# 1. Teoretické minimum finanční matematiky

In: Martin Melcer (author): Finanční matematika v českých učebnicích. (Od Marchetovy reformy). (Czech). Praha: Matfyzpress, vydavatelství natematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, 2013. pp. 8–31.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402358

# 1. Teoretické minimum finanční matematiky

Před rozborem učebnic a jejich analýzou z pohledu finanční matematiky je vhodné přehledně uvést základní pravidla a stěžejní myšlenky finančních výpočtů.

## 1.1 Procentový počet

Procento (per centum) je latinského původu. Označuje setinu celku nebo základu, tedy

$$1\% = \frac{1}{100}.$$

V úlohách s procenty pracujeme se třemi základními veličinami:

- základ $z$;
- počet procent $p$;
- procentová část je část celku podle počtu procent; její označení není v učebnicích jednotné, nejčastěji se používají písmena $č$, $c$ nebo $x$.

Již na základní škole jsme se při prvním seznámení s tímto tématem učili tři základní vzorce:

pro výpočet procentové části $x = z \cdot \frac{p}{100}$;

pro výpočet základu $z = x \cdot \frac{100}{p}$;

pro výpočet počtu procent $p = \frac{x}{z} \cdot 100$.

V dalším průběhu studia většina z nás raději používala úměru neboli trojčlenky, která byla názornější, logičtější a snáze zapamatovatelná.

## 1.2 Úročení

S úročením se setkáváme v běžném životě při rozhodování v různých finančních otázkách a úlohách. Hodnota peněz je závislá na čase, což je podstatou základní finanční metody sloužící k porovnávání peněžních částek z různých časových období. Mezi základní pojmy úrokového počtu patří úroková míra a úrok. Úrok je částka, kterou získává věřitel od dlužníka jako odměnu za půjčení peněz, tj. *zapůjčí-li jeden subjekt druhému peněžní* *prostředky, bude požadovat odměnu jako náhradu za dočasnou ztrátu kapitálu, za riziko spojené se změnami tohoto kapitálu (např. s inflací) a za nejistotu, že kapitál nebude splacen v dané lhůtě a výši*. ([K6], str. 24). Úroková míra nebo také úroková sazba je počet procent, které úrok činí ze zapůjčeného kapitálu.

Další užívané pojmy jsou:

- doba splatnosti – doba uložení nebo zapůjčení peněžní částky;
- úrokovací období – období, po jehož uplynutí úročíme daný kapitál. Základním obdobím je jeden rok (roční úroková míra s latinským označením p.a., tj. per annum). Můžeme se setkat s pololetní úrokovou mírou (p.s., t. j. per semestre), se čtvrtletní úrokovou mírou (p.q., t. j. per quartale) a dalšími, avšak málo používanými, časovými úseky, v nichž je kapitál úročen.

V úrokovém počtu rozlišujeme dva základní typy úročení – *jednoduché* a *složené*, které dále dělíme podle okamžiku, kdy dochází k placení úroku.

- Jednoduché úročení – o tomto typu mluvíme v případě, že se vyplácené úroky k původnímu kapitálu nepřičítají a dále neúročí, tj. úroky se počítají jen z původního kapitálu.
- Složené úročení – při tomto typu se úroky připisují k původnímu kapitálu a základem pro výpočet úroku v dalším období je tento kapitál spolu s přičtenými úroky.
- O polhůtní úročení (dekurzivní úročení) se jedná, jestliže se úroky připisují na konci úrokovacího období.
- O předlhůtní úročení (anticipativní úročení) se jedná, jestliže se úroky připisují již na začátku úrokovacího období.

Pro výpočet úroku je velmi podstatná doba, za niž se úrok z příslušného kapitálu počítá. Délka roku a délky jednotlivých měsíců, jak je známe z kalendáře, nejsou příliš praktické. To vedlo ke vzniku několika standardů či kódů, s nimiž se můžeme při práci s financemi setkat. Nejčastěji pracujeme s jedním z těchto standardů:

- ACT/365 (anglická metoda) je založen na skutečném počtu dní úrokovacího období a délce roku 365 (resp. 366) dní, započítáváme skutečný počet dní obvykle bez prvního dne;
- ACT/360 (francouzská nebo mezinárodní metoda) je založena na skutečném počtu dní úrokovacího období, ale délku roku počítá jako 360 dní;

- 30E/360 (německá nebo obchodní metoda) je založena na počítání celých měsíců jako 30 dní a délky roku jako 360 dní;
- 30A/360 se liší od předešlé maximálně o jeden den a to pouze v případě, že konec období připadne na 31. den v měsíci a současně začátek období není 30. nebo 31. den v měsíci.

Ve většině finančních ústavů se nejčastěji aplikuje obchodní metoda, která usnadňuje výpočty. V následujících kapitolách, pokud nebude uvedeno jinak, budeme používat právě ji.

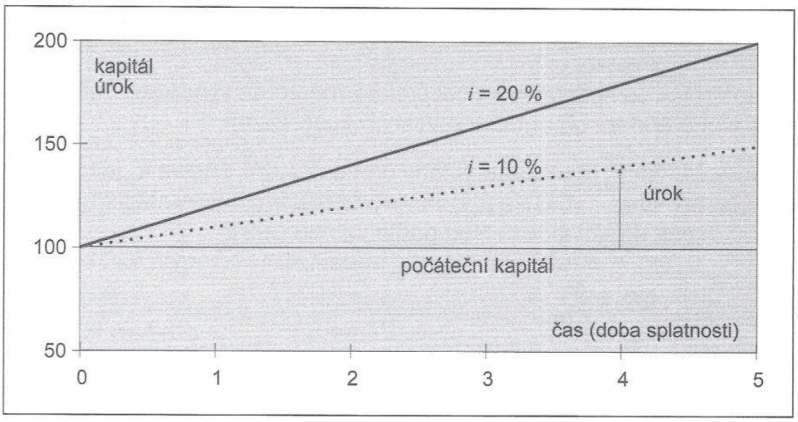
## 1.3 Jednoduché úročení

Při tomto způsobu úročení počítáme úrok ze stále stejného základu, kterým je počáteční kapitál. Vypočítaný úrok v dalším úrokovacím období neúročíme. Hodnotu celkové částky $K_n$, která vznikne z vloženého kapitálu $K_0$ po $n$ úrokovacích obdobích, počítáme podle vzorce

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot n\right),$$

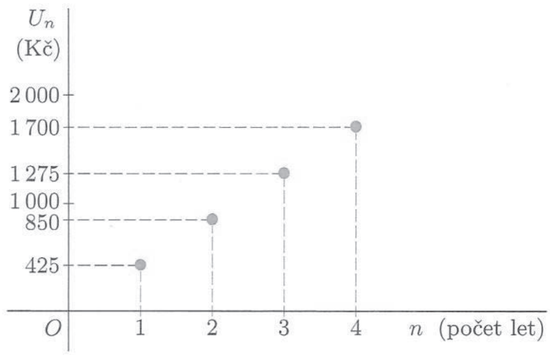
kde $k$ je zdaňovací koeficient, neboť „vydělaný" úrok je daněn, $i$ je roční úroková míra a $t$ je délka úrokovacího období uvedená ve dnech (toto značení budeme dodržovat v celé kapitole). Při délce úrokovacího období jeden rok dostáváme vzorec $K_n = K_0 \cdot (1 + k \cdot i \cdot n)$.

Proměnnou máme tedy v počtu úrokovacích období; jedná se o lineární funkci, jejíž průběh naznačují následující dva obrázky.




Obrázek 1 ([K6], str. 29)

Na obrázku 1 vidíme graficky zpracovaný příklad počátečního kapitálu 100 jednotek, který je uložen na 5 let s ročním úročením. Graf zobrazený plnou čarou nám ukazuje dvaceti procentní úročení, tečkovanou čarou deseti procentní úročení. Výše úroku, který v jednotlivých letech připočítáváme, se nemění.




Obrázek 2 ([O1], str. 51)

Druhý obrázek nám ukazuje jen výši připočítávaného zdaněného 1% úroku z jistiny 50 000 Kč (zdaňovací koeficient $k$ = 0,85). Z grafu můžeme vyčíst, že úrokovacím obdobím je jeden rok a každý rok přibývá úrok o hodnotě 425 Kč. Pokud nás zajímá jen hodnota úroku, používáme níže uvedené vzorce, v nichž je $U_1$ úrok za jedno úrokovací období a $U_n$ úrok za $n$ úrokovacích období

$$U_1 = k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot K_0;$$

$$U_n = U_1 \cdot n = k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot K_0 \cdot n.$$

Při délce úrokovacího období jeden rok dostáváme vzorce

$$U_1 = k \cdot i \cdot K_0;$$

$$U_n = U_1 \cdot n = k \cdot i \cdot K_0 \cdot n.$$

Pro vztah počátečního a koncového kapitálu platí vztah:

$$K_n = K_0 + U_n.$$

## 1.4 Složené úročení

Základní rozdíl mezi jednoduchým a složeným úročením je v chování úroku po připsání k úročenému kapitálu. Při jednoduchém úročení jsme s ním nijak dál nepočítali, kdežto při složeném úročení se připsaný úrok stává nedílnou součástí kapitálu a v dalším období úročíme takto navýšený kapitál, tj. úročíme i připsaný úrok. Důsledkem je, že hodnota úroku v jednotlivých úrokovacích obdobích narůstá a nejedná se o lineární funkci. Zde již vidíme vlastnosti exponenciální funkce, resp. geometrické řady, neboť hodnotu kapitálu v dalším období vypočítáme vynásobením stávajícího kapitálu úročitelem (základem mocniny, kvocientem)

$\left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)$, resp. $(1 + k \cdot i)$ při úrokovacím období jeden rok.

Hodnotu kapitálu $K_n$ vzniklého z kapitálu $K_0$ po $n$ úrokovacích období vypočítáme podle vzorce, který odpovídá vzorci pro výpočet $n$-tého členu geometrické posloupnosti s nultým členem $K_0$

$$K_n = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^n.$$

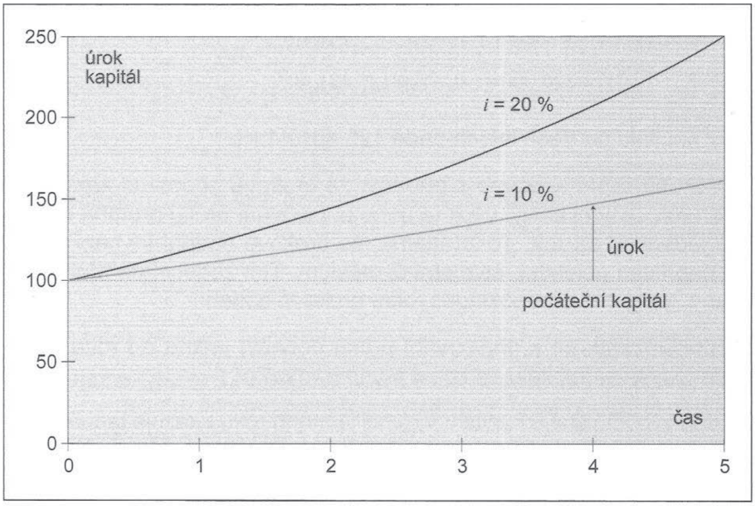
Proměnná $t$ ve vzorci zastupuje délku úrokovacího období ve dnech. Změnou délky úrokovacího období se mění úroková intenzita, tj. skutečná úroková míra při dané roční úrokové míře. Pokud se délka tohoto období blíží k nule, hovoříme o spojitém úročení a získáme maximální úrokovou intenzitu. Více viz například v publikacích [O1] (kapitola 3.6 *Úrokovací období* ), [K6] (kapitoly 3.8 *Efektivní úroková míra*; 3.9 *Úroková intenzita – spojité úročení* ). V bankách není úrokovací období jednotné, liší se zejména v závislosti na produktu. Délka jeden rok, která dříve patřila k nejběžnějším, se objevuje zřídka.

Při délce úrokovacího období jeden rok dostáváme vzorec

$$K_n = K_0 \cdot (1 + k \cdot i)^n.$$

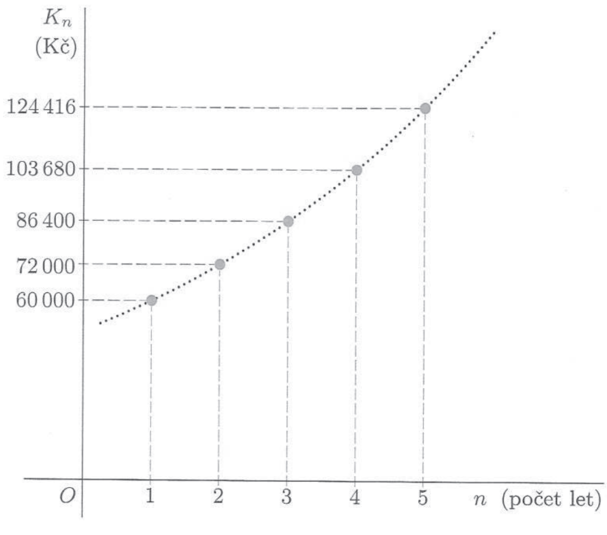
Hodnotu úroku vypočítáme pouhým odečtením kapitálu $K_0$ od kapitálu $K_n$.

Proměnnou ve výše uvedeném základním vzorci je počet úrokovacích období, tj. jedná se o již zmiňovanou exponenciální funkci. Názorněji vše můžeme vidět v grafech, které zobrazují některé konkrétní úlohy. Podívejme se na dva z nich.




Obrázek 3 ([K6], str. 47)

Na obrázku 3 je zobrazena úloha: počáteční kapitál má hodnotu 100 jednotek, úročitel má hodnotu 1,1 (graf zobrazený tenkou čarou), resp. 1,2 (graf zobrazený tučnou čarou), zdaňovací koeficient je 1 a úrokovací období má délku jednoho roku.




Obrázek 4 ([O1], str. 97)

Na předcházejícím obrázku 4 vidíme vývoj hodnoty kapitálu 50 000 Kč zapůjčeného s roční úrokovou mírou 20 % a s ročním úročením (zdaňovací koeficient je 1). Vzniklými body grafu jednoduše proložíme exponenciálou.

## 1.5 Spoření

Spořením označujeme ukládání pevné částky v pravidelných intervalech. Spoření rozdělujeme na dva základní typy – krátkodobé a dlouhodobé. Krátkodobým spořením rozumíme spoření, jež svým trváním nepřesáhne jedno úrokovací období, na rozdíl od dlouhodobého, které bude delší než jedno úrokovací období (předpokládejme pro následující text, že úrokovací období má délku jednoho roku).

### 1.5.1 Krátkodobé spoření

**a) Předlhůtní**

O tomto typu spoření hovoříme, pokud po dobu délky maximálně jednoho roku budeme v pravidelných intervalech ukládat pevnou částku *x* na počátku každé *m*-tiny roku. Každý vklad má jinou dobu, po níž je úročen, tj. část roku, po kterou je uložen.

Ukládejme po dobu jednoho roku: první vklad je uložen celý rok, druhý vklad je uložen o jednu *m*-tinu roku kratší dobu atd. Zapišme úrokovací doby s příslušnou úrokovací mírou *i* a vypočítejme částku, jež po připsání úroků bude na účtu na konci roku

$$S'_1 = m \cdot x + i \cdot \left(\frac{m}{m} \cdot x + \frac{m-1}{m} \cdot x + \frac{m-2}{m} \cdot x + \cdots + \frac{1}{m} \cdot x\right).$$

Součin $m \cdot x$ se rovná kapitálu, jenž jsme na účet za jeden rok vložili, a zlomky v závorce jsou části roku, po které je příslušný vklad uložen. Ze závorky můžeme vytknout zlomek $\frac{x}{m}$ a uvnitř nám zůstane součet prvních *m* přirozených čísel (tj. aritmetická posloupnost), jež vypočítáme, zjednodušíme a dostáváme finální tvar pro stav účtu po zúročení na konci roku

$$S'_1 = m \cdot x + i \cdot \frac{x}{m} \cdot (m + m - 1 + m - 2 + \cdots + 1) \rightarrow$$

$$S'_1 = m \cdot x + i \cdot \frac{x}{m} \cdot \frac{(m+1) \cdot m}{2} \rightarrow$$

$$S'_1 = m \cdot x \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right).$$

$S'_1$ je hodnota kapitálu na konci roku; apostrof značí předlhůtní vklady. Pokud ukládáme na počátku každého měsíce, má *m* hodnotu 12.

**b) Polhůtní**

Tento typ nastane v případě, že za stejných podmínek uvedených výše ukládáme pevnou částku $x$ ne na počátku, ale na konci každé $m$-tiny roku. To znamená, že každý vklad $x$ je na účtu o jednu $m$-tinu kratší čas oproti předlhůtnímu spoření. Tato skutečnost nám ovlivní tvar vzorce

$$S_1 = m \cdot x + i \cdot \left(\frac{m-1}{m} \cdot x + \frac{m-2}{m} \cdot x + \frac{m-3}{m} \cdot x + \cdots + \frac{0}{m} \cdot x\right),$$

po úpravách

$$S_1 = m \cdot x + i \cdot \frac{x}{m} \cdot (m - 1 + m - 2 + m - 3 + \cdots + 0) \rightarrow$$

$$S_1 = m \cdot x + i \cdot \frac{x}{m} \cdot \frac{(m-1+0) \cdot m}{2} \rightarrow$$

$$S_1 = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right).$$

$S_1$ je hodnota kapitálu na konci roku, bez apostrofu značí polhůtní vklady.

## 1.5.2 Dlouhodobé spoření

O dlouhodobém spoření hovoříme, jestliže délka spoření činí několik úrokovacích období a vklad, nazývaný anuita, připisujeme na účet jedenkrát za úrokovací období.

**a) Předlhůtní**

V tomto případě ukládáme částku (anuitu) $a$ vždy na počátku úrokovacího období (roku). Zajímají nás úspory na konci $n$-tého úrokovacího období, tj. po uložení $n$ anuit $a$. První anuita je úročena $n$ úrokovacích období, druhá $(n–1)$ úrokovacích období atd. Zapišme stav účtu po $n$ úrokovacích obdobích s úrokovou mírou $i$

$$S' = a \cdot (1+i)^n + a \cdot (1+i)^{n-1} + a \cdot (1+i)^{n-2} + \cdots + a \cdot (1+i).$$

Každý člen má hodnotu příslušné anuity po zúročení na konci spoření. Po vytknutí $a \cdot (1+i)$ před závorku vidíme uvnitř prvních $n$ členů geometrické posloupnosti
($a_1 = 1,\ q = 1+i$), tzn. že závorku můžeme dále zjednodušit

$$S' = a \cdot (1+i) \cdot [(1+i)^{n-1} + (1+i)^{n-2} + (1+i)^{n-3} + \cdots + 1] \rightarrow$$

$$S' = a \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{(1+i) - 1} \rightarrow$$

$$S' = a \cdot (1+i) \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

$S'$ je naspořená částka z anuit $a$ po $n$ úrokovacích obdobích; apostrof ve značení opět znamená předlhůtní ukládání.

**b) Polhůtní**

Tento typ spoření nastane, ukládáme-li částky vždy na konci úrokovacího období. Spoříme-li takto po dobu $n$ úrokovacích období, počítáme naspořenou částku následovně: první vklad je uložen ($n$–1) úrokovacích období, druhý ($n$–2) úrokovacích období atd. Je-li úroková míra $i$, zapisujeme

$$S = a \cdot (1+i)^{n-1} + a \cdot (1+i)^{n-2} + a \cdot (1+i)^{n-3} + \cdots + a.$$

Pomocí stejných kroků jako u předešlého předlhůtního spoření obdržíme finální vzorec pro výpočet naspořené částky

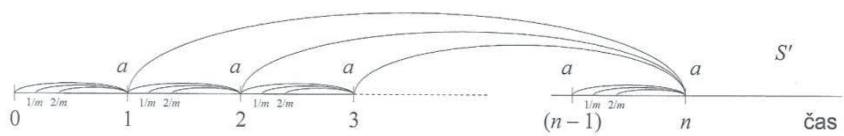
$$S = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i}.$$

$S$ je naspořená částka z anuit $a$ po $n$ úrokovacích obdobích; bez apostrofu ve značení opět znamená polhůtní ukládání.

Zlomek $\frac{(1+i)^n - 1}{i}$ nazýváme *střadatel* a značíme jej $s_n^i$.

### 1.5.3 Kombinace krátkodobého a dlouhodobého spoření

V praxi velmi často potřebujeme vypočítat, kolik naspoříme do konce $n$-tého úrokovacího období, jestliže ukládáme pevnou částku $m$-krát za úrokovací období. V té chvíli kombinujeme krátkodobé a dlouhodobé spoření. Pomocí vzorců pro krátkodobé spoření (viz výše) vypočítáme naspořenou částku za jedno úrokovací období. Tuto částku máme k dispozici na konci každého úrokovacího období, proto ji dosadíme za anuitu do vzorce pro dlouhodobé polhůtní spoření. Graficky obě situace vidíme na následujících obrázcích.

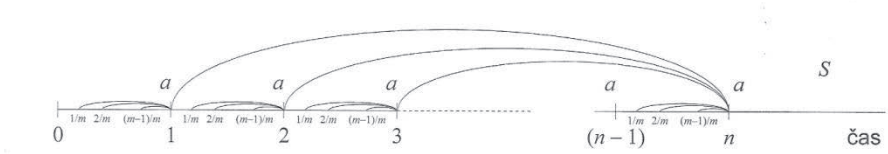



Obrázek 5 ([K6], str. 97)

Obrázek 5 znázorňuje předlhůtní krátkodobé (jedno úrokovací období) spoření podle vzorce

$$S'_1 = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right),$$

kde $S'_1$ je znázorněné na obrázku jako $a$, tedy polhůtní anuita dlouhodobého spoření.




Obrázek 6 ([K6], str. 101)

Obdobně obrázek 6 znázorňuje polhůtní krátkodobé spoření podle vzorce

$$S_1 = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right),$$

kde $S_1$ je znázorněné na obrázku jako $a$, tedy opět polhůtní anuita dlouhodobého spoření.

Pro výpočet celkové naspořené částky $S$ (značíme $S'$ nebo $S$ podle typu krátkodobého spoření s dolním indexem $n$ značícím počet úrokovacích období) po $m$ vkladech v každém z $n$ úrokovacích období použijeme vzorec

$$S = a \cdot \frac{(1+i)^n - 1}{i},$$

kam za anuitu $a$ dosadíme podle typu krátkodobého spoření buď $S'_1$ nebo $S_1$. V obou případech je hodnota námi vloženého kapitálu rovna součinu $n \cdot m \cdot x$, tj. „počet úrokovacích období · počet vkladů za úrokovací období · výše vkladu“.

Uvedené vzorce jsou bez danění úroků. Pokud jsou úroky daněny, musíme úrokovou míru ve všech vzorcích vynásobit zdaňovacím koeficientem $k$ ($k = 1 - d$, $d$ je daň).

## 1.6 Důchod

Pravidelné výplaty (anuity) ve stejné výši z dané investice nazýváme důchod neboli renta.

**Rozlišujeme důchody:**

a) podle časového okamžiku výplaty:

- předlhůtní důchod – anuity jsou placeny na počátku daného časového intervalu;
- polhůtní důchod – anuity jsou placeny na konci časového intervalu;

b) podle délky trvání:

- dočasný důchod – tento důchod je vyplácen jen po určitou, pevně stanovenou dobu;
- věčný důchod – tento důchod je vyplácen neomezeně dlouho;

c) podle začátku výplat:

- bezprostřední důchod – s výplatou důchodu začneme ihned po založení;
- odložený důchod – s výplatou důchodu začneme až po uplynutí určité doby.

Základní myšlenkou důchodu je uložení částky do nějakého finančního ústavu, který ji bude spravovat. Tato částka je zde úročena podle pravidel složeného úrokování a je nám z ní vyplácena v určitých časových intervalech pevná částka – renta čili anuita.

### 1.6.1 Důchod bezprostřední polhůtní

Počáteční (současnou) hodnotu důchodu vypočítáme jako součet všech současných hodnot budoucích vyplacených anuit *a* důchodu.

Pro názornost si představme, že důchod je vyplácen částkou *a* jedenkrát na konci úrokovacího období (roku) při úrokové míře *i*. První výplata má počáteční hodnotu $a \cdot \frac{1}{1+i}$, druhá výplata $a \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right)^2$ atd. Výraz $\frac{1}{1+i}$ nazýváme diskontním faktorem a značíme jej *v*. Vše zapíšeme do přehledné rovnice

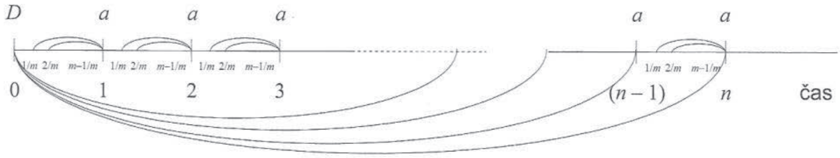
$$D = a \cdot v + a \cdot v^2 + a \cdot v^3 + \cdots + a \cdot v^n,$$

kde *D* je počáteční hodnota důchodu, *a* je výše výplaty, *v* je diskontní faktor a *n* je počet úrokovacích období. Pravá strana rovnice je součet prvních *n* členů geometrické posloupnosti ($a_1 = a \cdot v,\ q = v$). Rovnici můžeme dále upravovat na tvar

$$D = a \cdot v \cdot \frac{v^n - 1}{v - 1} = a \cdot \frac{1}{1+i} \cdot \frac{v^n - 1}{\frac{1}{1+i} - 1} = a \cdot \frac{1 - v^n}{i},$$

kde výraz $\frac{1-v^n}{i}$ se ve finanční matematice nazývá *polhůtní zásobitel* a značí se $a_n^i$.

Stejně jako u spoření mohou být splátky důchodu vypláceny častěji než jedenkrát za úrokové období. V tom případě je nutno ještě vypočítat za celé úrokové období hodnotu roční anuity *a* z jednotlivých výplat *x*, jichž je obecně $m$ během jednoho úrokovacího období. Názorně vše vidíme na následujícím obrázku 7.




Obrázek 7 ([K6], str. 112)

Do výše odvozeného vzorce $D = a \cdot \frac{1-v^n}{i}$ za anuitu $a$ dosadíme vzorec pro výpočet naspořené částky polhůtního krátkodobého spoření

$$S_1 = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right),$$

neboť doba uložení jednotlivých splátek $x$ odpovídá tomuto typu spoření. Výsledný vzorec pro počáteční hodnotu důchodu $D$ má tvar

$$D = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{1-v^n}{i},$$

kde $m$ je počet výplat za úrokovací období, $x$ je výše výplaty, $i$ je úroková míra, $v$ je diskontní faktor a $n$ je počet úrokovacích období.

## 1.6.2 Důchod bezprostřední předlhůtní

Mějme důchod, který je vyplácen částkou $a$ vždy na počátku úrokovacího období (roku) po dobu $n$ úrokových období. Hledejme počáteční hodnotu tohoto předlhůtního důchodu $D'$. Tuto částku vypočítáme jako součet současných hodnot jednotlivých výplat. První výplata má hodnotu $a$, neboť je vyplacena ihned po založení důchodu, druhá výplata má hodnotu $a \cdot \frac{1}{1+i}$, tj. $a \cdot v$, použijeme-li diskontní faktor, atd.

Zapíšeme-li vše symbolicky, obdržíme rovnici

$$D' = a + a \cdot v + a \cdot v^2 + \cdots + a \cdot v^{n-1},$$

v níž opět vidíme součet prvních $n$ členů geometrické posloupnosti ($a_1 = a$, $q = v$) a upravíme ji na tvar

$$D' = a \cdot \frac{v^n-1}{v-1} = a \cdot \frac{v^n-1}{\frac{1}{1+i}-1} = a \cdot (1+i) \cdot \frac{1-v^n}{i} = a \cdot \frac{1-v^n}{i \cdot v},$$

kde výraz $\frac{1-v^n}{i \cdot v}$ se nazývá *předlhůtní zásobitel* a značíme jej $a'^{i}_{n}$.

Z výše uvedených vzorců odvodíme vztah mezi počáteční hodnotou polhůtního a předlhůtního důchodu a obdržíme rovnici

$$D' = D \cdot (1 + i) \text{ neboli } D = v \cdot D',$$

kde $D$ je současná hodnota polhůtního důchodu, $D'$ je současná hodnota předlhůtního důchodu, $i$ je úroková míra a $v$ je diskontní faktor.

Vzorec pro výpočet současné hodnoty předlhůtního důchodu $D'$, který je vyplácen častěji než jedenkrát za úrokovací období, odvodíme obdobně jako u polhůtního. Nejprve je nutno vypočítat hodnotu roční (za celé úrokovací období) anuity $a$ z jednotlivých výplat $x$, jichž je obecně $m$ během úrokovacího období. Uvědomme si, že první anuita $a$ vzniká z jednotlivých výplat $x$ až na konci prvního úrokovacího období. Využijeme vzorec pro předlhůtní krátkodobé spoření

$$S'_1 = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right)$$

a vzorec pro výpočet současné hodnoty polhůtního důchodu (podle okamžiku vzniku první anuity $a$)

$$D = a \cdot \frac{1 - v^n}{i}.$$

Částku, kterou založíme tento důchod, vypočítáme podle vzorce

$$D = m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right) \cdot \frac{1 - v^n}{i},$$

kde $m$ je počet výplat za úrokovací období, $x$ je výše výplaty, $i$ je úroková míra, $v$ je diskontní faktor a $n$ je počet úrokovacích období.

### 1.6.3 Důchod odložený

Odložení důchodu znamená, že uložená částka určená k výplatám je po nějakou dobu ponechána bez výběrů a k první výplatě dochází až po této době. To znamená, že hodnota důchodu v okamžiku počátku vyplácení je vyšší než uložená částka.

Přestavme si, že uložený kapitál $K$ (současná hodnota odloženého důchodu) bude vyplácen až po uplynutí $k$ úrokovacích období. Po úrokování v těchto $k$ úrokovacích období má kapitál hodnotu bezprostředního, tj. neodloženého, důchodu $D$. Získáváme vztah

$$K \cdot (1 + i)^k = D \text{ neboli } K = D \cdot v^k.$$

Vzorec vyjadřuje, že potřebný kapitál $K$ pro založení důchodu $D$ při úrokové míře $i$ zjistíme tak, že tento důchod $k$-krát diskontujeme diskontním faktorem

$v$. Pro hodnotu $D$ využijeme vzorce uvedené výše podle daného typu výplat bezprostředního důchodu.

### 1.6.4 Důchod věčný

V předešlých částech kapitoly jsme hovořili o důchodech, jejichž vyplácení trvalo $n$ úrokovacích období. Nyní se zaměříme na typ důchodu, jehož vyplácení není časově omezeno. To jinými slovy znamená, že se hodnota kapitálu, z něhož jsou výplaty čerpány, v průběhu výplat nezmenšuje. Aby mohla být splněna tato podmínka, lze logicky dojít k jednoznačnému závěru, že vyplácet se mohou pouze úroky (výjimku tvoří pouze první výplata u předlhůtního důchodu). Odvoďme tento závěr z výše uvedených dočasných důchodů pomocí limity, neboť počet úrokovacích období nám neomezeně roste.

a) Věčný polhůtní důchod

$$D = \lim_{n\to\infty} a \cdot \frac{1-v^n}{i} = a \cdot \frac{1-0}{i} = \frac{a}{i}$$

($\lim_{n\to\infty} v^n = 0$, protože $v < 1$)

tj. zmiňovaný úrok $u = i \cdot D = a$.

Pro odložený důchod vzniká vztah

$$K = v^n \cdot \frac{a}{i}$$

a při frekvenci $m$ výplat za úrokovací období použijeme vztah

$$D = \frac{m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m-1}{2 \cdot m} \cdot i\right)}{i}.$$

b) Věčný předlhůtní důchod

$$D' = \lim_{n\to\infty} a \cdot (1+i) \cdot \frac{1-v^n}{i} = a \cdot (1+i) \cdot \frac{1-0}{i} = \frac{a}{i} + a$$

tj. zmiňovaný úrok plus první výplata.

Pro odložený důchod vzniká vztah

$$K' = v^n \cdot D' = v^n \cdot a \cdot \left(1 + \frac{1}{i}\right)$$

a při frekvenci $m$ výplat za úrokovací období použijeme vztah

$$D' = \frac{m \cdot x \cdot \left(1 + \frac{m+1}{2 \cdot m} \cdot i\right)}{i}.$$

## 1.7 Úvěr

Úvěrem označujeme dluh neboli půjčku a rozumíme jím poskytnutí finančních prostředků na určitou dobu. Za toto poskytnutí platíme poplatek zvaný úrok. Stranu, jež poskytla úvěr, nazýváme věřitel; opačnou stranu dlužník; splácení úvěru umořování; úmor část splátky zmenšenou o úroky, tj. zmenšení dluhu.

**Rozdělení úvěrů:**

a) podle doby splatnosti:

- krátkodobé (doba splatnosti nepřesahuje jeden rok);
- střednědobé (doba splatnosti je do čtyř let);
- dlouhodobé (doba splatnosti je delší než čtyři roky).

b) podle způsobu umořování:

- najednou včetně úroků za určitou dobu;
- od začátku pravidelnými konstantními platbami (anuitami);
- od začátku pravidelnými platbami pro konstantní úmor;
- od začátku pravidelnými platbami, jejichž růst je obvykle charakterizován aritmetickou nebo geometrickou posloupností.

## 1.8 Umořovací plány

K přehlednému zobrazení vývoje stavu úvěru v čase slouží umořovací plán ve tvaru tabulky. Do ní zapisujeme výši jednotlivých plateb, v nichž odlišujeme úmor a úrok. Plán obsahuje vedle plateb zejména výši úroku z úvěru, výši úmoru a zůstatek úvěru po odečtení úmoru. Hodnoty úroku v době splácení obvykle klesají, neboť splátka bývá vyšší než úrok a tento rozdíl je úmor, který snižuje úvěr, tj. v následujících případech předpokládáme kladný úmor.

### 1.8.1 Splacení úvěru najednou včetně úroků za určitou dobu

Jednorázové splacení úvěru nabízí některé finanční ústavy jako alternativu postupného splácení (viz níže). V tomto případě má banka (věřitel) u fyzické osoby (dlužník) „uloženu“ na počátku částku (úvěr) $D$ při dané úrokové míře $i$ na dobu $n$ úrokovacích období. Během této doby se hodnota úvěru řídí podle pravidel složeného úrokování. Dlužník tedy po uplynutí $n$ úrokovacích období splatí částku $D_n$ (konečná hodnota úvěru), jejíž výše je stanovena podle vzorce

$$D_n = D \cdot (1+i)^n.$$

### 1.8.2 Splácení úvěru stejnými splátkami

Daný úvěr (dluh) $D$ chceme splatit i s úroky (konstantní úroková míra $i$) pomocí $n$ stejných splátek (anuit) $a$, které jsou splatné vždy na konci úrokovacího období.

Pro odvození vzorce vypočítáme současnou hodnotu každé budoucí splátky. První splátku $a$ splatíme za jedno úrokovací období, tj. její současná hodnota je $a \cdot \frac{1}{1+i}$ neboli $a \cdot v$, pokud využijeme zápis s diskontním faktorem. Druhou splátku $a$ splatíme za dvě úrokovací období, tj. její současná hodnota je $a \cdot \left(\frac{1}{1+i}\right)^2$ neboli $a \cdot v^2$ atd. Zapíšeme-li všechny tyto diskontované splátky do jedné rovnice, obdržíme

$$D = a \cdot v + a \cdot v^2 + a \cdot v^3 + \cdots + a \cdot v^n,$$

což je rovnice, kterou jsme odvodili v části pojednávající o bezprostředním polhůtním důchodu. Nyní sjednotíme myšlenky vytvoření důchodu a jeho vyplácení s poskytnutím úvěru a jeho splácením. V praxi nejčastěji nastane tato dvojice situací:

1. fyzická osoba uloží do banky částku, z níž banka vyplácí konstantní pravidelnou rentu, tj. fyzická osoba je věřitelem (důvěřuje bance tím, že tam vloží peníze) a banka dlužníkem (u ní jsou uloženy finanční prostředky);
2. fyzická osoba si půjčí od banky částku, kterou splácí konstantními splátkami, tj. fyzická osoba je dlužníkem a banka věřitelem.

Z toho plyne, že pokud splácíme úvěr konstantními anuitami, používáme stejné vzorce jako pro tvoření důchodů, tedy

$$D = a \cdot \frac{1-v^n}{i}$$

a pro výši anuity platí

$$a = D \cdot \frac{i}{1-v^n},$$

kde $a$ je anuita, $D$ je výše úvěru, $i$ je úroková míra, $v$ je diskontní faktor a $n$ je doba splatnosti vyjádřená počtem úrokovacích období.

Zlomek $\frac{i}{1-v^n}$, jenž je převrácenou hodnotou polhůtního zásobitele, se nazývá *umořovatel*.

$k$-tá anuita $a$ je v umořovacím plánu rozložena na úrok $U_k$ a úmor $M_k$ podle vzorce

$$a = M_k + U_k = M_k + i \cdot D_{k-1},$$

kde $D_{k-1}$ je výše úvěru převedená z minulého období, tzv. zůstatek úvěru, a $i$ je úroková míra.

Na obrázku 8 si prohlédněme bez dalšího komentáře vše v názorném umořovacím plánu úvěru ve výši 500 000 Kč s dobou splatnosti 10 let s roční úrokovou mírou 6 %, který je splácen ročními polhůtními konstantními anuitami, tj. $D$ = 500 000; $n$ = 10; $i$ = 0,06.

Výši anuity vypočítáme podle výše uvedeného vzorce

$$a = D \cdot \frac{i}{1-v^n} = 500000 \cdot \frac{0{,}06}{1-\left(\frac{1}{1+0{,}06}\right)^{10}} = 67934.$$

| Období | Anuita | Úrok | Úmor | Zůstatek úvěru |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | 500 000 |
| 1 | 67 934 Kč | 30 000 Kč | 37 934 Kč | 462 066 Kč |
| 2 | 67 934 Kč | 27 724 Kč | 40 210 Kč | 421 856 Kč |
| 3 | 67 934 Kč | 25 311 Kč | 42 623 Kč | 379 233 Kč |
| 4 | 67 934 Kč | 22 754 Kč | 45 180 Kč | 334 053 Kč |
| 5 | 67 934 Kč | 20 043 Kč | 47 891 Kč | 286 163 Kč |
| 6 | 67 934 Kč | 17 170 Kč | 50 764 Kč | 235 398 Kč |
| 7 | 67 934 Kč | 14 124 Kč | 53 810 Kč | 181 588 Kč |
| 8 | 67 934 Kč | 10 895 Kč | 57 039 Kč | 124 550 Kč |
| 9 | 67 934 Kč | 7 473 Kč | 60 461 Kč | 64 089 Kč |
| 10 | 67 934 Kč | 3 845 Kč | 64 089 Kč | 0 Kč |

Obrázek 8 ([K6], str. 135)

### 1.8.3 Splácení úvěru stejnými úmory

Při splácení úvěru stejnými úmory se výše anuity během umořování mění. Výše úmoru $M$ je dána podílem výše úvěru $D$ a počtu úrokovacích období $n$, tedy

$$M = \frac{D}{n}.$$

Hodnota splátky $a_k$ za $k$-té období je rovna výši úmoru $M$ a úroku $U_k$ ze zůstatku úvěru $D_{k-1}$ převedeného z minulého období. Při úrokové míře $i$ dostáváme vzorec

$$a_k = M + U_k = M + i \cdot D_{k-1}.$$

Vše si opět prohlédněme (bez dalšího komentáře) v upraveném umořovacím plánu na názorném obrázku 9 výše uvedeného příkladu ($D$ = 500 000; $n$ = 10; $i$ = 0,06).

| Období | Splátka | Úrok | Úmor | Zůstatek úvěru |
|---|---|---|---|---|
| 0 | | | | 500 000 |
| 1 | 80 000 | 30 000 | 50 000 | 450 000 |
| 2 | 77 000 | 27 000 | 50 000 | 400 000 |
| 3 | 74 000 | 24 000 | 50 000 | 350 000 |
| 4 | 71 000 | 21 000 | 50 000 | 300 000 |
| 5 | 68 000 | 18 000 | 50 000 | 250 000 |
| 6 | 65 000 | 15 000 | 50 000 | 200 000 |
| 7 | 62 000 | 12 000 | 50 000 | 150 000 |
| 8 | 59 000 | 9 000 | 50 000 | 100 000 |
| 9 | 56 000 | 6 000 | 50 000 | 50 000 |
| 10 | 53 000 | 3 000 | 50 000 | 0 |

Obrázek 9 ([K6], str. 142)

Další typy splácení úvěrů nejsou standardní, závisí pouze na nabídce finančního ústavu a akceptaci klienta. Některé z nich lze nalézt ve vysokoškolských učebnicích, např. Tomáše Cipry: *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou* (Ekopress, Praha, 2005, [C2]) a *Finanční matematika v praxi* (HZ, Praha, 1994, [C3]).

Existuje množství pěkných publikací i článků určených pro veřejnost (např. [K6]), které mají přispět ke zlepšení finanční gramotnosti obyvatelstva. Velmi podnětný článek o tomto tématu sepsali Oldřich Odvárko a Jarmila Robová *Budování finanční gramotnosti v matematice* (2009); je dostupný na adrese http://clanky.rvp.cz/clanek/c/ZVPD/6787/BUDOVANI-FINANCNI-GRAMOTNOSTI-V-MATEMATICE.html. Na metodickém portálu RVP (tj. rámcově vzdělávací programy) je článek stejné autorské dvojice *Jednoduché a složené úročení* (2010), který je vzorovým příkladem rámcově vzdělávacího programu pro střední školy (viz http://clanky.rvp.cz/clanek/c/Z/8287/jednoduche-a-slozene-uroceni.html).

Pro středoškolské studenty a učitele, kteří si chtějí rozšířit a doplnit finanční gramotnost, jsem sepsal čtyřdílný článek *Možnost uložení a získání finančních prostředků* ([MM1], [MM2], [MM3], [MM4],), jenž vycházel na pokračování v patnáctém ročníku časopisu *Učitel matematiky* (2006/2007).

## 1.9 Přehled základních vzorců

Přehled nejdůležitějších znaků a symbolů

$K_0$ – počáteční kapitál (vklad, úvěr);

$K$ – naspořený kapitál po připsání úroku za první úrokovací období;

$n$ – počet let;

$m$ – počet úrokovacích období (počet splátek);

$t$ – počet dní;

$K_n$, $K_m$ – kapitál po $n$ letech ($m$ úrokovacích obdobích) (po připsání úroku za $n$-tý rok, resp. za $m$-té úrokovací období);

$U$ – připsaný úrok za jedno úrokovací období;

$U_n$, $U_m$ – úrok za $n$ let ($m$ úrokovacích obdobích);

$i$ – úroková míra (nejčastěji roční) vyjádřena desetinným číslem (jestliže je úroková míra $p$ %, potom $i = \frac{p}{100}$);

$k$ – zdaňovací koeficient (úrok bývá daněn, při dani z úroku $d$ % je $k = 1 - \frac{d}{100}$);

$S_m$ – naspořený kapitál po $m$ úrokovacích obdobích (po připsání úroku za $m$-té úrokovací období);

$S'$ (resp. $S$) – kapitál naspořený předlhůtním, resp. polhůtním ukládáním;

$D$ – počáteční výše dluhu (důchodu);

$s$ – výše splátky (renty) placené vždy na konci úrokovacího období;

$a$ – pravidelně ukládaná částka, anuita.

Použitá norma: měsíce se počítají po 30 dnech, tj. rok má 360 dní.

Jednoduché úročení

- Kapitál a úrok:

$$K_n = K_0 \cdot (1 + k \cdot i \cdot n);$$

$$U_n = k \cdot i \cdot n \cdot K_0 .$$

- Kapitál a úrok po $t$ dnech:

$$K = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right);$$

$$U = k \cdot i \cdot \frac{t}{360} \cdot K_0 .$$

Složené úročení

- Kapitál a úrok po $n$ letech (úrokovací období 1 rok):

$$K_n = K_0 \cdot (1 + k \cdot i)^n ;$$

$$U_n = K_0 \cdot \left((1 + k \cdot i)^n - 1\right).$$

- Kapitál a úrok po $m$ úrokovacích obdobích (úrokovací období $t$ dní):

$$K_m = K_0 \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^m ;$$

$$U_m = K_0 \cdot \left(\left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^m - 1\right).$$

Pravidelné spoření při složeném úročení (úrokovací období $t$ dní)

- Naspořený kapitál $S_m$ pravidelným ukládáním částky $a$ na začátku každého úrokovacího období po dobu $m$ úrokovacích období při roční úrokové míře $i$ a zdaňovacím koeficientu $k$:

$$S_m = a \cdot \left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right) \cdot \frac{\left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^m - 1}{k \cdot i \cdot \frac{t}{360}} .$$

- Naspořený kapitál $S_m$ pravidelným ukládáním částky $a$ na konci každého úrokovacího období po dobu $m$ úrokovacích období při roční úrokové míře $i$ a zdaňovacím koeficientu $k$:

$$S_m = a \cdot \frac{\left(1 + k \cdot i \cdot \frac{t}{360}\right)^m - 1}{k \cdot i \cdot \frac{t}{360}}.$$

Pravidelné splácení dluhu $D$ anuitou $s$ (resp. vyplácení renty $s$ důchodu $D$) jedenkrát v každém úrokovacím období po dobu $m$ úrokovacích období při roční úrokové míře $i$ (úrokovací období $t$ dní, polhůtní úrokování)

$$s = D \cdot \left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)^m \cdot \frac{i \cdot \frac{t}{360}}{\left(1 + i \cdot \frac{t}{360}\right)^m - 1}.$$

## 1.10 Shrnutí

Z předloženého elementárního výkladu vidíme, že základní pravidla pro práci s financemi nejsou nijak složitá, přestože svět financí je velmi pestrý a bohatý, stále se vyvíjí a není příliš přehledný. Pro naši orientaci je třeba výše zmíněná pravidla nejen nastudovat a znát, ale musí nám přejít „do krve“! Bez nich podle mého názoru nelze v současném světě se stále novými nabídkami finančních ústavů – možnostmi spoření či úvěrů – dobře existovat, proto **nepodceňujme studium základů finanční matematiky!**

Žákům by tato pravidla měla být předložena jako jedna z vhodných a praktických aplikací matematiky. Tím by byl rozvoj a zavádění tzv. finanční gramotnosti do základního a středního školství výrazně podpořen a dále upevňován. O krocích a podnětech ze strany naší vlády se může zájemce dozvědět více například ze společného dokumentu Ministerstva financí ČR, Ministerstva školství, mládeže a tělovýchovy ČR a Ministerstva průmyslu a obchodu ČR vypracovaného na základě usnesení vlády č. 1594 ze dne 7. prosince 2005 pod názvem *Systém budování finanční gramotnosti na základních a středních školách*. Jeho aktualizovaná verze z roku 2007 je k dispozici na http://clanky.rvp.cz/wp-content/upload/prilohy/9539/system_budovani_financni_gramotnosti_na_zakladnich_a_strednich_skolach.pdf. Ministerstvo financí ČR má program nazvaný *Národní strategie finančního vzdělávání*, jenž je uceleným systematickým přístupem k posílení finanční gramotnosti občanů naší republiky (viz http://clanky.rvp.cz/wp-content/ upload/prilohy/9539/narodni_strategie_financniho_vzdelavani.pdf). Užitečný je též článek autorky Mileny Tiché nazvaný *Finanční gramotnost a finanční vzdělávání*, který se také nachází na metodickém portálu RVP (http://clanky.rvp.cz/clanek/s/G/6761/FINANCNI-GRAMOTNOST-A-FINANCNI-VZDELAVANI.html). Seznamuje čtenáře s definicí finanční gramotnosti, zdůrazňuje význam vzdělávání v této oblasti v současné společnosti a ukazuje na možnosti jejího začlenění do výuky na základních a středních školách.

Každý učitel matematiky, popř. informatiky (např. využití tabulkového procesoru Excel), by si měl dát za cíl nevynechávat finanční matematiku. Ze zpráv, které ze svého okolí mám, se však obávám, že mnoho učitelů nedostatečnou finanční gramotnost svých žáků podceňuje nebo se ze své vlastní nepřipravenosti bojí tuto látku vykládat. Velké procento absolventů stále nemá k dispozici obranný aparát proti hazardním půjčkám a jejich neznalosti později vedou k podnikatelským nezdarům, firemním a hospodářským krachům, osobním i rodinným problémům a tragédiím.

Uveďme nyní v plném znění definici finanční gramotnosti, tak jak ji uvádí metodický portál RVP.

*Finanční gramotnost je soubor znalostí, dovedností a hodnotových postojů občana nezbytných k tomu, aby finančně zabezpečil sebe a svou rodinu v současné společnosti a aktivně vystupoval na trhu finančních produktů a služeb.*

(http://wiki.rvp.cz/knihovna/1.pedagogicky_lexikon/g/gramotnost/finanční_ gramotnost)

## 1.11 Seznam literatury a internetových zdrojů


**Učebnice**

[C2] Tomáš Cipra: *Praktický průvodce finanční a pojistnou matematikou*, 2. vydání, Ekopress, Praha, 2005, 308 stran.

[C3] Tomáš Cipra: *Finanční matematika v praxi*, 2. vydání, edice HZ, Praha, 1994, 166 stran.

[K6] Jarmila Radová, Petr Dvořák, Jiří Málek: *Finanční matematika pro každého*, 6. aktualizované vydání, Grada, Praha, 2007, 296 stran.

[MT] Jiří Mikulčák a kolektiv: *Matematické, fyzikální a chemické tabulky & vzorce pro střední školy*, dotisk 1. vydání, Prometheus, Praha, 2007, 280 stran.

[MV] Hans-Jochen Bartsch: *Matematické vzorce*, 2. revidované vydání, Nakladatelství technické literatury, Praha, 1987, 832 stran.

[O1] Oldřich Odvárko: *Úlohy z finanční matematiky pro střední školy*, 1. vydání, Prometheus, Praha, 2005, 200 stran.

[OR] Oldřich Odvárko, Jarmila Robová: *Finanční matematika s kalkulačkami Casio*, 1. vydání, Prometheus, Praha, 2005, 100 stran.

**Odborné články**

[MM1] Martin Melcer: *Možnost uložení a získání finančních prostředků*, str. 47–53, Učitel matematiky 15(2006/2007), č. 1, JČMF, Praha, 2006, 256 stran.

[MM2] Martin Melcer: *Možnost uložení a získání finančních prostředků (2)*, str. 107–113, Učitel matematiky 15(2006/2007), č. 2, JČMF, Praha, 2007, 256 stran.

[MM3] Martin Melcer: *Možnost uložení a získání finančních prostředků (3)*, str. 181–190, Učitel matematiky 15(2006/2007), č. 3, JČMF, Praha, 2007, 256 stran.

[MM4] Martin Melcer: *Možnost uložení a získání finančních prostředků (4)*, str. 247–256, Učitel matematiky 15(2006/2007), č. 4, JČMF, Praha, 2007, 256 stran.

**Internetové zdroje**

[I04] Metodický portál RVP: *http://clanky.rvp.cz*.

[I05] Metodický portál RVP: *http://wiki.rvp.cz*.