.

1 Zápis čísel ve starověkém Řecku

V klasické době začali Řekové zapisovat čísla pomocí písmen své alfabéty. Užívali nepoziční desítkovou soustavu. Jednotky $1, 2, 3, \dots$ zapisovali písmeny α, β, γ, $\dots$, desítky $10, 20, 30, \dots$ písmeny ι, $\varkappa$, λ, $\dots$, stovky $100, 200, 300, \dots$ písmeny ρ, σ, τ, $\dots$ Vzhledem k tomu, že bylo zapotřebí označit devět jednotek, devět desítek a devět stovek, potřebovali celkem 27 písmen. Řecká alfabéta však měla jen 24 písmen, proto bylo třeba použít i tři zastaralá písmena: *digamma*, později *stigma* (pro 6), *koppa* (pro 90) a *sampí* (pro 900). Číslo zapsané pomocí písmen bylo v textu pro větší srozumitelnost později označováno čárkou nebo pruhem. Například číslo 543 bylo zapisováno jako $\varphi\mu\gamma'$ nebo $\overline{\varphi\mu\gamma}$. Pomocí 27 písmen bylo tedy možno vyjádřit všechna přirozená čísla menší než tisíc.

α′	β′	γ′	δ′	ε′	ϛ′	ζ′	η′	ϑ′
1	2	3	4	5	6	7	8	9
ι′	ϰ′	λ′	μ′	ν′	ξ′	ο′	π′	ϙ′
10	20	30	40	50	60	70	80	90
ρ′	σ′	τ′	υ′	φ′	χ′	ψ′	ω′	ϡ′
100	200	300	400	500	600	700	800	900

Později byl tento číselný systém rozšířen. Prvních devět písmen alfabéty využili řečtí počtáři i pro označení tisíců; odlišovali je další přidanou čárkou (dole před písmenem). Bylo tedy možno vyjádřit přirozená čísla od 1 až do 9 999. Například čísla 1 234, 5 888, 7 475 byla zapisována takto:

͵ασλδ′ ͵εωπη′ ͵ζυοε′.

Nesmíme si představovat, že Řekové v této symbolice prováděli nějaké písemné výpočty, že např. užívali nějaké algoritmy pro násobení a dělení podobné těm, které jsme se učili ve škole. Svoji číselnou symboliku využívali pouze k zapisování čísel, k zaznamenání výsledků, k nimž dospěli při výpočtech prováděných na abaku, početní tabulce apod.

K označení deseti tisíc, případně také k označení obrovského množství, které nelze spočítat, popsat, resp. jinak vyjádřit, užívali Řekové slovo *mýrias,* přejaté

[1] V české verzi viz [Va2], v anglické a německé viz [Hea], v ruské [Ve], dále viz např. [Hei] a [Ee].

do češtiny jako *myriada*. Ještě dnes toto slovo najdeme v obdobném smyslu užité například v próze i poezii.[2]

2 Archimédův číselný systém

Archimédés vyložil svůj číselný systém v práci *Archai* (*Počátky*), která se však nedochovala. Podruhé jej popsal ve třetí části svého pojednání *Psammítés*.

Slovo *myriada* užil v přesném slova smyslu, a sice k označení deseti tisíc (tj. 10^4). Toto číslo mu však připadalo ještě malé, proto začal uvažovat úsek přirozených čísel obsahující *myriadu myriad* jednotek, tj. posloupnost od 1 do 10^8; nazýval je *čísla prvního řádu*:

$$\underbrace{1,\dots,10^4}_{\text{1. myriada}},\ \underbrace{10^4{+}1,\dots,2{\cdot}10^4}_{\text{2. myriada}},\ \underbrace{2{\cdot}10^4{+}1,\dots,3{\cdot}10^4}_{\text{3. myriada}},\ \dots,\ \underbrace{\dots,10^4{\cdot}10^4{=}10^{1\cdot 8}}_{10^4\text{-tá myriada}}.$$

Poslední číslo, tj. 10^8, nazval *jednotkou druhého řádu*, na toto číslo navázal další úsek posloupnosti přirozených čísel počínající číslem $10^8 + 1$, tzv. *čísla druhého řádu*:

$$\underbrace{10^{1\cdot 8}+1,\dots,2{\cdot}10^{1\cdot 8}}_{10^8\text{ prvků}},\ \underbrace{2{\cdot}10^{1\cdot 8}+1,\dots,3{\cdot}10^{1\cdot 8}}_{10^8\text{ prvků}},\ \dots,\ \underbrace{\dots,10^8{\cdot}10^{1\cdot 8}=10^{2\cdot 8}}_{10^8\text{ prvků}}.$$

Číslo $10^{2\cdot 8}$ nazval *jednotkou třetího řádu* a navázal na ně tzv. *čísla třetího řádu*:

$$\underbrace{10^{2\cdot 8}+1,\dots,2{\cdot}10^{2\cdot 8}}_{10^{2\cdot 8}\text{ prvků}},\ \underbrace{2{\cdot}10^{2\cdot 8}+1,\dots,3{\cdot}10^{2\cdot 8}}_{10^{2\cdot 8}\text{ prvků}},\ \dots,\ \underbrace{\dots,10^8{\cdot}10^{2\cdot 8}=10^{3\cdot 8}}_{10^{2\cdot 8}\text{ prvků}}.$$

Dále uvažoval *čísla čtvrtého řádu* (končí číslem $10^{4\cdot 8}$), *čísla pátého řádu* (končí číslem $10^{5\cdot 8}$) atd., došel až k *číslům řádu myriady myriad* (10^8-tá čísla):

$$\underbrace{10^{(10^8-1)\cdot 8}+1,\dots,2{\cdot}10^{(10^8-1)\cdot 8}}_{10^{(10^8-1)\cdot 8}\text{ prvků}},\ \dots,\ \underbrace{\dots,10^8{\cdot}10^{(10^8-1)\cdot 8}=10^{10^8\cdot 8}}_{10^{(10^8-1)\cdot 8}\text{ prvků}}.$$

Úsek přirozených čísel od čísla 1 do čísla $10^{10^8\cdot 8}$ nazval *první periodou*.

Uvědomme si, že poslední čísla jednotlivých úseků tvořených čísly prvního řádu, druhého řádu, … a 10^8-tého řádu tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem 10^8. Čísel druhého řádu je více než čísel prvního řádu, čísel třetího řádu je více než čísel druhého řádu atd.

---

[2] Viz např. Příruční slovník jazyka českého. Díl II. K-M, Státní nakladatelství, Praha, 1937–1938:
Na nebi byly myriady hvězd. Rudolf Medek
S večerem se vyrojí myriady drobných mušek. Karel Čapek
Luka pestřila se myriadou květů. Emil Vachek

Na první periodu navázal Archimédés *druhou periodu*, která začíná číslem $10^{10^8\cdot 8}+1$. Její první čísla končí číslem $10^8\cdot 10^{10^8\cdot 8}$, druhá čísla končí číslem $10^{2\cdot 8}\cdot 10^{10^8\cdot 8}$, třetí čísla číslem $10^{3\cdot 8}\cdot 10^{10^8\cdot 8}$ atd. Druhá perioda končí číslem

$$10^{10^8\cdot 8}\cdot 10^{10^8\cdot 8}=\left(10^{10^8\cdot 8}\right)^2.$$

Následuje *třetí perioda*, která končí číslem

$$10^{10^8\cdot 8}\cdot\left(10^{10^8\cdot 8}\right)^2=\left(10^{10^8\cdot 8}\right)^3$$

atd. Takových period uvažoval Archimédés myriadu myriad. Poslední, 10^8-tá perioda, končí číslem

$$\left(10^{10^8\cdot 8}\right)^{10^8}=\left(10^{800\,000\,000}\right)^{100\,000\,000}=10^{80\,000\,000\,000\,000\,000},$$

tj. číslem $10\ldots 000$, které má 80 tisíc bilionů nul.

Uvědomme si ještě, že čísla, kterými končí jednotlivé periody, tvoří geometrickou posloupnost s kvocientem $10^{10^8\cdot 8}$. Čísel druhé periody je více než čísel první periody, čísel třetí periody je více než čísel druhé periody atd.

3 Počítání písku

Jak již bylo řečeno, ve spisu *Psammítés* vypočítal Archimédés horní odhad množství písku, které by zaplnilo celý *vesmír* (řecky *kosmos*), tj. celou sféru Slunce při geocentrickém systému[3] (resp. sféru Země při heliocentrickém systému), a množství písku, které by zaplnilo *sféru hvězd*. Snažil se ukázat obrovské možnosti svého číselného systému a zpochybnit představu o „nespočitatelnosti" jakéhokoli množství. V úvodu první části svého spisu oslovil krále Gelóna:

Někteří se domnívají, králi Gelone, že počet písku jest nesčíslný; a to, tvrdím, nejen toho, jenž jest v okolí Syrakus a v ostatní Sicilii, ale i na všeliké zemi ať obydlené ať neobydlené. Někteří však nemyslí, že jest neomezený, ale že přece nebyl tak veliký udán, jenž by převyšoval jeho množství. Zřejmo, že kdož takto soudí, kdyby si mysleli z písku tak velikou spoustu nakupenu, jak veliká jednak jest spousta země, a pak kdyby v ní byla vyplněna i všechna moře i dutiny zemské do stejné výše s nejvyššími horami, ti by soudili tím spíše, že asi nikdo by nevyřkl čísla převyšujícího jeho množství. Pokusím se ti dokázati důkazy geometrickými, jež budeš moci sledovati, že mezi čísly námi jmenovanými … převyšují některá nejen počet písku v množství rovném zemi tak vyplněné, jak jsme řekli, ale i v množství rovném vesmíru (kosmu). ([Va2], str. 3)

Chtěl-li Archimédés vypočítat počet zrnek písku, kterými lze vyplnit vesmír, musel vědět

– jak je velký vesmír,

– jak je velké (resp. malé) zrnko písku.

[3] Archimédés uvádí, že termínem … *vesmír* (kosmos) *nazývá většina hvězdářů kouli, jejíž střed jest střed zemský, poloměr pak roven přímce mezi středem slunce a středem země.* ([Va2], str. 3)

Archimédés se řídil duchem Eukleidových *Základů*. Nejprve proto zformuloval předpoklady, z nichž pak při výpočtech velikosti vesmíru vycházel:

1. Obvod Země je nejvýše $3 \cdot 10^6$ stadií.[4]
2. Průměr Slunce je větší než průměr Země a ten je větší než průměr Měsíce.
3. Průměr Slunce je nejvýše roven třicetinásobku průměru Měsíce.[5]
4. Průměr Slunce je větší než strana tisíciúhelníka vepsaného do největšího kruhu vesmíru, tj. do ekliptiky.[6]

Ve druhé části spisu *Psammítés* Archimédés vypočetl horní odhad „velikosti“ vesmíru. Jeho výsledek zformulujeme v následující větě.

Věta 1. Průměr vesmíru je nejvýše 10^{10} stadií.

Důkaz: Podle prvního předpokladu je obvod Země nejvýše $3 \cdot 10^6$. Obvod je přitom více než třikrát větší než průměr. Průměr Země je tedy nejvýše 10^6 stadií.

Průměr Slunce je podle druhého a třetího předpokladu nejvýše roven třiceti průměrům Země, tj. nejvýše $30 \cdot 10^6$ stadií.

Obvod vesmíru je podle čtvrtého předpokladu nejvýše roven tisícinásobku průměru Slunce, tj. $3 \cdot 10^{10}$ stadií. Průměr vesmíru je nejvýše roven třetině svého obvodu, je tedy nejvýše 10^{10} stadií. $\square$

Archimédés musel ještě stanovit velikost zrnka písku. Jako pomocný objekt mu posloužilo zrnko máku. Předpokládal toto:

– Do zrnka máku se vejde nejvýše myriada, tj. 10^4 zrnek písku.
– Průměr zrnka máku je menší než jedna čtyřicetina palce.

---

[4] Archimédés současně poznamenal, že někteří (mínil patrně Eratosthena (asi 275 až 195), jehož měření Země mu jistě bylo známo) udávají $3 \cdot 10^5$ stadií, ale on předpokládá desetkrát víc. Připomeňme. že *stadion* (pl. *stadia*) byla délková míra definovaná jako vzdálenost konců závodiště (stadionu). V jednotlivých regionech byla užívána různě dlouhá stadia (zhruba 157 až 193 metrů), nejužívanější bylo *olympijské stadion* (asi 192,3 m). Eratosthenés odhadl poměrně exaktním způsobem obvod Země na 250 000 stadií. O jeho měření Země podal svědectví Kleomédés (1. až 2. stol.) ve spise *De motu circulari corporum coelestium* (*O kruhovém pohybu nebeských těles*) a později např. Martianus Minneus Felix Capella (1. pol. 5. stol.) v knize *De nuptiis Philologiae et Mercurii* (*Svatba Filologie s Merkurem*). Viz např. [Gold], [BeJ4].

[5] Archimédés připomněl, že Eudoxos (asi 408 až 355) tvrdil, že devítinásobku, Feidiás dvanáctinásobku a Aristarchos (asi 310 až 230) osmnácti až dvacetinásobku. Archimédés patrně znal Aristarchův spis *Peri megethón kai apostématón héliú kai selénés* (*O velikosti a vzdálenosti Slunce a Měsíce*), v němž Aristarchos své výpočty odhadů velikostí a vzdáleností Slunce a Měsíce prezentoval. Viz [Hea2], [Hea4], [Hel].

[6] Archimédés poznamenal, že Aristarchos uvedl, že je roven sedmisetdvacetině obvodu ekliptiky. Oprávněnost tohoto předpokladu Archimédés podrobně zdůvodnil geometrickými úvahami a zkušenostmi z praktických měření úhlové velikosti Slunce. Viz [Va2], str. 5–8.

Zdůvodnění, které podal, je velmi půvabné. Je z něj cítit, jak se snažil dospět k co největšímu počtu zrnek písku. Proto zmenšil velikost zrnka máku a současně zvětšil počet zrnek písku v zrnku máku. Archimédův písek má tedy charakter zcela nepatrného prášku.

Kdyby bylo sebráno množství písku ne větší zrnka máku, nebyl by počet jeho větší než myriada, a průměr zrnka makového nebyl by větší čtyřicetiny palce. Předpokládám pak toto, vyzkoumav to tímto způsobem: Položena byla na hladké pravítko zrnka maková v přímce po jednom, takže se navzájem dotýkala, a zaujalo 25 zrnek místo větší než délka palce. Bera tudíž průměr zrnka makového menší, předpokládám, že jest čtyřicetina palce a ne menší, chtěje tímto co nejpřesněji dokázati své tvrzení. … ([Va2], str. 9)

Ve třetí části spisu *Psammítés*, jak již bylo výše uvedeno, prezentoval Archimédés svůj číselný systém. Ve čtvrté nejprve vypočetl množství zrnek písku, která vyplní vesmír. Jeho výsledek zformulujeme v následující větě.

Věta 2. Vesmír by zaplnilo 10^{51} zrnek písku.

Důkaz: Podle Věty 1 je průměr vesmíru nejvýše roven 10^{10} stadií.

Připomeňme nejprve, že řecká míra *stadion* obsahuje 600 *stop*, jedna stopa je 16 *palců*. Stadion je tedy $600 \cdot 16 = 9\,600$ palců, tj. téměř 10^4 palců.

Protože je průměr zrnka máku menší než čtyřicetina palce, obsahuje koule o průměru palce nejvýše 64 tisíc zrnek máku, tedy nejvýše 10^9 zrnek písku:

$$40^3 \cdot 10^4 = 640\,000\,000 < 10^9.$$

Archimédovo zdůvodnění tohoto výpočtu je srozumitelné:

Ježto totiž se předpokládá, že průměr zrnka makového není menší než čtyřicetina palce, zjevno, že koule průměru palce není větší než koule, která by pojala šest myriad a čtyři tisíce zrnek makových, neboť jest rovna kouli průměru čtyřicetiny palce násobené řečeným číslem. Jest totiž dokázáno, že koule jsou navzájem v trojnásobném poměru svých průměrů. ([Va2], str. 11)

Následuje posloupnost jednoduchých výpočtů. Zvětšíme-li velikost průměru stokrát ($10^2\times$), zvětší se objem milionkrát ($10^6\times$):

Koule o průměru 100 palců obsahuje 10^{15} zrnek písku.

Koule o průměru stadia (tj. 10^4 palců) obsahuje 10^{21} zrnek písku.

Koule o průměru 100 stadií obsahuje 10^{27} zrnek písku.

Koule o průměru 10^4 stadií obsahuje 10^{33} zrnek písku.

Koule o průměru 10^6 stadií obsahuje 10^{39} zrnek písku.

Koule o průměru 10^8 stadií obsahuje 10^{45} zrnek písku.

Koule o průměru 10^{10} stadií obsahuje 10^{51} zrnek písku. □

Množství písku, které by zaplnilo vesmír, je tedy nejvýše rovno číslu

$$10^{51} = 1\,000 \cdot 10^{6\cdot 8},$$

tj. *tisíci jednotek sedmého řádu první periody.*

Archimédés dále vypočetl množství písku, které by zaplnilo celou sféru hvězd. Při stanovení její velikosti vyšel z tzv. *Aristarchova předpokladu.* O Aristarchově heliocentrickém názoru na uspořádání světa se zmínil v krátké pasáži na počátku první části spisu *Psammítés*:

Aristarchos Samský však vydal knihy jakési s názvem Hypothesy[7]*, v nichž vychází z jeho předpokladů, že vesmír jest mnohokrát větší, než jak výše bylo řečeno.*[8] *Předpokládá totiž, že stálice a slunce zůstávají nehybné, země pak obíhá po obvodě kruhu kolem slunce, jež stojí uprostřed dráhy, že dále koule stálic rozložená kolem téhož středu jako slunce jest takové velikosti, že kruh, v němž, jak předpokládá, země obíhá, jest ku vzdálenosti stálic v tomtéž poměru, v jakém jest střed koule k povrchu. Totoť, jak patrno, jest nemožno. Neboť, ježto střed koule nemá žádné velikosti, jest se domnívati o něm, že není v žádném poměru k povrchu koule. Jest však přijmouti, že Aristarchos myslil takto: jakmile předpokládáme, že země jest jakoby středem vesmíru, tu v tom poměru, v jakém jest země k tomu, co nazýváme vesmírem, jest koule v níž jest kruh, v němž, jak předpokládá, země obíhá, ke kouli stálic. Neboť důkazy fénoménů přizpůsobuje k tomuto předpokladu, a obzvláště zdá se, že velikost koule, v níž dává zemi se pohybovati, pokládá za stejnou s tím, co nazývá vesmírem.* ([Va2], str. 3–4)

Aristarchův předpoklad je možno stručně zformulovat takto:

5. Poměr průměrů Země a vesmíru je roven poměru průměrů vesmíru a sféry stálic.[9]

Nyní je již možno vypočítat velikost sféry hvězd.

Věta 3. Průměr sféry stálic je nejvýše 10^{14} stadií.

Důkaz: Průměr Země je podle předchozího 10^6 stadií (důsledek prvního předpokladu), průměr vesmíru je podle věty 1 nejvýše 10^{10} stadií.

Podle Aristarchova předpokladu má být poměr $10^6 : 10^{10}$ roven poměru čísla 10^{10} k průměru sféry stálic. Průměr sféry stálic je tedy nejvýše roven 10^4-násobku průměru vesmíru, tj. 10^{14} stadií. □

---

[7] Přesněji: *vydal spis obsahující jisté hypotézy, ...*

[8] Tato zmínka v Archimédově spisu *Psammítés* je důležitou informací o Aristarchově heliocentrickém systému.

[9] Aristarchův předpoklad, který výrazně „zvětšil" sféru stálic, je významný. Pokud by Země obíhala kolem Slunce v „malé" sféře stálic, musely by se zdánlivé vzdálenosti hvězd na obloze během roku měnit. Archimédés přijal Aristarchův předpoklad, neboť chtěl dospět k co největšímu počtu pískových zrn. Z jeho textu však vůbec není jasné, zda zastával geocentrický nebo heliocentrický názor.

Věta 4. Sféru stálic by zaplnilo nejvýše 10^{63} zrnek písku.

Důkaz: Již jsme viděli, že platí následující tvrzení:

Koule o průměru 10^{10} stadií obsahuje 10^{51} zrnek písku.

Odtud vyplývá:

Koule o průměru 10^{14} stadií obsahuje 10^{63} zrnek písku. □

Archimédés tedy ukázal, že počet pískových zrn zaplňujících sféru hvězd je menší než

$$10^{63} = 10^3 \cdot 10^4 \cdot 10^{7 \cdot 8},$$

tj. menší než *tisíc myriad jednotek osmého řádu první periody.*

Po „spočítání" zrnek písku vyplňujících sféru hvězd získal Archimédés číslo, které je v jeho číselném systému „na počátku" první periody, a sice na jejím osmém řádku. Poznamenejme, že se dnes číslem 10^{80} odhaduje počet částic v pozorovatelné části vesmíru.

V závěru spisu *Psammítés* se Archimédés znovu obrátil na krále Gelóna:

Domnívám se, králi Gelone, že toto davu mathematiky neznalému bude se zdáti neuvěřitelným, znalcům však, kteří jak o vzdálenostech tak o velikostech země a slunce a měsíce a celého vesmíru uvažovali, bude uvěřitelným pro tento důkaz. Protož jsem myslil, že také tobě jest vhod toto poznati. ([Va2], str. 13)

O problematice odhadů a výpočtů velikosti vesmíru viz například [Hea], [Hea2], [Hea3], [Hea4], [Hel], [Gold], [BeJ4].