KAPITOLA V.

Diferenciální rovnice n-tého řádu.

§ 1. Existenční theorém.

Budiž dána funkce $n+1$ proměnných

(1) $$f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1})$$

v množině $\mathfrak{D} \subset E_{n+1}$. Víme, že diferenciální rovnici

(2) $$y^{(n)} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$$

lze převést na systém n rovnic

(3) $$\frac{dy}{dx} = y_1, \quad \frac{dy_1}{dx} = y_2, \ldots, \frac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1}$$
$$\frac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1})$$

v tomto smyslu:

Jestliže $y = \varphi(x)$ je v intervalu J řešením rovnice (2), dávají funkce

(4) $$y = \varphi(x), \quad y_1 = \varphi'(x), \ldots, y_{n-1} = \varphi^{(n-1)}(x)$$

v intervalu J řešení systému (3); naopak: jestliže

(5) $$y = \varphi(x), \quad y_1 = \varphi_1(x), \ldots, y_{n-1} = \varphi_{n-1}(x)$$

je v intervalu J řešením systému (3), je $\varphi(x)$ v J řešením rovnice (2) a je

(6) $$\varphi_k(x) = \varphi^{(k)}(x) \text{ v } J \qquad (k = 1, \ldots, n-1).$$

Zároveň je vidět, že podmínky

(7) $$\varphi(x_0) = \alpha_0, \quad \varphi'(x_0) = \alpha_1, \ldots, \varphi^{(n-1)}(x_0) = \alpha_{n-1}$$

znamenají totéž jako podmínky

(8) $$\varphi(x_0) = \alpha_0, \quad \varphi_1(x_0) = \alpha_1, \ldots, \varphi_{n-1}(x_0) = \alpha_{n-1} .$$

Tedy lze ihned existenční theorém pro systém (3), který známe z kap. III. (věta 26) [1], přenést na rovnici (2). Ovšem speciální charakter systému (3) má při tom určité důsledky, kterých je vhodno využít.

Naše geometrická terminologie se při tom musí trochu změnit: Řešení systému (3) je systém n funkcí

(9) $\quad \psi(x),\ \psi_1(x), \dots,\ \psi_{n-1}(x) \qquad (x \in \mathcal{J})$

tj. zobrazení $\mathcal{J}$ do E_n; interpretuji-li zobrazení $\mathcal{F}$ jako množinu všech párů x, $\mathcal{F}(x)$, tj. ztotožním-li zobrazení s jeho grafem, mohu toto řešení interpretovat jako množinu ("křivku") v E_{n+1}, totiž jako množinu všech bodů

(10) $\quad [x,\ \psi(x),\ \psi_1(x), \dots,\ \psi_{n-1}(x)] \qquad (x \in \mathcal{J})$.

Naproti tomu řešení rovnice (2) je jedna funkce $\psi(x)$ $(x \in \mathcal{J})$, kterou musím interpretovat ovšem jako množinu ("křivku") v E_2, totiž jako množinu všech bodů

$$[x,\ \psi(x)] \qquad (x \in \mathcal{J}) .$$

Proto musíme dát nyní trochu pozor na naši geometrickou terminologii.

Při našem speciálním systému má ovšem bod (10) tvar

$$[x,\ \psi(x),\ \psi'(x), \dots,\ \psi^{(n-1)}(x)] .$$

"Protáhnu-li" nějaké řešení (9) systému (3) co nejvíce doprava i doleva (zůstávaje stále v množině $\mathfrak{D}$), dostávám charakteristiku systému (3); funkci $\psi(x)$ budeme potom nazývat charakteristikou rovnice (2) pro obor $\mathfrak{D}$ (další funkce $\psi_1, \dots, \psi_{n-1}$ nás celkem nezajímají, protože to jsou prostě derivace funkce ψ). Je zřejmo, že je to takové řešení rovnice (2), jehož definiční interval nelze prodloužit, má-li ve všech bodech x tohoto intervalu být

$$[x,\ \psi(x),\ \psi'(x), \dots,\ \psi^{(n-1)}(x)] \in \mathfrak{D} .$$

Podmínka, že řešení

1/ Beru hned existenční větu ve velkém.

$$\psi,\ \psi_1 (=\psi'),\ \psi_2 (=\psi''),\dots,\psi_{n-1}\ (=\psi^{(n-1)}),$$

systému (3) prochází bodem $[x_0, y_0,\dots, y_0^{(n-1)}] \in \mathcal{D}$ znamená totéž, jako že řešení $\psi(x)$ rovnice (2) vyhovuje podmínkám

$$\psi(x_0) = y_0,\ \psi'(x_0) = y_0',\dots,\psi^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Napišme nyní charakteristický systém pro soustavu (3):

$$(11)\quad \begin{cases} \varphi(x;\ x_0,\ y_0,\ y_0',\ \dots,\ y_0^{(n-1)}) \\ \varphi_1(x;\ x_0,\ y_0,\ y_0',\ \dots,\ y_0^{(n-1)}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_{n-1}(x;\ x_0,\ y_0,\ y_0',\ \dots,\ y_0^{(n-1)}). \end{cases}$$

To tedy znamená: Jestliže je dán bod (tj. $n+1$ čísel)

$$(12)\quad [x_0,\ y_0,\ y_0',\ \dots,\ y_0^{(n-1)}] \in \mathcal{D},$$

potom funkce (11) značí onu charakteristiku systému (3), která prochází bodem (12); definiční interval této charakteristiky je jistý otevřený interval

$$\mathcal{J}_{x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}}$$

obsahující bod x_0. Ale podle struktury systému (3) jsou funkce v (11) (jakožto funkce x, při pevně daném bodu (12)) postupnými derivacemi funkce φ, takže systém (11) lze psát ve tvaru

$$\varphi(x;\ x_0,\ y_0,\ y_0',\dots,\ y^{(n-1)})$$

$$\frac{\partial\varphi(x;\ x_0,\ y_0,\ y_0',\dots,\ y^{(n-1)})}{\partial x}$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\frac{\partial^{n-1}\varphi(x;\ x_0,\ y_0,\ y_0',\dots,\ y_0^{(n-1)})}{\partial x^{n-1}}$$

Proto dáme zvláštní název pouze funkci φ, které budeme říkat "charakteristická funkce" rovnice (2) pro obor $\mathcal{D}$.

A nyní shrňme existenční větu 26, větu 28 o spojitosti charakteristických funkcí a větu 30 o derivaci charakteristických funkcí podle počátečních hodnot $x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}$ a podle parametrů.

<u>Věta 40.</u> I. Budiž $\mathcal{D}$ otevřená, $\mathcal{D} \subset E_{n+1}$. Nechť funkce

$$f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1})$$

je spojitá v $\mathcal{D}$ a splňuje v $\mathcal{D}$ lokálně Lipschitzovu podmínku vzhledem k $y, y_1, \ldots, y_{n-1}$. Potom platí

1) Je-li

$$[x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}] \in \mathcal{D},$$

potom existuje právě jedno řešení $y(x)$ rovnice (2), které má tyto vlastnosti:

a) Oborem tohoto řešení je jistý otevřený interval $\mathcal{J}_{x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}}$, obsahující bod x_0.

b) Pro $x \in \mathcal{J}_{x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}}$ je

$$[x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)] \in \mathcal{D}.$$

c) $y(x_0) = y_0,\ y'(x_0) = y_0', \ldots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$.

d) Je-li $z(x)$ nějaké řešení v intervalu $\mathcal{K}$, obsahujícím bod x_0 a vyhovující podmínkám:

$$z(x_0) = y_0,\ z'(x_0) = y_0', \ldots, z^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

(13) $[x, z(x), z'(x), \ldots, z^{(n-1)}(x)] \in \mathcal{D}$ pro $x \in \mathcal{K}$,

je $z(x)$ částí řešení $y(x)$.

Toto řešení nazveme charakteristikou rovnice (2) pro obor $\mathcal{D}$, určenou systémem

$$x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)} .$$

2) Každé řešení $z(x)$, vyhovující pro všechna x svého definičního intervalu podmínce (13), je částí některé charakteristiky.

3) Jsou-li $y(x)$, $z(x)$ dvě charakteristiky, vyhovující v některém bodě svých definičních intervalů rovnostem

$$y(x) = z(x), \; y'(x) = z'(x), \dots, y^{(n-1)}(x) = z^{(n-1)}(x) ,$$

jsou obě charakteristiky $y(x)$, $z(x)$ totožné.

4) Definujme funkci (tzv. charakteristickou funkci rovnice (2) pro obor $\mathfrak{D}$)

(14) $$\varphi(x \,;\, x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)})$$

v oboru $\mathfrak{D}_1$, daném podmínkami

$$[x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}] \in \mathfrak{D} , \quad x \in \mathcal{J}_{x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}} ,$$

takto: při daných číslech $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ je (14) (jakožto funkce x) charakteristikou rovnice (2), určenou systémem $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$.

5) Pro jakýchkoliv $2n + 2$ čísel $x, y, y', \dots, y^{(n-1)}$; $x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ platí tato ekvivalence(v níž, abych se vyvaroval nedorozumění, označuji znakem φ_k k-tou derivaci funkce φ podle první proměnné):

$$\begin{pmatrix} y = \varphi(x; x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \\ y' = \varphi_1(x; x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} = \varphi_{n-1}(x; x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_0 = \varphi(x_0; x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ y_0' = \varphi_1(x_0; x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_0^{(n-1)} = \varphi_{n-1}(x_0; x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) \end{pmatrix}$$

Pro $[x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}] \in \mathfrak{D}$ je

$$y_0 = \varphi(x_0;\ x_0\ , y_0 , y_0' , \dots , y_0^{(n-1)}\ )$$

$$y_0' = \varphi_1(x_0;\ x_0\ , y_0 , y_0' , \dots , y_0^{(n-1)}\ )$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_0^{(n-1)} = \varphi_{n-1}(x_0; x_0, y_0, y_0', \dots , y_0^{(n-1)}\ )$$

6) Budiž $\psi(x)$ jistá charakteristika s definičním oborem (a, b). Potom platí: Je-li $x_p < b$, $\lim\limits_{p \to +\infty} x_p = b$, nemá posloupnost bodů

$$[x_p, \psi(x_p), \psi'(x_p), \dots , \psi^{(n-1)}(x_p)] \qquad (p = 1,2,\dots)$$

žádný hromadný bod v $\mathcal{D}$ (podobně pro $x_p > a$, $\lim\limits_{p \to +\infty} x_p = a$)2/

II. Nechť funkce f nyní ještě závisí na m parametrech:

$$f(x, y , y' , \dots , y^{(n-1)};\ \mu_1, \dots , \mu_m) .$$

Nechť f vyhovuje v jisté otevřené množině $\mathcal{D} \subset E_{m+n+1}$ těmto podmínkám:

a) f je spojitá v $\mathcal{D}$

b) f splňuje v $\mathcal{D}$ lokálně Lipschitzovu podmínku vzhledem k $y, y', \dots , y^{(n-1)};\ \mu_1, \dots , \mu_m$. Charakteristická funkce rovnice

$$y^{(n)} = f(x , y , y' , \dots , y^{(n-1)};\ \mu_1 , \dots , \mu_m)$$

závisí též na $\mu_1, \dots , \mu_m$, pišme ji proto

(15) $\varphi(x\ ; x_0, y_0 , y_0', \dots , y_0^{(n-1)};\ \mu_1, \dots , \mu_m)$;

při daných $x_0, y_0, y_0', \dots , y_0^{(n-1)}, \mu_1, \dots , \mu_m$ s podmínkou

(16) $[x_0, y_0 , y_0', \dots , y_0^{(n-1)}, \mu_1 , \dots , \mu_m] \in \mathcal{D}$

2/ Druhou formulaci 6b) z věty 26 už neuvádím.

má φ - jakožto funkce x - za definiční obor jistý otevřený interval, tj. je definována pro

(17) $$x \in \mathcal{J}_{x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}; \mu_1, \dots, \mu_m},$$

kde vpravo je otevřený interval, obsahující bod x_0. Definiční obor funkce φ je tedy množina $\mathcal{D}_1 \subset E_{m+n+2}$, definovaná podmínkami (16),(17).

7) Funkce (15) je spojitá v $\mathcal{D}_1$ a množina $\mathcal{D}_1$ je otevřená.

8) Nahradíme-li podmínku b) ostřejší podmínkou

c) $\frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y'}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y^{(n-1)}}, \frac{\partial f}{\partial \mu_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \mu_m}$ jsou spojité v $\mathcal{D}_1$, platí toto: Funkce

(18) $$\varphi, \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \dots, \frac{\partial^{n-1} \varphi}{\partial x^{n-1}}$$

mají v $\mathcal{D}_1$ spojité derivace 1.řádu podle všech $m + n + 2$ proměnných [3]. Mimoto Jacobiho determinant funkcí (18) podle proměnných $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ je v $\mathcal{D}_1$ různý od nuly.

§ 2. Některé případy řešitelné kvadraturami.

I. Je předložena rovnice

(19) $$y^{(n)} = f(x)$$

(f spojitá v intervalu $\mathcal{J}$). Zvolme nějaký bod $x_0 \in \mathcal{J}$; $c_1, c_2, \dots$ jsou libovolné konstanty. Hledáme ovšem řešení v $\mathcal{J}$ (tj. pro $x \in \mathcal{J}$). Naše rovnice je ekvivalentní s rovnicí

$$y^{(n-1)}(x) = \int_{x_0}^{x} y^{(n)}(t)\,dt + c_1 = \int_{x_0}^{x} f(t)\,dt + c_1,$$

ta je zase ekvivalentní s rovnicí

$$y^{(n-2)}(x) = \int_{x_0}^{x} y^{(n-1)}(t)\,dt + c_2 = \int_{x_0}^{x} \left(\int_{x_0}^{t} f(\tau)\,d\tau \right) dt + c_1(x - x_0) + c_2$$

3/ Nevypisuji systémy lineárních diferenciálních rovnic, kterým tyto derivace vyhovují.

atd. Vidíme, že všechna řešení budou dána vzorcem $y(x)$ = určitá funkce, daná n-násobným integrálem + libovolný polynom stupně $n-1$.

Ukáži ještě, že lze tento n-násobný integrál převést na jednoduchý. Položme

$$y_k(x) = \int_{x_0}^{x} f(t) \frac{(x-t)^{k-1}}{(k-1)!} dt \qquad \text{pro } k = 1,2,\ldots$$

Tato funkce má pro $k=1$ zřejmě derivaci $f(x)$. Tvrdím, že pro $k>1$ je

$$\frac{d}{dx} y_k(x) = y_{k-1}(x),$$

Důkaz. Položme

$$\mathcal{F}(y,z) = \int_{x_0}^{y} f(t) \frac{(z-t)^{k-1}}{(k-1)!} dt,$$

takže $y_k(x) = \mathcal{F}(x,x)$. Podle známých pravidel je

$$\frac{\partial \mathcal{F}(y,z)}{\partial y} = f(y) \frac{(z-y)^{k-1}}{(k-1)!}$$

$$\frac{\partial \mathcal{F}(y,z)}{\partial z} = \int_{x_0}^{y} f(t) \frac{(z-t)^{k-2}}{(k-2)!} dt.$$

Obě derivace jsou spojité funkce y, z; u první je to zřejmé, u druhé to plyne z věty 29.

Tedy lze užít věty o derivování funkcí složených (do $\mathcal{F}(y,z)$ klademe $y=x$, $z=x$) a vychází

$$\frac{d}{dx} y_k(x) = \frac{d}{dx} \mathcal{F}(x,x) = \left[\frac{\partial \mathcal{F}(y,z)}{\partial y}\right]_{y=z=x} \cdot 1 + \left[\frac{\partial \mathcal{F}(y,z)}{\partial z}\right]_{y=z=x} \cdot 1 =$$

$$= 0 + \int_{x_0}^{x} f(t) \frac{(x-t)^{k-2}}{(k-2)!} dt = y_{k-1}(x).$$

Tedy $y_k(x)$ má derivace $y_{k-1}(x)$, $y_{k-2}(x), \ldots, y_1(x)$, $f(x)$; tedy

$$\frac{d^n}{dx^n} y_n(x) = f(x) .$$

Současně je vidět, že pro $x = x_0$ je

$$y_n(x_0) = y_n'(x_0) = \dots = y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 .$$

Nejobecnější řešení rovnice (19) je tedy dáno vzorcem

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} f(t) \frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} dt + A_0 + A_1 \frac{x-x_0}{1!} + \dots + A_{n-1} \frac{(x-x_0)^{n-1}}{(n-1)!}$$

(A_i konstanty). Je to právě ono řešení, které vyhovuje "počátečním podmínkám"

$$y(x_0) = A_0,\ y'(x_0) = A_1, \dots, y^{(n-1)}(x_0) = A_{n-1} .$$

Rovnice (19) je ovšem lineární rovnice s konstantními koeficienty a s pravou stranou. Dá se tedy řešit také podle naší obecné teorie z kap. II. Proveďte to!

Poznámka. Rovnici n-tého řádu jsme psali ve tvaru rozřešeném podle $y^{(n)}$:

(20) $$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)});$$

může být dána také ve tvaru nerozřešeném:

(21) $$\mathcal{F}(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}, y^{(n)}) = 0 .$$

Potom jde vlastně o dva úkoly:

1) řešit rovnici (21) podle $y^{(n)}$ (úloha o implicitní funkci), čímž se přejde k rovnici - nebo několika rovnicím (protože rovnice (21) může mít několik řešení podle $y^{(n)}$) - tvaru (20);

2) řešit diferenciální rovnici (nebo rovnice) tvaru (20). Přitom se ještě mohou vyskytnout obtíže: některá řešení diferenciální rovnice se mohou přechodem od rovnice (21) k rovnici (20) ztratit - to musíme zjistit a vyhledat je zvlášť atd.

V dalších dvou případech II., III. neuvádím podrobné podmínky ani rozsah řešení - jde mně pouze o návod, jak v jednotlivých konkretních případech postupovat.

II. Je předložena rovnice

(22) $$y^{(n)} = f(y^{(n-1)}) .$$

Označme $y^{(n-1)} = z$, takže rovnice (22) je ekvivalentní systému

(23) $$z' = f(z)$$

(24) $$y^{(n-1)} = z .$$

(23) se řeší známým způsobem:

(25) $$\frac{dz}{f(z)} = dx$$
$$\int_{z_0}^{z} \frac{d\xi}{f(\xi)} = x + C_1$$

a odtud řešením 4/

$$z = \varphi(x + C_1)$$

Nyní nabude (24) tvaru

$$y^{(n-1)} = \varphi(x + C_1)$$

a podle I. dostáváme (pokud $n > 1$)

$$y(x) = \int_{x_0}^{x} \varphi(t + C_1) \frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} dt + C_2 + C_3 \frac{x - x_0}{1!} + \dots + C_n \frac{(x - x_0)^{n-2}}{(n-2)!}$$

III. Je předložena rovnice

(26) $$y^{(n)} = f(y^{(n-2)});$$

f budiž spojité pro uvažované hodnoty.

Z (26) plyne

(27) $$y^{(n-1)} \cdot y^{(n)} = f(y^{(n-2)}) \cdot y^{(n-1)} ,$$

4/ Omezíme se na takové intervaly, kde $f(z)$ je spojitá a různá od nuly, tedy stále téhož znamení; potom levá strana v (25) je spojitá a ryze monotonní funkce proměnné z ; její inversní funkci značíme φ .

což je ekvivalentní se soustavou

(28) $$y^{(n-2)} = z$$

(29) $$z' . z'' = f(z) . z' .$$

Ale (29) značí, že

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dx} (z'^2) = f(z) \frac{dz}{dx} ,$$

(30) $$\frac{1}{2} (z'(x))^2 = \int_{z_0}^{z} f(\xi) d\xi + C_1 ;$$

odmocněním

$$z'(x) = \varphi (z , C_1)$$

a dále

$$\frac{dz}{\varphi(z , C_1)} = dx$$

integrací

$$x + C_2 = \psi (z , C_1)$$

řeším podle z :

$$z = \chi (C_1 , x + C_2)$$

a rovnice (28) má tvar

$$y^{(n-2)} = \chi (C_1 , x + C_2)$$

a řeší se podle I., je-li $n > 2$; pro $n = 2$ je ovšem

$$y = \chi (C_1 , x + C_2) .$$

V bodech II., III. zůstala řada výkonů pochybných. Jak jsem již řekl, je vhodnější, považovat tyto dva body pouze za návod a teprve při konkrétních úlohách tohoto druhu sledovat podrobně oprávněnost jednotlivých kroků, rozsah platnosti řešení a úplnost řešení (totiž, zda nám některé řešení neuniklo).

Často bývají rovnice těchto typů dány ve tvaru nerozřešeném podle $y^{(n)}$; např. $\mathcal{F}(x , y^{(n)}) = 0$. Převedení na tvar $y^{(n)} = f(x)$ může působit obtíže, ale často lze rovnici $\mathcal{F}(x , y^{(n)}) = 0$ výhodně řešit "parametricky" ve tvaru

$$x = \varphi(t),\quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n} = \psi(t) \text{ (tedy } \mathcal{F}(\varphi(t), \psi(t)) = 0.$$

Potom je

$$\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} = \int y^{(n)}dx = \int \psi(t)\,\varphi'(t)\,dt \quad \text{atd.}$$

O všech těchto obratech viz Stěpanov: Kurs diferenciálních rovnic (druhé české vydání), str. 164 - 178. Tam lze též nalézti příklady.

§ 3. Některé případy snížení řádu.

Půjde jen o formální úpravy; bude přehlednější, psát rovnici ve tvaru neřešeném.

I. Rovnice neobsahuje explicite y a po případě ještě některé další proměnné $y', y'', \ldots, y^{(k-1)}$, takže má tvar

$$\mathcal{F}(x, y^{(k)}, y^{(k+1)}, \ldots, y^{(n)}) = 0 . \tag{31}$$

Položím-li $y^{(k)} = z$, vidím, že jde o řešení rovnice řádu $n-k$;

$$\mathcal{F}(x, z, z', \ldots, z^{(n-k)}) = 0 ;$$

rozřeším-li tuto rovnici (tj. stanovím-li všechna řešení $z(x)$), dostanu y kvadraturami z rovnice

$$\frac{d^k y(x)}{dx^k} = z(x) .$$

II. Rovnice neobsahuje exciplicite x, takže má tvar

$$\mathcal{F}(y, y', \ldots, y^{(n)}) = 0 . \tag{32}$$

Je-li $\psi(x)$ řešení, které v nějakém intervalu má derivaci různou od nuly, je tam $\psi(x)$ ryze monotonní a rovnici $y = \psi(x)$ lze řešit podle x:

$$x = \varphi(y) .$$

Potom dosazením $x = \varphi(y)$ lze vyjádřit i $y'(x)$, $y''(x), \ldots$ jako funkce y.

Zvolme tedy za nezávisle proměnnou y, za neznámou funkci

$p = y'$; hledáme diferenciální rovnici pro funkci p . Je zde

$$x = \varphi(y)$$

$$p = \frac{dy}{dx} = \psi'(\varphi(y)) = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

a derivuje se podle pravidla o složených funkcích:

$$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy} \cdot \frac{dy}{dx} = \frac{dp}{dy}\, p ,$$

$$y''' = \frac{d}{dx}\left(\frac{dp}{dy} \cdot p\right) = \frac{d}{dy}\left(\frac{dp}{dy} \cdot p\right) \cdot \frac{dy}{dx} = \left(\frac{d^2p}{dy^2} \cdot p + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2\right) \cdot p$$

$$y^{(4)} = \frac{d}{dy}\left(\frac{d^2p}{dy^2}\, p^2 + \left(\frac{dp}{dy}\right)^2 p\right) \cdot \frac{dy}{dx} \qquad \text{atd.}$$

Je patrno (formální důkaz by se provedl indukcí), že $y^{(k)}$ se dostane jako polynom v p, $\frac{dp}{dy}$, ... , $\frac{d^{k-1}p}{dy^{k-1}}$, takže z rovnice (32) dostaneme rovnici tvaru

$$\Phi\left(y, p, \frac{dp}{dy}, \dots, \frac{d^{n-1}p}{dy^{n-1}}\right) = 0 ,$$

tj. rovnici řádu $n - 1$. Najdu-li nějaké její řešení $p(y)$, dostanu y z rovnice

$$\frac{dy}{dx} = p(y) ,$$

což vede na kvadraturu.

III. Je dána rovnice

$$\mathcal{F}(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 , \tag{33}$$

mající tuto vlastnost homogenity: Existuje číslo m tak, že pro všechna $k > 0$ je

$$\mathcal{F}(x, ky, ky_1, \dots, ky_n) = k^m \mathcal{F}(x, y, y_1, \dots, y_n)$$

(přičemž rovnice nechť platí, jakmile má jedna strana smysl). Potom soudíme takto: Je-li $y(x)$ řešením rovnice (33), je též $k.y(x)$ řešením. Zavedu-li tedy novou neznámou funkci $u(x) = \lg|y(x)|$, přejde rovnice (33) v rovnici

$$\Phi(x, u, u', \ldots, u^{(n)}) = 0,$$

která má tuto vlastnost: Je-li $u(x)$ řešením, je též $u(x)+k$ řešením, tj. je-li

$$\Phi(x, u(x), u'(x), \ldots, u^{(n)}(x)) = 0$$

je i $\Phi(x, u(x)+k, u'(x), \ldots, u^{(n)}(x)) = 0$

(neboť $\dfrac{d^p(u(x)+k)}{dx^p} = \dfrac{d^p u(x)}{dx^p}$).

To nás vede k doměnce, že Φ vůbec neobsahuje explicitně u, takže (viz I.) zavedení nové neznámé funkce $z = \frac{du}{dx}$ povede k rovnici řádu $n - 1$. Proveďme to:

$$u = \int z\,dx, \quad |y| = e^u = e^{\int z\,dx}, \quad y = \pm e^{\int z\,dx}$$

Jde tedy o zavedení nové neznámé funkce z rovnicí

$$y = \pm e^{\int z\,dx}$$

(znamení - zachycuje záporná y). Je-li z funkcí x, je i y funkcí x a máme:

$$\pm \frac{dy}{dx} = e^{\int z\,dx} . z$$

$$\pm \frac{d^2y}{dx^2} = e^{\int z\,dx} . \left(\frac{dz}{dx} + z^2\right)$$

$$\pm \frac{d^3y}{dx^3} = e^{\int z\,dx} \left(\frac{d^2z}{dx^2} + 3z\frac{dz}{dx} + z^3\right) \text{ atd.}$$

Dosadíme-li do rovnice (33), máme

$$\mathcal{F}(x, y, y', y'', \ldots,) =$$

$$= \mathcal{F}(x, \pm e^{\int z\,dx}, \pm z e^{\int z\,dx}, \pm(z'+z^2)e^{\int z\,dx}, \pm(z''+3zz'+z^3)e^{\int z\,dx}, \ldots) =$$

$$= e^{m\int z\,dx} . \mathcal{F}(x, \pm 1, \pm z, \pm(z'+z^2), \pm(z''+3zz'+z^3), \ldots)$$

a vidíme (po zkrácení $e^{m\int z\,dx}$), že rovnice (33) se redukuje na řádu $n - 1$ (vlastně na dvě; jednu se znamením + pro $y > 0$, druhou se znamením - pro $y < 0$).

Viz k tomuto bodu Stěpanov, str. 184-190, kde je vyšetřen ještě další případ "homogenity".

IV. Zase budiž předložena rovnice (33) a předpokládejme, že pro jakoukoliv funkci $y(x)$ (mající n-tou derivaci) je levá strana derivací určité funkce $\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$, tj.

$$\mathcal{F}(x, y(x), \dots, y^{(n)}(x)) = \frac{d}{dx}\, \Phi(x, y(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) =$$

(34)

$$= \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\, y'(x) + \frac{\partial \Phi}{\partial y'} \cdot y''(x) + \dots + \frac{\partial \Phi}{\partial y^{(n-1)}} \cdot y^{(n)}(x)$$

(u Φ předpokládám spojitost parciálních derivací 1.řádu, abych směl takto derivovat složenou funkci).

Ježto funkci $y(x)$ mohu volit tak, aby $y(x)$, $y'(x), \dots$ $\dots, y^{(n)}(x)$ měly v libovolně předepsaném bodě x libovolné hodnoty, znamená to, že požaduji, aby pro všechny hodnoty $n + 2$ proměnných x, y, $y', \dots, y^{(n)}$ (nebo aspoň pro všechny hodnoty jistého oboru, na nějž se potom omezíme) bylo

$$(35)\qquad \mathcal{F}(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = \frac{\partial \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})}{\partial x} +$$

$$+ \frac{\partial \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})}{\partial x}\, y' + \dots + \frac{\partial \Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})}{\partial x} \cdot y^{(n)}.$$

Nechť tedy podmínka (35) je splněna. Potom pro každou funkci $y(x)$, mající n-tou derivaci, platí (34); jestliže tedy $y(x)$ je řešením rovnice (33), je pravá strana v (34) rovna nule, tedy

$\Phi(x, y(x), y'(x), \dots, y^{(n-1)}(x)) = C$ (C konstanta);
naopak, je-li tato rovnice splněna, je podle (34)

$$\mathcal{F}(x, y, y', \dots, y^{(n)}) = 0 .$$

Řešení rovnice (33) se tedy redukuje na řešení rovnice

$$\Phi(x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = C$$

řádu $n - 1$, ale s jedním parametrem C .

<u>Příklad</u> (Stěpanov). Rovnice

(36) $$y''y + 2y^2y'^2 + y'^2 - \frac{2yy'}{x} = 0$$

($x > 0$ nebo $x < 0$) nemá ještě žádaný tvar, nebo to aspoň není vidět. Ale dělím-li yy', dostanu rovnici

(37) $$\frac{y''}{y'} + 2yy' + \frac{y'}{y} - \frac{2}{x} = 0\,,$$

která již hledaný tvar má - což je vidět bezprostředně: pro jakoukoliv funkci $y(x)$ (dvakrát derivovatelnou) je levá strana derivací funkce

$$\lg|y'| + y^2 + \lg|y| - 2\lg|x|$$

vyloučeny jsou ovšem případy $xyy' = 0$), tedy mám řešit rovnici

$$\lg|y'| + y^2 + \lg|y| - 2\lg|x| = \lg C \qquad (C > 0)$$

neboli

$$|y'y|e^{y^2} = Cx^2,$$

tedy

$$y'ye^{y^2} - C_1x^2 = 0$$

(zde $C_1 = \pm C$; yy' má stále totéž znamení). Ale to je opět rovnice téhož typu: pro každou funkci $y(x)$ (jednou derivovatelnou) je levá strana derivací funkce

$$\frac{1}{2}e^{y^2} - \frac{1}{3}C_1x^3\,,$$

tedy řešení je

$$\frac{1}{2}e^{y^2} = \frac{1}{3}C_1x^3 + C_2 \qquad (C_1 \neq 0)$$

neboli

$$e^{y^2} = Ax^3 + B \qquad (A \neq 0\,,\ Ax^3 + B > 1)$$

(38) $$y = \pm\sqrt{\lg(Ax^3 + B)}\,.$$

Zde A, B jsou libovolné konstanty (avšak $A \neq 0$) interval (otevřený) pro x je nutno volit tak, aby neobsahoval bod $x = 0$ a aby v něm bylo $Ax^3 + B > 1$.

Dosazením se přesvědčíme, že toto y je vskutku řešením. Jde jen o to, zda jsme neztratili nějaká řešení přechodem od rovnice (36) k (37), tj. dělením výrazem yy' (hodnota $x = 0$ je vyloučena už v (36)). Spočtěme

(39) $$y' = \pm \frac{1}{2} \frac{3Ax^2}{\sqrt{\lg(Ax^3+B)}\,.\,(Ax^3+B)}$$

Je patrno: konverguje-li x k takové hodnotě x_0, pro kterou by byl výraz v (38) roven nule, tj. $Ax_0^3 + B = 1$, potom y' má za limitu $\pm\infty$ (leda že by snad $x_0 = 0$ = ale $x = 0$ je vyloučená hodnota). Tedy řešení (38) nelze "protáhnout" do bodu $y = 0$. Dále y' v (39) nemá nikde za limitu 0, vyjma pro vyloučenou hodnotu $x = 0$. Tedy nelze řešení (38) "protáhnout" do žádného bodu, kde $y' = 0$. Tedy řešení (38) dává všechna řešení rovnice (36), vyjma ta, která v celém svém definičním intervalu vyhovují rovnici $yy' = 0$, tj. $\frac{d}{dx} y^2 = 0$,

$$y^2 = \text{konst.}, \qquad y = \text{konst.}$$

A to jsou vskutku řešení rovnice (36) (neboť potom $y' = 0$, $y'' = 0$).

Tedy: (36) má vedle (38) ještě řešení

$$y = C \qquad (0 < x < +\infty)$$
$$y = C \qquad (-\infty < x < 0),$$

(C libovolná konstanta). K bodu IV. viz u Stěpanova, str. 190-191, ještě dva příklady.

§ 4. První integrály, intermediární integrály, obecný integrál rovnice n-tého řádu.

V celém tomto paragrafu předpokládejme, že funkce $f(x, y, y_1, \dots, y_{n-1})$ je dána v otevřené množině $\mathcal{D} \subset E_{n+1}$ a že funkce

$$f, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial y_{n-1}}$$

jsou spojité v $\mathcal{D}$.

Budeme vyšetřovat rovnici

(40) $$y^{(n)} = f(x, y, y', \dots, y^{(n-1)})$$

a současně ekvivalentní systém

$$(41)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y_1, \quad \dfrac{dy_1}{dx} = y_2, \ldots, \quad \dfrac{dy_{n-2}}{dx} = y_{n-1} \\[2ex] \dfrac{dy_{n-1}}{dx} = f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}) . \end{cases}$$

Víme toto: Splňuje-li y rovnici (40), splňuje systém funkcí $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ soustavu (41). Naopak, splňuje-li systém $y, y_1, \ldots, y_{n-1}$ soustavu (41), splňuje y rovnici (40) a je

$$y' = y_1, \quad y'' = y_2, \ldots, \quad y^{(n-1)} = y_{n-1} .$$

Budeme se zabývat jen takovými řešeními $y(x)$ rovnice (40), pro která je

$$[x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)] \in \mathfrak{D}$$

a jen takovými řešeními $y(x), y_1(x), \ldots, y_{n-1}(x)$ systému (41), pro která je

$$[x, y(x), y_1(x), \ldots, y_{n-1}(x)] \in \mathfrak{D}$$

Funkci n proměnných $G(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1})$ se spojitými parciálními derivacemi 1.řádu v $\mathfrak{D}$ nazveme prvním integrálem (v oboru $\mathfrak{D}$) rovnice (40), jestliže je prvním integrálem systému (41) (viz kap. III. § 5), tj. jestliže

$$G(x, y(x), y_1(x), \ldots, y_{n-1}(x)) = \text{konstantě}$$

pro každé řešení $y, y_1, \ldots, y_{n-1}$ systému (41), tj. jestliže

$$(42)\qquad G(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) = \text{konstantě}$$

pro každé řešení rovnice (40) (říkáme, že funkce (n + 1 proměnných) $G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})$ je konstantní podél každého řešení rovnice (40). Víme z věty 32, že nutná a postačující podmínka pro to je, aby bylo [5/]

$$\frac{\partial G(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)})}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \cdot y' + \frac{\partial G}{\partial y'} \cdot y'' + \ldots$$

5/ Funkce $f_1, f_2, \ldots, f_n$ z kap.III. jsou nyní $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$, $f(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1})$).

$$\ldots + \frac{\partial G}{\partial y^{(n-2)}} \cdot y^{(n-1)} + \frac{\partial G}{\partial y^{(n-1)}} \cdot f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = 0$$

pro každý bod

$$[x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}] \in \mathcal{D} .$$

Vidíme: Známe-li nějaký "netriviální" první integrál, dovedeme z (42) vypočíst $y^{(n-1)}$ a dostaneme diferenciální rovnici řádu $n-1$, které vyhovuje y - ovšem tato rovnice závisí na jednom parametru (libovolná konstanta vpravo). Vyšetříme to nyní podrobně a to pro případ, že známe k "nezávislých" prvních integrálů.

Budiž dáno k ($0 < k \leq n$) prvních integrálů

$$G_1(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1}), \ldots, G_k(x, y, y_1, \ldots, y_{n-1})$$

a předpokládejme, že v jistém bodě

$$P = [x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}] \in \mathcal{D}$$

je

$$(43) \qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial y_{n-k}}, & \ldots, & \dfrac{\partial G_k}{\partial y_{n-k}} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \dfrac{\partial G_1}{\partial y_{n-1}}, & \ldots, & \dfrac{\partial G_k}{\partial y_{n-1}} \end{vmatrix} \neq 0 . \qquad 6/$$

A nyní zopakujme výsledky kap. III. § 5.

Přitom si musíme uvědomit, že číslování je pozměněno: Místo vzorce (112) z kap.III. § 5 máme nyní vzorec (43). Roli tehdejších $y_1, y_2, \ldots, y_k$ hrají nyní $y_{n-k}, y_{n-k+1}, \ldots, y_{n-1}$; roli

6/ Na rozdíl od symetrického případu v kap.III. záleží nyní na tom, aby právě tento determinant byl různý od nuly. Kdyby to byl jiný z determinantů matice (110) v kap. III. § 5, redukovala by se naše rovnice - tj. náš systém - opět na systém $n-k$ rovnic 1. řádu, ale nemusil by to být systém, ekvivalentní jedné rovnici řádu $n-k$. Pro $k = n$ se první řádka v (43) skládá z funkcí $\dfrac{\partial G_j}{\partial y}$.

tehdejších $y_{k+1}, y_{k+2}, \ldots, y_n$ hrají nyní $y, y_1, y_2, \ldots$ $\ldots, y_{n-k-1}$ (mimoto píši v dalším většinou indexy nahoru, tedy $y^{(j)}$ místo y_j).

Definujme

$$G_j(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}) = C_j^{(0)} \qquad (j = 1, \ldots, k).$$

Podle věty o implicitních funkcích existují $\delta > 0$, $\Delta > 0$ tak, že ke každému systému čísel

$$x, C_1, \ldots, C_k, y, y', \ldots, y^{(n-k-1)}$$

vyhovujícímu nerovnostem

$$(44) \qquad \begin{cases} |x - x_0| < \delta, \quad |y^{(l)} - y_0^{(l)}| < \delta \quad (l = 0, 1, \ldots, n-k-1)^{7/} \\ \qquad |C_j - C_j^{(0)}| < \delta \qquad (j = 1, \ldots, k) \end{cases}$$

existuje v k-rozměrném intervalu

$$|y^{(j)} - y_0^{(j)}| < \Delta \qquad (j = n-k, n-k+1, \ldots, n-1)$$

právě jeden systém čísel

$$y^{(n-k)}, \ldots, y^{(n-1)},$$

splňující rovnice

$$G_j(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) = C_j.$$

Tato $y^{(j)}$ $(j = n-k, \ldots, n-1)$ jsou tedy v oboru (44) funkcemi

$$(45) \quad y^{(j)} = g_j(x, y, y', \ldots, y^{(n-k-1)}, C_1, \ldots, C_k) \qquad (j = n-k, \ldots, n-1),$$

které tam mají spojité parciální derivace 1.řádu podle všech proměnných. Přitom volme δ, Δ tak malé, aby interval $\mathcal{K}$:

7/ Pro jednoduchost píši $y^{(0)} = y$.

$$|x - x_0| < \delta\,, \quad |y^{(l)} - y_0^{(l)}| < \delta \qquad (l = 0,1,\ldots,n-k-1)$$

$$|y^{(j)} - y_0^{(j)}| < \Delta \qquad (j = n-k,\ldots, n-1)$$

ležel v $\mathfrak{D}$ a aby nerovnost (43) platila všude v $\mathcal{X}$. Pro $k = n$ vypadají ovšem (45) takto:

$$y^{(j)} = g_j(x, C_1, \ldots, C_n) \qquad (j = 0,1,\ldots, n-1).$$

Ptejme se nyní: Jak nalézti všechna řešení $y(x)$ rovnice

$$\frac{d^n y}{dx^n} = f\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}\right), \tag{46}$$

pro něž je

$$\left[x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n-1}}\right] \in \mathcal{X}$$

a pro něž aspoň v jednom bodě x jejich definičního oboru je splněn systém nerovností

$$\left|G_j\left(x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n-1}}\right) - G_j(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})\right| < \delta$$

$(j = 1,\ldots, k)$?

Odpověď je dána v kap. III. § 5; abych se vyhnul přepisování indexů zdola nahoru a naopak, umluvíme se, že $y^{(0)}(x) = y(x)$, $y'(x)$, $y''(x)$,... prostě značí nějaké funkce, rozlišené nahoře indexy (nemusí např. y'' být derivací funkce y'), kdežto derivace budu vypisovat zásadně symbolem $\frac{d^p}{dx^p}$.

Zvolím jakkoliv $C_1, \ldots, C_k$ tak, že

$$|C_j - C_j^{(0)}| < \delta \qquad (j = 1,\ldots, k),$$

dále najdu nějaké řešení

$$y(x),\ y'(x),\ \ldots,\ y^{(n-k-1)}(x)$$

systému $n-k$ rovnic [5]

5) viz pozn. na str. 34.

$$(47)\quad \frac{dy^{(\ell)}(x)}{dx} = y^{(\ell+1)}(x) \qquad (\ell = 0,1,\ldots, n-k-2)$$

$$(48)\quad \frac{dy^{(n-k-1)}(x)}{dx} = g_{n-k}(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-k-1)}(x), C_1, \ldots, C_k)$$

s podmínkou

$$(48')\quad |y^{(\ell)}(x) - y_0^{(\ell)}| < \delta \qquad (\ell = 0,1, \ldots, n-k-1)$$

v nějakém intervalu $\mathcal{J} \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ pro $k = n$ tento systém odpadá) a sestrojíme ještě funkce

$$(49)\quad y^{(j)}(x) = g_j(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-k-1)}(x), C_1, \ldots, C_k)$$

$(j = n-k, \ldots, n-1)$.

Takto nalezené systémy $y(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)$ jsou všechna řešení systému

$$(50)\quad \begin{cases} \dfrac{dy}{dx} = y', \quad \dfrac{dy'}{dx} = y'', \ldots, \dfrac{dy^{(n-2)}}{dx} = y^{(n-1)} \\[2ex] \dfrac{dy^{(n-1)}}{dx} = f(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) \end{cases}$$

s podmínkami:

$$(51)\quad [x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)] \in \mathcal{K}$$

$$(52)\quad |G_j(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n-1)}(x)) - G_j(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})| < \delta$$

$(j = 1, \ldots, k)$.

---

[6] Pamatujme, že máme rovnice:

$$\frac{dy(x)}{dx} = y'(x), \quad \frac{dy'(x)}{dx} = y''(x), \ldots, \frac{dy^{(n-k-1)}(x)}{dx} = y^{(n-k)}(x)$$

atd. [illegible]

Ale systém rovnic (47), (48) neříká nic jiného, než že $y(x)$ je řešením rovnice

(53)
$$\frac{d^{n-k}y}{dx^{n-k}} = g_{n-k}\left(x, y, \frac{dy}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-k-1}y}{dx^{n-k-1}}, C_1, \ldots, C_k\right)$$

a že $y'(x), \ldots, y^{(n-k-1)}(x)$ jsou postupné derivace funkce $y(x)$ (což nás nezajímá).

Rovnice (49) nás pro $j > 0$ (což platí vždy, je-li $k < n$) nezajímají; pro $k = n$ odpadá rovnice (53) a místo ní máme rovnici (49) pro $j = 0$, t.j.

(54) $\quad y(x) = g_0(x, C_1, \ldots, C_n)$. Rovnice (50) potom ukazují, že funkce $y(x)$ takto určené dávají skutečně všechna žádaná řešení rovnice (46).

Tedy: Abychom našli všechna hledaná řešení $y(x)$ rovnice (46), postupujeme takto:

1) Zvolím libovolně $C_1, \ldots, C_k$ tak, že

$$|C_j - G_j(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})| < \delta \qquad (j = 1, \ldots, k)$$

2) V případě $k = n$ definuji $y(x)$ rovnicí (54) (za definiční obor funkce $y(x)$ mohu vzít jakýkoliv interval $J \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$). V případě $k < n$ najdu nějaké řešení $y(x)$ rovnice (53) s definičním oborem $J \subset (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ tak, aby v J (viz (48')) byly splněny nerovnosti

$$\left|\frac{d^l y(x)}{dx^l} - y_0^{(l)}\right| < \delta \qquad (l = 0, 1, \ldots, n-k-1).$$

Najdu-li všechny takové funkce $y(x)$, našel jsem všechna hledaná řešení rovnice (46).

Vidíme, že se v případě $k < n$ redukuje naše rovnice na rovnici (53) řádu $n - k$ (s k parametry); v případě $k = n$ se pak rovnice řeší přímo vzorcem (54).

Proto takový systém k prvních integrálů, o jakém byla řeč v (43), nazýváme intermediárním integrálem naší rovnice; je-li $k = n$, nazýváme jej obecným integrálem naší rovnice.

Funkci tvaru $y(x, C_1, \ldots, C_n)$ nazýváme obecným řešením naší rovnice v bodě

$$P = [x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}],$$

jestliže existuje jistý bod $[C_1^{(0)}, \ldots, C_n^{(0)}] = C^{(0)}$, jisté okolí O_1 bodu $C^{(0)}$ a okolí O_2 bodu P s těmito vlastnostmi: Jestliže $[C_1, \ldots, C_n]$ probíhá okolí O_1, potom funkce $y(x, C_1, \ldots, C_n)$ probíhá právě všechny řešení $y(x)$ naší rovnice, pro něž platí

$$\left[x, y(x), \frac{dy(x)}{dx}, \ldots, \frac{d^{n-1}y(x)}{dx^{n-1}}\right] \in O_2 . \text{ 9/}$$

Např. funkce y_0 v (54) je obecným řešením v bodě P; okolím O_1 je interval

$$|C_j - C_j^{(0)}| < \delta \qquad (j = 1, \ldots, n)^{10/}$$

okolím O_2 je množina, daná nerovnostmi

$$|x - x_0| < \delta$$

$$|y^{(j)} - y_0^{(j)}| < \Delta \qquad (j = 0, 1, \ldots, n-1)$$

$$|G_j(x, y, y', \ldots, y^{(n-1)}) - G_j(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})| < \delta$$
$$(j = 1, \ldots, n)$$

Názvy kolísají: někdy se název "intermediární integrál" dává diferenciální rovnici (59).

9/ Přesně řečeno; také ovšem "kousky" takových řešení ještě vyhovují těmto podmínkám; tedy tato řešení jsou dána:

a) funkcí $y(x, C_1, \ldots, C_n)$ (při pevných C_j)

b) parciálními funkcemi této funkce, jejichž existenčním oborem je interval.

10/ $C_j^{(0)} = G_j(x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)})$.

Podobně jako u systémů, můžeme sestrojit obecný integrál, známe-li charakteristickou funkci (s definičním oborem $\mathscr{D}_1$)

$$\varphi(x; x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}).$$

Označme $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}$ parciální derivace funkce φ podle první proměnné. Pišme

$$(55)\quad \begin{cases} y = \varphi(x; x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \\ y' = \varphi_1(x; x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} = \varphi_{n-1}(x; x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}); \end{cases}$$

to znamená , že bod $[x, y]$ leží na charakteristice, určené bodem $[x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}]$ a že $y', \dots, y^{(n-1)}$ jsou derivace této charakteristiky v bodě x . Z věty 40 plyne, že rovnice (55) jsou rovnocenné rovnicím

$$(56)\quad \begin{cases} \varphi(x_0; x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = y_0 \\ \varphi_1(x_0; x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = y_0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \varphi_{n-1}(x_0; x, y, y', \dots, y^{(n-1)}) = y_0^{(n-1)} \end{cases}$$

Zvolme nyní x_0 pevně; je-li

$$[y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}] \in \mathscr{D}^{x_0, *, \dots, *}$$

tj.

$$[x_0, y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}] \in \mathscr{D} ,$$

platí rovnice (56) "podél celé charakteristiky" určené bodem

$[x_0, y_0, y_0', \ldots, y_0^{(n-1)}]$. Tedy levé strany jsou konstantní podél každé z těchto charakteristik - levé strany tedy dávají obecný integrál 11/, (při daném x_0 je definiční obor funkcí vskutku otevřená množina, totiž $\mathcal{D}_1^{x_0, *, *, \ldots, *}$ 12/).

Nebudu podrobně popisovat terminologii "intermediární integrál" , "obecný integrál" - terminologie stejně v literatuře kolísá. Oč jde a jaké věty platí, je v předešlém přesně vytčeno.

11/ Spojitost parciálních derivací podle $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$ a různost determinantu z nich sestrojeného plyne z věty 40, tvrzení 8).

12/ $\mathcal{D}_1$ viz ve větě 40, bod 4 a 7.