2. Finanční matematika na středních školách v závěrečném období Rakousko-Uherské monarchie (udržování vysokého standardu 1908 – 1918)

Rakousko-Uhersko věnovalo velkou pozornost rozvoji infrastruktury, což se týkalo také školství. Zásadním krokem bylo zavedení povinné školní docházky pro děti od šesti do dvanácti let – tzv. *Všeobecný školní řád*, který vydala roku 1774 císařovna Marie Terezie (1717–1780).

Ekonomické rozdíly mezi rozvinutějším západem a zaostalými východními částmi říše se začaly zmenšovat ve druhé polovině 19. století za vlády císaře Františka Josefa I. (1830–1916). Monarchie se snažila ekonomicky dohnat nejvyspělejší evropské země a od roku 1870 do roku 1913 míra růstu hrubého domácího produktu dokonce převyšovala míru růstu v ostatních evropských státech (viz [I07]).

Stát si plně uvědomoval důležitost školství v otázce výchovy a vzdělání moderního občana. Během vlády Františka Josefa I. proběhly celkem tři zásadní školské reformy.

Exner-Bonitzova reforma (1849)

Autory reformy nazvané *Nástin organizace gymnázií a reálek v Rakousku* byli Herman Bonitz (1814–1888), německý filolog a učitel, a Franz Friedrich Exner (1802–1853), německý filozof. Vytvářela systém středního školství, který umožňoval zvýšení úrovně vzdělanosti a postupný nástup technického pokroku. Přinesla také úpravy osnov, jež na všeobecně vzdělávacích školách ustoupily od jednostranného kulturně-historického zaměření k podpoře výuky přírodních věd. Klasická gymnázia ztratila ráz latinské školy. Během druhé poloviny 19. století se vyučovacím jazykem na našem území postupně stala čeština. Výuka v českém jazyce nejprve narazila na nedostatek česky psaných učebnic a na nedostatečnou odbornou terminologii. Vznik nových učebnic a terminologie probíhal postupně a dlouhodobě. Od sedmdesátých let 19. století se patronátu nad tímto procesem ujala Královská česká Společnost nauk, která rozsáhlejší vědecké projekty vydávala vlastním nákladem. Obrození v osnovách středních škol probíhalo souběžně. Již na počátku šedesátých let devatenáctého století se zaváděla reálná gymnázia (první – 1862 v Táboře), jež se na místo řečtiny a latiny věnovala „reálným“ jazykům – čeština, němčina, francouzština. Dalším významným bodem reformy byla změna délky studia – z šestiletých na osmileté – na standardní čtyřletá nižší gymnázia začala navazovat rozšířená čtyřletá vyšší gymnázia. Spolu s rozšiřováním výuky přírodních věd to vedlo ke zvýšení úrovně a všestrannosti absolventů, kteří mohli být po vykonání maturitní zkoušky přijati na vysokou školu.

Zákon o obecném školství (1869)

Zákon stanovoval povinnou osmiletou školní docházku; schválen byl v roce 1869 moravským sněmem a o pět let později českým sněmem. Vyzdvihl všeobecně vzdělávací charakter reálek s důrazem na matematicko-přírodovědné předměty. Rozšířil je na sedm let a jejich osnovy obohatil o deskriptivní geometrii. Zavedl také povinnou maturitní zkoušku na těchto školách, což vedlo k jejich zrovnoprávnění s reformovanými klasickými a nově vzniklými reálnými gymnázii. Zákon spolu s významným rozšířením obsahu vzdělávání zdůrazňoval důležitost vysokoškolského vzdělávání učitelů měšťanských a obecných škol a uváděl pravidla jejich ekonomického a sociálního zabezpečení. Jeho dalším důležitým bodem bylo omezení úlev od docházky, zesvětštění (ztráta církevního charakteru) a zestátnění škol. Jako jeho dodatek byl o rok později vydán školní vyučovací řád pro obecné školy, který stanovoval základní pravidla chování žáků, povinnosti žáků i učitelů a zákaz tělesných trestů.

Tento zákon byl v roce 1883 na popud konzervativců novelizován. Zásadní změnou byly úlevy v docházce, což ve skutečnosti vedlo ke zkrácení povinné školní docházky na šest let. Kladem bylo praktické zaměření měšťanských škol, jejichž prvořadým úkolem se stala příprava žáků pro průmysl a zemědělství. Tato novela byla u nás zrušena až v roce 1922 tzv. Malým školským zákonem (více viz následující kapitola věnovaná období první republiky).

Dalším významným okamžikem bylo rozdělení pražské univerzity na dvě samostatné školy – českou a německou – v roce 1882 po složitých jednáních profesorského sboru a státních institucí.

Meranský program (1905)

Tento program zasahoval do obsahu i metod výuky matematiky. Autorem byl Felix Christian Klein (1849–1925), německý matematik, který se převážně zabýval neeukleidovskou geometrií. Zásadním přínosem programu bylo začlenění funkcí, diferenciálního a integrálního počtu do osnov, podpora logického, funkčního myšlení a prostorové představivosti, „spojení“ algebra–geometrie a metoda problémového vyučování (více viz např. [PJ], [TD]).

Marchetova reforma (1908)

Tato reforma byla poslední úpravou středního školství během existence monarchie. Její autor Gustav Marchet (1846–1916) byl v letech 1906 až 1908 rakouským ministrem kultu a vyučování. Jejím hlavním přínosem bylo zrovnoprávnění maturitních zkoušek na všech typech středních škol, jejichž absolventi se mohli volně ucházet o studium na vysokých školách. Marchetovy zákony byly vzorem všech předpisů českého školství až do roku 1948. Upravovaly osnovy výuky, obsah učebnic i strukturu maturitní zkoušky. Poznamenejme, že hlavní úlohu při tvorbě učebnic matematiky měla *Jednota českých matematiků a fyziků*, jejíž počátky sahají do roku 1862. Již od svého vzniku měla pozitivní vliv na pokrokové školské reformy. Většina nových učebnic, jež se řídily touto reformou, začala vycházet pod jejím odborným dohledem v roce 1910 (více viz např. [PJ]).

Podrobnější informace o vývoji českého školství lze najít v publikacích edice *Dějiny matematiky* (například [BE], [MN]).

V této kapitole analyzuji učebnice, početnice a sbírky určené pro žáky a studenty obecných škol, měšťanských škol, reálek, gymnázií, reálných gymnázií a středních škol, jež vycházely po Marchetově reformě. Většinu publikací jsem vyhledal v Národní pedagogické knihovně Jana Ámose Komenského v Praze, některé v knihovně Katedry didaktiky matematiky Matematicko-fyzikální fakulty Karlovy univerzity v Praze či v soukromých knihovnách starších kolegů.

Přehled analyzovaných učebnic, početnic a sbírek jsem rozdělil do tří skupin podle typu škol, pro něž byly určeny. Okrajově zmíním publikace pro obecné a měšťanské školy a pro učitelské ústavy a vyšší obchodní školy. Podrobně se budu věnovat střednímu školství.

Učebnice pro obecné a měšťanské školy:

- rok 1909: *Početnice pro školy obecné, stupeň vyšší* (Fr. Močnik);
- rok 1910: *Počtářství na českých školách měšťanských v úlohách* (L. Fryček);
- rok 1914: *Pátá početnice pro třídy s 6., 7. a 8. školním rokem na školách vícetřídních* (J. Kozák);
- rok 1916: *Pátá početnice pro obecné školy vícetřídní, 5. školní rok* (A. Matolín).

Učebnice pro reálky, gymnázia, reálná gymnázia a střední školy:

- rok 1910: *Arithmetika pro I. třídu středních škol* (L. Červenka);
- rok 1910: *Arithmetika pro II. třídu středních škol* (L. Červenka);
- rok 1911: *Arithmetika pro III. třídu středních škol* (L. Červenka);
- rok 1910: *Arithmetika pro nižší třídy škol středních, díl I.* (R. Bendl, J. Muk);
- rok 1910: *Arithmetika pro nižší třídy škol středních, díl II.* (R. Bendl, J. Muk);
- rok 1911: *Arithmetika pro nižší třídy škol středních, díl III.* (R. Bendl, J. Muk);
- rok 1911: *Arithmetika pro VI. a VII. třídu gymnasií a reálných gymnasií* (B. Bydžovský);
- rok 1911: *Arithmetika pro V. až VII. třídu škol reálných* (B. Bydžovský);
- rok 1912: *Mathematika pro nejvyšší třídu reálek* (B. Bydžovský, J. Vojtěch);
- rok 1912: *Sbírka úloh z mathematiky pro vyšší třídy středních škol* (B. Bydžovský, J. Vojtěch).

Učebnice pro učitelské ústavy a vyšší obchodní školy:

- rok 1911: *Arithmetika v úlohách pro ústavy učitelské* (K. Domin);
- rok 1908: *Arithmetika pro ústavy ku vzdělání učitelů a učitelek*, s přílohou: *Úlohy k arithmetice* (V. Posejpal);
- rok 1905: *Algebra a politická arithmetika pro vyšší školy obchodní. Díl III. Arithmetika finanční* (A. Pižl).

Základní problémy finanční aritmetiky, tj. spoření, půjčka a důchod, patřily neodmyslitelně k běžnému životu občana monarchie. To byl hlavní důvod, proč jsem zařadil vedle středoškolských učebnic také učebnice pro obecné a měšťanské školy, v nichž se podle dobových osnov základy finanční aritmetiky vyučovaly.

Finanční matematika byla standardně zařazena do osnov matematiky. Osnovy aritmetiky pro sedmou a osmou třídu měšťanských škol obsahovaly – jednoduchý počet úrokový, rabatový, lhůtový a výpočet úroku z úroků na jednoduchých příkladech. Osnovy matematiky pro střední školy (sedmileté reálky a osmiletá gymnázia) obsahovaly kapitoly z finanční matematiky ve druhé (jednoduché úrokování a diskont) a šesté třídě (složené úrokování a výpočet renty) v sedmiletém studiu, při osmiletém studiu byly základy úrokového počtu ponechány ve druhé třídě a složené úrokování posunuto do sedmé třídy.

2.1 Učebnice pro obecné a měšťanské školy

V početnicích a sbírkách pro obecné a měšťanské školy se žáci poprvé setkávali s problematikou finanční matematiky. Ve většině publikací mohli nalézt pouze jednoduché úrokování a navíc ne vždy podrobně vyložené. Úlohy z oblasti složeného úrokování byly výjimkou a nalezl jsem je jen ve sbírce Ladislava Fryčka nazvané *Počtářství* ([FR]), jež je analyzována níže. V mnoha početnicích jsem našel jen několik triviálních úloh na jednoduché úrokování v kapitolách zabývajících se procenty (viz např. početnice autorů Josefa Horčičky, Jana Nešpora, Josefa Úlehly).

František rytíř Močnik: *Početnice pro školy obecné, vydání trojdílné. Stupeň vyšší*, Císařský královský školní knihosklad, Praha, 1909, 136 stran.

Učebnice patřila mezi velmi oblíbené; vycházela již na konci devatenáctého století. V knihovnách se mi podařilo vyhledat vydání z let 1894, 1895, 1896, 1899, 1903, 1904, 1907, 1909, 1911 a 1913. Rozsah učebnice se neměnil, postupně se zlepšovala grafická úprava obrázků a tabulek. Těchto objektů bylo v učebnici poměrně málo.

Autor František Močnik (1814–1892) byl významným metodikem slovinského původu, jehož učebnice aritmetiky, algebry a geometrie byly užívány na celém území Rakousko-Uherska, byly překládány do národních jazyků, upravovány a modifikovány. Z výše uvedených letopočtů vidíme, že vycházely ještě dlouho po jeho smrti. Vedle vyzdvihovaných a nesporných didaktických kvalit se Močnikovi vytýkalo jen používání malých fontů a tím zhoršená přehlednost při studiu. Mnoho početnic vydaných po Močnikově smrti přepracovali Konrad Kraus a Moritz Habernal.

Početnice, kterou jsem podrobil rozboru, byla rozdělena na tři základní části:

- Oddíl první (rozsah 44 stran): opakovací cvičení, obyčejné zlomky, sousudkové počty (= úměry);
- Oddíl druhý (rozsah 53 stran):
    - Počty procentové (11 stran),
    - Počty úrokové (13 stran),

    - Počty spolkové a směšovací (7 stran),
    - Počty rozličného povolání životního (22 stran);
- Dodatek (35 stran): Vypočítávání útvarů měřických, přehled měr, vah a mincí.

Kapitola *Počty úrokové* obsahovala 99 úloh, z nichž bylo 15 řešených, a byla rozdělena na osm částí označených malými písmeny *a* až *h* podle zaměření. Výklad se soustřeďoval pouze na jednoduché úrokování. Žák byl nejprve seznámen s pojmy *dlužník*, *věřitel*, *jistina* a *úrok*. Mezi úlohami se nacházely užitečné rady, např.

Veškeré vklady chekové zúročují se na 2 % a sice počíná se zúrokování od 1. neb 16., který po vkladu následuje, a končí 15. neb posledního, výplatě nejblíže předcházejícího. Každý měsíc počítá se po 30 dnech. Základní vklad zúrokuje se též po 2 %. ([RM], str. 68)

Kvalitu výkladu a rozboru řešení úlohy můžeme posoudit na základě následující řešené úlohy:

***24.** Která jistina dá po 6 % ročně 135 K úroku?*

6 % jistiny = 135 K

1 % „ = 22,5 K („ jako symbol opakování slova *jistina*)

Tedy jistina sama = 22,5 K × 100 = 2250 K.

Anebo:

Na 6 K úroku jest třeba 100 K jistiny; na úrok 135 K, t. j. 22,5 krát 6 K jest třeba 22,5krát větší jistiny nežli dříve, tedy 100 × 22,5 = 2250 K. ([RM], str. 61)

Všechny uvedené úlohy nebyly přehnaně náročné. Autor si uvědomoval, že se jedná o první setkání žáků s touto tématikou a podle toho volil jednoduchý text i vhodná čísla pro výpočet.

Textovou stránku úloh dobře ilustruje následující ukázka:

***78.** Vkladní knížka poštovské spořitelny vykazovala na počátku roku 155 K, 30. června vložil majitel ještě 20 K; kolik úroku mohl by na konci roku vyzdvihnouti?* ([RM], str. 66)

Hodnocení učebnice

Učebnice byla strukturou i náročností vhodná pro vyšší třídy obecných škol. Pravděpodobně nebyla příliš motivující, neboť obsahovala velmi málo obrázků a graficky byla velmi strohá. Pro domácí přípravu mohl žák použít množství řešených příkladů (téměř každý pátý příklad byl vyřešen). Bohužel k neřešeným úlohám nebyly uvedeny výsledky, což však bylo typické pro typ škol, kterým byla početnice určena, i pro časové období, kdy byla používána.

Ladislav Fryček: *Počtářství na českých školách měšťanských v úlohách*, tisk a náklad Karel Šolc, Kutná Hora, 1910, 262 stran.

Učebnice byla určena pro všechny ročníky chlapeckých i dívčích měšťanských škol a byla schválena výnosem č. 3935 c. k. ministerstva kultu a vyučování dne 11. března 1910. Její autor, jenž byl odborným učitelem měšťanské školy v Plzni, využil svých bohatých zkušeností a vytvořil obsáhlou sbírku úloh s výsledky a dodatkem pro převody měr, vah a peněz.

Sbírka byla rozdělena do 25 paragrafů, jež svým obsahem zcela pokrývaly probíranou látku – od počítání s přirozenými čísly, přes trojčlenku a rovnice, po složený úrokový počet. Z pohledu finanční matematiky nás budou zajímat především její tři paragrafy:

§ 13 *Jednoduchý počet úrokový* (rozsah 9 stran);

§ 14 *Počet lhůtový* (rozsah 4 strany);

§ 24 *Složený počet úrokový* (rozsah 7 stran).

Mnoho úloh v dalších paragrafech bylo spojeno s koupí a prodejem. Autor neopominul žádnou oblast života, s níž by se žák v budoucnosti mohl setkat.

Charakteristika vybraných paragrafů

§ 13 *Jednoduchý počet úrokový*

Tato část sbírky obsahovala celkem 70 úloh, po jejichž vypočítání mohl svědomitý žák získat a v budoucnu využít znalost procent při jednoduchém úrokování (ve finanční praxi většinou pro jedno úrokovací období). Na první stránce mu bylo předloženo pět základních způsobů zadání problému s komentářem:

a) *B uložil do záložny 700 K na 4 %; kolik K úroků bylo mu vyplaceno za 2 roky?*

b) *C uložil do záložny 700 K na 4 %; na kolik K vzrostla mu jistina za 2 roky?*

c) *Na kolik % uložil D do záložny 700 K, bylo-li mu za 2 roky vyplaceno 56 K úroků?*

d) *Po kterou dobu měl E uloženou jistinu 700 K, dala-li mu při 4% úrokování 56 K úroků?*

e) *Která jistina dá za 2 roky při 4% úrokování 56 K?*

([FR], str. 120)

Všech pět typů bylo stručně komentováno a vyřešeno.

Např. typ *c)*:

Soudíme: Kdyby byl uložil jistinu 700 K na 1 %, byla by mu za rok dala 7 K úroků, za 2 roky 14 K; protože však dala 56 K úroků, tedy byla uložena na tolik %, kolikráte je 14 K v 56 K obsaženo. Byla tedy uložena na 4 %.

V textu byl připomenut způsob úrokování ve spořitelnách a záložnách. Více návodů a poznámek žák již nenašel a byly mu předloženy pouze příklady bez další pomoci ze strany autora.

Úlohy obsahovaly reálné hodnoty a popisovaly reálné situace, do nichž by se mohl žák v budoucnosti dostat. Uveďme ilustrativní příklad:

27. *Lichvář půjčil rolníku, který z nepravého studu nechtěl si vypůjčiti v záložně, na směnku 400 K na ½ roku, z nichž si strhl 30 K na úroky; na kolik % byla tato půjčka uzavřena?* ([FR], str. 123, výsledek: 16,2 %)

Úlohu bychom řešili následovně:

Lichvář ve skutečnosti půjčil jen 370 K a za půl roku bude inkasovat 400 K, tedy úrok za půl roku z částky 370 K byl 30 K.

Půlroční úroková míra byla tedy: $\frac{30}{370} = 0{,}081 = 8{,}1\ \%$.

Roční úroková míra byla: $2 \cdot 8{,}1\ \% = 16{,}2\ \%$.

§ 14 *Počet lhůtový*

Úlohy v kapitole se zabývaly nezvyklým typem úloh využívajících jednoduché úrokování. Jednalo se o umořování dluhu, jenž měl být jednorázově splacen tak, aby ani věřitel ani dlužník nebyl zkrácen na úroku. Dva ukázkové problémy byly vyloženy s návodem.

a) *B má zaplatit 2.400 K ve 4 stejných čtvrtletních lhůtách; kdy může zaplatiti najednou, aniž by sebe ani věřitele o úrok zkrátil?*

b) *C má zaplatit 200 K za 2 měsíce, 400 K za 4 měsíce a 900 K za 7 měsíců; kdy může zaplatit najednou, aniž by sebe ani věřitele o úrok zkrátil?* ([FR], str. 129)

Uveďme vzorové řešení příkladu *b)*:

Soudíme: 200 K dá za 2 měsíce tolik úroků jako 400 K za 1 měsíc; 400 K dá za 4 měsíce tolik úroků jako 1.600 K za 1 měsíc; 900 K dá za 7 měsíců tolik úroků jako 6.300 K za 1 měsíc. Provedeme součet: *1.500 K dá za x měsíců tolik úroků jako 8.300 K za 1 měsíc. Má-li 1.500 K dáti tolik úroků jako 8.300 K za 1 měsíc, musí býti úrokovány po tolik měsíců, kolikráte je 1.500 K v 8.300 K obsaženo:* $8300 : 1500 = 5\frac{8}{15}$. *Může tedy zaplatiti najednou za 5 měsíců 16 dní.*

V této kapitole obsahující 25 úloh si žák dále rozvíjel „cit“ pro práci s úroky. Byl nucen pracovat s úroky z více jistin a dále s nimi operovat. Navíc mu byla pokládána otázka spravedlivého splacení, čímž musel projevit hlubší porozumění, než ve třináctém paragrafu. Pro názornost uveďme ještě jeden příklad bez dalšího komentáře:

***23.** Velkostatkáři byl nabízen ku koupi velkostatek za 300.000 K s podmínkou, že 90.000 K zaplatí za 4 a zbytek za 6 měsíců, aneb se slevou 1.500 K za hotové; která z nabídek byla proň výhodnější a o kolik K, měl-li peníze ve spořitelně úrokující 3½ %?*

([FR], str. 132, výsledek: Koupě na lhůty byla výhodnější o 3.187,50 K)

§ 24 *Složený počet úrokový*

Nejnáročnější typ úloh z finanční matematiky pro měšťanské školy se nacházel v této kapitole. Žák zde mohl složené úrokování natrénovat na třiceti úlohách. K dispozici měl tabulku úročitelů a odúročitelů, jež se používaly ještě ve druhé polovině dvacátého století pro zjednodušení práce s mocninami.

Z předložených úloh byla jedna velmi podrobně vyřešena. Uveďme její znění:

3. Na kterou sumu vzroste jistina 120.000 K za 3 roky při 4% úrokování, přiráží-li se úrok k jistině jednou za rok? ([FR], str. 196, výsledek: 134.983,68 K)

Úloha byla nejprve řešena úročením po jednotlivých letech, aby žák mohl sledovat postupný nárůst jistiny:

Počáteční jistina: 120.000 K; úrok za první rok: 4.800 K.

Jistina na konci prvního roku: 124.800 K; úrok za druhý rok: 4.992 K.

Jistina na konci druhého roku: 129.792 K; úrok za třetí rok: 5.191,68 K.

Jistina na konci třetího roku: 134.983.68 K.

Ten postup byl označen za velmi pomalý a byl ukázán algoritmus s postupným násobením číslem 1,04. Při vyhledání třetí mocniny tohoto čísla byl žák upozorněn na tabulku úročitelů. Následovala poslední část řešení, které nebylo součástí zadání – porovnání jistin při úrokování ročním a pololetním. Odpovědí bylo, že při pololetním úrokování byl úrok o 155,76 K větší než při ročním úrokování.

U ostatních úloh nebyl uveden ani náznak návodu, ale vzhledem k náročnosti to nebylo třeba. Pro dnešního čtenáře by bylo dobré připomenout, že ve všech úlohách byl předpoklad ročního úrokování, pokud nebylo řečeno jinak. Pro lepší představu ocitujme dvě úlohy bez dalšího komentáře.

13. Občanská záložna v Kutné Hoře úrokuje vklady 4 % a úroky připisuje k jistině pololetně. Na kolik K vzroste v záložně této uložená jistina 9800 K za 14 let? ([FR], str. 198, výsledek: 17.061,80 K, což bylo vypočítáno s použitím tabulky úročitelů; pokud úlohu vyřešíme dnešním postupem pomocí mocniny výsledek je 17.062,04 K)

23. Při založení spořitelny Novo-Bydžovské r. 1863 vložil do této otec svému 18letému synu jistinu, která při 4 % pololetním úrokování vzrostla do plnoletí syna na 19.023 K; kolik K uložil? ([FR], str. 201, výsledek: 14.997,72 K, což bylo vypočítáno s použitím tabulky odúročitelů, plnoletosti dosáhl za šest let, tj. dvanáct období, při 2% úročení, i když by se z textu mohlo zdát, že 4 % se vztahují k pololetí; s použitím mocnin je výsledek 14.999,51 K)

Další tři úlohy z finanční matematiky byly v závěrečném dvacátém pátém paragrafu nazvaném *Opakování*.

Hodnocení sbírky

Sbírka svými úlohami pokrývá všechny důležité oblasti praktického života lidí na počátku dvacátého století. Autor především zdůraznil nezbytnou pečlivost a přesnost při práci s penězi.

Celkové množství úloh (více než 2300) podle mého názoru plně postačovalo k dobrému procvičení počtářských dovedností žáků. Slovní úlohy představovaly reálné situace a žáci tak viděli praktické využití, což byl hlavní cíl měšťanských škol.

Sbírka sice neměla teoretické části, ale v každé kapitole se vyskytovalo několik úloh s návody, a tak se společně se samostatným oddílem *Výsledky* jednalo o velmi kvalitní a rozsáhlou pomůcku pro žáka i učitele. Svou strukturou byla publikace vhodná také k domácí přípravě a samostudiu.

Jan Kozák: *Pátá početnice pro třídy s 6., 7. a 8. školním rokem na školách vícetřídních,* Císařský královský školní knihosklad, Praha, 1914, 212 stran.

Tato početnice byla na rozdíl od obvyklých početnic poměrně rozsáhlá a obsahovala také zmínky o finanční aritmetice. Byla rozdělena na 36 krátkých kapitol. O její kvalitě vypovídá druhé, prvorepublikové vydání ve Státním nakladatelství v Praze z roku 1922; v něm byl jako spoluautor uveden vedle Jana Kozáka ještě Jan Roček. Rozsah početnice byl nezměněn, byly dokonce ponechány tabulky s cenami potravin a zboží z roku 1913. Ani druhé vydání však neobsahovalo výsledky cvičení, což do jisté míry bránilo jejímu užívání při samostudiu.

Z pohledu finanční aritmetiky nás zaujme osm kapitol:

- *Počet lhůtový* (1 strana);
- *Počty procentové* (9 stran);
- *Počty úrokové* (3 strany);
- *Záložny, spořitelny, banky* (1 strana);
- *Směnky, úvěr hypotekární, diskont* (5 stran);
- *Cenné papíry a akcie* (2 strany);
- *Složité úrokování* (6 stran);
- *Promile* (2 strany).

Charakteristika kapitol

S *počtem lhůtovým* se v současné době příliš nesetkáváme. V uváděných úlohách se většinou hledal okamžik stejné hodnoty splátek, jež bylo nutno při výpočtu úročit či odúročit.

Vyřešme jeden konkrétní příklad.

Strojník dal rolníkovi mlátičku a žentour za 840 K s podmínkou, že rolník splatí polovici za 3 měsíce, druhou polovici za 7 měsíců, kdy mu splatil najednou? ([KJ], str. 106)

Jelikož se jedná o stejnou výši splátek, je měsíční úrok z libovolné splátky totožný. První splátka nám „vynáší" úrok během tří měsíců, druhá během sedmi měsíců, tj. splátky nám vynášejí úrok po dobu deseti měsíců. Splátky jsou dvě, tudíž pět měsíců každá. A to je odpověď: Rolník, aby neošidil sebe ani strojníka, může splatit najednou za 5 měsíců.

Rozsah *lhůtového počtu* byl velmi malý, navíc nezvykle umístěný před procenty a úrokováním, jež jsou při výkladu nutné (více viz např. [FR]). Zde se však jednalo jen o „kuchařku" řešení úloh splacení dluhu konstantní anuitou.

Počet procentový rozsahem i obsahem odpovídal požadavkům kladeným na tuto látku. Žák nesměl váhat při práci s procenty. Slovní úlohy nebyly ani nijak zákeřné, ani příliš náročné a navíc byly zcela zaměřené na praktické situace za života. Uveďme jeden příklad bez dalšího komentáře.

Obchodník odvedl za čtvrt roku 248,63 K jakožto jednoprocentní daň z tržby; kolik K ve čtvrtletí utržil? ([KJ], str. 117)

Úrokové počty na třech stranách obsahovaly osmnáct různě náročných úloh, na nichž si žák procvičil vše potřebné. Ocitujme jeden typický příklad.

Dva bratři podědili po 67.500 K; prvý koupil za ně továrnu, v které se mu jistina zúročí 14½ %, druhý, aby peníze měl „jisté", uložil je do záložny na 4½ %; kolik K každému bratru vynesou peníze za 5 roků? ([KJ], str. 124)

Na výše citované úloze bylo cenné především to, že po jejím vyřešení si žák uvědomil rozdíl výnosu investice a v budoucnu mohl tuto znalost využít při svém investičním plánování. Množství a tematické zaměření úloh dostatečně pokrývaly budoucí potřeby běžného občana.

Stručná kapitola *Záložny, spořitelny, banky* nijak nerozšiřovala matematickou teorii kapitoly o úrocích, jen doplnila stručné charakteristiky peněžních ústavů.

Kapitola *Směnky, úvěr hypotekární, diskont* na dvou stranách uváděla základní charakteristiky směnek a úvěrů. Následně předkládala několik neřešených úloh, v nichž se popsané objekty finančních operací vyskytovaly. Uveďme na ukázku jeden příklad.

Zapletal vypůjčil si 640 K na směnku na půl roku; kolik mu záložna vyplatila při 6% diskontu? ([KJ], str. 129)

V této úloze žák musel vypůjčenou částku odúročit, tj. diskontovat. Znamenalo to, že při uvedených hodnotách obdrží jen 97 % zmíněné částky, neboť směnka zněla na půl roku, tj. částka byla snížena o polovinu diskontu.

Další kapitola *Cenné papíry a akcie* neobsahovala žádné úlohy, byly v ní objasněny pojmy spojené s cennými papíry, tj. zejména akcionář, akcie a nominální hodnota akcie.

Kapitola *Složité úrokování* byla naopak plná řešených příkladů a úloh na procvičení. Hlavně však poskytovala základní tabulky pro vyhledávání úročitelů (zde uročitelů), střadatelů a umořitelů. Je zajímavé, že tato kapitola měla být vykládána v 7. a 8. školním roce.

Podívejme se nejprve na zmíněné tabulky, za nimiž vždy uvedeme jednu úlohu s příslušnou tématikou.

I. Tabulka uročitelů,

dle níž lze vypočítati, jak uložené peníze po jisté řadě let vzrostou při složitém úrokování.

	Uložená 1 K vzroste při uročiteli			
	3 %	*4 %*	*4 ½ %*	*5 %*
za 1 rok	*1·03*	*1·04*	*1·045*	*1·05*
za 2 léta	*1·061*	*1·082*	*1·092*	*1·103*
za 3 léta	*1·093*	*1·125*	*1·141*	*1·158*
...	...	...	...	...

([KJ], str. 134)

Tabulka se používá při práci s jednou uloženou částkou po dobu více úrokovacích období.

Která jistina vzroste při 4 % (pak při 4½ %) úrokování za 15, 20, 24 léta na 2 000 (6 500) K)? ([KJ], str. 135)

Žák pouze zapsal konečnou hodnotu jistiny a tu následně vydělil číslem, které vyčetl z tabulky. V některých případech (např. 24 let) musel problém vyřešit po částech, zde 20 let a 4 roky.

II. Tabulka střadatelů

(Pojištění věna dětem, pojištění na dožití, na úmrtí a p.)

	Uložíme-li 1 K, vzroste			
	3 %	*4 %*	*4½ %*	*5 %*
za 1 rok	*1·03*	*1·04*	*1·045*	*1·05*
za 2 léta	*2·091*	*2·122*	*2·137*	*2·152*
za 3 léta	*3·184*	*3·246*	*3·278*	*3·31*
...	...	...	...	...

([KJ], str. 136)

Tabulka se obvykle používala při pravidelném ukládání stejné částky na počátku úrokovacího období po dobu více úrokovacích období.

Kolik musí otec ukládati ročně synovi, aby při 5% úrokování měl za 20 let do závodu 6 000 K? ([KJ], str. 136)

Vzhledem k jednoduchému použití tabulky střadatelů byl postup při řešení této úlohy analogický s postupem uvedeným v předešlé úloze.

III. Tabulka umořitelů

	Abychom oplatili vypůjčenou 1 K, musíme zaplatiti při úrocích			
	3 %	*3½ %*	*4 %*	*4½ %*
za 1 rok	*1·03*	*1·035*	*1·04*	*1·045*
za 2 léta	*0·5226*	*0·5264*	*0·5302*	*0·5340*
za 3 léta	*0·3535*	*0·3569*	*0·3603*	*0·3638*
...	...	...	...	...

([KJ], str. 138)

Kolik musíme splácet, abychom 1 000 K umořili za 12 let při 3½% úrokování? ([KJ], str. 139)

Při použití tabulky umořitelů se kroky postupu řešení úlohy redukovaly jen na vyhledání umořitele v příslušném řádku a sloupci a jeho vynásobení s vypůjčenou částkou.

Práce s tabulkami a řešení typových úloh byly vyloženy v několika řešených příkladech. Žák byl nucen naučit se v tabulkách vyhledávat, ostatní byla jen rutina násobení a dělení.

Poslední kapitolou, kterou má smysl zmínit, byla kapitola nazvaná *Promile*. Autor učebnice si byl vědom, že se s tímto termínem a příslušným symbolem žák v budoucnosti setká, a proto jej neopominul. Na dvou stranách jasně popsal podstatu promile na základě znalosti procenta. Následné úlohy do klasické finanční aritmetiky nepatří, neboť pojem promile se ve finančnictví běžně nepoužíval ani nepoužívá. Uveďme proto jen jednu úlohu.

Komisionář zprostředkoval prodej mouky za 34.680 K, za zprostředkování dostal 6 ‰; kolik si tím vydělal? ([KJ], str. 140)

Hodnocení početnice

Vzhledem k tomu, že učebnice umožňovala první setkání žáků s finanční aritmetikou a ti nebyli ještě vybaveni dostatečným matematickým aparátem, byl autorův přístup ke zpracování a výkladu látky velmi vhodný. Přestože žáci téměř netušili, odkud a jak se vzaly hodnoty v tabulkách, dokázali si jejich používáním uvědomit základní principy, pochopili, že při spoření v peněžních ústavech vložená částka nabývá více než doma pod „matrací“ a že při půjčce musí naopak zaplatit více, než si půjčili, a to jako poplatek za to, že peníze měli k dispozici ihned.

Úlohy byly voleny velmi pečlivě. Nebyly přehnaně náročné, použité hodnoty odpovídaly realitě, nebyly zbytečně vyumělkované pro zvýšení náročnosti násobení a dělení. Spojitost s reálnými situacemi také ulehčovala práci učitele při motivaci žáků, kteří si uvědomovali, že se neučí „pro nic za nic“. Získali základní návyky, jež je mohly v budoucnosti ochránit před nepředloženými kroky při jednání s bankovními ústavy či lichváři.

Augustin Matolín: *Pátá početnice pro obecné školy vícetřídní, pátý školní rok,* opravené vydání dle osnov z roku 1915, Císařský královský školní knihosklad, Praha, 1916, 72 stran.

Tato učebnice určená pro páté ročníky českých obecných škol neobsahovala klasickou finanční aritmetiku, jež by byla pro žáky příliš náročná. Stojí však za zmínku, neboť obsahovala velké množství příkladů procvičujících početní operace. Skládala se ze čtyř samostatných oddílů:

oddíl prvý: *Počítání s čísly celými, desetinnými i vícejmennými;*

oddíl druhý: *Počítání se zlomky obecnými;*

oddíl třetí: *Počet úsudkový;*

oddíl čtvrtý: *Skupinové opakování*

a dodatku, v němž byly přehledy peněz, délkových měr, dutých měr, vah, času atd.

Počet slovních úloh, jejich zaměření a bohatost svědčí o důrazu na praktické využití. Slovní úlohy s peněžní tématikou jsou poměrně časté, klasickými náměty jsou nákup, prodej, stanovení výše nákladů a podobně. Uveďme bez dalšího komentáře dvě z typických úloh.

Kočí koupil ¼ q ovsa; kolik zaplatil, je-li q za 360 K? ([MA], třetí oddíl, str. 51)

Průvodčí elektrické dráhy v Praze prodal za den 586 lístků po 1 K 20 h, 128 lístků po 60 h a 68 lístků po 2 K; kolik K odvedl za ten den? ([MA], čtvrtý oddíl, str. 68)

O její kvalitě a oblibě svědčí další nezměněná (či téměř nezměněná) vydání z let 1918, 1921 a 1922. Vydání před rokem 1915 se mi nepodařilo vyhledat a vzhledem k chybějícímu označení pořadí vydání, ani nemohu rozhodnout, kolik jich celkem bylo. Učebnici lze vytknout pouze absenci obsahu a výsledků.

2.2 Učebnice pro reálky, gymnázia, reálná gymnázia a střední školy

Ladislav Červenka: *Arithmetika pro I. třídu středních škol*, 1. vydání, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1910, 94 stran.

Jednalo se o první díl sady tří učebnic aritmetiky pro nižší ročníky středních škol od téhož autora. První vydání bylo schváleno vynesením č. 11 267 c. k. ministerstva kultu a vyučování ze dne 22. dubna 1910. Rozsahem nebyla tato učebnice nijak výjimečná; neobsahovala klasickou finanční matematiku. Pouze ve druhé kapitole nazvané *Míry věcí spojitých. Peníze.* se nacházel osmý paragraf s názvem *Rakouské peníze*. Student zde obdržel přehledný soupis a převodní vztahy existujících mincí a bankovek.

Učebnice byla kvalitní a uznávaná, o čemž svědčila její další vydání z let 1911 (rozsah 92 stran), 1919 (rozsah 92 stran), 1921 (rozsah 92 stran), 1923 (rozsah 92 stran), 1932 (rozsah 100 stran) a 1934 (rozsah 100 stran).

Ladislav Červenka: *Arithmetika pro II. třídu středních škol*, 1. vydání, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1910, 80 stran.

Jednalo se o druhý díl výše zmíněné sady, který byl stejně úspěšný jako první, neboť se dočkal celkem osmi vydání. První vydání z roku 1910 s 12 obrázky a čtyřmi tabulkami bylo schváleno vynesením č. 30 330 c. k. ministerstva kultu a vyučování ze dne 27. srpna 1910.

Obsah byl rozdělen do čtyř základních kapitol, které byly dále členěny na celkem 19 paragrafů, jež byly pro přehlednost upraveny do 85 odstavců.

Student v ní byl seznámen jen se základy finanční matematiky, které byly zpracovány v uceleném osmnáctém paragrafu a rozšířeny posledním devatenáctým paragrafem.

Obsah učebnice

Část I. Dělitelnost čísel celých (10 stran);

Část II. Počítání zlomky (27 stran);

Část III. Veličiny úměrné. Trojčlenka (17 stran);

Část IV. Počet procentový a úrokový (24 stran);

§ 16. *Počet procentový* (5 stran);

§ 17. *Opakovací cvičení* (5 stran);

§ 18. *Počet úrokový* (8 stran);

§ 19. *Úkoly opakovací* (6 stran);

Přídavek (2 strany).

Zaměřme se na analýzu úrovně a náročnosti finanční matematiky ve dvou závěrečných paragrafech.

§ 18. Počet úrokový

Tento paragraf byl rozdělen na osm krátkých odstavců, v nichž byl student postupně seznamován se základními pojmy a postupy finanční matematiky.

V prvním odstavci byly zavedeny pojmy *půjčit*, *vrátit*, *dlužník*, *věřitel* a *úrok*. Ve druhém byl nastíněn postup výpočtů při jednoduchém úrokování a závislost úroku na délce trvání výpůjčky. K vysvětlení byl použit jeden řešený a komentovaný příklad. Třetí odstavec představoval existující peněžní ústavy (např. záložny, spořitelny, banky) a ukazoval možnosti vkladů a půjček. Teprve ve čtvrtém odstavci s názvem *Počítání úroků* byly studentovi ukázány typické úlohy. První příklad byl vyřešen třemi způsoby, v nichž měl student pochopit využití znalostí trojčlenky a procentového počtu. Na základě těchto myšlenek byl odvozen vzorec pro jednoduché úrokování, který byl následně použit při řešení dalších třech příkladů. Uveďme jeden z nich.

3. Jak veliké jsou 4%ní úroky z 280 K za dobu od 12. dubna 1910 do 27. července 1910? ([CL2], str. 67)

Řešení: Student byl nejprve veden k výpočtu počtu dní uložení s poznámkou, že měsíc se počítá za 30 dní a den výpůjčky se nepočítá. Tedy od 12. dubna do 12. července to byly 3 měsíce a do 27. července dalších 15 dní, celkem tedy 105 dní z 360.

Úrok byl pak počítán z odvozeného vzorce:

$$u = \frac{j \cdot p \cdot r}{100} = \frac{280 \cdot 4 \cdot \frac{105}{360}}{100} = 3{,}27 \text{ K}.$$

Po řešených příkladech následovalo jedenáct úloh k procvičení, z nichž některé měly více variant zadání (např. třetí úloha měla varianty od a) po h)). Čtvrtý odstavec byl zaměřen jen na výpočet úroků.

Tématem pátého odstavce byl výpočet jistiny. Struktura byla zachována – první řešený příklad měl dva typy řešení, podle odvozeného vzorce byly vyřešeny další dva příklady a odstavec byl zakončen úlohami 12 až 17 k procvičení. Pro posouzení náročnosti uveďme bez dalšího komentáře jednu úlohu.

16. 4% úroky z jakéhosi dluhu činily za dobu od 16. února do 26. května téhož roku (6. července t. r., 26. ledna násl. roku, 3. února násl. r.) 122,40 K; jak velký byl tento dluh? ([CL2], str. 69)

Stejným výkladovým stylem byly vedeny také následující odstavce. Šestý odstavec byl zaměřen na výpočet úrokové míry (jeden řešený příklad a šest úloh na procvičení), sedmý na počítání času (jeden řešený příklad a pět úloh na procvičení) a úlohy, jež nebyly takto jednoznačně určené, byly řešeny v posledním osmém odstavci. Osmý odstavec obsahoval dva řešené příklady a pět úloh na procvičení. Pro lepší představu obsahu osmého odstavce uveďme jednu úlohu.

31. Kolik třeba zaplatiti nyní, abych se zbavil povinnosti platiti za rok 1000 K při úrokování 4½ %? ([CL2], str. 72)

§ 19. Úkoly opakovací

V posledním paragrafu učebnice byly podrobněji popsány peněžní ústavy a cenné papíry. Vše bylo rozděleno do pěti odstavců. Teoretické části byly krátké a hlavní důraz byl kladen na praktické úlohy.

První odstavec obsahoval charakteristiku záložen, spořitelen a bank. Vysvětloval možnosti úrokování vkladů a získání úvěrů. Na šesti neřešených úlohách byly představeny některé situace, které mohly nastat. Uveďme jednu z nich.

4. Kolik (i s úroky) nastřádal si za rok člověk, který 1. lednem 1910 počínaje každého prvního dne v měsíci uložil do městské spořitelny Pražské vždy 10 K? Vypočteme-li tuto úsporu, jak z toho rychle usoudíme, kolik by si byl uspořil, kdyby byl ukládal každého měsíce 20 (25, 24, 22,50) K? ([CL2], str. 72)

Dalších šest úloh obsahoval druhý odstavec, který byl zaměřen na poštovní spořitelnu, jež byla podle textu zaměřena především na spoření (*řízení úsporné*) a vedení účtu (*řízení šekové*). Při vedení účtu bylo vyloženo jak používat složenky k zaplacení hotovosti na účtu a šeky k vyplacení hotovosti z účtu.

Třetí odstavec pojednával o akciích a zaváděl pojmy *akcionář*, *dividenda*, *nominální hodnota* atd. Opět následovalo šest úloh k procvičení. Zmiňme jednu z nich.

16. Akciová společnost Laurin a Klement, továrna automobilů v Ml. Boleslavi, má 17 500 akcií po 200 K; r. 1907 platila dividendu 12 K. Kolik K by stála taková akcie, očekává-li se stejná dividenda, kdyby cena její měla býti úrokována 5 % a jestliže od placení poslední dividendy uplynuly 4 měs. 24 dny? ([CL2], str. 76)

Čtvrtý odstavec zaváděl pojem směnky a s ním spojené směnečné právo a skonto. Opět byla zdůrazněna délka finančního roku, tedy 360 dní. Navíc bylo zmíněno, že úrokovou míru skonta někdy určuje rakousko-uherská banka. Následovaly tři úlohy k procvičení.

Poslední, pátý odstavec byl věnován dlužním úpisům a uzavíraly jej čtyři procvičující úlohy. V úvodu byl popsán způsob emise částečných dluhopisů, k nimž byl vydáván kuponový arch, ze kterého se odstřihávaly kupony při výplatě úroků. S posledním kuponem byl bance předložen talon a vydán nový kuponový arch. Podstatou dluhopisů bylo poskytnutí půjčky nezadlužené továrně bankou, která ji úročila pěti procenty. Získanou částku rozdělila na dlužní úpisy a na ně si půjčila od jednotlivců. Dlužní úpisy úročila menší úrokovou mírou a úroky vyplácela za kupony, které šlo používat jako peníze. Rozdíl úrokových měr byl ziskem banky. Kromě příslušné kurzovní ceny bylo třeba doplatit ještě část úroků z ní od výplaty posledního kuponu.

Hodnocení učebnice

Učebnice nebyla příliš objemná, ke zmiňovaným tématům obsahovala základní úlohy nízké nebo střední náročnosti. Popis postupů řešení příkladů byl kvalitní a podrobný. Její struktura byla přehledná, k rychlé orientaci pomohlo zařazení obsahu, kde vedle stránek bylo uvedeno číslování odstavců. Učebnice nebyla určena ke samostudiu, o čemž svědčí neuvedení výsledků úloh k procvičení.

Kvalitu a oblíbenost podtrhovala její další vydání, jež vycházela ještě za doby první republiky – 1911 (rozsah 80 stran), 1919 (rozsah 80 stran), 1921 (rozsah 80 stran), 1923 (rozsah 84 stran), 1930 (rozsah 92 stran + 12 stran doplňku), 1932 (rozsah 103 stran), 1934 (rozsah 119 stran). Viditelné změny nastaly až u několika posledních vydáních; finanční matematiky se však téměř nedotýkaly.

Ladislav Červenka: *Arithmetika pro III. třídu středních škol*, 1. vydání, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1911, 104 stran.

Třetí díl analyzované sady učebnic patřil mezi kvalitní a oblíbené. Dočkal se také vysokého počtu vydání a to v letech – 1918 (rozsah 104 stran), 1920 (rozsah 104 stran), 1922 (rozsah 106 stran), 1925 (rozsah 108 stran), 1933 (rozsah 108 stran), 1934 (rozsah 108 stran). Jednotlivá vydání se jen minimálně odlišovala, zahrnovala obsah a postrádala výsledky úloh.

První vydání z roku 1911 bylo schváleno výnosem č. 13 437 c. k. ministerstva kultu a vyučování ze dne 11. května 1911. Základními tématy z aritmetiky pro třetí třídu byly číselné výrazy, algebraické výrazy, druhé a třetí mocniny mnohočlenů. Finanční matematiku tato učebnice neobsahovala, nebudeme ji proto podrobovat analýze.

Červenkovy učebnice často uváděly obecné rady studentům, jak počítat a postupovat při řešení matematických problémů. Jejich smysl se během let neztratil. Byly vždy před první kapitolou a byly umístěny samostatně na celou stranu. Uveďme částečné znění některých z nich.

Pište číslice jasně a čitelně, vyhýbejte se tvarům, které by mohly býti čteny různě! ... Čtete-li v knihách nebo v novinách čísla, představujte si množství jimi udaná a uvažujte, co všechno by se z oněch čísel dalo vypočísti a jak by se to počítalo. Hleďte počítati hbitě, ale ovšem správně! ([CL2])

Pište výpočty čistě a přehledně na tabuli i na papír! Každý výpočet buď zapsán tak, aby snadno mohl býti přepočten, zkontrolován! ... Máte-li rozřešiti nějakou úlohu, uvažte nejprve, co je v ní dáno, potom, co se žádá; ... Na konec hleďte přesvědčiti, vyhovuje-li výsledek opravdu podmínkám úlohy. ... Zapisujte si často čas, kterého potřebujete k provedení nějakého výkonu početního. ... ([CL3])

Rudolf Bendl, Jindřich Muk: *Arithmetika pro nižší třídy škol středních, díl I.*, 1. vydání, Ústřední spolek českých professorů, Praha, 1910, 88 stran.

Jednalo se o první díl trojdílné učebnice aritmetiky pro nižší třídy středních škol. Tyto učebnice byly rozsahem, obsahem, náročností i didaktickou úrovní obdobné učebnicím analyzovaným výše [CL1], [CL2] a [CL3].

Všechny tři díly aritmetiky autorů Rudolda Bendla a Jindřicha Muka se dočkaly tří vydání. Druhé a třetí vyšla v téměř nezměněné podobě v první polovině dvacátých let dvacátého století, tj. v době samostatného Československa.

První vydání všech tří dílů (1910, 1910, 1911) byla sepsána podle učebních osnov platných v roce 1909, tj. zcela odpovídala požadavkům Marchetovy reformy. Měly přehledný obsah, ale nebyl v nich uveden oddíl s výsledky cvičení.

První díl byl věnován početním operacím, práci s zápisy čísel v dekadické soustavě, římským číslicím a okrajově penězům. Nebyla zde zastoupena žádná finanční matematika. V kapitole *O penězích* s rozsahem čtyř stran byl student seznámen s měnami, mincemi a bankovkami. Měl být schopen převádět hodnotu uvedenou v jedné měně na jinou měnu. Bylo mu vyloženo použití různých kovů a slitin při výrobě mincí nebo šperků. Uveďme bez dalšího komentáře dva typické příklady.

8. Zvažte stříbrnou korunu, pětikorunu a zlatník a vypočítejte skutečnou cenu jejich! (1 g ryzího stříbra má cenu 9 h.) ([BM1], str. 76)

17. Kolik činí 495 K 62 h v penězích ruských, italských a amerických? ([BM1], str. 76)

Protože zde nebyla obsažena klasická finanční matematika, nemá smysl hlouběji analyzovat tento díl.

Rudolf Bendl, Jindřich Muk: *Arithmetika pro nižší třídy škol středních, díl II.*, 1. vydání, Ústřední spolek českých professorů, Praha, 1910, 92 stran.

Druhý díl trojdílné sady, se kterou jsme se seznámili výše, obsahoval finanční matematiku v rozsahu 13 stran. Její výklad byl rozdělen do dvou částí. První část byla označena § 19. *Počet úrokový* a dále se dělila podle typu úloh – výpočet úroků, výpočet procent, výpočet jistiny a výpočet doby. Druhá část nebyla označena paragrafem; nesla název *Smíšené příklady počtu úrokového* a byla rozčleněna na tři podčásti – o půjčkách, o směnkách a o dluhopisech.

§ 19. Počet úrokový

Tato část obsahovala základní myšlenky jednoduchého úrokování a měla rozsah osm stran. V úvodu byly zavedeny pojmy *věřitel*, *dlužník*, *jistina* a *úrok*. Ty byly použity k popsání logických postupů, např.

(Podmínka:) Z jistiny 100 K zaplatíme za dobu 1 roku úrok 4 K.

(Otázka:) Z jistiny 3690 K zaplatíme za dobu 3 roků úrok x? ([BM2], str. 81)

Pak následovaly čtyři části s řešenými příklady a úlohami na procvičení rozdělenými podle toho, k čemu se vztahovala otázka.

A. Výpočet úroků

Pomocí výše zmíněné trojčlenky byl odvozen vzorec obsahující základní proměnné jednoduchého úrokování. Tyto proměnné byly označeny *j* = jistina, *p* = procenta (= úroková míra), *ú* = úroky a *t* = dobu v letech (zmíněn termín *tempus*).

Řešení bylo postaveno na trojčlence, která byla stěžejním logickým postupem při řešení vztahů úměrných veličin a byl na ni kladen velký důraz. Student se tedy nemusel bát nové látky, neboť zjistil, že lze uplatňovat dříve nabyté vědomosti. Tímto postupem byl odvozen i vzorec pro výpočet úroků, který nebyl nijak zvláštní oproti jiným učebnicím:

$$\text{ú} = \frac{j \cdot p \cdot t}{100}.$$

Dále byly tři řešené příklady a 18 úloh na procvičení. Některé úlohy již skrytě obsahovaly složité úrokování, ale student tímto termínem nebyl „strašen“. Posuďme to podle jedné z úloh.

17. Kolik vynese jistina 1200 K (7000 K) při pololetním úrokování na 4 % (4½ %) uložená za rok (1½ roku)? (Úroky se vždy za půl roku a to 30.VI. a 31.XII. přirážejí k jistině.) ([BM2], str. 83)

Z prostředků, které student měl k dispozici, bylo nevyhnutelné počítat každé úrokovací období, tj. v uvedené úloze půl roku, zvlášť a do dalšího postoupit s novou jistinou. Student tak mohl být schopen při menším počtu úrokovacích období pochopit princip úroků z úroku, což bylo nezbytné pro jeho budoucí život.

B. Výpočet procent

S využitím znalostí z oddělení A autoři usoudili, že postačí jeden řešený příklad, který opět využíval trojčlenku. Podívejme se na něj.

Na kolik procent jest uložiti jistinu 3240 K, aby vynesla za 3 roky úroků 486 K?

Postup:

Za 1 rok vynese jistina 3240 K úroků 162 K.

Ježto 1% úrok z jistiny 3240 K je 32,40 K, obdržíme počet procent měřením

$$162\ K : 32{,}40\ K = 5.$$

([BM2], str. 83)

Po tomto postupu bylo ještě uvedeno použití vzorce $ú = \frac{j \cdot p \cdot t}{100}$, jenž byl upraven na tvar $p = \frac{100 \cdot ú}{t \cdot j}$. Následovalo 16 úloh, při jejichž řešení student pracoval s reálnými situacemi. Zmíněna byla ještě lichva jako nepoměrné obohacování věřitele při půjčování peněz a zákon proti lichvě vydaný dne 28. května 1881.

C. Výpočet jistiny

Tato část byla pojata stejným způsobem jako dvě předešlé. S využitím trojčlenky byl odvozen vzorec pro výpočet jistiny. Vysvětleny byly dva příklady a studentovi bylo předloženo 17 úloh na procvičení. Úlohy nebyly extrémně náročné a obsahovaly popis reálných situací. Posuďme ze znění jedné z nich.

14. Věřitel měl peníze uloženy v záložně na 4½ %. Když záložna o ¼ % úrok snížila, zmenšily se mu úroky o 13 K ročně; kolik K měl věřitel v záložně? ([BM2], str. 86)

D. Výpočet doby

I pro tento typ úloh byl použit stejný postup, tj. trojčlenka a následné odvození vzorce. Tato část obsahovala kromě jednoho řešeného příkladu dalších jedenáct úloh k procvičení.

Smíšené příklady počtu úrokového

Tato kapitola obsahovala popis základních operací při splácení dluhu a operací s cennými papíry. Měla rozsah pět stran. Byla rozdělena na tři části, které nebyly pojmenovány, ale byly jen očíslovány.

I.

První část neobsahovala žádný teoretický úvod. Nacházelo se v ní osm úloh, které byly zaměřeny na spoření, splácení, nájem apod. Jednalo se pravděpodobně o rozšíření či doplnění předešlé kapitoly. Uveďme jednu úlohu.

6. Domkář koupil malý statek za 9600 K, kterýžto měl zaplatiti buď hned, aneb do roka s 5pctním úrokem; zaplatil-li třetinu ihned, polovinu za ½ roku a ostatek za 8 měsíců, kolik celkem úroků připlatil? ([BM2], str. 88)

II.

Tato druhá část byla věnována směnkám. Byla zde teoretická část se základní definicí a charakteristikou směnky i její vyobrazení. Následovalo osm úloh na procvičení. Žádný řešený příklad nebyl uveden.

III.

Třetí závěrečná část objasňovala státní dluhopisy. Po krátkém teoretickém úvodu, v němž byly stylem přijatelným pro věk studenta vysvětleny pojmy *obligace, zástavní list, akciová společnost, dividenda, los, nominální hodnota, kurzovní lístek* a další. Vše bylo uzavřeno osmi úlohami na procvičení. Uveďme na ukázku jednu z nich.

20. Dne 1. prosince 1909 prodán cenný papír; jakou měl nominální cenu, činila-li náhrada 4pctního úroku od 1. listopadu za kupon 1,75 K? ([BM2], str. 92)

Hodnocení učebnice

Učebnice nebyla ničím výjimečná vzhledem k učebnicím této doby. Rozsah i témata zcela odpovídaly příslušnému ročníku střední školy. Po didaktické stránce považuji tuto učebnici za velmi kvalitní, neboť využívala základní pravidla výkladu a procvičení. V každé kapitole byl stručný a srozumitelný teoretický úvod, následovaly řešené komentované příklady. Každá část byla zakončena poměrně velkým počtem úloh na procvičení. Samostudiu a vyčerpávající domácí přípravě pouze bránila absence výsledků ke cvičením, což byl jediný zápor, který bych učebnici vytkl.

Z pohledu finanční matematiky kniha obsahovala podrobně rozpracované jednoduché úrokování, které bylo a je základním kamenem při orientaci ve finančnictví. Po jejím prostudování si každý student mohl a měl uvědomit, že při spoření dostane něco navíc a při půjčce zaplatí více, než si půjčil. Osvojení těchto dovedností bylo nezbytné pro každé období.

Rudolf Bendl, Jindřich Muk: *Arithmetika pro nižší třídy škol středních, díl III.*, 1. vydání, Ústřední spolek českých professorů, Praha, 1911, 138 stran.

Třetí, závěrečný díl analyzované aritmetiky autorů R. Bendla a J. Muka neobsahoval finanční matematiku. Zabýval se číselnými i algebraickými výrazy, operacemi s mnohočleny, druhou a třetí mocninou a odmocninou. Na rozdíl od předešlých dvou dílů však byl schválen výnosem č. 16908 c. k. ministerstva kultu a vyučování ze dne 8. června 1911. Vzhledem k absenci finanční matematiky se jím hlouběji zabývat nebudeme.

Velmi podobná sada učebnic aritmetiky pro nižší ročníky středních škol byla sepsána autory Václavem Starým a Josefem Pithardtem. Upravené vydání podle osnov z roku 1909 neslo pořadové číslo deset a vyšlo ve třech dílech v letech 1910 až 1912 ([SP1], [SP2] a [SP3]). Předešlá vydání vycházela jako souborná učebnice pro první až třetí třídu s rozsahem přesahujícím 200 stran již od sedmdesátých let devatenáctého století. Spolu s Václavem Starým byl spoluautorem některých vydání František Machovec či u výše zmíněného desátého Josef Pithardt. Některá vydání byla přímo určena reálkám nebo gymnáziím a reálným gymnáziím či středním školám. Náplň finanční matematiky se od učebnic Rudolfa Bendla a Jindřicha Muka ([BM1]; [BM2]; [BM3]) téměř nelišila. Nebudeme je proto podrobovat samostatné analýze.

Bohumil Bydžovský: *Arithmetika pro VI. a VII. třídu gymnasií a reálných gymnasií*, 1. vydání, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1911, 156 stran.

Aritmetika autora kvalitních učebnic a sbírek pro různé typy středních škol byla určena studentům vyšších tříd gymnázií a reálných gymnázií. Rozsahem nebyla příliš objemná, přestože ji studenti využívali celé dva roky. Byla schválena vynesením č. 6903 c. k. ministerstva kultu a vyučování ze dne 27. února 1911.

Jednalo se o učebnici, která navazovala na *Arithmetiku pro IV. a V. třídu gymnasií a reálných gymnasií* ([B45]) stejného autora, v níž jsem nenalezl žádné zmínky o finanční matematice. Z vypracovaných analýz a učebních osnov lze usuzovat, že jednoduché úrokování bylo námětem druhého ročníku a složité neboli složené úrokování bylo námětem sedmého ročníku středních škol.

Učebnice pro šestou a sedmou třídu byla rozdělena na osm částí a složité úrokování bylo obsahem šesté části. Jednotlivé části byly dále členěny na paragrafy a odstavce.

Obsah učebnice

Část I. Logaritmy (rozsah 22 stran);

Část II. Rovnice druhého stupně o jedné neznámé (rozsah 33 stran);

Část III. Rovnice stupňů vyšších a soustavy rovnic (rozsah 26 stran);

Část IV. Maxima a minima (rozsah 10 stran);

Část V. Řady (rozsah 11 stran);

Část VI. Složité úrokování (rozsah 16 stran);

Část VII. Nauka o skupinách (rozsah 10 stran);

Část VIII. Počet pravděpodobnosti (rozsah 23 stran).

Rozbor části VI. *Složité úrokování*

Tato část byla rozčleněna na šest paragrafů, jež pokrývaly základní témata finanční matematiky. Členění přispívalo k pohodlné a rychlé orientaci studenta. Každý paragraf byl dále rozdělen na odstavce, které nesly stručný a jasný název. Šestá část měla celkem 19 odstavců. Každý odstavec začínal definicemi pojmů s jejich krátkými charakteristikami. Následovaly řešené příklady a úlohy k procvičení.

§ 1. *Vzrůst kapitálu*

(3 odstavce – Základní úloha; Úročitel; Mocnitel *n* lomený)

V tomto paragrafu byl student v prvním odstavci uveden do problematiky úlohou, v níž měl někdo uložen kapitál na roční úrok. Krátce bylo připomenuto jednoduché úrokování a na jednom příkladu uložení kapitálu na více úrokových období bylo provedeno porovnání tohoto typu úrokování s úrokováním složitým. Pro studenta nový typ úrokování byl zaveden přehledným rozpisem vzrůstu kapitálu po jednotlivých úrokovacích období, kde student viděl připisování úroků z úroků. Následovaly dvě úlohy na procvičení.

Ve druhém odstavci byl odvozen vzorec pro výpočet jistiny po *n* úrokovacích období a zaveden pojem *úročitel*. Vzorec byl nejprve rozepsán jako postupný výpočet jistiny na konci každého období:

$$K_1 = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right);$$

$$K_2 = K_1 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^2;$$

$$K_3 = K_2 \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right) = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^3;$$

$$\dots$$

Závorka byla nakonec označena q, aby student poznal, že se výše jistiny chová jako člen geometrické posloupnosti. Mocnina q byla nazvána úročitelem. Pro názornost byl znovu přepočítán příklad z prvního odstavce s porovnáním celoročního a pololetního úrokování. V poznámce bylo uvedeno, že frekvence úrokování může být různá, ale pravidlem bývá úrokování pololetní. Následovalo sedm úloh na procvičení. Uveďme jednu z nich.

7. Jistina 8000 K byla uložena po 5 let na 4 %, pak snížila spořitelna úrokovou míru na 3½ %, kapitál zůstal uložen další 4 léta. Jaký je konečný kapitál (úrokování pololetní)? ([B67], str. 108, výsledek: 11203,84 K)

Poslední odstavec byl zaměřen na výpočet jistiny, která byla uložena na jinou dobu než celočíselný násobek úrokovacího období (např. od 1. října 1901 do 31. března 1909). Na konkrétním příkladu bylo ukázáno spojení jednoduchého a složeného úrokování. K procvičení byly předloženy dvě úlohy.

§ 2. *Úlohy obrácené* (2 odstavce – Diskont; Výpočet procenta, doby)

V prvním odstavci tohoto paragrafu byl řešen příklad s prodejem pohledávky, jež měla být vyrovnána až za čtyři roky. Byl ukázán způsob odúročení finální částky. Použit byl odvozený vzorec složitého úrokování z předešlého paragrafu. Následovaly tři úlohy na procvičení, jež se zabývaly hledáním vstupního kapitálu nebo počáteční hodnoty pohledávky. Uveďme jednu úlohu.

2. Jakou dnešní hodnotu má jistina 12650 K, splatná za 10 let při pololetním úrokování (5 % ročně)? ([B67], str. 109, výsledek: 7719,93 K)

Ve druhém odstavci byl vzorec pro složité úrokování upraven pro výpočet úrokové míry a doby uložení. Obsahoval také jeden podrobně řešený příklad a předloženo bylo pět úloh na procvičení. Student byl veden k využívání tabulek úročitelů a logaritmů. Vyřešme jednu z daných úloh.

4. Za jakou dobu je splatna pohledávka 13788 K, která byla koupena za 10000 K, diskontuje-li se 5½ % (celoročně)? ([B67], str. 110, výsledek: 6 let)

Řešení: Nejprve bylo nutno ze základního vzorce pro složené úrokování

$$K_n = K \cdot \left(1 + \frac{p}{100}\right)^n$$

vyjádřit počet úrokovacích období

$$n = \frac{\log K_n - \log K}{\log\left(1 + \frac{p}{100}\right)}$$

a pak dosadit dané hodnoty

$$n = \frac{\log 13788 - \log 10000}{\log\left(1 + \frac{5{,}5}{100}\right)}.$$

Jednotlivé hodnoty dekadických logaritmů byly vyhledány v tabulkách, poté bylo provedeno odčítání a dělení, výsledek byl n = 5,9994. Tato hodnota byla zaokrouhlena na 6 let. Pokud dnes použijeme kalkulačku, výsledek s přesností na pět platných číslic je také 5,9994, což hovoří o dostatečné přesnosti logaritmických tabulek (např. [ST], *Kapesní tabulky logarithmické, jakož i jiné důležité tabulky pomocné* od Františka Josefa Studničky, jež vycházely od roku 1870, [LT], *Sedmimístné obecné logaritmy* od Františka Macka, které poprvé vyšly roku 1862).

§ 3. *Střádání* (1 odstavec – Vzorec)

Tento paragraf byl věnován pravidelnému střádání. U většiny úloh termíny vkladů byly totožné s termíny připisování úroků. Odvození vzorce bylo postaveno na základě znalosti vlastností geometrické posloupnosti. Při pravidelném ukládání vždy na počátku úrokovacího období trvající n úrokovacích období měla rovnice pro konečnou jistinu tvar

$$K = a \cdot q^n + a \cdot q^{n-1} + \cdots + a \cdot q^3 + a \cdot q^2 + a \cdot q,$$

kde a byla hodnota vkladu (anuita), $q = 1 + \frac{p}{100}$ při úrokové míře p %. Tato rovnice byla převedena na tvar

$$K = a \cdot q \cdot (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-2} + q^{n-1}) = a \cdot q \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Výraz $q \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$ byl označen Q_n a pojmenován *střadatel*, jehož konkrétní hodnota se opět vyhledávala v tabulkách.

Byly uvedeny a podrobně vyřešeny tři příklady. V poznámce byla vyzdvihnuta role sedmimístných logaritmických tabulek, které se v té době používaly v praxi. Následovalo pět úloh na procvičení. Bez dalšího komentáře, neboť se jednalo jen o využití odvozeného vzorce, uveďme jednu z nich.

4. Po 30letém obchodu měl obchodník nastřádáno 250 000 K. Kolik průměrně ročně uložil? (4 %, úr. celoroční) ([B67], str. 112, výsledek: 4286 K)

§ 4. *Důchod* (3 odstavce – Zásobitel; Důchod stálý; Státní renta)

V tomto paragrafu byla nejprve naznačena myšlenka zakládací jistiny pro důchod. V prvním odstavci byl odvozen vzorec pracující s touto jistinou a diskontovanými výplatami k okamžiku založení. Podívejme se na odvození.

$$K = \frac{r}{q} + \frac{r}{q^2} + \cdots + \frac{r}{q^n} = \frac{r}{q^n} \cdot (1 + q + q^2 + \cdots + q^{n-1}) = r \cdot \frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$$

V uvedeném vzorci bylo K hodnota zakládací jistiny, r výplata důchodu, $q = 1 + \frac{p}{100}$ při úrokové míře p % a výraz $\frac{1}{q^n} \cdot \frac{q^n-1}{q-1}$ byl označen R_n a nazván *zásobitelem*, jehož konkrétní hodnota byla vyhledávána v tabulkách.

Bez řešeného příkladu bylo předloženo sedm úloh na procvičení. Vyřešme jednu společně.

4. Dítě, jež osiřelo v 10. roce, zdědilo po rodičích 10000 K. Kolik smí (průměrně) ročně utratiti, aby vystačilo do 25. roku? (4 %, celoroční)

([B67], str. 113, výsledek: 899,41 K)

Řešení: Důchod byl plánován jako dočasný a bezprostřední, tzn. ihned mohl být využit výše odvozený vzorec. Porovnejme výpočet na kalkulačce s využitím zásobitele.

Výpočet na kalkulačce:

$$r = K \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n - 1} = 10000 \cdot 1{,}04^{15} \cdot \frac{1{,}04 - 1}{1{,}04^{15} - 1} = 899{,}41 \text{ K.}$$

Výpočet s vyhledaným zásobitelem (např. v [PA]):

$$r = \frac{K}{R_n} = \frac{10000}{11{,}118387} = 899{,}41 \text{ K.}$$

Opět jsme se přesvědčili, že používané tabulky měly dostatečnou přesnost.

Druhý odstavec se zabýval stálým důchodem; byla představena hlavní myšlenka vyplácení pouze úroků plynoucích z vkladu. V předložené úloze se měl porovnat důchod stálý s důchodem dočasným určeným k výplatám po tři různé doby – 10 let, 50 let a 100 let. Při úrokové míře 4 % se z částky 10000 K důchod stálý od důchodu stoletého lišil pouze 8,09 K.

Ve třetím odstavci byl představen jeden typ státních dluhopisů – *renta*. To byl cenný papír, na který se stát zavázal vyplácet úroky z nominální hodnoty na předložené kupony. Stát nebyl povinen odkupovat tyto cenné papíry, ale šlo s nimi obchodovat na burze či používat je jako peníze podle kurzovního lístku. Stát mohl umořit tento dluh u občanů odkoupením na burze. Roční úroková míra se pohybovala okolo 4 %. K procvičení byly předloženy tři úlohy.

§ 5. *Úmor* (5 odstavců – Umořování dluhu; Úlohy obrácené; Plán umořovací; Procento umořovací; Částečné dluhopisy (obligace))

Samostatný paragraf byl věnován problematice splácení dluhů. Z textu bylo patrno, že si autor plně uvědomoval potřebu znalosti tohoto tématu.

Základní myšlenka umořování dluhu v prvním odstavci byla srovnávána s výplatou důchodu, který považujeme za dluh peněžního ústavu vůči nám. Vzorec odvozený pro výpočet splátky byl vyjádřen ze vztahu pro zakládací jistinu dočasného důchodu, tedy

$$r = \frac{K}{R_n} = \text{K} \cdot \frac{1}{R_n} = \text{K} \cdot U_n,$$

kde převrácená hodnota zásobitele byla označena U_n a nazvána *umořovatel*. Hodnota umořovatele byla také vyhledávána v tabulkách.

Bez řešeného příkladu byly předloženy tři úlohy na procvičení, jež při znalosti problematiky důchodu nečinily podle mého názoru žádné těžkosti.

Druhý odstavec byl zaměřen na výpočet výše dluhu nebo doby jeho splatnosti, k čemuž byl využíván výše uvedený vzorec. Byl zde podrobně vyřešen jeden příklad a dalších pět úloh bylo poskytnuto k procvičení.

Ve třetím odstavci byl student seznámen se sestavováním umořovacích plánů. V řešeném příkladě byla uvedena výše splátky a nebyl znám horizont umoření. Následovaly dvě úlohy na procvičení, z nichž první žádala ověření umořovacího plánu z řešeného příkladu a druhá kladla za úkol sestavení umořovacího plánu při dané výši dluhu, doby splacení a úrokové míře. Uveďme alespoň částečně základní myšlenku umořovacího plánu ze zadaného a vyřešeného příkladu.

Příklad: Obec si vypůjčila 1 000 000 na 4 % celoročních úroků;uplácí annuitami po 50 000 K. Jest sestaviti umořovací plán. ([B67], str. 116)

Rok	Dluh počátkem roku	Úrok	Úmor	Splátka
1.	1 000 000	40 000	10 000	50 000
2.	990 000	39 600	10 400	50 000
3.	979 600	39 184	10 816	50 000
…	…	…	…	…
40.	95 908,49	3 836,34	46 163,66	50 000
41.	49 744,83	1 989,79	48 010,21	50 000
42.	1 734,62	69,38	1 734,62	1 804

Odstavec zaměřený na vyhledávání umořovacího procenta řešil otázky, kolika procenty z původního dluhu byl dluh umořován. Hledal se tedy podíl prvního úmoru a výše dluhu. Byl zde odvozen potřebný vzorec a předloženy dvě úlohy na procvičení. Pro názornost vyřešme jedno zadání z první úlohy.

1. Dluh byl umořen při 4 % a celoročním úrokování za 30 let. Kolika procenty byl umořován? ([B67], str. 118, výsledek: 1,783 %)

Řešení: Nejprve bylo zapotřebí nalézt, jaká část dluhu byla jedna splátka. Použili jsme základní vzorec

$$r = K \cdot q^n \cdot \frac{q-1}{q^n-1},$$

z něhož jsme vyjádřili poměr splátky ku dluhu a při využití daných údajů našli jeho hodnotu

$$\frac{r}{K} = q^n \cdot \frac{q-1}{q^n-1} = 1{,}04^{30} \cdot \frac{1{,}04-1}{1{,}04^{30}-1} = 0{,}05783 = 5{,}783\ \%.$$

Jelikož jsme měli zadáno, že dluh byl úročen 4 %, nalezli jsme rozdíl 1,783 %, který byl nazýván *umořovacím procentem*.

Poslední odstavec pátého paragrafu popisoval nejdůležitější typy obligací (nesplatitelné = státní renta, splatitelné = slosovatelné, premiové = losy, prioritní = akcie). Spolu s jejich charakteristikami byly předloženy dvě úlohy s popisem půjčky pomocí obligací. Potřebný matematický aparát a vzorce byly vyloženy v předešlých odstavcích.

§ 6. *Ústavy peněžní*

(5 odstavců – Úvěr; Spořitelny; Záložny; Banky; Poznámky)

V tomto paragrafu se student dozvěděl o nezbytnosti existence možnosti úvěru jako činitele v podnikání. Seznámil se s typy finančních ústavů a dostal jejich základní popis. Také například poznal, že úroková míra pro vklady kolísala kolem 4 %, že úroková míra pro půjčky nebyla zákonem nijak omezena.

Hodnocení učebnice

Jednalo se o velmi kvalitní učebnici matematiky, v níž studenti mohli také nalézt množství praktických rad z reálného života. Matematika byla použita na řešení právě těchto situací, se kterými se v budoucnosti mohl student setkat. Úlohy byly voleny od základních až po velmi náročné. Členění jednotlivých kapitol bylo přehledné a logické. Autor uplatnil své vynikající odborné i didaktické schopnosti. Každá kapitola obsahovala teoretický úvod s odvozením příslušných vzorců. Pokud autor uznal za vhodné, následovaly řešené příklady. Celek byl uzavřen dostatečným množstvím úloh určených k procvičení. U každé úlohy, kde se počítalo s konkrétními čísly, byly uvedeny v hranatých závorkách výsledky. Toto zvyšovalo šíři využití učebnice, neboť při domácí přípravě měl student možnost kontroly a nejinak tomu bylo i při samostudiu například během nemoci.

Bohumil Bydžovský: *Arithmetika pro V. až VII. třídu škol reálných*, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1911, 196 stran.

Obsah a náplň této učebnice se téměř nelišily od učebnice [B67] analyzované výše. Kapitola *Složité úrokování*, v níž byla vyložena finanční matematika byla sedmou částí a zcela se shodovala s šestou částí učebnice [B67].

Bohumil Bydžovský, Jan Vojtěch: ***Mathematika pro nejvyšší třídu reálek*****, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1912, 176 stran.**

Tato učebnice byla určena nejvyšší, tedy osmé třídě reálek. Spolu s Bohumilem Bydžovským ji napsal Jan Vojtěch, který se soustředil na zpracování geometrie.

Obsah učebnice

Část I. *Přehled věcný*. (Číslo, Rovnice, Řady, Funkce, Transformace, Konstrukce, Měření, Souřadnice)

Část II. *Myšlení mathematické*. (Úvahy logické, Základy mathematiky, Mathematická věda a její význam)

Část III. *Náčrtek historický*. (Mathematika starověká, Mathematika novodobá)

Učebnice byla zaměřena na ucelení znalostí studentů získaných během předešlých let studia. Neobsahovala kapitolu finanční matematiky, a proto ji nebudeme podrobovat samostatné analýze.

Bohumil Bydžovský, Jan Vojtěch:
Sbírka úloh z mathematiky pro vyšší třídy středních škol**, 1. vydání, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1912, 332 stran.**

Jednalo se o velmi rozsáhlou sbírku úloh využívanou na všech typech středních škol. Ve sbírce si témata rozdělili stejní autoři jako u učebnice matematiky [BV] zmíněné výše. Obsah byl rozdělen do třech základních dílů:

Díl I. Úlohy z arithmetiky (rozsah 169 stran, autorem B. Bydžovský);

Díl II. Úlohy z geometrie (rozsah 107 stran, autorem J. Vojtěch);

Díl III. Výsledky (rozsah 54 stran).

Jednotlivé díly byly rozděleny na tematické celky. První díl byl rozdělen na jedenáct částí, z nichž jsem se zaměřil na devátou.

Část IX. *Řady* (rozsah 13 stran)

§ 41. *Řady arithmetické* (2 strany);

§ 42. *Řady geometrické* (3 strany);

§ 43. *Jiné řady atd.* (1 strana);

§ 44. *Smíšené úlohy* (2 strany);

§ 45. *Složité úrokování* (5 stran).

Analýze podrobíme poslední uvedený paragraf, jenž odkazoval na příslušné odstavce učebnic aritmetiky stejného autora: pro [B67] – Odst. 99. – 117. G. (gymnázia) a pro [B57] – Odst. 144. – 162. R. (reálné školy). Tím usnadňoval práci studenta i učitele při vyhledávání či kontrole postupů.

45. paragraf obsahoval 55 úloh, které byly vodorovnými čarami rozděleny podle témat na čtyři skupiny. Uveďme bez komentáře vždy jednu úlohu z každé skupiny.

První skupina (17 úloh) – uložení jistiny na delší dobu a jednorázové splacení dluhu.

11. Jak dlouho byl uložen kapitál 6000 K, vzrostl-li při celoročním 4% úrokování na 11 000 K? ([BVS], str. 140, výsledek: 15 let 162 dní)

Druhá skupina (13 úloh) – pravidelné střádání a dočasný důchod.

24. Osoba 30-letá uložila 10 000 K na 3 % (celor.). Počínajíc svým 60. rokem, brala z toho roční důchod 1200 K (vždy počátkem roku). Zemřela pak v 75. letech. Kolik zanechala svým dědicům? ([BVS], str. 141, výsledek: 14 827,70 K)

Třetí skupina (11 úloh) – umořování dluhu.

38. Podnikatel staveb vypůjčil si ze záložny 60 000 K na 5 %. Splácel-li koncem každého roku 5000 K, kolik byl ještě dlužen na počátku 16. roku? ([BVS], str. 143, výsledek: 16 843 K)

Čtvrtá skupina (14 úloh) – dluhopisy.

49. V r. 1897 byla vydána t. zv. investiční renta rak. nesplatitelná 3½ % (v obnosu 116 901 mil. K) za takový kurs, že skutečné úrokování bylo 3,804 %. Jaký byl tento kurs? ([BVS], str. 144, výsledek: 92)

Hodnocení sbírky

Sbírka byla vhodným doplňkovým materiálem k výše analyzovaným nebo jen zmíněným učebnicím [BV], [B67] a [B57]. Její přínos jistě ocenil každý učitel např. při hledání dalších vhodných úloh k procvičení či do prověrek. Samostatný oddíl výsledků pomáhal při kontrole učitelům i žákům. Množství úloh, jež přesahovalo jeden tisíc, bylo dostačující také pro přípravu k maturitním zkouškám. Kvality této sbírky byly podtrženy dalšími vydáními v době první republiky. Druhé a třetí vydání z roku 1920, respektive 1924 byla téměř identická. Čtvrté vydání z roku 1936 bylo zcela přepracováno; autorsky se na něm podíleli Bohumil Bydžovský, Stanislav Teplý a František Vyčichlo. Obsah tohoto vydání byl rozčleněn po jednotlivých ročnících a tím zpřehledněn.

2.3 Učebnice pro učitelské ústavy a vyšší obchodní školy

Nutnost kvalifikovaných učitelů nejen na středním, vyšším a vysokém školství vedla ke vzniku učitelských ústavů, které vznikaly na našem území od roku 1869 a zaměřovaly se na výchovu učitelů obecných a měšťanských škol. Jednalo se o tříletou později čtyřletou střední školu, velmi často měly tyto školy k dispozici penzionát pro ubytování posluchačů ze vzdálenějších míst. Například v roce 1904 byl tento typ ústavu založen v Kladně a na západ od Kladna byla obdobná škola jen v Plzni. Ústavy byly postupně rozšířeny o cvičné školy pro praxi posluchačů.

Vyšší obchodní školy zahájily svou existenci z jiného impulsu. Ve druhé polovině devatenáctého století vznikaly odborné střední školy v důsledku požadavků průmyslu. Nás bude zajímat, že mezi ně patřily obchodní školy a obchodní akademie. Původně byly obchodní školy dvouleté a pouze chlapecké. S postupným technickým a ekonomickým pokrokem a vývojem byly obchodní školy tříleté a také dívčí (smíšené třídy byly na těchto školách až na počátku třicátých let dvacátého století). Tyto obchodní školy nesly název vyšší obchodní škola a později obchodní akademie (např. tříletá Vyšší škola obchodní v Plzni se roku 1896 přejmenovala na Obchodní akademii královského města Plzně a od roku 1903 byla čtyřletá). Zavedení povinných maturit nastalo až mnohem později na počátku třicátých let dvacátého století.

Podrobme nyní analýze několik učebnic pro tyto školy.

Karel Domin: *Arithmetika v úlohách pro ústavy učitelské*, 4. nezměněné vydání, tisk a náklad Karel Šolc, Kutná Hora, 1911, 319 stran.

Tato učebnice poprvé vyšla v roce 1899 a během prvních čtyř vydání se neměnila. Námi analyzované čtvrté vydání bylo nezměněnou kopií druhého vydání, které bylo schváleno výnosem č. 31 185 c. k. ministerstva kultu a vyučování ze dne 7. října 1904. Kniha byla kvalitně tematicky rozvržena a její úlohy zcela pokrývaly potřebnou látku. Samostatnou částí byl oddíl s výsledky cvičení, který nebyl vždy součástí učebnic, jak jsme se mohli přesvědčit u jiných publikací. Kniha byla rozčleněna na devět částí, z nichž některé se dělily na podčásti a celkem 67 paragrafů.

Autor Karel Domin (1851–1922), jenž byl od roku profesorem učitelského ústavu v Kutné Hoře, se stal v roce 1892 ředitelem učitelského ústavu v Příbrami a zabýval se převážně geometrií. V současnosti je znám spíše jeho syn Karel – profesor botaniky, jenž byl v letech 1922–23 děkanem

Přírodovědecké fakulty Univerzity Karlovy a v letech 1933–34 rektorem Univerzity Karlovy.

Obsah učebnice

Část I: Základní výkony početní s čísly zvláštními a obecnými (29 stran);

Část II: Dělitelnost čísel (7 stran);

Část III: Počítání se zlomky (54 stran);

Část IV: Poměry a srovnalosti (úměry) (27 stran);

Část V: Mocniny a odmocniny (41 stran);

Část VI: Počty občanské a kupecké (64 stran);

Část VII: Rovnice o několika neznámých (23 stran);

Část VIII: Úlohy k opakování (29 stran);

Část IX: Základy jednoduchého účetnictví (12 stran).

Z hlediska finanční matematiky mě zajímala šestá část, jež byla rozdělena na sedm podčástí a paragrafů číslo 47 až 61:

I. Počet procentový;
II. Počet úrokový;
III. Počet lhůtový;
IV. Počet podílný (spolkový);
V. Počet průměrný a směšovací;
VI. Počet řetězový;
VII. Počet mincovní, směnečný a počítání cenných papírů.

Pouze podčásti II. a III. obsahovaly finanční matematiku; jednalo se o čtyři paragrafy o rozsahu 17 stran.

§ 51. Jednoduchý počet úrokový

Tento paragraf obsahoval celkem 97 úloh od nejjednodušších k poměrně náročným.

Ukažme a vyřešme z toho množství dvě úlohy.

14) Který úrok zapraviti jest z 960 K dne 7. května na 4¾ % vypůjčených a dne 5. srpna splacených? ([UD], str. 178)

Řešení: Nejprve je nutno vypočítat přesný počet dní trvání půjčky.

Květen: 31 – 7 dní = 24 dní, červen: 30 dní (celý), červenec: 31 dní (celý) a srpen: 5 dní. Celkem tedy: 24 + 30 + 31 + 5 dní = 90 dní. Přestože počítáme skutečný počet dní, celkový počet dní finančního roku se používal a používá 360. Hodnotu úroku tedy vypočítáme:

$$ú = \frac{90}{360} \cdot \frac{4\frac{3}{4}}{100} \cdot 960\ K = 11{,}40\ K.$$

Dne 5. srpna je dlužník povinen k vypůjčené částce doplatit ještě úrok 11,40 K.

96) Ze dvou obnosů, jež činily dohromady 18000 K, uložen jest jeden na 4¼ %, druhý na 4 %. Kdyby úrokoval se druhý % prvého a tento % druhého, byl by roční výnos o 3 K větší. Které jsou to obnosy? ([UD], str. 183)

Řešení: Označíme-li první obnos *x*, druhý bude (18000 – *x*). Nyní zapíšeme rozdílové úroky, tj. jen ¼ % z příslušné částky, do rovnice:

$$\frac{1/4}{100} \cdot x = \frac{1/4}{100} \cdot (18000 - x) - 3,$$

Vynásobíme ji číslem 400 a obdržíme rovnici

$$x = 1 \cdot (18000 - x) - 1200,$$

po roznásobení závorky a převedení neznámé na jednu stranu dostáváme rovnici

$$2x = 18000 - 1200,$$

$$x = 8400.$$

Výsledek interpretujeme, že na vyšší úrok byla uložena částka 8400 K a na nižší zbytek do 18000 K, tj. 9600 K.

§ 52. Počet diskontový

Tento paragraf obsahoval celkem 26 úloh různé náročnosti.

Vyberme jednu úlohu tohoto tématu a vyřešme ji.

15) Obnos splatný po 2 letech 6 měsících zapraven byl hotově $^8/_9$ své hodnoty. Kolika procentní bylo diskonto, jež počítalo se a) na sto, b) ze sta? ([UD], str. 185)

Řešení: Nejprve je třeba pochopit, co znamená na sto a ze sta. V obou případech se hovoří o procentech. Na sto procent znamená, že po uběhnutí doby 2,5 let budeme mít 100 %. Ze sta procent znamená, že vycházíme ze 100 %. Názorněji to uvidíme v rovnicích.

Na sto:

$$(zbylá\ hodnota) \cdot \left(1 + \frac{p}{100} \cdot (doba)\right) = 1$$

tj. diskontní hodnotu úročíme na jmenovitou hodnotu, která je 100 %.

Se zadanými hodnotami:

$$\left(\frac{8}{9}\right) \cdot \left(1 + \frac{p}{100} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)\right) = 1,$$

z čehož získáváme procentní diskonto p = 5 %.

Ze sta:

$$1 \cdot \left(1 - \frac{p}{100} \cdot (doba)\right) = (zbylá\ hodnota),$$

tj. 100 % postupně snižujeme na diskontní hodnotu.

Se zadanými hodnotami:

$$1 \cdot \left(1 - \frac{p}{100} \cdot \left(\frac{5}{2}\right)\right) = \left(\frac{8}{9}\right)$$

z čehož získáváme procentní diskonto $p = 4\frac{4}{9}$ %.

§ 53. Složité úrokování

Přestože považuji tuto část finanční matematiky spolu s jednoduchým úrokováním za stěžejní, obsahoval tento paragraf pouze 28 úloh a dvě strany byly věnovány tabulkám – *tabulka úročitelů* a *tabulka odúročitelů* ([UD], str. 188 a 189).

Ne všechny úlohy se věnovaly finanční matematice, dvě z nich pouze využívaly vlastností složitého úrokování známého z geometrických posloupností pro určení počtu obyvatel města či objemu dřeva v lese.

Pro větší názornost ocitujme druhý příklad bez dalšího komentáře.

13) Les má nyní asi 5600 m^3 dříví; kolik dříví bude míti za 15 let, přibývá-li ho ročně průměrně 2 %? ([UD], str. 187, výsledek: 7537 m^3)

Ze zbylých dvaceti šesti úloh bylo šest teoretických nebo obecných bez konkrétních hodnot, ke kterým nebyly v závěrečné části knihy uvedeny výsledky.

Ukažme jeden z nich.

5) Ze vzorce $k = j\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n = j \cdot ú$ *vyvoď vzorec pro počítání jistiny začáteční, dána-li jest jistina konečná?* ([UD], str. 186)

Celkem dvacet úloh bylo věnováno klasickým finančním otázkám při složitém úrokování. V několika úlohách bylo studentovi předloženo porovnání jednoduchého úrokování s úrokováním složitým s různou frekvencí připisování úroků. Například:

23) Nač vzroste 5420 K při 5% úrokování a) celoročním, b) pololetním za 15 let a který by byl součet jednoduchých 5% úroků za 15 let? ([UD], str. 187)

Řešení:

Řešíme-li úlohu dnešními prostředky bez použití úročitelů, postup bude následující:

Celoroční úrokování: $k = 5420\left(1 + \frac{5}{100}\right)^{15} = 11267{,}79$ K.

Pololetní úrokování: $k = 5420\left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{100}\right)^{30} = 11368{,}81$ K.

Jednoduché úrokování: $k = 5420\left(1 + 15 \cdot \frac{5}{100}\right) = 9485$ K.

Studenti však byli nuceni při složitém úrokování použít pouze tabulky úročitelů, tj. vyhledat příslušnou hodnotu činitele podle počtu úrokovacích období a úrokové míry:

Celoroční úrokování: 15 úrokovacích období a úroková míra 5 % vedlo k nalezení činitele 2,078928. Hodnota konečné jistiny s přesností na haléře:

$$k = 5420 \cdot 2{,}078928 = 11267{,}79 \text{ K.}$$

Pololetní úrokování: 30 úrokovacích období a úroková míra 2,5 % vedlo k nalezení činitele 2,097568. Hodnota konečné jistiny s přesností na haléře:

$$k = 5420 \cdot 2{,}097568 = 11368{,}81 \text{ K.}$$

Je vidět, že sedm platných číslic byla pro tabulky dostatečná přesnost. Poznamenejme, že výsledek při jednoduchém úrokování nebyl uveden ve výsledcích.

V množství úloh kladl autor důraz na problematiku rozhodování, kdy studentovi byly předloženy nabídky a on musel rozhodnout, která z nich bude výhodnější. Zmiňme typický příklad o rozhodování.

26) Za dům nabízí A 13000 K hotově a 4200 K po 2 letech, B 12000 K hotově, 2000 K po roce a 3000 K po 2 letech. Která nabídka jest pro prodejce výhodnější, počítají-li se 5% úroky z úroků celoročně? ([UD], str. 190)

Řešení: Úlohu studenti řešili pomocí výpočtu hodnoty jistin ke stejnému okamžiku. V knize byli nabádáni k výpočtu nynější hodnoty. Ke stejné odpovědi by se dostali i při výpočtu hodnoty za dva roky, což byl nejzazší termín splátky podle zadání.

Porovnejme obě možnosti:

Nynější A: $j = 13000 + 4200 \cdot (1{,}05)^{-2} = 16809{,}52$ K

(ve výsledcích 16804,4 K).

Nynější B: $j = 12000 + 2000 \cdot (1{,}05)^{-1} + 3000 \cdot (1{,}05)^{-2} = 16625{,}85$ K

(ve výsledcích 16625,84 K).

Budoucí (za 2 roky) A: $j = 13000 \cdot (1{,}05)^{2} + 4200 = 18532{,}50$ K.

Budoucí B: $j = 12000 \cdot (1{,}05)^{2} + 2000 \cdot (1{,}05)^{1} + 3000 = 18330$ K.

Obě možnosti dávají jednoznačnou odpověď, že výhodnější je nabídka A. Chyba výsledku nynější hodnoty A, která přesahovala 5 K, nemohla být způsobena použitím tabulky odúročitelů, neboť to by vedlo ke stejnému výsledku:

$$j = 13000 + 4200 \cdot 0{,}907029 = 16809{,}52 \text{ K}.$$

Neobjevil jsem žádnou jinou alternativu pro tuto chybu kromě numerické či tiskové.

§ 54. Počet lhůtový

Tento paragraf obsahoval čtyřicet úloh, v nichž byly porovnávány úroky ze splátek splacených v různých lhůtách. Z předešlých témat bylo nutné bezchybně ovládat pouze jednoduché úrokování. Ukažme základní myšlenku na konkrétním příkladu.

32) Dluh 1500 K splatný byl ve 3 lhůtách, a to: 200 K po 3, 500 K po 6 a ostatek po 13 měsících. Dlužník však zaplatil první splátku obnosem 1000 K za 8 měsíců; kdy zaplatiti měl ostatek? ([UD], str. 193)

Řešení: Podstatou bylo, jak jsem již zmiňoval, porovnání úroků plánovaného a uskutečněného splacení dluhu. Rozepišme přehledně do tabulky splátky plánované i uskutečněné a z nich plynoucí úroky porovnejme s úroky za 1 měsíc při stejné úrokové míře.

Plán	Stejná hodnota úroku za 1 měsíc	Uskutečněno	Stejná hodnota úroku za 1 měsíc
200 K, 3 měsíce	$3 \cdot 200 = 600$ K	1000 K, 8 měsíců	$8 \cdot 1000 = 8000$ K
500 K, 6 měsíců	$6 \cdot 500 = 3000$ K		
Zbytek, 13 měsíců			
Součet musí být: 1500 K			
Zbytek: 800 K splatné za 13 měsíců	$13 \cdot 800 = 10400$ K		
	Součet: 14000 K	Součet musí být: 1500 K	Součet musí být: 14000 K
		Chybí: 500 K = 6000 / 12 → 12 měsíců	Chybí: 6000 K

Pro zajímavost uveďme bez řešení a komentáře ještě jednu úlohu tohoto paragrafu.

40) Kdosi koupil les za 9400 K s podmínkou, že zapraví kupní cenu ve 3 splátkách, z nichž je první ke druhé v poměru 3 : 5 a druhá k třetí v poměru 4 : 3. První splátku učiniti má po 2½, druhou po 6, třetí po 9 měsících. Polovičku první splátky složil však po 2 měsících a 2200 K po 3 měsících. Kdy zapraviti má ostatek?

([UD], str. 194, výsledek: 8 měsíců)

Hodnocení sbírky

Jednalo se v pravém slova smyslu o sbírku, jelikož zde nebyla žádná teorie, kterou občas nahrazovaly pouze velmi stručné návody k úlohám. Nenašel jsem zde ani jednu řešenou úlohu, a proto považuji tuto sbírku pouze jako doplňkový materiál ke studiu. Tematické rozvržení a náročnost úloh byla podle mého názoru volena velmi citlivě a kvalitně. Oceňuji publikaci jako kvalitní soubor úloh, které mohl učitel použít do výuky a student k procvičení, protože obsahovala oddíl výsledků. Přestože se mi podařilo objevit chybu ve výsledcích, což se stává velmi často i dnešních učebnicích a sbírkách, v žádném případě bych ji nezavrhoval. Věcí každého učitele bylo a doufám i je, že si novou učebnici či sbírku sám přepočítá a opraví.

Šesté přepracované vydání z roku 1923 bylo značně rozšířeno právě o chybějící teoretické části jednotlivých kapitol, čímž kniha získala na univerzálnosti a byla vhodná i k samostudiu.

Václav Posejpal: *Arithmetika pro ústavy ku vzdělání učitelů a učitelek*, s přílohou: *Úlohy k arithmetice*, 1. vydání, Česká grafická akciová společnost UNIE, Praha, 1908, 206 stran (+ 75 stran přílohy).

Autor Václav Posejpal (1874–1935) byl od roku 1921 řádným profesorem experimentální fyziky na Přírodovědecké fakultě Univerzity Karlovy v Praze. Je znám především díky své práci s tehdy známými nejmenšími částicemi hmoty a svébytnou teorií světového éteru složeného nehmotnými neutrony. Byl aktivní ve vědeckých společnostech – např. Jednota československých matematiků a fyziků, Královská česká společnost nauk. Byl také členem Mezinárodního výboru pro míry a váhy v Sèvres a inicioval vznik československého úřadu pro míry a váhy. Na počátku své vědecké kariéry se zabýval zefektivněním výuky fyziky na středních školách s důrazem na aplikace matematiky, což ho vedlo také k sepsání této učebnice.

Jednalo se o učebnici aritmetiky, jejíž základní část (206 stran) byla koncipována jako výkladová doplněná řešenými úlohami. Příloha, která obsahovala úlohy bohužel bez výsledků, byla vytištěna jako brožura samostatně vložená do desek učebnice. *Arithmetika* byla všeobecně schválena výnosem č. 15407 c. k. ministerstva kultu a vyučování ze dne 13. dubna 1908. Vedle všeobecného schválení hovořila o její kvalitě další vydání z let 1916 a 1922.

Knihu tvořilo deset částí, které se dále dělily na paragrafy (72), z nichž některé se z důvodu přehlednosti dále členily na odstavce. Sedmá část nazvaná *Arithmetika v životě občanském a kupeckém* (48 stran) byla rozčleněna na pět podkapitol:

I. Počet spolkový, směšovací a řetězový (8 stran);
II. Počet procentový (8 stran);
III. Počet úrokový (14 stran);
IV. O mincích a počtu mincovním (7 stran);
V. O směnkách a cenných papírech (11 stran).

Analýzu jsem zaměřil na třetí podkapitolu s názvem *Počet úrokový*. Tato část byla rozdělena na čtyři paragrafy s pořadovými čísly 54 až 57. Každý paragraf měl výkladový úvod, který uváděl praktické využití probírané látky a zaváděl nové termíny. Pak následovaly řešené úlohy s komentářem; přitom u většiny bylo předvedeno řešení úsudkem i pomocí vzorce.

§ 54. O jednoduchém počtu úrokovém

V této části s rozsahem čtyř stran byl student seznámen s nezbytnými pojmy – *nájemce, nájemné, jistina, kapitál, věřitel, dlužník, úrok, půjčka …* Některé z těchto pojmů byly označeny jako základní veličiny, aby byl pochopitelný vzorec pro jednoduché úrokování, tj. *jistina* byla označena ***J***, *procento* ***p*** (roční úroková míra), počet roků ***r*** a *jednoduchý úrok* za tuto dobu ***u***. Vzniklý vzorec byl odvozen a pro přehlednost uvedeny všechny jeho nezbytné varianty.

$$u = \frac{J \cdot p \cdot r}{100}; J = \frac{100 \cdot u}{p \cdot r}; p = \frac{100 \cdot u}{J \cdot r}; r = \frac{100 \cdot u}{J \cdot p}.$$

Student byl upozorněn, že vedle těchto vzorců lze používat také složenou trojčlenku. Během výkladu byl stále nabádán k přemýšlení nahlas. Rady byly například tyto:

Řešíce příklady, mluvíme nejlépe takto:

α) Kolikrát jest větší úrok (jistina), tolikrát musí být větší jistina (úrok) při témž procentu a téže době.

β) Kolikrát jest větší úrok (doba), tolikrát musí býti větší doba (úrok) při témž procentu a téže době. ([UP], str. 147)

Po výkladu následovalo pět úloh řešených úsudkem i pomocí vzorce. Pracovalo se v nich s celými roky i pouze se dny a měsíci.

Uveďme znění nejnáročnější úlohy:

Jak velký jest 5% úrok ze 420 K za 3 roky, 5 měsíců a 10 dní? ([UP], str. 149, výsledek: 72,33 K)

§ 55. O počtu diskontovém

V této části o rozsahu pouhých dvou stran byl student seznámen s aplikací jednoduchého úrokování, jejíž podstatou byla „sleva“ při okamžitém vyrovnání, tj. konečná hodnota jistiny musela být přepočítána k současnosti a odpovídajícím způsobem snížena. Tato základní myšlenka byla formulována následovně:

Je-li někdo dlužen ***K*** *korun, splatných po* ***r*** *letech bez úroků, a jedná se o to, aby zaplatil tento dluh teď, ihned, může zajisté věřitel žádati po něm hotově jen takovou summu, která by teprve s připočtením úroků z ní za* ***r*** *let vzešlých dala původní dluh* ***K*** *korun.* ([UP], str. 150)

Pro rozdíl mezi konečnou a počáteční jistinou se zavedl pojem *diskonto* ***D***. Hlavním úkolem bylo vypočítat jeho hodnotu, a proto byl studentovi předložen komentovaný postup odvození vzorce pro jeho výpočet. Jeho konečný tvar byl

$$D = \frac{K \cdot p \cdot r}{100 + p \cdot r}.$$

Po odvození následovalo řešení jednoho příkladu s komentářem.

§ 56. O počtu lhůtovém

Počet lhůtový byl další aplikací jednoduchého úrokování, jak jsme mohli poznat z dříve prováděných analýz. Rozsah tohoto paragrafu byl opět jen dvě strany. Neobsahoval žádný teoretický úvod, nacházely se zde pouze dva velmi podrobně řešené příklady. Pro představu uveďme znění jednoho z nich.

Kdosi má zaplatiti hotově 500 K, 400 K po 3 měs. a 600 K po 5 měs. Chce však zaplatiti 700 K po 2 měs. a zbytek najednou; kdy se to má státi? ([UP], str. 153)

Na řešení student aplikoval metodu, kterou jsem podrobněji rozepsal v tabulce v analýze sbírky [UD]. Velice snadno tak dospěl k výsledku, že zbylých 800 K mělo být zaplaceno za 3 a půl měsíce.

§ 57. O složeném počtu úrokovém

Toto stěžejní téma finanční matematiky mělo v této učebnici rozsah šesti stran, ale celé dvě strany byly věnovány tabulkám úročitelů a odúročitelů, jež byly pro pohodlné řešení nezbytné. Paragraf obsahoval velmi krátký teoretický úvod, ve kterém student nalezl základní myšlenku, což bylo úrokování úroků. Následovalo podrobné odvození vzorce pro výpočet konečné jistiny po *n* letech složeného úrokování

$$K = J\left(1 + \frac{p}{100}\right)^n.$$

Závorka, kterou vzorec obsahoval, byla pojmenována *úročitel*; jeho mocniny student vyhledával ve zmíněných tabulkách. Vše vedlo k základní poučce složeného úrokování:

Jistina konečná se vypočte, znásobíme-li jistinu počáteční úročitelem umocněným na počet období. ([UP], str. 155)

Po řešeném příkladu se výklad soustředil na složené úrokování, při němž doba uložení nebyla celočíselným násobkem úrokovacího období. Bylo zdůrazněno, že na necelé období je nutno použít metodu jednoduchého úrokování.

Pojem *odúročitele* byl zaveden pouze s odkazem na hledání diskontované hodnoty, tj. ke konečné hodnotě jsme hledali počáteční jistinu. Opět následoval jeden řešený příklad.

Učebnice obsahovala ještě vloženou přílohu, kterou jsem zmínil v úvodu. V ní student mohl nalézt celkem dvanáct úloh z finanční matematiky, které nebyly přehnaně náročné a odpovídaly nárokům předloženým ve výkladové části. Pro dokreslení uveďme jednu úlohu bez dalšího komentáře.

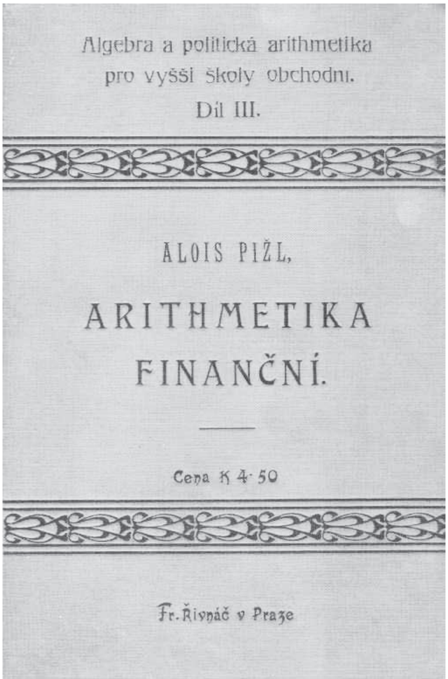
Spořivý dělník ukládá pololetně 100 K do spořitelny, která úrokuje 4 % a to pololetně; a) který obnos nahospodaří za 20 let? b) která jistina vzrostla by za 20 let na týž obnos, jakého dosáhnou jeho úspory? ([UP], příloha str. 70)

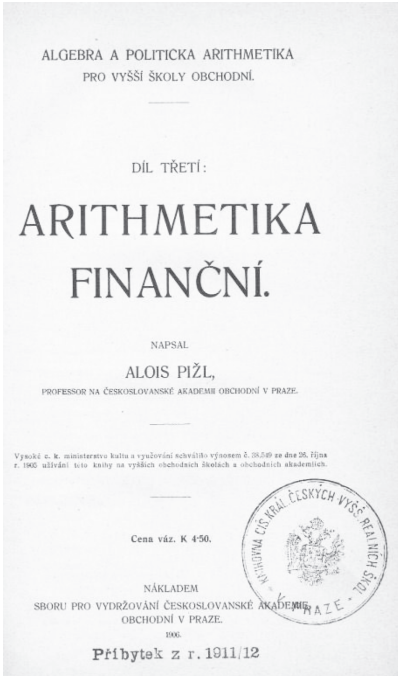
Hodnocení učebnice

Učebnice s kvalitním a podrobným výkladem byla vhodná i k samostudiu. Řešené úlohy byly nižší a střední náročnosti, aby se student mohl soustředit na podstatu probírané látky. Ačkoliv řešených úloh nebylo mnoho, přesto pokrývaly veškerou pro absolventy potřebnou látku. Podrobný a přehledný komentář by se v některých částech mohl zdát nadbytečný, ale jako učitel právě tuto preciznost velmi oceňuji.

Další vydání hovoří o kvalitách učebnice. Druhé vydání vyšlo v roce 1916 s velmi malými změnami. Třetí vydání z roku 1922 bylo již více změněné a rozšířené. Hlavní změny se byly způsobeny aktualizací podle nových osnov, vložením dvanácti obrázků a doplněním o další úlohy. Tyto změny sestavil spolu s Václavem Posejpalem jeho kolega Lev Pilz a týkaly se především rozšíření výkladové části. Finanční matematiky se téměř nedotkly. Pro třetí vydání jen bylo nezbytné změnit zkratku měny z K na Kč. Většina úloh zůstala nezměněných, například ve výše citované úloze dělník ukládal na místo 100 K částku 100 Kč.

Alois Pižl: *Algebra a politická arithmetika pro vyšší školy obchodní. Díl III. Arithmetika finanční*, 1. vydání, vydal František Řivnáč nákladem Sboru pro vydržování Československé akademie obchodní v Praze, Praha, 1906, 196 stran.





Jednalo se, podle mého názoru, o nejkvalitnější, nejucelenější, nejpodrobnější, nejpropracovanější a také nejnáročnější učebnici pro střední školy, která se věnovala finanční matematice. První vydání schválilo c. k. ministerstvo kultu a vyučování výnosem č. 38 549 ještě před Marchetovou reformou dne 26. října 1905 k užívání na vyšších obchodních školách a obchodních akademiích.

Druhého vydání se učebnice dočkala v roce 1917. Byla upravena Vlastimilem Fridou. Poznamenejme, že po vzniku samostatného Československa získalo doložku č. 38 733 vynesenou ministerstvem školství a národní osvěty ze dne 21. dubna 1921. Třetí vydání rovněž upravené Vlastimilem Fridou z roku 1923 mělo doložku č. 51 353 vynesenou tímto ministerstvem ze dne 5. května 1923. Poslední, čtvrté vydání z roku 1937 neslo již název *Matematika pro obchodní akademie, díl třetí: Aritmetika finanční* a Vlastimil Frida byl uveden jako spoluautor Aloise Pižla. I ono mělo doložku č. 90142/37-III ministerstva školství a národní osvěty tentokrát ze dne 30. června 1937. Bylo doporučeno jako pro obchodní akademie s československým jazykem vyučovacím.

Změny rozsahu a obsahu jednotlivých vydání byly jen minimální. V rozsahu prvního vydání, jež by se mohlo zdát obsáhlejší, byly zahrnuty tabulky, které čítaly 50 stran. Pořadí kapitol zůstalo zachované, měnila se měna z K na Kč, hodnoty používané v úlohách odpovídaly skutečnosti nebo byly ponechány z předchozího vydání.

Algebra a politická aritmetika se na obchodních akademiích vyučovala od prvního ročníku a třetí ročník byl věnován finanční matematice. První kapitola třetího dílu byla opakovací a jejím obsahem bylo množství úloh z témat: mocniny, odmocniny, kvadratické rovnice, logaritmy a exponenciální rovnice. Druhá kapitola se již výkladovou částí věnovala aritmetickým a geometrickým řadám. Třetí až sedmá kapitola rozdělená na množství podkapitol obsahovala převážně finanční matematiku. Osmou kapitolou byly tabulky nezbytné pro finanční matematiku (tabulka úročitelů předlhůtních i polhůtních, odúročitelů, střadatelů, převrácených hodnot přirozených čísel, částečné součty harmonické řady a logaritmy úročitelů) a závěrečná devátá kapitola byla přehledným seznamem vzorců používaných v jednotlivých kapitolách.

Kapitoly s finanční tématikou

3. *Úrokový počet* (24 stran);

4. *Počet důchodový a umořovací při úrokování polhůtném* (37 stran);

5. *Počet umořovací při úrokování předlhůtném* (17 stran);

6. *Částečné obligace splatitelné* (29 stran);

7. *Půjčky loterní a praemiové a jejich slosovací a výherní plány* (24 stran).

Rozbor jednotlivých kapitol

3. Úrokový počet

Kapitola byla rozdělena celkem na dvanáct částí s rozsahy od jedné do pěti stran.

a) Pojem úrokování

Toto byl krátký úvod, kde se student seznámil se základními pojmy, tj. typy úrokování, úrokovou dobou, kdo je dlužník a kdo je věřitel apod.

b) Převod procenta polhůtného na předlhůtné a naopak

V této části byl odvozen postup převodu základních typů úrokování – před a po úrokovém období – při stejné délce úrokového období. Nahlédněme na základní myšlenku.

Při předlhůtném čili anticipativním úrokování byl zaplacen úrok ihned, při polhůtném čili dekurzívním úrokování byl zaplacen úrok až na konci úrokovacího období. Znamenalo to tedy, že

Předlhůtné úrokování: na začátku roku ze (100 – p) korun bylo p korun úroků.

Pro převod na polhůtné: ze 100 korun bylo x korun úroků.

Vše bylo převedeno do trojčlenky: $\frac{}{p} = \frac{100}{100-p}$, z níž plyne, že x bylo vždy větší než p.

Polhůtné úrokování: na konci roku ze (100 + p) korun bylo p korun úroků.

Pro převod na předlhůtné: ze 100 korun bylo x korun úroků.

Vše bylo převedeno do trojčlenky: $\frac{}{p} = \frac{100}{100+p}$.

Převody byly nutné pro rychlou orientaci budoucích klientů finančních institucí nebo v horším případě lichvářů. V závěru byly uvedeny dvě skupiny těchto převodů na procvičení.

c) Úrokování jednoduché

Zde se jednalo spíše o teoretické shrnutí a zopakování znalostí získaných v předcházejícím studiu. Byly odvozeny vzorce pro jednoduché úrokování i při uložení jistiny na méně než rok. Rok byl rozdělen na 12 měsíců a 360 dní s poznámkou, že odchylka výpočtu při použití správného počtu 365 dní je tak nepatrná, že nepadá v úvahu. Zdůrazněno bylo také použití jednoduchého úrokování v praxi pro dobu kratší než rok.

d) Úrokování složité

Tato část byla jen krátkým objasněním, co znamená složité úrokování.

e) Konečná hodnota kapitálu uloženého na úroky z úroků

Až v této části byl zaveden *úročitel* $\left(1 + \frac{p}{100}\right)$, který byl pojmenován q, aby složité úrokování nebylo odtrženo od geometrické posloupnosti. Byl odvozen vzorec pro výpočet konečné jistiny s mocninou úročitele. Následoval jeden řešený příklad.

f) Hodnota kapitálu počátečného, doba, po kterou byl kapitál uložen na úroky, a procento, kterým bylo úrokováno

V této části se pracovalo se vzorcem z části e) a postupně se vyjadřovala neznámá podle položené otázky. Student musel pracovat s logaritmy, které si zopakoval z předešlého školního roku v kapitole první.

Součástí kapitoly byly tři řešené příklady – výpočet počáteční jistiny, výpočet doby uložení jistiny a výpočet úrokové míry. Kapitola byla uzavřena poměrně velkým množstvím příkladů, čímž byl dán důraz na důležitost jejího zvládnutí. Byly zde čtyři úlohy zadané jen číselně s mnoha variantami a šest slovních úloh. Ukažme bez dalšího komentáře zástupce.

4. b) Při kolika % p. s. vynese 500,- K za 24 let 1293,54 K?

8. Král. České mělo r. 1857 přibližně 4 780 000 obyvatelův, roku 1900 přibližně 6 320 000 obyvatelův; kolik % jest roční přírůstek v této době? ([PA], str. 24)

Čtyři slovní úlohy této části se netýkaly finanční matematiky, ale využívaly pravidel složitého úrokování, resp. geometrických posloupností.

g) Poměr mezi úrokovou měrou za různá období

V této části bylo studentovi předloženo přehledné porovnání skutečné úrokové míry při úrokování s frekvencí jednoho roku, jednoho pololetí, jednoho čtvrtletí a jednoho měsíce. Vše bylo objasněno ve dvou řešených příkladech, z nichž uveďme první.

1. příklad: Je-li uloženo 1 000 000 K buď na 6 % p. a., nebo 3 % p. s., nebo na 1½ % p. q., nebo na ½ % p. m., vzroste kapitál za rok:

$$k_1 \text{ při } 6\,\%\text{ p. a.} = 1\,000\,000 \cdot 1{,}06 = 1\,060\,000\text{ K}$$

$$k_1\text{‘ při } 3\,\%\text{ p. s.} = 1\,000\,000 \cdot 1{,}03^2 = 1\,060\,900\text{ K}$$

$$k_1\text{‘‘ při } 1\tfrac{1}{2}\,\%\text{ p. q.} = 1\,000\,000 \cdot 1{,}015^4 = 1\,061\,363{,}60\text{ K}$$

$$k_1\text{‘‘‘ při } \tfrac{1}{2}\,\%\text{ p. m.} = 1\,000\,000 \cdot 1{,}005^{12} = 1\,061\,677{,}80\text{ K}$$

Jak patrno, jsou:

$$3\,\%\text{ p. s.} = 6{,}09\,\%\text{ p. a.}$$

$$1\tfrac{1}{2}\,\%\text{ p. q.} = 6{,}13636\,\%\text{ p. a.}$$

$$\tfrac{1}{2}\,\%\text{ p. m.} = 6{,}16778\,\%\text{ p. a.}$$

Pro vzájemné srovnání p_0 % p. a., p_1 % p. s., p_2 % p. q. a p_3 % p. m. platí následující rovnice:

$$\left(1+\frac{p_0}{100}\right)=\left(1+\frac{p_1}{100}\right)^2=\left(1+\frac{p_2}{100}\right)^4=\left(1+\frac{p_3}{100}\right)^{12}.$$ ([PA], str. 25)

V závěru následovaly ještě čtyři soubory jednoduchých úloh podobného typu.

h) Řešení problémů složitého úrokování pomocí tabulek

V této části byla zdůrazněna práce s tabulkami, která měla vést ke zjednodušení a zrychlení práce studenta. Byly popsány jednotlivé tabulky uvedené v osmé části knihy a stručně uvedeno jak je používat, např. tabulka II.: *Před 40 lhůtami musilo se na 2 % uložiti K 0,452890, aby se nyní dostala 1 K. Aby se dostalo K 441,60, musilo býti uloženo*

$$441{,}60 \cdot 0{,}452890 = 200{,}\text{–}\ K.$$ ([PA], str. 27)

Obdobně byly popsány postupy pro ostatní tabulky a vysvětleny kroky jak postupovat, když hledaná hodnota pro dané údaje v tabulkách nebyla uvedena.

ch) Hodnota konečného kapitálu s ohledem na správní výlohy

V této části se student seznámil s realitou poplatků. Správní výlohy se počítaly z celé uložené jistiny a snižovaly tak výslednou hodnotu, tzn. po zúročení byl zaplacen správní poplatek. Např. při uložení na 5 % p. a. a správním poplatku ¼ % se hodnota jistiny na konci prvního roku vypočítala: $K = J \cdot 1{,}05 \cdot 0{,}9975$.

Spolu s jedním řešeným příkladem byly studentovi předloženy tři úlohy na procvičení.

i) Střední lhůta platební

Tato část se věnovala možnosti jednorázového splacení dluhu, který byl předem rozdělen do splátkového kalendáře. V mnoha učebnicích tohoto období bylo toto téma známo jako *Počet lhůtný*. Základním úkolem bylo vypočítat čas a výši splátky či splátek, aby nebyl nikdo ošizen na úroku. Pokud se pracovalo pouze s jednou lhůtou zvanou střední, hledal se jeden konkrétní čas pro splacení celého dluhu. Podívejme se pro názornost na jeden příklad a vyřešme jej.

Příklad 1: Kdosi má platiti 1000,– K hned, 500,– K po 2 letech, 1000,– K po 4 letech a 400,– K po 5 letech. Kdy je splaten celý kapitál při 4 % p. a.? ([PA], str. 32)

Řešení: Hodnotu dluhu musíme přepočítat k jednomu konkrétnímu okamžiku, zde to bude moment vzniku dluhu.

Splátka	Kdy	Současná hodnota
1000,– K	hned	1000,– K
500,– K	za 2 roky	$500/1{,}04^2 = 462{,}28$ K
1000,– K	za 4 roky	$1000/1{,}04^4 = 854{,}80$ K
400,– K	za 5 let	$400/1{,}04^5 = 328{,}77$ K
Celkem: 2900,– K		Celkem: 2645,85 K

Nyní musíme celkovou současnou hodnotu dluhu nechat úročit na součet splátek, tedy

$$2900 = 2645{,}85 \cdot 1{,}04^x.$$

Zde vidíme nezbytnost využití logaritmů pro vyjádření *x*:

$$x = \frac{\log 2900 - \log 2645{,}85}{\log 1{,}04} = 2{,}3385.$$

Výsledné číslo znamená počet let, za jak dlouho je nutno splatit celý dluh a chceme tuto dobu znát s přesností na dny *x* = 2 roky 4 měsíce 2 dny (v učebnici o jeden den kratší).

V učebnici byly uvedeny tři podrobně řešené příklady a šest úloh na procvičení. Náročnost úloh byla přibližně stejná jako řešených příkladů.

j) Výsledná hodnota periodických vkladů

Typ úloh počítaných v této části kalkuloval s více vklady k jedné jistině. Tyto vklady měly různou dobu uložení a neměly vždy stejnou výši. Úkolem studenta bylo najít konečnou hodnotu jistiny. Standardně používaným postupem bylo počítat konečnou hodnotu každého vkladu zvlášť a poté je sečíst. Vzhledem k užitečnosti (každý většinou ukládá různou částku v různých časových intervalech) byly předloženy čtyři řešené příklady a šest úloh na procvičení. Pro ukládání stejné částky v pravidelných intervalech se používal a používá pojmů střádání a spoření. Pro orientaci uveďme bez dalšího komentáře jednu úlohu.

1. Kdosi uložil 2000 K, za rok na to 500 K, za 2 roky po tom 2000 K, za rok na to 3000 K, kolik bude míti uloženo koncem 6. roku: a) při 4¼ % p. a., b) při 1¾ % p. a. a c) při 1 % p. q.? ([PA], str. 37)

k) Úrokování předlhůtné

V této závěrečné části třetí kapitoly bylo vyloženo na třech stranách předlhůtné úrokování jako skryté vyšší úrokování polhůtné. Využívalo se zde pravidla z části *b*) této kapitoly. Z důvodu početní a logické náročnosti bylo okomentováno sedm řešených příkladů a dáno pět úloh na procvičení.

Hlavní myšlenka postupu byla totožná z části *b*), a proto nebyl nutný obšírný výklad.

4. Počet důchodový a umořovací při úrokování polhůtném.

Kapitola byla rozdělena na šest částí s rozsahy od dvou do deseti stran; největší měla část c) věnující se dočasným důchodům.

a) Důchod stálý a dočasný. Annuity

V této první části čtvrté kapitoly věnované důchodům a dluhům s polhůtným úrokováním byla studentům předložena stručná charakteristika základních pojmů. Důchod byl vyložen jako opakující se výplata z uložených peněz, z nájmu apod. po určité lhůtě a byl srovnán s úroky, jež byly vyloženy v předešlé kapitole. Na konkrétních reálných situacích byl vysvětlen stálý a dočasný důchod, pro dočasný důchod navíc byl sestaven v přehledné tabulce umořovací plán.

Vedle těchto důchodů plynoucích z majetkového vlastnictví byly představeny důchody podmíněné – doživotní, invalidní, nemocenské… – a odkaz na pojišťovací aritmetiku, která se jimi zabývala. Více se o nich v této učebnici student nedozvěděl, neboť nebyly a nejsou součástí finanční matematiky.

b) Bezprostřední a odložený důchod stálý

S teoretickým podkladem z první části zde bylo studentovi předloženo sedm řešených příkladů. Hlavní myšlenkou stálého důchodu, kterou měl student pochopit, byla výplata nepřesahující svou výší připsané úroky, aby základní jistina neklesala. U bezprostředních stálých důchodů byl výpočet velmi jednoduchý – zjistila se výše úroků a důchod byl znám. Příklady věnující se odloženému stálému důchodu byly především, pokud nebyl znám okamžik výplaty prvního důchodu. Uveďme příklad.

Příklad 6. Kdy počne roční důchod 300,– K, který byl založen jistinou 6411,–K. Úroková míra 4 % p. a. ([PA], str. 45)

Řešení: Aby byl důchod stálý, musel 4% úrok pokrývat celou jeho hodnotu.

$$0{,}04 \cdot J = 300$$

Nutná jistina měla hodnotu 7500,– K. Na tuto hodnotu musela narůst zakládající jistina.

$$7500 = 1{,}04^n \cdot 6411$$

Pomocí logaritmů byla nalezeno n = 4, tzn. roční důchod 300,– K začal 4 roky po uložení zakládací jistiny.

V učebnici nepracovali s mezivýpočtem 7500,– K, ale oba vzorce spojili dohromady a zlogaritmovali. S obecnými a poté se zadanými hodnotami měl vzorec tvar

$$n = \frac{\log a + 2 - \log H - \log p}{\log q} = \frac{\log 300 + 2 - \log 6411 - \log 4}{\log 1{,}04} = 4.$$

Označení jednotlivých proměnných se, jak víme, v učebnici od učebnice a v období od období lišilo.

Podkapitola byla doplněna sedmi úlohami na procvičení.

c) Bezprostřední a odložený důchod dočasný

V této části student při výpočtech poprvé použil umořování dluhu stejnými pravidelnými splátkami. Při odloženém důchodu musel nejprve nechat jistinu narůst za dobu od založení do první výplaty. Nejtěžší prvek umořování – výpočet výše splátky – byl vyložen jako obvykle pomocí součtu *n* členů geometrické posloupnosti. Odvození bylo pomocí současné hodnoty všech budoucích splátek a výsledný vzorec měl tvar

$$a = H : \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)},$$

kde *a* byla výše splátky důchodu, *H* výše jistiny, *n* počet splátek a $q = 1 +$ úroková míra. Odložený důchod se lišil pouze úrokováním jistiny *H*.

Další velmi důležitou informací bylo srovnání výplat dočasného důchodu a splácení dluhu. V příkladech bylo přibližně stejné zastoupení situací s důchody i dluhy. Byly předvedeny čtyři řešené příklady pro bezprostřední splácení a pět pro odložené splácení. Důležitost tématu byla podtržena 39 úlohami na procvičení. Jejich náročnost posuďme uvedením dvou z nich. První navíc vypočítáme.

6. b) Jak velký čtvrtletní důchod bezprostřední, trvající po 45 let, lze si zajistiti při 0,9 % p. q. kapitálem K 6 000,– K? ([PA], str. 53)

Řešení: Jelikož se jedná o bezprostřední důchod, stačí využít výše uvedený vzorec a dosadit do něho zadané hodnoty.

$$a = H : \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)} = 6000 : \frac{1{,}009^{45\cdot 4} - 1}{1{,}009^{45\cdot 4}(1{,}009 - 1)} = 67{,}44\ \text{K}$$

29. Kapitál K 6000,– umořuje se půlletními splátkami po K 450,–, kolik je splátek plných a jak velká je poslední splátka neúplná, připadá-li prvá annuita na konec 7. půlletí? Úroková míra 1¾ %. ([PA], str. 55)

d) Řešení problémů o dočasných důchodech pomocí tabulek

V této části byly dále rozvíjeny znalosti předešlé části s důrazem na využití tabulek. Řešené příklady byly převzaty také z předešlé podkapitoly, ale student byl nabádán k využití tabulek IV. V těchto tabulkách se nacházely hodnoty dělitele z výše uvedeného i použitého vzorce. Tento dělitel byl označen $f_{(n)(p)}$, kde n značilo počet splátek a p úrokovou míru. Vyřešením totožných příkladů mohl student porovnat přesnost výpočtů. V závěru bylo přiloženo 41 úloh na procvičení.

e) Důchody dočasné, při nichž je lhůta výplatní jiná než lhůta úrokovací

Tato část byla zaměřena především na případy, kdy k pravidelné výplatě důchodu docházelo několikrát během jednoho úrokovacího období. Nejprve bylo nutno vypočítat souhrnnou hodnotu všech důchodů za jedno úrokovací období ke konci tohoto období. Poté se jednotlivé důchody musely odúročit k okamžiku výplaty. Tyto případy byly blíže realitě než situace, kdy vyplácení důchodů mělo stejný okamžik i frekvenci s úrokováním. Důležitost byla podtržena 8 řešenými a 21 dodatečnými příklady.

Základní myšlenku, kterou měl student pochopit, ukážeme na jednom příkladu.

Příklad 2. Který měsíční důchod lze založiti kapitálem K 20 000,–? Důchod se vyplácí vždy koncem měsíce a trvá 15 let. Úroková míra 3½ % p. a. ([PA], str. 64)

Řešení: Nejprve vypočítáme hodnotu důchodu, který by se vyplácel po dobu 15 let vždy na konci úrokovacího období, zde roku.

$$a = H : \frac{q^n - 1}{q^n(q-1)} = 20000 : \frac{1{,}035^{15} - 1}{1{,}035^{15}(1{,}035 - 1)} = 1736{,}50 \text{ K}$$

Ke stejné hodnotě se dobral i student, který používal výše zmíněné tabulky. Hodnotu dělitele pro 15 úrokovacích období s úrokovou mírou 3½ % vyčetl $f_{(15)(3½)} = 11{,}517\,411$, z níž vyplynula stejná roční anuita s přesností na haléře.

Anuita 1736,50 K oznamovala součet budoucích hodnot všech důchodů vyplacených za jeden rok, jenž by díky úrokování byl ke konci roku. Abychom získali hodnotu jednotlivých důchodů, musíme využít jednoduchého úrokování a důchody podle okamžiku výplaty úročit do konce roku. Podle zadání jsou důchody vypláceny na konci měsíce, tzn. první důchod byl vyplacen 11 měsíců před koncem úrokovacího období, druhý 10 měsíců atd. Získáváme rovnici (r bylo označení hodnoty vyplaceného důchodu):

$$12r + \frac{3{,}5}{100} r \cdot \left(\frac{11}{12} + \frac{10}{12} + \frac{9}{12} + \cdots + \frac{1}{12} + \frac{0}{12}\right) = 1736{,}50,$$

z níž vyjádříme a vypočítáme r. Závorka obsahuje části roku pro jednotlivé výplaty, které zbývaly do konce roku a při výplatě shodné s okamžikem úrokování by o tuto část ročního úroku narostla jejich hodnota. Pro zjednodušení můžeme použít k výpočtu jejich součtu pravidel pro částečný součet členů aritmetické posloupnosti (diference –1/12). Výsledek je r = 142,42 K.

Na ukázku náročnosti uveďme bez dalšího komentáře ještě jednu úlohu.

18. Kolik jest nutno ukládati vždy počátkem měsíce po 20 let, aby bylo lze po uplynutí této doby bráti po 20 let měsíční důchod K 150,–, splatný vždy koncem měsíce? Úroková míra 1¾ % p. s. ([PA], str. 69)

f) Sestavování umořovacích plánů a vypočítávání *n*-té splátky a zbývajícího dluhu po *n* létech při úrokování dekursivním

V částech o dočasných důchodech se student seznámil s výplatami, jež překračovaly hodnotu úroku a tím postupně snižovaly výši jistiny, ze které byl důchod vyplácen. Jak jsem již zmínil, důchod je typ dluhu a je-li dočasný, je tento dluh umořován. K využití tohoto náhledu byl student nabádán právě v této části, která mu sloužila k lepšímu pohledu na problematiku splácení dluhu jako jednoduchý návod na sestavení umořovacího plánu. Základním typem úloh byl výpočet výše splátky při známé hodnotě dluhu, úrokové míře a počtu splátek, jejichž frekvence se většinou nelišila od úrokovacího období. Po nalezení její výše bylo studentovi uloženo rozepsat umořovací plán. Podkapitola obsahovala čtyři podrobně řešené příklady se zcela a nebo téměř zcela vypracovanými umořovacími plány. Následovalo deset úloh na procvičení.

Ukažme základní kroky řešení a nástin umořovacího plánu pro jeden příklad.

Příklad 2. Dluh K 2 000 000,– má se umořiti ve 20 letech půlletními splátkami. Úroková míra 2 % p. s. ([PA], str. 72)

Řešení: Dluh měl být splacen po 40 úrokovacích období s úrokovou mírou 2 %. Pro tyto dvě hodnoty student nalezl v tabulkách IV. zásobitel

$$f_{(40)(2)} = 27{,}355\ 479,$$

s jehož pomocí vypočítal výši anuity. Zásobitel je převrácenou hodnotou umořovatele, proto student musel dělit

$$a = 2\ 000\ 000 / 27{,}355\ 479 = 73\ 111{,}50 \text{ K},$$

$$\text{resp. } a = 2\ 000\ 000 : 27{,}355\ 479 = 73\ 111{,}50 \text{ K}.$$

Symbol : byl v učebnici používán pro dělení.

Hodnota a byla nutnou výší splátky, aby byl dluh podle podmínek splacen.

Nyní sestavíme umořovací plán, jehož podoba se za posledních více než sto let v zásadě neměnila.

rok	pololetí	dluh počátek období	úrok	splátka	úmor
1	I	2 000 000,–	40 000,–	73 111,50	33 111,50
1	II	1 966 888,50	39 337,77	73 111,50	33 773,73
2	I	1 933 114,77	38 662,29	73 111,50	34 449,21
2	II	1 898 665,56	37 973,31	73 111,50	35 138,19

Hodnoty v tabulce se počítaly následovně: úrok byla 2 % z dluhu na počátku období, splátka byla konstantní předem určená, úmor byl rozdíl splátky a úroku. Hodnota dluhu na počátku dalšího období byla snížena o úmor. Vidíme, že v porovnání se současností se opravdu nic podstatného nezměnilo. Nejčastěji v učebnicích kladená otázka směřovala na výše splátek během závěrečných období umořování dluhu. Hodnota dluhu např. šest období před splacením se řešila jako pravidelné ukládání splátky a posun proti proudu času. Student by hledal hodnotu dluhu v okamžiku šesti období do konce splacení následovně:

$$H_6 = a \cdot f_{(6)(2)} = 73111{,}50 \cdot 5{,}601431 = 409529{,}01 \text{ K},$$

což byla hodnota dluhu na počátku prvního pololetí osmnáctého roku splácení a zbytek umořovacího plánu se sestavoval jako výše rozpracovaný úvod.

5. Počet umořovací při úrokování předlhůtném

V této kapitole byly rozpracovány případy užívající předlhůtného úrokování. Zmíněno bylo, že na tento typ úrokování se zpravidla narazí u menších peněžních ústavů. Cílem vyložených postupů bylo navést studenta k myšlence, že mu postačí převod úrokové míry předlhůtného úrokování na úrokovou míru polhůtného úrokování vyloženou ve třetí kapitole a pro výpočty nutné k úlohám o vyplácení důchodu či splácení dluhu využití algoritmů ze čtvrté kapitoly. Přesto zde byl odvozen základní vzorec pro vztah mezi dluhem či zakládací jistinou, úrokovou mírou, počtem úrokovacích období a splátkou či důchodem i způsob tohoto úrokování, aby byly zdůrazněny odlišnosti od polhůtného úrokování. Vše bylo rozpracováno do dvou částí, z nichž byla stěžejní druhá o rozsahu 13 stran.

a) Dočasný důchod při úrokování a annuitách předlhůtných

Zde byl odvozen základní vzorec pro výpočet anuity:

$$a = D \cdot \frac{p}{100} : (1 - q^{-n}),$$

kde *a* byla anuita, *D* byl dluh, *p* byla úroková míra ($q = 1 + \frac{p}{100}$) a *n* byl počet úrokovacích období. Pro úplnost ještě jednou zdůrazňuji, že vzorec lze použít pro důchod i dluh. Hodnotu q^{-n} studenti hledali v tabulkách III.

Tato část obsahovala čtyři řešené příklady a dvanáct úloh na procvičení. Uveďme jeden s náznakem řešení.

Příklad 2. Který dluh umoří se 60 půlletními annuitami K 2000,– při 2¼ % p. s. anticip.? ([PA], str. 79)

Řešení: Z výše uvedeného vzorce pouze vyjádříme *D* a dosadíme zadané hodnoty.

$$D = \frac{100 \cdot 2000}{2{,}25} \cdot (1 - 0{,}9775^{60}) = 66197{,}88 \text{ K}$$

b) Sestavování umořovacích plánů a vypočítávání *n*-té splátky a zbylého dluhu po *n* létech při úrokování a splácení anticipativním

Také v této části zůstaly zachovány základní kroky, které student znal z příkladů s polhůtným úrokováním. Před sestavením umořovacího plánu musel nejprve vypočítat výši splátky pomocí metod vyložených v první podkapitole, a pak byl veden výpočty jednotlivých políček v umořovacím plánu. Upozorněn byl rovněž na skutečnost, že první anuitu platí dlužník teprve počátkem druhé lhůty. Počátkem prvního období platí pouze úrok. Pak mu bylo předloženo šest řešených úloh a osm příkladů na procvičení. Dále byl upozorněn, že ne každý finanční ústav při uvádění předlhůtného úrokování počítá správně. Chyby spočívaly v těchto případech v tom, že se počítal úrok i z té části jistiny, která byla již v tom příslušném úrokovacím období zaplacena, čímž ve skutečnosti narůstala úroková míra. Ukažme správný způsob řešení na konkrétním příkladu.

Příklad 1. Dluh K 10 000,– má se splatiti 20 ročními splátkami. Úroková míra 4 % p. a. anticip. ([PA], str. 82)

Řešení: Zmínil jsem, že při vyplacení dluhu se dlužníkovi srážel jen úrok. Dlužník byl tedy povinen splatit dluh na počátku 21. období.

Nejprve vypočítáme výši anuity podle výše uvedeného vzorce:

$$a = 10000 \cdot 0{,}04 : (1 - 0{,}96^{20}) = 716{,}85 \text{ K}.$$

Výplata dluhu: 10 000 – úrok 400 = 9 600 K bylo vyplaceno hotově.

Každou anuitu *a* při umořování dluhu *D* standardně rozdělili na úrok *u* a úmor *s*, kde úrok byl počítán jako *p* % z dlužné částky a úmor snižoval výši dluhu pro další období. Pro předlhůtní úrokování býval používán následující postup:

rozložení anuity: $a = s + u$;

výpočet úroku: $u = \frac{p}{100} \cdot (D - s)$;

z obou vzorců plyne pro úmor: $s = \frac{100 \cdot a - D \cdot p}{100 - p}$.

Poslední z uvedených vzorců použili dosazením zadaných hodnot a získali první úmor ve výši 330,05 K.

Vyplňme zmíněné kroky do umořovacího plánu. Všechny hodnoty byly platné pro každý začátek roku.

rok	dluh	úrok	úmor
1.	10 000,–	400,–	
2.	9 669,95	386,80	330,05
3.	9 326,15	373,05	343,80

Pro každý řádek můžeme zkontrolovat, že:

- *úrok* + *úmor* = *anuita* (kromě prvního řádku);
- *dluh* + *úmor* = *dluh z předešlého roku*;
- *úroková míra* · *dluhu* = *úrok*.

Tím se ověřila správnost použitého vzorce a mohl se posoudit základní rozdíl od polhůtného úrokování, kde základní výpočet byl: *dluh* + *úrok* – *splátka* = *dluh* – *úmor* = *dluh v následném období*.

Aby byla zachována základní myšlenka předlhůtného úrokování, byly výpočty i struktura kroků náročnější oproti úrokování polhůtném, což také při zápisu čísel do umořovacího plánu vedlo k chybám. Nebylo tedy divu, že některé peněžní ústavy si postup zjednodušovaly, jak autor upozorňoval. Rozdíl byl v neprospěch klienta, což ústavy nenutilo k nápravě.

6. Částečné obligace splatitelné

V této kapitole byl student ve třech podkapitolách seznamován s operacemi, které se prováděly s obligacemi s nominální hodnotou. Úrok z nominální hodnoty se nazýval kuponem a byl vyplácen každému držiteli obligace. Zbytek anuity se použil na vyplacení některých obligací, které byly z toho důvodu slosovávané.

Klasickým příkladem takových obligací čili dluhopisů je, že firma nebo stát potřebuje finanční prostředky, proto vydá (= emituje) tyto cenné papíry a zavazuje se vyplácet úrok a po nějaké době je vykoupí za nominální hodnotu. Losované obligace v současné době nejsou rozšířené.

Analyzujme nyní jednotlivé podkapitoly, v nichž si student dále prohluboval znalosti polhůtného a předlhůtného úrokování z předešlých kapitol. Tyto vědomosti rozšířil o vyplácení vylosovaných obligací. Uveďme v první podkapitole podrobně řešený příklad a v dalších dvou jen příklady pro ilustraci, které typy tam student nalezl. V první podkapitole bylo pět řešených příkladů, ve druhé jeden řešený spolu s devíti na procvičení a ve třetí šest řešených a 17 na procvičení.

a) Splácení částečných obligací při úrokování polhůtném

Příklad 1. Půjčka K 10 000 000,– jest rozdělena na 10 000 obligací po 1000 K a má se splatiti ve 20 létech půlletními annuitami. Úroková míra 2 % p. s. ([PA], str. 95)

Řešení: Nejprve bylo nutno najít výši anuity. Z tabulky IV. student vyčetl hodnotu $f_{(40)(2)} = 27{,}355479$ a výši anuity vypočítal

$$a = 10000000 : f_{(40)(2)} = 365\,557{,}48 \text{ K}.$$

Nyní musel určit částku, která se využila na výplatu kuponů, tj. 2 % ze jmenovité hodnoty = 20 K. Na počátku bylo 10 000 obligací, na každou z nich bylo třeba vyplatit 20 K. Zbylá část zaokrouhlena na násobek jmenovité hodnoty (= 165 000 K) byla použita na výplatu vylosovaných obligací. Zbylých 557,48 K bylo uloženo, zúročeno a připočteno v dalším úrokovacím období k anuitě. Postup se poté opakoval s tím, že počet obligací a tedy i částka použitá k výplatě kuponů klesala.

Zapišme základní kroky pro několik prvních úrokovacích období do tabulky.

anuita	365 557,48 K
10 000 kuponů po 20 K	200 000,– K
na úmor (splacení vylosovaných obligací) zbývá	165 557,48 K
vylosuje se 165 obligací	165 000,– K
zbytek se uloží a zúročí 2 %	557,48 K + 11,15 K = 568,63 K
další úrokové období: anuita + převedený zbytek	366 126,11 K
zbývá 9 835 obligací – kuponů po 20 K	196 700,– K
na úmor zbývá	169 426,11 K
vylosuje se 169 obligací	169 000,– K

zbytek se uloží a zúročí 2 %	426,11 K + 8,52 K = 434,63 K
další úrokové období: anuita + převedený zbytek	365 992,11 K
…	…

b) Splácení částečných obligací při úrokování předlhůtném

3. Půjčka K 2 500 000,–, rozdělená na 12 500 obligací po K 200,–, splácí se roční annuitou K 300 000,–. Úroková míra 4¼ % p. a. dekursivně. Sestavte umořovací plán a) s přesným započítáním a zároveň zúročením zbytků, b) se zaokrouhlenými annuitami. ([PA], str. 109)

c) Kurs částečných obligací. Zdánlivé a skutečné zúročení se strany dlužníkovy. Zdánlivá a skutečná výnosnost obligací

Příklad 1. b) Půjčka K 10 000 000,–, zúročitelná 2 % p. s. dekursivně a splatná ve 45 letech, byla upsána po kursu 98,50. Výlohy celkem K 250 000. Jak velké % platí dlužník ve skutečnosti? ([PA], str. 111)

7. Půjčky loterní a praemiové a jejich slosovací a výherní plány

Z pohledu finanční matematiky byla tato kapitola atypická, neboť operovala s penězi trochu z jiného hlediska. Stále se počítalo s úroky, ale ne každý se k nim dostal. Loterní půjčky měly svou nominální hodnotu a většina věřitelů získala pouze tuto částku. Pouze vylosovaní získávali mnohem větší obnos, neboť se k nominální hodnotě vyplácely úroky ze všech obligací. Ukažme jeden příklad s řešením pro ilustraci.

Příklad 1. Půjčka K 10 000 000,– jest rozdělena na 500 000 obligací po 20 K a má býti splacena v 50 létech půlletními splátkami. Dlužník míní platiti asi 1½ % úroků půlletně. ([PA], str. 124)

Řešení: Nejprve bylo třeba vypočítat kolik obligací a jaký obnos bude půlletně vyplácen. Mělo se vyplatit půl milionu obligací za 50 let, tj. na každé pololetí připadá pět tisíc obligací. Z umořování dluhu 10 milionů korun při 100 úrokovacích období a úrokové míře 1½ % se v tabulkách vyčetla hodnota 51,624704. Dnes tuto hodnotu nalezneme pomocí vzorce pro polhůtního zásobitele při umořování dluhu při n úrokovacích obdobích a úrokové míře i

$$a_n^i = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i}$$

a vypočteme

$$a_{100}^{0,015} = \frac{1-(1+0,015)^{-100}}{0,015} = 51,624704.$$

Tuto hodnotu použijeme pro výpočet pololetní anuity:

$$a = \frac{10\ 000\ 000}{51,624704} = 193706 \text{ K}.$$

V dané úloze musel student zaokrouhlit na násobek nominální hodnoty, tj. na obnos dělitelný 20. Částku 193 700 K rozdělil do výherního plánu a přiřadil k ní 5 000 vylosovaných obligací.

Sestavme jeden takový plán. Úkol to nebyl příliš složitý, neboť student znal počet obligací i celkovou vyplácenou částku.

počet výher (5 000)	hodnota výhry	vyplacený obnos (193 700 K)
1	30 000 K	30 000 K
4	5 000 K	20 000 K
25	500 K	12 500 K
100	227 K	22 700 K
370	50 K	18 500 K
4500	20 K	90 000 K

Z každého výherního plánu bylo vidět, že většina věřitelů získala zpět pouze vloženou částku 20 K. Šance na výhru byla poměrně vysoká v porovnání s klasickými loteriemi.

Praemiové či prémiové půjčky měly obdobný systém, jenž však byl díky kuponům na obligacích zaručujících výplatu úroků v pravidelných intervalech náročnější na výpočty. Spolu s vyplacenými úroky na kupony byly výherní plány podobné loterijním. Bez podrobnějšího komentáře uveďme jeden příklad.

Příklad 3. Praemiová půjčka K 10 000 000,–, rozdělená na 50 000 obligací po K 200,–, má se splatiti ve 20 létech (= 40 půlletích). Dlužník jest ochoten platiti 2 % p. s. úroků, na kupony vyplácí se 1½ % půlletně t. j. K 3,– na obligaci. ([PA], str. 128)

Hodnocení učebnice

Tato učebnice byla určena studentům, kteří ve své budoucnosti potřebovali hlubší znalosti finančnictví. Rozsah finanční matematiky zde vysoce překračoval její rozsah na všech ostatních typech středních škol.

Její struktura byla rozpracována do poměrně malých podkapitol, které byly logicky sestavené, zdůrazňovaly spojitost a návaznost jednotlivých tematických celků. Student mohl velmi snadno sledovat základní myšlenky a pravidla, což mu usnadňovalo další studium. V každé kapitole byly odvozeny užívané vzorce, připojeno bylo vhodné množství řešených příkladů s komentářem, postačující počet úloh na procvičení, tabulky a velmi užitečný seznam nejdůležitějších vzorců pro rychlou orientaci.

Mezi náročnější úlohy patřily ty, které se ptaly na výši úrokové míry při zadaných ostatních parametrech. Ne vždy se vystačilo s logaritmy a velmi často se používaly různé aproximační metody. Vzhledem k matematickému aparátu, který studenti ovládali, byl první krok v těchto metodách pouhým odhadem, který byl použit ve vzorci a podle odchylky se odhadovala přesnější hodnota. Ve většině případů byl proveden odhad shora a zdola a využívalo se poměrů.

Některé části, které v současných učebnicích již nenalezneme, bych každému doporučil k prostudování. Vhodné by to bylo například jako náplň několika hodin matematického semináře na střední škole. Z dnešního pohledu bych autorům pouze vytkl, že do učebnice nezahrnuli dodatek s výsledky úloh. Tím učebnice ztrácela na univerzálnosti, např. pro samostudium.

2.4 Shrnutí

Na počátku dvacátého století byla v Rakousko-Uherské monarchii snaha o zkvalitnění výuky na středních školách a umožnění dalšího studia jejich absolventům. Marchetova reforma zrovnoprávnila maturitní zkoušky na jednotlivých středních školách a usnadnila tím absolventům možnost postupu na vysoké školy. Stát měl zájem o vzdělané občany, neboť podporoval drobné podnikatele a obecně samostatnost v rozhodování nejen u živnostníků. Důležitou oblastí, ve které se musel občan vyznat, byly finance. Případné bankroty osobní i firemní by byly zátěží pro celý stát. Z toho nám plyne logický závěr, že na každém typu střední školy i na školách měšťanských byla probírána témata finanční matematiky. Každý student byl veden k tomu, aby zvládal minimálně základní problematiku finančnictví, tj. *spoření* a *splácení*. Podle výše provedených analýz vidíme, že obrovské procento úloh bylo zadáno a řešeno s hodnotami převzatými z praktického života. Domnívám se, že tato část matematiky patřila k oblíbenějším, neboť student viděl spjatost matematiky se světem a možnost budoucího využití znalostí.

Od druhé poloviny devatenáctého století můžeme sledovat snahy o podporu matematiky a přírodních věd. Po pádu Bachova absolutismu vznikl v roce 1861 *Spolek pro volné přednášky z matematiky a fyziky*, který byl v roce 1869 transformován v *Jednotu českých matematiků*. Největšího rozkvětu dosáhla *Jednota* na přelomu devatenáctého a dvacátého století, kdy pod její hlavičkou vznikaly učebnice matematiky pro většinu škol s českým vyučovacím jazykem (více viz např. [BE], [MN], [I08]). Jednotná koncepce, struktura a tematické členění vedlo k pokroku ve výuce matematiky; byl kladen důraz na šíři, srozumitelnost výkladu i rozmanitost příkladů spjatými s reálným životem. Tuto kvalitu jsme mohli sledovat i ve finanční matematice.

2.5 Seznam literatury a internetových zdrojů

Obecná literatura

[BE] Martina Bečvářová: *Česká matematická komunita v letech 1848 – 1918*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 34, 1. vydání, Matfyzpress, Praha, 2008, 355 stran.

[MN] Jiří Mikulčák: *Nástin dějin vzdělávání v matematice (a také školy) v českých zemích do roku 1918*, edice Dějiny matematiky, svazek č. 42, 1. vydání, Matfyzpress, Praha, 2010, 312 stran.

[PV] Jiří Potůček: *Vývoj vyučování matematice na českých středních školách v období 1900–1945*, díl 1 a 2, Pedagogické centrum, Pedagogická fakulta Západočeské univerzity, Plzeň, 1992, 1993, 55 stran, 42 stran.

[TD] Dana Trkovská: *Geometrické výsledky a reformní aktivity Felixe Kleina*, str. 106–109, in M. Bečvářová (ed.): 28. mezinárodní konference Historie matematiky, Jevíčko, Matfyzpress, Praha, 2007, 122 stran.

Učebnice

[B45] Bohumil Bydžovský: *Arithmetika pro IV. a V. třídu gymnasií a reálných gymnasií*, 1. vydání, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1910, 182 stran.
(2. vydání – 1913, 182 stran, 3. vydání – 1917, 182 stran)

[B57] Bohumil Bydžovský: *Arithmetika pro V. až VII. třídu škol reálných*, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1911, 196 stran.

[B67] Bohumil Bydžovský: *Arithmetika pro VI. a VII. třídu gymnasií a reálných gymnasií*, 1. vydání, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1911, 156 stran.

[BM1] Rudolf Bendl, Jindřich Muk: *Arithmetika pro nižší třídy škol středních, díl I.*, 1. vydání, Ústřední spolek českých professorů, Praha, 1910, 88 stran.
(2. změněné vydání – 1921, 130 stran, 3. obsahem podstatně nezměněné vydání – 1923, 128 stran)

[BM2] Rudolf Bendl, Jindřich Muk: *Arithmetika pro nižší třídy škol středních, díl II.*, 1. vydání, Ústřední spolek českých professorů, Praha, 1910, 92 stran.
(2. změněné vydání – 1921, 107 stran, 3. obsahem podstatně nezměněné vydání – 1924, 111 stran)

[BM3] Rudolf Bendl, Jindřich Muk: *Arithmetika pro nižší třídy škol středních, díl III.*, 1. vydání, Ústřední spolek českých professorů, Praha, 1911, 138 stran.

(2. změněné vydání – 1921, 149 stran, 3. obsahem podstatně nezměněné vydání – 1925, 148 stran)

[BV] Bohumil Bydžovský, Jan Vojtěch: *Mathematika pro nejvyšší třídu reálek*, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1912, 176 stran.

[BVS] Bohumil Bydžovský, Jan Vojtěch: *Sbírka úloh z mathematiky pro vyšší třídy středních škol*, 1. vydání, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1912, 332 stran.
(2. vydání – 1920, 332 stran, 3. vydání – 1924, 335 stran, 4. úplně přepracované vydání – 1936, 274 stran)

[CL1] Ladislav Červenka: *Arithmetika pro I. třídu středních škol*, 1. vydání, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1910, 94 stran.
(2. vydání – 1911, 92 stran, 3. vydání – 1919, 92 stran, 4. vydání – 1921, 92 stran, 5. vydání – 1923, 92 stran, 6. přepracované vydání – 1932, 100 stran, 7. přepracované vydání –1934, 100 stran)

[CL2] Ladislav Červenka: *Arithmetika pro II. třídu středních škol*, 1. vydání, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1910, 80 stran.
(2. nezměněné vydání – 1911, 80 stran, 3. vydání – 1919, 80 stran, 4. upravené vydání – 1921, 80 stran, 5. upravené vydání – 1923, 84 stran, 6. pozměněné vydání – 1930, 92 stran + 12 stran doplňku, 7. rozšířené vydání – 1932, 103 stran, 8. přepracované vydání – 1934, 119 stran)

[CL3] Ladislav Červenka: *Arithmetika pro III. třídu středních škol*, 1. vydání, nákladem Jednoty českých mathematiků, Praha, 1911, 104 stran.
(2. nezměněné vydání – 1918, 104 stran, 3. vydání – 1920, 104 stran, 4. upravené vydání – 1922, 106 stran, 5. upravené vydání – 1925, 108 stran, 6. přepracované vydání –1933, 108 stran, 7. přepracované vydání –1934, 108 stran)

[FR] Ladislav Fryček: *Počtářství na českých školách měšťanských v úlohách*, tisk a náklad Karel Šolc, Kutná Hora, 1910, 262 stran.

[KJ] Jan Kozák: *Pátá početnice pro třídy s 6., 7. a 8. školním rokem na školách vícetřídních*, Císařský královský školní knihosklad, Praha, 1914, 212 stran.

[LT] Miloslav Valouch, Miloslav A. Valouch: Sedmimístné logaritmy čísel od 1 do 120000, 1. vydání, Jednota československých matematiků a fysiků, Praha, 1932, 247 stran.
(2. vydání – 1946, 247 stran, dotisk 2. vydání – 1950, 247 stran, 2. dotisk 2. vydání – 1953, 247 stran, 3. vydání – včetně tabulek goniometrických funkcí, 1956, 487 stran)

[MA] Augustin Matolín: *Pátá početnice pro obecné školy vícetřídní, pátý školní rok*, opravené vydání dle osnov z roku 1915, Císařský královský školní knihosklad, Praha, 1916, 72 stran.

[ML] František Macek: *Sedmimístné obecné logaritmy, všech čísel od 1 až do 100.000 v nové praktické úpravě, sinusů, kosinusů, tangent a kotangent všech úhlů od 10 k 10 sekundám s vypočtenými úměrnými částkami a mnohými jinými tabulkami*, 3.opravené vydání, Karel Winiker, Brno, 1868, XVIII + 630 stran.
(1. vydání – 1862, XV + 619)

[PA] Alois Pižl: *Algebra a politická arithmetika pro vyšší školy obchodní. Díl III. Arithmetika finanční*, 1. vydání, vydal František Řivnáč nákladem Sboru pro vydržování Československé akademie obchodní v Praze, Praha, 1906, 196 stran.
(2. vydání – 1917, 137 stran, 3. změněné vydání – 1923, 148 stran, 4. změněné vydání – 1937, 138 stran)

[PJ] Josef Polák: *Přehled středoškolské matematiky*, 8. vydání, Prometheus, Praha, 2005, 608 stran.

[RM] František rytíř Močnik: *Početnice pro školy obecné, vydání trojdílné. Stupeň vyšší*, Císařský královský školní knihosklad, Praha, 1909, 136 stran.

[SP1] Václav Starý, Josef Pithardt: *Arithmetika pro nižší třídy škol středních I.*, 10. vydání, upravené dle učebních osnov z r. 1909, nákladem České grafické akciové společnosti Unie, Praha, 1910, 52 stran.
(Všechna vydání se mi nepodařilo objevit. 3. přepracované vydání – 1877, 372 stran, 4. opravené vydání – 1882, 279 stran, 5. zkrácené vydání – 1888, 224 stran, 6. opravené vydání – 1893, 284 stran)

[SP2] Václav Starý, Josef Pithardt: *Arithmetika pro nižší třídy škol středních II.*, 10. vydání, upravené dle učebních osnov z r. 1909, nákladem České grafické akciové společnosti Unie, Praha, 1911, 76 stran.

[SP3] Václav Starý, Josef Pithardt: *Arithmetika pro nižší třídy škol středních III.*, 10. vydání, upravené dle učebních osnov z r. 1909, nákladem České grafické akciové společnosti Unie, Praha, 1912, 107 stran.

[ST] František Josef Studnička: *Kapesní tabulky logarithmické, jakož i jiné důležité tabulky pomocné*, 9. rozmnožené vydání, J. G. Calvé, Praha, 1905, 160 stran.
(1. vydání – 1870, 143 stran, 2. rozmnožené vydání – 1875, 156 stran, 3. rozmnožené vydání – 1879, 156 stran, 6. skoro nezměněné vydání – 1893, 156 stran, 7. zdokonalené vydání – 1898, 156 stran, 8. nezměněné vydání – 1901, 156 stran, 9. rozmnožené vydání – 1905, 160 stran, 10. nezměněné vydání – 1909, 160 stran,

11. téměř nezměněné vydání – 1913, 160 stran, 14. nezměněné vydání – 1927, 160 stran)

[UD] Karel Domin: *Arithmetika v úlohách pro ústavy učitelské*, 4. nezměněné vydání, tisk a náklad Karel Šolc, Kutná Hora, 1911, 319 stran.
(1. vydání – 1899, 319 stran, 2. nezměněné vydání – 1903, 319 stran, 3. nezměněné vydání – 1908, 319 stran, 5. vydání – nenalezl jsem, 6. přepracované vydání – 1923, 470 stran)

[UP] Václav Posejpal: *Arithmetika pro ústavy ku vzdělání učitelů a učitelek*, s přílohou: *Úlohy k arithmetice*, 1. vydání, Česká grafická akciová společnost UNIE, Praha, 1908, 206 stran (+ 75 stran přílohy).
(2. přepracované vydání – 1916, 208 stran (bez přílohy), 3. přepracované vydání – 1922, 250 stran + 128 stran přílohy)

Internetové zdroje

[I01] Národní pedagogická knihovna J. A. Komenského, Praha: *http://www.npkk.cz*.

[I02] Online katalog Národní knihovny ČR: *http://www.nkp.cz*.

[I03] Jednota českých matematiků a fyziků: *http://www.jcmf.cz*.

[I07] Wikipedie, otevřená encyklopedie: *http://cs.wikipedia.org*.

[I08] Wikipedia, the free encyclopedia: *http://en.wikipedia.org*.

[I09] Akademický bulletin: *http://abicko.avcr.cz*.