KAPITOLA II.

Lineární diferenciální rovnice a jejich systémy

§ 1. Existenční věta

Lineární rovnicí n-tého řádu nazýváme rovnici tvaru

$$(1)\quad A_0(x)\, y^{(n)} = A_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + A_{n-1}(x) y' + A_n(x) y + B(x) ,$$

kde $A_0, \ldots, A_n, B$ jsou nějaké funkce; dělíme-li rovnici (1) funkcí $A_0(x)$, dostaneme rovnici ve tvaru rozřešeném podle $y^{(n)}$ - psává se obyčejně

$$(2)\quad y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x) y' + p_n(x)\, y = q(x)$$

Toto dělení je ovšem možné jen tam, kde $A_0(x) \neq 0$; převedeme-li tedy rovnici (1) na tvar (2), musíme ještě zvláště vyšetřit, co se děje s řešeními rovnice (1) při průchodu oněmi body, ve kterých $A_0(x) = 0$.

Podobně systém (35) z kap. I. se nazývá lineárním, má-li tvar

$$z^{(m)} = a_0 z + a_1 z' + \ldots + a_{m-1} z^{(m-1)} + b_0 u + \ldots + b_{n-1} u^{(n-1)} +$$
$$+ c_0 v + \ldots + c_{p-1} v^{(p-1)} + d ,$$
$$(3)\quad u^{(n)} = A_0 z + A_1 z' + \ldots + A_{m-1} z^{(m-1)} + B_0 u + \ldots + C_{p-1} v^{(p-1)} + D$$
$$v^{(p)} = \alpha_0 z + \alpha_1 z' + \ldots + \alpha_{m-1} z^{(m-1)} + \beta_0 u + \ldots + \gamma_{p-1} v^{(p-1)} + \delta ,$$

kde $a_i, b_i, c_i, A_i, \ldots, \gamma_i, d, D, \delta$ jsou funkce x : $a_i = a_i(x)$ atd. Převedeme-li (3) podle předešlého paragrafu na tvar (36) kap. I., vidíme, že dostaneme opět lineární systém, složený nyní vesměs z rovnic 1.řádu. Stačí se tedy omezit na systémy tvaru

$$(4)\quad y_j' + a_{j,1}(x)\, y_1 + a_{j,2}(x) y_2 + \ldots + a_{j,n}(x) y_n = b_j(x) \quad (j = 1, \ldots, n)$$

Budeme nyní předpokládat, že funkce $b_j(x)$, $a_{j,k}(x)$ ($j, k = 1, \dots, n$) jsou spojité v jistém intervalu $\mathcal{J}$ a odvodíme existenční větu.

Napřed však jednu poznámku: Z technických důvodů bude pro nás užitečné, připouštět za $a_{j,k}$, b_j také <u>komplexní</u> funkce <u>reálné</u> proměnné x a hledati potom ovšem též <u>komplexní</u> řešení $y_j(x)$ (kde ovšem x je reálné). To není žádné podstatné zobecnění: Víme, že derivaci a integrál neurčitý i určitý komplexní funkce $f + ig$ reálné proměnné definujeme jako

$$f' + ig'; \int f\,dx + i\int g\,dx, \int_a^b f(x)\,dx + i\int_a^b g(x)\,dx;$$

spojitost funkce $f + ig$ se pak definuje jako spojitost obou reálných funkcí f, g. 1/

<u>Věta 5.</u> Buďte $a_{j,k}(x)$, $b_j(x)$ ($j, k = 1,2,\dots,n$) komplexní funkce reálné proměnné, spojité v intervalu $\mathcal{J}$. Budiž $x_0 \in \mathcal{J}$ a buďte $y_1^0, \dots, y_n^0$ komplexní čísla. Potom systém (4) má řešení (komplexní)

$$y_1(x), \dots, y_n(x) \quad \text{v intervalu } \mathcal{J},$$

pro které platí $y_1(x_0) = y_1^0, \dots, y_n(x_0) = y_n^0$.

Toto řešení je jediné v tomto smyslu: Je-li $z_1(x), \dots, z_n(x)$ řešením systému (4) v intervalu $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}$ obsahujícím bod x_0, $z_1(x_0) = y_1^0, \dots, z_n(x_0) = y_n^0$ je $z_j(x) = y_j(x)$ pro $x \in \mathcal{J}_1$ a pro $j = 1, \dots, n$.

D ů k a z : 1) Existence. Jak víme, jde o řešení integrálních rovnic

---

1/ Také bychom mohli postupovat tak, že bychom všechny věty odvodili napřed pro reálná $a_{j,k}$, b_j, y_j a potom přešli ke komplexnímu případu takto: Položíme-li $y_j = z_j + iu_j$, $a_{j,k} = \gamma_{j,k} + i\delta_{j,k}$, $b_j = \mu_j + i\nu_j$ a rozepíšeme-li rovnice (4) na reálnou a imaginární část, rozpadne se každá rovnice na dvě a dostáváme systém 2 n reálných rovnic pro 2 n neznámých funkcí z_j, u_j.

$$(5)\quad y_j(x) = \int_{x_0}^{x} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{j,k}(t)\, y_k(t) + b_j(t) \Big) dt + y_j^0 \quad (j = 1,\dots,n).$$

Postupujme opět metodou postupných aproximací (která u lineárních systémů vypadá zvlášť jednoduše). Definujeme indukcí

$$(6)\quad \begin{cases} y_j^0(x) = y_j^0 & (j = 1,\dots,n) \\ y_j^p(x) = \displaystyle\int_{x_0}^{x} \Big(\sum_{k=1}^{n} a_{j,k}(t)\, y_k^{p-1}(t) + b_j(t) \Big) dt + y_j^0 & (j = 1,\dots,n) \\ \text{pro } p = 1,2,\dots \end{cases}$$

Budiž $\mathcal{K}$ libovolný kompaktní interval, obsahující bod x_0 a ležící v $\mathcal{J}$ (každý bod intervalu $\mathcal{J}$ leží v některém takovém intervalu $\mathcal{K}$). Budiž L délka intervalu $\mathcal{K}$,

$$|a_{j,k}(x)| \leq M, \quad |b_j(x)| \leq M \qquad \text{pro } x \in \mathcal{K} .$$

Potom z (6) plyne (všechno pro $x \in \mathcal{K}$)

$$|y_j^1(x) - y_j^0(x)| \leq |x - x_0|\, M(1 + nY) ,$$

volíme-li $Y \geq \max(|y_1^0|,\dots,|y_n^0|)$ a indukcí podle p snadno

$$(7)\quad |y_j^{p+1}(x) - y_j^p(x)| = \Big| \int_{x_0}^{x} \sum a_{j,k}(t)\big(y_k^p(t) - y_k^{p-1}(t)\big) dt \Big| \leq$$

$$\leq (1 + nY)\, \frac{n^p M^{p+1}\, |x - x_0|^{p+1}}{(p+1)!}$$

Položme pro $j = 1,2,\dots,n$

$$(8)\quad y_j(x) = \lim_{p\to\infty} y_j^p(x) = y_j^0 + \sum_{p=0}^{\infty} \big(y_j^{p+1}(x) - y_j^p(x) \big).$$

Ježto $|x - x_0| \leq L$, má řada vpravo majorantu

$$(9)\quad \Big(\frac{1}{n} + Y \Big) \sum_{p=1}^{\infty} \frac{(nML)^p}{p\,!} = \Big(\frac{1}{n} + Y \Big)\big(e^{nML} - 1 \big).$$

Konvergence v (8) je tedy stejnoměrná v $\mathcal{K}$, takže v (6) lze vpravo přejít k limitě $p \to \infty$ za integračním znamením a dostáváme vskutku (5) pro každé $x \in \mathcal{K}$, tedy pro každé $x \in \mathcal{J}$ (neboť každý bod z $\mathcal{J}$ leží v některém takovém $\mathcal{K}$).

2. Jednoznačnost. Budiž $z_1(x), \ldots, z_n(x)$ takové řešení, o kterém se mluví v tvrzení věty. Máme dokázat, že $z_j(x) = y_j(x)$ v $\mathcal{J}_1$. Napíšeme-li (5) jednak pro y_j, jednak pro z_j a odečteme, dostaneme

$$(10) \quad y_j(x) - z_j(x) = \int_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{n} a_{j,k}(t)(y_k(t) - z_k(t))\,dt .$$

Stačí opět dokázat rovnosti $y_j(x) = z_j(x)$ ($j = 1, \ldots, n$) v každém kompaktním intervalu $\mathcal{K} \subset \mathcal{J}_1$, obsahujícím bod x_0.

Budiž $|a_{j,k}(x)| \leq M$, $|y_j(x) - z_j(x)| \leq A$ pro $x \in \mathcal{K}$.

Potom platí pro $x \in \mathcal{K}$ a pro každé celé $p \geq 0$

$$(11) \quad |y_j(x) - z_j(x)| \leq A \frac{(nM\,|x - x_0|)^p}{p!} ;$$

to platí vskutku pro $p = 0$ a platí-li to pro jisté p, je podle (10)

$$|y_j(x) - z_j(x)| \leq \left| \int_{x_0}^{x} nMA \frac{(nM|t-x_0|)^p}{p!}\,dt \right| = A \frac{(nM|x-x_0|)^{p+1}}{(p+1)!}.$$

Ale pravá strana v (11) má pro $p \to \infty$ za limitu nulu, tedy vskutku $y_j(x) = z_j(x)$.

Poznámka 1. Tedy každým bodem $[x_0, y_1^0, \ldots, y_n^0]$ ($x_0 \in \mathcal{J}$) prochází jedno a jen jedno řešení, platné v celém intervalu $\mathcal{J}$. A každé jiné řešení $z_1(x), \ldots, z_n(x)$, platné v některém intervalu $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}$, splývá v $\mathcal{J}_1$ s nějakým z uvedených řešení.[2/]

2/ Stačí zvolit bod $x_0 \in \mathcal{J}_1$ a sestrojit ono řešení $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ v intervalu $\mathcal{J}$, pro které je $y_j(x_0) = z_j(x_0)$; podle tvrzení věty 5 o jednoznačnosti je potom $y_j(x) = z_j(x)$ v $\mathcal{J}_1$. V důsledku lineárnosti jsme dostali ve větě 5 ihned řešení v celém intervalu $\mathcal{J}$, kdežto v § 1 u rovnice $y' = f(x, y)$ jsme dostali jen "lokální" řešení a jeho prodloužení "od hranice k hranici" v § 2 nám dalo dost práce.

Poznámka 2. Jestliže $a_{j,k}(x)$, $b_j(x)$, y_j^0 jsou reálné, je vidět, že také funkce $y_j^{\nu}(x)$ v (6) jsou reálné a tedy také jejich limity, tj. řešení $y_1(x), \dots, y_n(x)$ je reálné.

Poznámka 3. Řešení lineární diferenciální rovnice 1. řádu (bylo již probíráno v 2.ročníku). Mějme dánu rovnici $y' + p(x)y = q(x)$, kde $p(x)$, $q(x)$ jsou funkce spojité v intervalu $\mathcal{J}$. Budiž $x_0 \in \mathcal{J}$. Zavedeme novou neznámou funkci $z(x)$ rovnicí:

$$y(x) = z(x) . e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \quad , \quad \text{neboli} \quad z(x) = y(x) e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt}$$

Odtud je vidět: má-li y derivaci, má i z derivaci a naopak. Dále odtud plyne:

$$y'(x) + p(x)\, y(x) = z'(x)\, e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \quad , \text{ tj. rovnice}$$

$y' + p(x)y = q(x)$ platí tehdy a jen tehdy, je-li

$$z'(x) = q(x) . e^{\int_{x_0}^{x} p(t)dt} \qquad \text{tedy } z(x) = \int_{x_0}^{x} q(u) . e^{\int_{x_0}^{u} p(t)dt} du + C$$

(C je libovolná konstanta), tedy

$$y(x) = C e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} + e^{-\int_{x_0}^{x} p(t)dt} . \int_{x_0}^{x} q(u)\, e^{\int_{x_0}^{u} p(t)dt} du .$$

Výpočet těchto integrálů může být ovšem obtížný, ale převedli jsme tím náš problém řešení rovnice $y' + p(x)y = q(x)$ na problém integrálního počtu. V takových případech, kdy se dá řešení diferenciální rovnice převést na jednu nebo několik neurčitých integrací , říkáme, že "rovnici lze řešit kvadraturami" a považujeme často problém se stanoviska teorie diferenciálních rovnic za "vyřešený", i když se při integraci mohou ještě vyskytnout obtížné problémy. Slova "kvadratura" se hlavně dříve často užívalo pro integrování funkcí; souvisí to s tím, že integrál nezáporné funkce lze interpretovat jako obsah rovinného oboru - a hledání obsahu se nazývalo "kvadraturou" (např. kvadraturu kruhu). Precisovati pojem "řešení diferenciálních rovnic kvdaraturami" nebudeme - nebude toho pro nás třeba.

Aplikujeme nyní větu 5 na jednu lineární rovnici n-tého řádu:

<u>Věta 6.</u> Buďte $p_1(x), \dots, p_n(x)$, $q(x)$ komplexní funkce reálné proměnné spojité v intervalu J. Budiž $x_0 \in J$ a buďte $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ komplexní čísla. Potom existuje řešení $y(x)$ rovnice

$$(2) \quad y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)y' + p_n(x)y = q(x)$$

v intervalu J, pro které platí

$$y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_0', \dots, y^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)}$$

(Čti např.: $(n-1)$-ní derivace funkce $y(x)$ má v bodě x_0 hodnotu $y_0^{(n-1)}$.) Je-li $z(x)$ řešení rovnice (2) v nějakém intervalu $J_1 \subset J$, obsahujícím bod x_0, a je-li

$$z(x_0) = y_0, \quad z'(x_0) = y_0', \dots, z^{(n-1)}(x_0) = y_0^{(n-1)},$$

je $\qquad z(x) = y(x)$ v J_1.

D ů k a z : plyne ihned z věty 5, píšeme-li místo (2) systém

$$y_{n-1}'(x) + p_1(x)y_{n-1}(x) + p_2(x)y_{n-2}(x) + \dots + p_n(x)y_0(x) = q(x),$$

$$y_0'(x) - y_1(x) = 0, \quad y_1'(x) - y_2(x) = 0, \dots, y_{n-2}'(x) - y_{n-1}(x) = 0$$

s podmínkami

$$y_0(x_0) = y_0, \quad y_1(x_0) = y_0', \dots, y_{n-1}(x_0) = y_0^{(n-1)}.$$

Dodatek: Jsou-li funkce $p_1(x), \dots, p_n(x)$, $q(x)$ a čísla $y_0, y_0', \dots, y_0^{(n-1)}$ reálné, je též funkce $y(x)$ reálná.

Mohl bych také formulovat příslušný výsledek pro systémy lineárních rovnic vyšších řádů, ale věc je zcela triviální a nebudu se zdržovat psaním. Např. u systému (3) dostaneme jedno a jen jedno řešení, předepíšeme-li pro jistou hodnotu x_0 hodnoty

$$z(x_0),\ z'(x_0), \dots,\ z^{(m-1)}(x_0),\ u(x_0),\ u'(x_0), \dots,\ u^{(n-1)}(x_0),$$

$$v(x_0),\ v'(x_0), \dots,\ v^{(p-1)}(x_0) .$$

Pomatuje se to velmi dobře; hodnoty $z^{(m)}(x_0)$, $u^{(n)}(x_0)$, $v^{(p)}(x_0)$ pak už nesmím předepsat, ty jsou dány rovnicemi (3).

Poznámka: Jak je rozuměti významu symbolů $y'(x)$, $y''(x), \dots$ $\dots, y^{(n)}(x)$ v krajních bodech intervalu J, jestliže tyto body patří k J (např. nechť $J = \langle a, b \rangle$)? To je vidět z toho, jak jsme větu 6 odvodili z věty 5: rovnici (2) můžeme interpretovat jako systém:

$$y' = y_1,\ y_1' = y_2, \dots,\ y_{n-2}' = y_{n-1}$$

$$y_{n-1}' + p_1 y_{n-1} + p_2 y_{n-2} + \dots + p_{n-1} y_1 + p_n y = q$$

a užití pak věty 5, kde derivace v bodě a značí derivaci zprava, v bodě b derivaci zleva. Tj.: y_1 neboli y' značí v a derivaci zprava, v b derivaci zleva, v (a, b) oboustrannou derivaci; y_2 neboli y'' značí derivaci této funkce y' (definované v $\langle a, b \rangle$) v témže smyslu: tj. v bodě a derivaci zprava, v bodě b zleva; y_3 neboli y''' značí opět derivaci této funkce y'' (definované v $\langle a, b \rangle$) opět v témže smyslu. Čtenář snadno zjistí, že věty diferenciálního a integrálního počtu, kterých budeme dále užívat, platí i při tomto poněkud zobecněném pojmu "funkce, která má v $\langle a, b \rangle$ n-tou derivaci". Ostatně se může čtenář v celém zbytku této kapitoly omezit na otevřené intervaly J, čímž tyto (nepatrné) obtíže odpadnou; mnoho tím neztratí.

§ 2. Lineární rovnice n-tého řádu bez pravé strany

Vyšetřujme rovnici

$$(2) \qquad y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = q(x) .$$

Jestliže $q = 0$ v uvažovaném intervalu, nazýváme rovnici

$$(12) \qquad y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y = 0$$

rovnicí bez pravé strany nebo homogenní rcvnicí; obecnou rovnici (2) nazýváme rovnicí s pravou stranou. Podobně se názvu "systém bez pravé strany" (nebo homogenní) užívá u systému (4), je-li $b_1 = b_2 = \ldots = b_n = 0$; podobně u systému (3), je-li $a = D = \delta = 0$. Nebudu raději užívat názvu "homogenní", aby se to nepletlo s rovnicemi tvaru $y' = f(\frac{y}{x})$, které znáte z 2.ročníku.

Budeme současně s rovnicí (2) vyšetřovat rovnici (12) bez pravé strany, přičemž $p_1, \ldots, p_n$, q buďte spojité v jistém intervalu $\mathcal{J}$, omezujeme se na řešení v oboru $\mathcal{J}$ (to můžeme podle existenční věty 6) a připouštíme komplexní p_j, q a komplexní řešení y .

Označme

$$(13) \qquad L(y) = y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y \;;$$

tomuto výrazu se říká <u>lineární diferenciální operátor;</u> přitom y znamená funkci proměnné x ; $y', y'', \ldots$ značí její derivace. Tento "operátor" přiřazuje tedy každé funkci y , mající n-tou derivaci, jistou funkci (proměnné x) $L(y)$, danou vzorcem (13).

Je zřejmé, že $L(Cy) = C L(y)$, je-li C konstanta, a že $L(y + z) = L(y) + L(z)$, tedy obecně

$$L(C_1 y_1 + \ldots + C_k y_k) = C_1 L(y_1) + \ldots + C_k L(y_k) ,$$

jsou-li $C_1, \ldots, C_k$ konstanty.

Rovnice (2), (12) lze tedy přepsati ve tvaru

$$L(y) = q , \quad \text{po případě} \quad L(y) = 0 .$$

I. Jsou-li $y_1, \dots, y_k$ řešení rovnice (12) (bez pravé strany) a jsou-li $C_1, \dots, C_k$ konstanty, je též $C_1 y_1 + \dots + C_k y_k$ řešením rovnice (12).

D ů k a z : $L(\sum C_j y_j) = \sum C_j L(y_j) = 0$.

II. Je-li z řešením rovnice (2) (s pravou stranou), je $y + z$ řešením rovnice (2) tehdy a jen tehdy, je-li y řešením rovnice (12) (bez pravé strany).

D ů k a z : Jest $L(z) = q$; je-li $L(y+z) = q$, je $L(y) = L(y+z) - L(z) = 0$; naopak, je-li $L(y) = 0$, je

$$L(y+z) = L(y) + L(z) = q \ .$$

Úkol řešit rovnici (2) (s pravou stranou) $L(y) = q$ se tedy rozpadá na dva úkoly:

A) Nalézt <u>všechna</u> řešení y rovnice $L(y) = 0$.

B) Nalézt <u>aspoň jedno</u> řešení z rovnice $L(z) = q$ (načež $y + z$ dává všechna řešení rovnice (2)).

Podotkněme ještě: je-li $L(u) = q(x)$, $L(v) = r(x)$ je $L(C_1 u + C_2 v) = C_1 q + C_2 r$, jsou-li C_1 , C_2 konstanty. Dovedu-li tedy nalézt řešení rovnice $L(y) = q$ i rovnice $L(y) = r$, dovedu nalézt též řešení rovnice $L(y) = C_1 q + C_2 r$.

Řešme napřed úkol A).

Budiž dáno n funkcí ($n \geq 1$) $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x)$, definovaných v intervalu J. Říkáme, že jsou <u>lineárně závislé</u> v intervalu J , jestliže existují čísla c_1 , $c_2, \dots, c_n$, <u>z nichž aspoň jedno je od nuly různé</u> tak, že

(14) $$c_1 f_1 + \dots + c_n f_n(x) = 0 \quad \text{pro všechna } x \in J.$$

Rčení "funkce $f(x)$ je lineárně závislá v J " (případ $n = 1$) značí tedy, že $c f(x) = 0$ ($c \neq 0$), tj. že $f(x) = 0$ pro všechna $x \in J$.

Jsou-li $f_1, \dots, f_n$ definovány v J a nejsou-li tam lineárně závislé, říkáme, že jsou lineárně nezávislé v J. To tedy značí, že (14) platí <u>jen</u> tehdy, když $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Funkce, které jsou lineárně nezávislé v nějakém intervalu $\mathcal{J}$, jsou ovšem lineárně nezávislé v každém intervalu $\mathcal{J}_1 \supset \mathcal{J}$.

Jestliže funkce $f_1(x), \dots, f_n(x)$ mají v intervalu $\mathcal{J}$ derivace až do řádu $n-1$, nazýváme funkci

$$(15) \quad W(x) = W_{f_1,\dots,f_n}(x) = \begin{vmatrix} f_1(x), \dots, f_n(x) \\ f_1'(x), \dots, f_n'(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ f_1^{(n-1)}(x), \dots, f_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix} \quad (x \in \mathcal{J})$$

<u>Wronského determinantem</u> funkcí $f_1, \dots, f_n$ (v intervalu $\mathcal{J}$).

<u>Věta 7.</u> Jestliže funkce $f_1, \dots, f_n$ mají v intervalu $\mathcal{J}$ derivace až do řádu $n-1$ a jestliže jsou v $\mathcal{J}$ lineárně závislé, je

$$(16) \quad W_{f_1,\dots,f_n}(x) = 0 \qquad \text{pro všechna } x \in \mathcal{J}$$

D ů k a z : Existují čísla $c_1, \dots, c_n$, z nichž aspoň jedno je různé od nuly, tak, že

$$(17) \quad c_1 f_1(x) + \dots + c_n f_n(x) = 0$$

pro všechna $x \in \mathcal{J}$. Tedy také derivace levé strany jsou rovny nule:

$$(18) \quad \begin{cases} c_1 f_1'(x) + \dots + c_n f_n'(x) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1 f_1^{(n-1)}(x) + \dots + c_n f_n^{(n-1)}(x) = 0 \end{cases}$$

Rovnice (17), (18) dávají (při jakkoliv zvoleném $x \in \mathcal{J}$) systém n lineárních (algebraických) homogenních rovnic pro čísla $c_1, \dots, c_n$, jimž vyhovuje nenulový systém těchto čísel. Tedy je determinant této soustavy roven nule.

Obrátit se tato věta nedá. Položme např.

$$f_1(x) = x^3, \quad f_2(x) = |x|^3; \qquad \mathcal{J} = (-a, a), \ a > 0 .$$

Wronského determinant je

$$\begin{vmatrix} x^3, & x^3 \\ 3x^2, & 3x^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ pro } x > 0, \quad \begin{vmatrix} x^3, & -x^3 \\ 3x^2, & -3x^2 \end{vmatrix} = 0 \text{ pro } x < 0,$$

$$\begin{vmatrix} 0, & 0 \\ 0, & 0 \end{vmatrix} = 0 \text{ pro } x = 0.$$

Přesto funkce f_1, f_2 nejsou v $\mathcal{J}$ lineárně závislé. Neboť je-li

$c_1 f_1(x) + c_2 f_2(x) = 0$ v $\mathcal{J}$, plyne pro $x > 0$ (např. pro $x = \frac{a}{2}$), $c_1 x^3 + c_2 x^3 = 0$, $c_1 + c_2 = 0$ a pro $x < 0$ (např. pro $x = -\frac{a}{2}$) $c_1 x^3 - c_2 x^3 = 0$, $c_1 - c_2 = 0$.
Ale z rovnic $c_1 + c_2 = 0$, $c_1 - c_2 = 0$ plyne $c_1 = c_2 = 0$.

Vraťme se k diferenciální rovnici $L(y) = 0$. Ukážeme, že rovnice $L(y) = 0$ má v $\mathcal{J}$ n lineárně nezávislých řešení a že nalezením těchto n řešení je úkol, nalézt <u>všechna</u> řešení rovnice, rozřešen.

<u>V následujících větách je</u> $L(y) = 0$ <u>rovnice (12) a funkce</u> p_j <u>jsou spojité v</u> $\mathcal{J}$.

Podotkněme napřed: Rovnice (12) má řešení $y = 0$. Zvolme libovolně $x_0 \in \mathcal{J}$; potom existuje <u>právě</u> jedno řešení $Y(x)$, vyhovující podmínkám $Y(x_0) = Y'(x_0) = \dots = Y^{(n-1)}(x_0) = 0$.
Ale řešení nulové vyhovuje těmto podmínkám, takže naše řešení $Y(x)$ je nutně nulové řešení. Tedy: Jestliže nějaké řešení rovnice (12) je v některém bodě intervalu $\mathcal{J}$ rovno nule i se svými derivacemi až do řádu $n-1$, pak toto řešení je nulové (tj. identicky rovno nule v $\mathcal{J}$).

Budiž nyní $y_1, y_2, \dots, y_n$ systém nějakých n řešení rovnice (12). Jsou-li lineárně závislá, je jejich Wronského determinant všude v $\mathcal{J}$ roven nule – podle věty 7.

Naopak, nechť Wronského determinant řešení $y_1, \dots, y_n$ je aspoň v jednom bodě $x_0 \in \mathcal{J}$ roven nule. Tedy lze zvolit čísla $c_1, \dots, c_n$, <u>ne vesměs rovná nule</u>, tak, že

$$c_1 y_1(x_0) + \dots + c_n y_n(x_0) = 0$$
$$c_1 y_1'(x_0) + \dots + c_n y_n'(x_0) = 0$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + \dots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) = 0 ,$$

neboť determinant soustavy je nula.

Sestrojme funkci $y(x) = c_1 y_1(x) + \dots + c_n y_n(x)$, to je řešení rovnice (12), a toto řešení i jeho derivace až do řádu $n-1$ jsou v bodě x_0 rovny nule; tedy je $y = 0$ v $\mathcal{J}$, a funkce $y_1, \dots, y_n$ jsou lineárně závislé v $\mathcal{J}$ (tedy, podle hořejšího, je jejich Wrońského determinant roven nule všude v $\mathcal{J}$.) Shrňme:

<u>Věta 8.</u> Buďte $y_1(x), \dots, y_n(x)$ řešení rovnice (12). Potom jejich Wrońského determinant je buďto všude v $\mathcal{J}$ roven nule nebo všude v $\mathcal{J}$ od nuly různý. První případ nastává, když funkce $y_1, \dots, y_n$ jsou v $\mathcal{J}$ lineárně závislé, druhý, když jsou v $\mathcal{J}$ lineárně nezávislé.

Vidíte, že věta 7 se dá obrátit v tom případě, když $y_1, \dots, y_n$ jsou řešení rovnice tvaru (12).

Systém n řešení rovnice (12) (n-tého řádu!) se nazývá <u>fundamentálním systémem</u> řešení (v intervalu $\mathcal{J}$), jsou-li funkce $y_1, \dots, y_n$ lineárně nezávislé v $\mathcal{J}$, tj. je-li jejich Wrońského determinant různý od nuly v $\mathcal{J}$.

Je-li $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}$ a tvoří-li $y_1, \dots, y_n$ fundamentální systém řešení v $\mathcal{J}$, tvoří též fundamentální systém řešení v $\mathcal{J}_1$; neboť jejich Wrońského determinant je různý od nuly všude v $\mathcal{J}$, tedy i všude v $\mathcal{J}_1$.

<u>Věta 9.</u> Je-li $y_1, \dots, y_n$ fundamentální systém řešení rovnice (12) (bez pravé strany) v intervalu $\mathcal{J}$, lze každé řešení y v $\mathcal{J}$ vyjádřit ve tvaru

(19) $$y = c_1 y_1 + \dots + c_n y_n ,$$

kde $c_1, c_2, \dots, c_n$ jsou konstanty, a to jediným způsobem; přesněji: Je-li $\mathcal{J}_1 \subset \mathcal{J}$ ($\mathcal{J}_1$ interval),

(20) $c_1 y_1(x)+\ldots+ c_n y_n(x) = d_1 y_1(x)+\ldots+ d_n y_n(x)$

pro všechna $x \in \mathcal{J}_1$, je $c_1 = d_1, \ldots, c_n = d_n$.

D ů k a z : Budiž y řešení rovnice (12). Zvolme bod $x_0 \in \mathcal{J}$ a určeme čísla $c_1, \ldots, c_n$ tak, že

$$y(x_0) = c_1 y_1(x_0) + \ldots + c_n y_n(x_0)$$
$$y'(x_0) = c_1 y_1'(x_0) + \ldots + c_n y_n'(x_0)$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$y^{(n-1)}(x_0) = c_1 y_1^{(n-1)}(x_0)+\ldots+ c_n y_n^{(n-1)}(x_0) ;$$

tp lze, ježto determinant soustavy je různý od nuly. Potom funkce $z(x) = y(x) - c_1 y_1(x) - \ldots - c_n y_n(x)$ je řešením, které v bodě x_0 i se svými derivacemi až do řádu n - 1 je rovno nule. Tedy $z(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathcal{J}$. Za druhé: platí-li (20), je

$$(c_1 - d_1)\, y_1(x) + \ldots + (c_n - d_n)\, y_n(x) = 0 \quad v\ \mathcal{J}_1 ;$$

ježto $y_1, \ldots, y_n$ tvoří také v $\mathcal{J}_1$ fundamentální systém, je $c_1 - d_1 = 0, \ldots, c_n - d_n = 0$.

Je-li $y_1, \ldots, y_n$ fundamentální systém, sestrojme výraz

$$c_1 y_1(x) + \ldots + c_n y_n(x) ;$$

tento výraz, pojímaný jako funkce n + 1 proměnných $c_1, \ldots, c_n, x$ se nazývá <u>obecným řešením</u> rovnice (12); jeho význam je tento: zvolíme-li jakkoliv hodnoty $c_1, \ldots, c_n$, dostaneme řešení rovnice (12) a to, při vhodné volbě těchto hodnot, kterékoliv řešení. Každému jednotlivému řešení rovnice (12) se říká také <u>partikulární řešení.</u>

Nalezením fundamentálního systému je tedy rovnice (12) úplně řešena. Existují však fundamentální systémy?

<u>Věta 10.</u> Rovnice (12) má fundamentální systémy. Je-li $y_1, \ldots, y_n$ řešení rovnice (12) a je-li

$$(21) \quad \begin{cases} Y_1 = c_{11} y_1 + \ldots + c_{1n} y_n \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ Y_n = c_{n1} y_1 + \ldots + c_{nn} y_n \end{cases}$$

(c_{ik} konstanty), je

$$(22)\qquad W_{Y_1,\dots,Y_n}(x) = \begin{vmatrix} c_{11}, & \dots, & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1}, & \dots, & c_{nn} \end{vmatrix} W_{y_1,\dots,y_n}(x) ;$$

a tedy $Y_1,\dots,Y_n$ je fundamentální systém tehdy a jen tehdy, je-li $y_1,\dots,y_n$ fundamentální systém a je-li

$$\begin{vmatrix} c_{11}, & \dots, & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1}, & \dots, & c_{nn} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

D ů k a z : 1) Zvolme $x_0 \in \mathcal{J}$; existují řešení $z_0,\dots,z_{n-1}$ tak, že

$$z_0(x_0) = 1 , \quad z_0'(x_0) = 0 , \dots , \quad z_0^{(n-1)}(x_0) = 0$$

$$z_1(x_0) = 0 , \quad z_1'(x_0) = 1 , \dots , \quad z_1^{(n-1)}(x_0) = 0$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$z_{n-1}(x_0) = 0 , \quad z_{n-1}'(x_0) = 0 , \dots , \quad z_{n-1}^{(n-1)}(x_0) = 1$$

($z_j^{(k)}$ je 1 pro $j = k$, 0 pro $j \neq k$). Wrońského determinant funkcí $z_0,\dots,z_{n-1}$ v bodě x_0 je $1 \neq 0$.

2) Z rovnic (21) plyne

$$Y_j^{(k)} = \sum_{m=1}^{n} c_{jm}\, y_m^{(k)}$$

a tedy podle věty o násobení determinantů

$$W_{Y_1,\dots,Y_n}(x) = \begin{vmatrix} c_{11}, & \dots, & c_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ c_{n1}, & \dots, & c_{nn} \end{vmatrix} . W_{y_1,\dots,y_n}(x) ;$$

další je již triviální.

Dodatek. Všimněme si ještě případu, kdy rovnice (12) je "reálná", tj. koeficienty $p_j(x)$ v (12) jsou reálné funkce. Potom je-li $y(x) = u(x) + i\,v(x)$ řešením, jsou též reálné funkce u, v řešeními. Neboť $0 = L(y) = L(u) + i\,L(v)$, kde $L(u)$, $L(v)$ jsou reálné funkce.

Tedy také komplexně sdružená funkce $\bar{y} = u - iv$ je řešením.

Dále víme, že pro reálné "počáteční hodnoty" $y(x_0)$, $y'(x_0), \ldots, y^{(n-1)}(x_0)$ je funkce $y(x)$ reálná. Tedy existuje reálný fundamentální systém (např. z_0, $z_1, \ldots, z_{n-1}$ z důkazu věty (10). Je-li $y_1, y_2, \ldots, y_n$ reálný fundamentální systém a je-li $y = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n$ nějaké řešení, je

$$\begin{aligned} \mathcal{R}y &= \mathcal{R}c_1 . y_1 + \ldots + \mathcal{R}c_n . y_n \\ \mathcal{J}y &= \mathcal{J}c_1 . y_1 + \ldots + \mathcal{J}c_n . y_n \end{aligned}$$

($\mathcal{R}, \mathcal{J}$ znamená reálnou a imaginární část). Tedy : y je reálné tehdy a <u>jen</u> tehdy, jsou-li $c_1, \ldots, c_n$ reálná. Často dostaneme fundamentální systém řešení rovnice (12) ve tvaru [3/]

$$y_1, y_2, \ldots, y_r, z_1, \bar{z}_1, z_2, \bar{z}_2, \ldots, z_s, \bar{z}_s .$$

($r + 2s = n$), kde z_j, $\bar{z}_j$ jsou funkce komplexně sdružené. Ježto

$\mathcal{R}z_j = \frac{1}{2}(z_j + \bar{z}_j)$, $\mathcal{J}z_j = \frac{1}{2i}(z_j - \bar{z}_j)$, tvoří funkce

$$y_1, y_2, \ldots, y_r, \mathcal{R}z_1, \mathcal{J}z_1, \ldots, \mathcal{R}z_s, \mathcal{J}z_s$$

také fundamentální systém. Neboť máme

$$\begin{aligned} y_1 &= y_1 \\ y_2 &= y_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \mathcal{R}z_1 &= \tfrac{1}{2} z_1 + \tfrac{1}{2} \bar{z}_1 \\ \mathcal{J}z_1 &= \tfrac{1}{2i} z_1 - \tfrac{1}{2i} \bar{z}_1 \\ \mathcal{R}z_2 &= \qquad\qquad\qquad \tfrac{1}{2} z_2 + \tfrac{1}{2} \bar{z}_2 \\ \mathcal{J}z_2 &= \qquad\qquad\qquad \tfrac{1}{2i} z_2 - \tfrac{1}{2i} \bar{z}_2 \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

3/ na str.61

takže determinant $\begin{vmatrix} c_{11}, & \dots, & c_{1n} \\ c_{n1}, & \dots, & c_{nn} \end{vmatrix}$ z věty 10 má zde hodnotu

$$\begin{vmatrix} 1 & & & & & & & \\ & 1 \ddots 1, & & 0 & & & & \\ & & 0, & 0, & 0 & & & \\ & & 0, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & 0 & & \\ 0 & & 0 & \frac{1}{2i}, & -\frac{1}{2i}, & 0, & 0 & \\ & & 0, & 0, & 0, & \frac{1}{2}, & \frac{1}{2}, & 0 \\ & & & & 0, & \frac{1}{2i}, & -\frac{1}{2i}, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{vmatrix} = \left(-\frac{1}{2i}\right)^{s} \neq 0 .$$

<u>Věta 11.</u> Budiž $y_1, \dots, y_n$ nějakých n řešení rovnice (12) (bez pravé strany). Budiž $x_0 \in \mathcal{J}$. Potom

$$W_{y_1,\dots,y_n}(x) = W_{y_1,\dots,y_n}(x_0) \cdot e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)\,dt} . \tag{23}$$

D ů k a z : Derivaci

$$W'(x) = \frac{d}{dx} \begin{vmatrix} y_1(x), & \dots, & y_n(x) \\ y_1'(x), & \dots, & y_n'(x) \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-1)}(x), & \dots, & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

dostaneme jako součet determinantů, kde je v prvním sčítanci derivován první řádek, v druhém druhý atd. Zde vždy po sobě jdoucí řádky se rovnají - až na ten determinant, kde se derivoval poslední řádek, takže

$$W'(x) = \begin{vmatrix} y_1, & \dots, & y_n \\ y_1', & \dots, & y_n' \\ \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(n-2)}, & \dots, & y_n^{(n-2)} \\ y_1^{(n)}, & \dots, & y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

3/Zde rovnice (12) nemusí být reálná, ale největší význam má tato poznámka pro reálné rovnice.

Píšeme-li zde podle (12) $y_k^{(n)} = -p_1 y_k^{(n-1)} - p_2 y_k^{(n-2)} - \ldots$ $\ldots - p_n y_k$ a přičteme k poslednímu řádku vhodnou lineární kombinaci předešlých, dostaneme

$$W'(x) = -\,p_1(x)\,W(x) \tag{24}$$

a víme, že všechna řešení této rovnice jsou dána vzorcem [4/]

$W(x) = C e^{-\int_{x_0}^{x} p_1(t)\,dt}$, kde C je konstanta. Dosazení $x = x_0$ dává $C = W(x_0)$.

Poznámka. Zjistili jsme, že rovnice (12) má n lineárně nezávislých řešení v J. Tvrdím, že neexistuje více než n lineárně nezávislých řešení.

D ů k a z : Kdyby $y_1, \ldots, y_n, y_{n+1}$ byla lineárně nezávislá řešení, byla by i $y_1, \ldots, y_n$ lineárně nezávislá, tedy by bylo podle věty 9 $y_{n+1} = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n$, což je ve sporu s lineární nezávislostí funkcí, $y_1, \ldots, y_{n+1}$.

Věta 9 se dá obrátit tímto způsobem: Lze-li každé řešení vyjádřit pomocí n řešení $y_1, \ldots, y_n$ ve tvaru $c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n$, jsou $y_1, \ldots, y_n$ lineárně nezávislá řešení.

D ů k a z : Existuje fundamentální (tj. lineárně nezávislý) systém řešení $Y_1, \ldots, Y_n$ a podle předpokladu je

$$Y_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk}\, y_k \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

Odtud plyne

$$W_{Y_1,\ldots,Y_n}(x) = \begin{vmatrix} c_{11}, & \ldots, & c_{1n} \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ c_{n1}, & \ldots, & c_{nn} \end{vmatrix} \; W_{y_1,\ldots,y_n}(x)$$

(viz větu 10). Zde je levá strana různá od nuly, tedy je $W_{y_1,\ldots,y_n}(x) \neq 0$.

4/ Viz poznámku 3 za větou [illegible]

Konečně: Jsou-li $y_1,\dots,y_k$ řešení rovnice (12) a je-li $k<n$, nelze každé řešení y vyjádřit ve tvaru $y = c_1 y_1 + \dots + c_k y_k$: neboť potom by se každé řešení dalo vyjádřit ve tvaru $c_1 y_1 + \dots + c_k y_k + c_{k+1} . 0 + \dots + c_n . 0$, a $y_1, y_2, \dots, y_k, 0, 0, \dots, 0$ (nula $(n-k)$-krát) není lineárně nezávislý systém.

Věta 12. Buďte $y_1(x),\dots, y_n(x)$ funkce, které mají v intervalu J spojité derivace n-tého řádu a nechť $W_{y_1,\dots,y_n}(x) \neq 0$ pro všechna $x \in J$. Potom existuje v J jedna a jen jedna rovnice

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = 0 , \tag{12}$$

mající v J spojité "koeficienty" $p_j(x)$, která má v J řešení $y_1(x),\dots, y_n(x)$; tato rovnice jest

$$\frac{W_{y,y_1,\dots,y_n}(x)}{W_{y_1,\dots,y_n}(x)} = 0 . \tag{25}$$

D ů k a z : 1) Nechť rovnice (12) a současně rovnice

$$y^{(n)} + r_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + r_{n-1}(x)\, y' + r_n(x)\, y = 0$$

mají v J řešení $y_1, \dots, y_n$ (p_j , r_j spojité funkce); máme dokázat, že $p_j(x) = r_j(x)$ pro $x \in J$, $j = 1,2,\dots, n$.

Nechť to není pravda. Odečtu-li obě rovnice, dostanu rovnici

$$\begin{aligned}(p_k(x) - r_k(x))\, y^{(n-k)} + (p_{k+1}(x) - r_{k+1}(x))\, y^{(n-k+1)} + \dots \\ \dots + (p_n(x) - r_n(x))\, y^{(0)} = 0\end{aligned} \tag{26}$$

(zde $y^{(0)}$ - "nultá derivace" - znamená prostě y), kde k bylo voleno tak, že pro $0 < j < k$ je $p_j(x) = r_j(x)$ pro všechna $x \in J$, ale pro $j = k$ už to neplatí. Je $1 \le k \le n$. Existuje bod $x_1 \in J$ tak, že $p_k(x_1) - r_k(x_1) \neq 0$, tedy existuje interval $J_1 \subset J$ tak, že $p_k(x) - r_k(x) \neq 0$ pro všechna $x \in J_1$, takže v J_1 lze rovnici (26) dělit výrazem

$p_k(x) - r_k(x)$ a dostáváme rovnici řádu $n - k < n$, která má v J_1 n lineárně nezávislých integrálů - ale to není možno podle předcházející poznámky. Ovšem pozor! Může být také $k = n$ potom (26) není diferenciální rovnice, nýbrž prostě rovnice

$(p_n(x) - r_n(x)).y = 0$ tedy $y = 0$ (v intervalu J_1) , a

ta má mít lineárně nezávislá řešení $y_1, \dots, y_n$ (tedy aspoň jedno)- ale to opět není možno.

2)

$$W_{y,y_1,\dots,y_n}(x) = \begin{vmatrix} y, y', & \dots, & y^{(n)} \\ y_1, y_1', & \dots, & y_1^{(n)} \\ \dots & \dots & \dots \\ y_n, y_n', & \dots, & y_n^{(n)} \end{vmatrix},$$

to dává vskutku nulu pro $y = y_1, \dots, y = y_n$. Mimoto má rovnice $W_{y,y_1,\dots,y_n}(x) = 0$ tvar (12) 5/ , až na to, že koeficient při $y^{(n)}$ není 1, nýbrž $W_{y_1,\dots,y_n}(x) \neq 0$; tím tedy můžeme dělit.

Vidíte, že nejpodstatnější větou této kapitoly byla existenční věta 5; věta 6 z ní plynula malou úpravou a věty 7-12 (samy o sobě ovšem velmi důležité) plynuly z věty 6 snadnými úvahami o derivování, o primitivních funkcích a elementárními úvahami lineární algebry. Všechny tyto úvahy by platily i v tom případě, kdyby nezávisle proměnná byla komplexní. Proto později, až budeme mluvit o diferenciálních rovnicích v oboru komplexní proměnné, stačí nám odvodit větu analogickou k větě 5 a věty analogické k větám 6-12 z ní vyplynou týmiž výpočty jako nyní; proto je potom nebudu většinou ani opakovat.

Poznámka: Často jsme užívali označení

$$(*) \quad L(y) = p_0(x)\, y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y$$

(u nás bylo většinou $p_0(x) = 1$), kde $p_j(x)$ jsou definovány v jistém intervalu J . Tento operátor L přiřazuje každé funkci $y(x)$, mající n-tou derivaci v J , opět jistou funk-

5/ Stačí rozvinout determinant podle prvků prvního řádku.

ci $L(y)$, popsanou rovnicí (*). Je-li nyní M další takový operátor (pro tentýž interval $\mathcal{J}$)

(**) $$M(y) = q_0(x)\, y^{(n)} + \ldots + q_n(x)\, y\,,$$

a je-li $L(y)$ táž funkce jako $M(y)$, a to pro každou funkci $y(x)$, mající v $\mathcal{J}$ n-tou derivaci, potom v celém intervalu $\mathcal{J}$ je $p_j(x) = q_j(x)$ $(j = 0,1,\ldots,n)$.

D ů k a z : Zvolme $x_0 \in \mathcal{J}$ a celé číslo j, $0 \le j \le n$. Funkce $y(x) = \dfrac{(x-x_0)^j}{j!}$, má v bodě x_0 všechny derivace (nultou počínaje) rovny nule, s výjimkou hodnoty $y^{(j)}(x_0) = 1$. Ježto výrazy (*), (**) jsou si rovny v bodě x_0, vychází $p_{n-j}(x_0) = q_{n-j}(x_0)$.

<u>Věta 13.</u> Budiž $y(x)$ řešení rovnice (12), které není identicky rovno nule v $\mathcal{J}$. Potom jeho nulové body, ležící v $\mathcal{J}$, jsou isolované.

D ů k a z : Nechť to není pravda; tedy nulové body funkce $y(x)$ mají hromadný bod $x_0 \in \mathcal{J}$; t.j. existuje posloupnost $x_1, x_2, \ldots, x_k \to x_0$, $x_k \neq x_0$, $y(x_k) = 0$. Bez újmy obecnosti můžeme předpokládat, že tato posloupnost konverguje k x_0 monotonně zleva nebo zprava (jinak bychom přešli k vybrané posloupnosti). Protože funkce $y(x)$ a její derivace až do řádu $n-1$ jsou spojité (jak plyne z existence $y^{(n)}$), máme především $y(x_0) = 0$ a dále použijeme na interval o koncových bodech x_k, x_{k+1} Rolleovy věty. Dostaneme tak posloupnost $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots$ $\ldots, x_k^{(1)} \to x_0$, $x_k^{(1)} \neq x_0$, $y'(x_k^{(1)}) = 0$, tedy i

$y'(x_0) = 0$.

Další aplikací Rolleovy věty máme: $x_k^{(2)} \to x_0$, $x_k^{(2)} \neq x_0$, $y''(x_k^{(2)}) = 0$; tedy i $y''(x_0) = 0$.

Indukční krok je triviální.

Tedy platí $y(x_0) = y'(x_0) = \ldots = y^{(n-1)}(x_0) = 0$, a tedy $y(x)$ je, jak víme, nulové řešení, což je spor.

§ 3. Lineární rovnice n-tého řádu s pravou stranou.

Vyšetřujme nyní rovnici

(2) $$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = q(x)$$

(p_j, q spojité v intervalu $\mathcal{J}$ a všímám si jen řešení v intervalu $\mathcal{J}$). Předpokládejme, že jsme již našli fundamentální systém řešení $y_1(x), \ldots, y_n(x)$ rovnice bez pravé strany

(12) $$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_{n-1} y' + p_n y = 0 .$$

Víme, že stačí nalézti jedno jediné řešení z rovnice (2), načež všechna řešení rovnice (2) budou obsažena ve vzorci

$$c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n + z \qquad (c_j \text{ konstanty}).$$

Víme, že funkce

(27) $$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \ldots + C_n y_n$$

vyhovuje rovnici (12), jsou-li C_j konstanty: budeme se nyní snažit nalézt funkce (proměnné x) $C_1, C_2, \ldots, C_n$ se spojitou první derivací tak, aby výraz (27) vyhovoval rovnici (2)[6/]. Toto je jediná podmínka pro $C_1, C_2, \ldots, C_n$ - dá se proto očekávat, že těmto n funkcím je možno uložit ještě dalších $n - 1$ podmínek; to učiníme co nejvýhodnějším způsobem. Mysleme si, že máme n funkcí $C_1, C_2, \ldots, C_n$ se spojitými derivacemi a že definujeme y rovnicí (27). Odtud plyne (vše pro $x \in \mathcal{J}$)

$$y' = C_1 y_1' + \ldots + C_n y_n' + C_1' y_1 + \ldots + C_n' y_n$$

Zvolíme-li C_j (jestliže $n > 1$) tak, že

$$C_1' y_1 + \ldots + C_n' y_n = 0$$

(pro všechna $x \in \mathcal{J}$), bude

$$y' = C_1 y_1' + \ldots + C_n y_n'$$

6/ Proto se této metodě říká variace konstant.

(tj. y' se počítá tak, jakoby $C_1, \dots, C_n$ byly konstanty). Odtud dále (je-li $n > 2$)

$$y'' = C_1 y_1'' + \dots + C_n y_n'' + C_1' y_1' + \dots + C_n' y_n' ;$$

volíme-li C_j tak, aby

$$C_1' y_1' + \dots + C_n' y_n' = 0$$

bude

$$y'' = C_1 y_1'' + \dots + C_n y_n''$$

Tak pokračujeme až do derivace řádu $n - 1$. Úhrnem: Zvolíme-li C_j tak, aby

$$(28) \qquad \begin{cases} C_1' y_1 + \dots + C_n' y_n = 0 , \\ C_1' y_1' + \dots + C_n' y_n' = 0 , \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ C_1' y_1^{(n-2)} + \dots + C_n' y_n^{(n-2)} = 0 , \end{cases}$$ 7/

dostaneme postupným derivováním z (27):

$$(29) \qquad \begin{cases} y = C_1 y_1 + \dots + C_n y_n \\ y' = C_1 y_1' + \dots + C_n y_n' \\ y'' = C_1 y_1'' + \dots + C_n y_n'' \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} = C_1 y_1^{(n-1)} + \dots + C_n y_n^{(n-1)} \\ y^{(n)} = C_1 y_1^{(n)} + \dots + C_n y_n^{(n)} + C_1' y_1^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} \end{cases}$$

Položíme-li opět $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_n y = L(y)$, dostáváme (ježto $L(y_1) = \dots = L(y_n) = 0$)

$$L(y) = C_1 L(y_1) + \dots + C_n L(y_n) + C_1' y_1^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} ,$$

$$L(y) = C_1' y_1^{(n-1)} + \dots + C_n' y_n^{(n-1)} .$$

7/ Ještě ovšem nevíme, zda je to možné.

Podaří-li se nám nalézti funkce $C_j(x)$ (se spojitou první derivací) tak, aby vedle (28) platilo ještě

(30) $$C_1' y_1^{(n-1)} + \ldots + C_n' y_n^{(n-1)} = q ,$$

bude funkce (27) vskutku řešením rovnice (2) a budeme hotovi.

Podotkněme, že funkce $y_j, y_j', \ldots, y_j^{(n-1)}$, ($j = 1, \ldots, n$) jsou spojité v $\mathcal{J}$, neboť existuje ještě $y_j^{(n)}$. Rovnice (28), (30) tvoří n lineárních rovnic pro $C_1', \ldots, C_n'$ se spojitými koeficienty a s determinantem $W_{y_1, \ldots, y_n}(x) \neq 0$. Proto lze tyto rovnice řešit obvyklým Cramerovým pravidlem a vyjdou vskutku $C_j'(x)$ spojité, takže k nim existují $C_j(x)$, které najdeme "kvadraturou".

<u>Příklad.</u> Rovnice $y'' - y = 0$ má řešení e^x, e^{-x},

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x, & e^{-x} \\ e^x, & -e^{-x} \end{vmatrix} = -2 \neq 0 .$$ Rovnici $y'' - y = q(x)$

($q(x)$ spojitá) řešíme takto:

$$y = C_1 e^x + C_2 e^{-x}$$

$$y' = C_1 e^x - C_2 e^{-x} \quad ; \qquad C_1' e^x + C_2' e^{-x} = 0$$

$$y'' = C_1 e^x + C_2 e^{-x} + C_1' e^x - C_2' e^{-x} ;$$

jest $L(y) = C_1' e^x - C_2' e^{-x}$.

Řešíme rovnice

$$C_1' e^x + C_2' e^{-x} = 0$$

$$C_1' e^x - C_2' e^{-x} = q(x) ,$$

z nich dostáváme

$$C_1' = \frac{1}{2} q(x) e^{-x}$$

$$C_2' = -\frac{1}{2} q(x) e^{x} ;$$

"obecný integrál" naší rovnice bude

$$y = K_1 e^x + K_2 e^{-x} + \frac{1}{2} e^x \int q(x) e^{-x} dx - \frac{1}{2} e^{-x} \int q(x) e^x dx$$

(K_1, K_2 konstanty).

§ 4. Různé případy zjednodušení lineární rovnice.

Rovnice (12) má vždy nulové řešení ($y(x) = 0$ všude v $\mathcal{J}$); to nazvu **triviálním.**

A. Snížení řádu.

Jestliže v případě $n = 2$ znám netriviální řešení y_1 rovnice

(31) $$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0 ,$$

zavedu místo y novou neznámou funkci z rovnicí

$$y(x) = y_1(x) \,.\, z(x) ;$$

to jde aspoň tam, kde je $y_1(x) \neq 0$ (a víme z věty 14, že nulové body funkce y_1 jsou isolované). Potom

$$y' = y_1 z' + y_1' z$$
$$y'' = y_1 z'' + 2 y_1' z' + y_1'' z$$

a naše rovnice přejde v rovnici

$$y_1 z'' + (2y_1' + p_1 y_1) z' + (y_1'' + p_1 y_1' + p_2 y_1) z = 0 ,$$

ale zde poslední člen odpadne; máme tedy rovnici 1.řádu pro další novou neznámou funkci $u = z'$:

(32) $$y_1 u' + (2y_1' + p_1 y_1) u = 0 ,$$

kterou dovedeme řešit: [8/]

$$u = C_1 e^{-\int\left(\frac{2y_1'}{y_1} + p_1\right)dx} = C_1 y_1^{-2} e^{-\int p_1 dx} = C_1 U_1(x) ;$$

8/ Lépe řečeno: převést na kvadratury.

odtud najdu

$$z(x) = C_1 \int u_1(x)\,dx + C_2 \quad ,$$

$$y(x) = C_1 y_1(x) \int u_1(x)\,dx + C_2 y_1(x) \quad ,$$

čímž je rovnice řešena.

Viděli jsme, že znalost jednoho řešení rovnice (31) nám dovolila převést ji na rovnici (32), tj. snížit její řád o jedničku. Ukážeme obecně:

Jestliže známe k lineárně nezávislých řešení rovnice (12) ($0<k<n$) , dovedeme řešení této rovnice převésti na řešení rovnice (lineární, bez pravé strany) řádu $n - k$ (a na kvadratury).

Neformuluji to jako matematickou větu - jde spíše o návod ; přesný smysl vyplyne z následujícího.

Pišme opět rovnici (12) ve tvaru $L(y) = 0$ a nechť je známo k lineárně nezávislých řešení

(33) $$y_1 \,, y_2 \,, \dots \,, y_k \quad .$$

Zaveďme novou neznámou funkci $z(x)$ rovnicí

(34) $$y(x) = y_1(x) \,.\, z(x) \qquad \left(\text{t.j. } z(x) = \frac{y(x)}{y_1(x)}\right)$$

omezujíce se na nějaký interval, v němž $y_1(x) \neq 0$. Jest

$$y' = y_1' z + y_1 z'$$
$$y'' = y_1'' z + 2 y_1' z' + y_1 z''$$
$$y''' = y_1''' z + \dots + y_1 z'''$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$y^{(n)} = y_1^{(n)} z + \dots + y_1 z^{(n)}$$

(mohl bych vypisovat tyto derivace podrobně podle Leibnitzovy formule - ale nepotřebují to: rovnice je čísti takto: má-li jedna strana smysl, má smysl i druhá). Odtud ihned:

$$L(y) = y_1 z^{(n)} + P_1(x)\, z^{(n-1)} + \dots + P_{n-1}(x) z' + L(y_1) z$$

Rovnice (12) přechází tedy - ježto $L(y_1) = 0$ - v ekvivalentní rovnici

(35) $$z^{(n)} + Q_1(x)\, z^{(n-1)} + \ldots + Q_{n-1}(x)\, z' = 0 ,$$

jež má známá řešení (viz (34))

(36) $$1,\ \frac{y_2}{y_1} , \ldots , \frac{y_k}{y_1}$$

Položíme-li $u = z'$, přejde (35) v ekvivalentní rovnici

(37) $$u^{(n-1)} + Q_1(x) u^{(n-2)} + \ldots + Q_{n-1}(x) u = 0$$

s řešeními

(38) $$\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) , \ldots , \frac{d}{dx}\left(\frac{y_k}{y_1}\right) ;$$

tato řešení jsou lineárně nezávislá, neboť z relace

$$c_2 \frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right) + \ldots + c_k \frac{d}{dx}\left(\frac{y_k}{y_1}\right) = 0$$

plyne

$$c_1 + c_2 \frac{y_2}{y_1} + \ldots + c_k \frac{y_k}{y_1} = 0 ,$$

tedy jistě $c_1 = c_2 = \ldots = c_k = 0$.

Rovnice (37) je tedy řádu $n - 1$, a známe v ní $k - 1$ lineárně nezávislých řešení. Najdu-li u této rovnice m lineárně nezávislých řešení $u_1 , \ldots , u_m$, dostanu z nich u rovnice (35) celkem $m + 1$ řešení [9/]

(39) $$1,\ z_1 , \ldots , z_m \qquad \left(z_j(x) = \int u_j(x)\, dx \right) ,$$

která jsou lineárně nezávislá, neboť z relace

$$c_1 z_1 + c_2 z_2 + \ldots + c_m z_m + c_{m+1} \cdot 1 = 0$$

derivováním plyne

$$c_1 u_1 + \ldots + c_m u_m = 0 ,$$

tedy $c_1 = c_2 = \ldots = c_m = 0$ a tedy i $c_{m+1} = 0$.

9/ Jednička je řešením rovnice (35)

Konečně rovnice (12) má $m + 1$ lineárně nezávislých řešení

$$y_1, z_1 y_1, z_2 y_1, \ldots, z_m y_1 .$$

Přehlédněme to:

Známe-li u rovnice (12) (n-tého řádu) k lineárně nezávislých řešení, dovedeme sestrojit rovnici (37) řádu $n - 1$, u které známe $k - 1$ lineárně nezávislých řešení. Dovedeme-li nalézti u rovnice (37) m lineárně nezávislých řešení, dovedeme kvadraturami nalézti $m + 1$ lineárně nezávislých řešení rovnice (12).[10/]

Opakuji tento postup u rovnice (37) (jestliže $k - 1 > 0$) a dostanu rovnici

$$v^{(n-2)} + R_1 v^{(n-3)} + \ldots + R_{n-2} v = 0 , \tag{40}$$

u které znám $k - 2$ lineárně nezávislých řešení; a najdu-li m lineárně nezávislých řešení rovnice (40), dostanu kvadraturami $m + 1$ lineárně nezávislých řešení rovnice (37) a odtud $m + 2$ lineárně nezávislých řešení rovnice (12).

Po k krocích dostanu rovnici

$$w^{(n-k)} + S_1 w^{(n-k-1)} + \ldots + S_{n-k} w = 0 \tag{41}$$

s touto vlastností: najdu-li u ní m lineárně nezávislých řešení, dovedu nalézti kvadraturami $m + k$ řešení rovnice (12).

Speciálně: Rozřeším-li úplně rovnici (41), tj. najdu-li $n - k$ lineárně nezávislých řešení, mohu kvadraturami nalézti n lineárně nezávislých řešení rovnice (12). To sice platí jen v těch intervalech, ve kterých ona řešení lineárních rovnic, která jsme při jednotlivých krocích dávali do jmenovatele, jsou různá od nuly. Ježto však rovnice (12) má fundamentální systém řešení v celém intervalu $\mathcal{J}$, musí se tato řešení dát v jedno-

10/ Postup je jednoduchý: položím $y = y_1 z$, načež dostanu pro z diferenciální rovnici, ve které se vyskytuje pouze $z', z'', \ldots, z^{(n)}$ a položím $z' = u$.

tlivých částečných intervalech kombinovat a v těch vyloučených bodech doplnit (na základě spojitosti) tak, abychom dostali řešení platná v celém intervalu $\mathcal{J}$; provedení tohoto posledního kroku nebývá těžké.

Příklad: Rovnice

$$xy''' - y'' - xy' + y = 0 \tag{42}$$

má řešení e^x, e^{-x}, jak snadno zjistíte. Položme

$$\begin{aligned} y &= ze^x \\ y' &= (z' + z)e^x \\ y'' &= (z'' + 2z' + z)e^x \\ y''' &= (z''' + 3z'' + 3z' + z)e^x, \end{aligned}$$

a dostaneme rovnici

$$x(z''' + 3z'' + 3z' + z) - (z'' + 2z' + z) - x(z' + z) + z = 0,$$

tj.

$$xz''' + z''(3x - 1) + z'(2x - 2) = 0$$

s řešeními $\frac{e^x}{e^x} = 1$, $\frac{e^{-x}}{e^x} = e^{-2x}$; položíme $z' = u$ a máme rovnici

$$xu'' + u'(3x - 1) + u(2x - 2) = 0$$

s řešením e^{-2x}; položím

$$\begin{aligned} u &= e^{-2x}v \\ u' &= e^{-2x}(-2v + v') \\ u'' &= e^{-2x}(4v - 4v' + v''), \end{aligned}$$

dostanu rovnici

$$x(v'' - 4v' + 4v) + (3x - 1)(v' - 2v) + (2x - 2)v = 0$$

neboli

$$xv'' + v'(-x - 1) = 0 .$$

Položím $v' = w$ a mám rovnici

$$xw' - (x+1)w = 0,$$

kterou dovedeme řešit

$$w = C_1 e^{\int \frac{x+1}{x} dx} = C_1 x e^x$$

odtud

$$v = C_1 \int x e^x dx + C_2 = C_1 (x-1) e^x + C_2 ,$$

$$u = e^{-2x} v = C_1 (x-1) e^{-x} + C_2 e^{-2x}$$

$$z = C_1 \int (x-1) e^{-x} dx + C_2 \int e^{-2x} dx + C_3 =$$

$$= -C_1 x e^{-x} - \frac{C_2}{2} e^{-2x} + C_3$$

(43)
$$y = z e^x = -C_1 x - \frac{C_2}{2} e^{-x} + C_3 e^x$$

tím máme fundamentální systém řešení: e^x, e^{-x}, x . Nebylo by ovšem - v tomto případě - těžké, uhodnout i třetí řešení $y = x$ přímo.

Zároveň je vidět: Rovnice (42) platí pro všechna x vůbec (pro funkce (43)), ač naše obecná teorie nás nechává v bodě $x = 0$ na holičkách (rovnici (42) bychom měli dělit x , abychom mohli přímo užít našich vět).

B. Zavedení nové nezávisle proměnné.

Do lineární rovnice (2) zavedeme novou nezávisle proměnnou ξ (místo x) rovnicí

(44) $$x = \varphi(\xi) ;$$

při tom předpokládejme, že v uvažovaném intervalu má φ spojité derivace do řádu n-tého a $\varphi'(\xi)$ je stále kladné nebo stálé záporné, takže φ je ryze monotonní a (44) určuje také naopak ξ jako funkci x (inversní funkce).

Je pak

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\varphi'(\xi)} \cdot \frac{dy}{d\xi}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{d\xi}\left(\frac{1}{\varphi'(\xi)}\frac{dy}{d\xi}\right)\cdot\frac{d\xi}{dx} =$$

$$= \frac{1}{\varphi'(\xi)}\left(-\frac{\varphi''(\xi)}{(\varphi'(\xi))^2}\frac{dy}{d\xi} + \frac{1}{\varphi'(\xi)}\frac{d^2y}{d\xi^2}\right)$$

atd. Je vidět, že rovnice (2) přejde v lineární rovnici n-tého řádu (pro y jakožto funkci ξ); jestliže původní rovnice byla bez pravé strany, je i nová rovnice bez pravé strany.

C. Zavedení nové neznámé funkce.

Zaveďme do (2) novou neznámou funkci η rovnicí

(45) $$y = \varphi(x)\eta + \psi(x),$$

kde φ, ψ mají spojité derivace do n-tého řádu, $\varphi(x) \neq 0$.

Potom (Leibnitzovo pravidlo pro derivaci součinu)

(46) $$\begin{cases} y' = \varphi\eta' + \varphi'\eta + \psi' \\ y'' = \varphi\eta'' + 2\varphi'\eta' + \varphi''\eta + \psi'' \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(n-1)} = \varphi\eta^{(n-1)} + \binom{n-1}{1}\varphi'\eta^{(n-2)} + \dots + \varphi^{(n-1)}\eta + \psi^{(n-1)} \\ y^{(n)} = \varphi\eta^{(n)} + n\varphi'\eta^{(n-1)} + \dots + \varphi^{(n)}\eta + \psi^{(n)} \end{cases}$$

Rovnice (2) přejde opět v lineární rovnici; je-li $\psi = 0$, přejde přitom rovnice bez pravé strany substitucí

(47) $$y = \varphi(x)\eta$$

opět v rovnici bez pravé strany.

Rovnice pro η má při $\eta^{(n-1)}$ koeficient

$$n\varphi' + p_1\varphi$$

((2) byla rovnice $y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots + p_{n-1}y' + p_n y = q$).
Volím-li tedy φ tak, že $n\varphi' + p_1\varphi = 0$, tj.

(48) $$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{n}\int p_1(x)\,dx}$$

zbavím se členu s $\eta^{(n-1)}$. Tak např. lineární rovnici 2. řádu lze tímto způsobem převést na tvar

(49) $$y'' + Py = Q \;;$$
jestliže tedy (2) byla rovnicí 2.řádu bez pravé strany, lze ji substitucí (47) převést na tvar

(50) $$y'' + Py = 0 .$$

Samoadjungovaná rovnice 2. řádu bez pravé strany.

Jest to rovnice

(51) $$\frac{d}{dx}\left(P(x)\,\frac{dy}{dx}\right) + Q(x)y = 0 ,$$

neboli

(52) $$Py'' + P'y' + Qy = 0 \;;$$

kde $P(x) \neq 0$ a $P'(x)$ je spojitá.

Obecnou rovnici 2. řádu bez pravé strany

(53) $$y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$$

převedeme na tvar (52) tím, že ji násobíme vhodnou funkcí $\mu(x)$ tak, aby $\mu p_1 = \mu'$; stačí zvolit

(54) $$\mu(x) = e^{\int p_1(x)\,dx}$$

Jiný způsob převedení lineární rovnice 2.řádu bez pravé strana na tvar

$$y'' + Qy = 0 .$$

Předpokládejme, že jsme již rovnici převedli na samoadjungovaný tvar (52) ; zaveďme novou nezávisle proměnnou rovnicí

$$x = \varphi(\xi)$$

s ryze monotonní φ, která má spojitou od nuly různou derivaci a spojitou derivaci 2. řádu, tedy lze také psáti

$$\xi = \psi(x) .$$

Jest

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi}\cdot\psi'(x) ,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{d\xi^2}(\psi'(x))^2 + \frac{dy}{d\xi}\,\psi''(x) .$$

Tím přejde rovnice (52) v rovnici, kde koeficient při $\frac{dy}{d\xi}$ je

$$P(x)\,\psi''(x) + P'(x)\,\psi'(x) = \frac{d}{dx}\,(\,P(x)\,\psi'(x)\,)\ ;$$

tento koeficient bude roven nule, tj. obdržíme rovnici žádaného tvaru, bude-li $P(x)\,\psi'(x)$ konstantní, např.

$$\psi'(x) = \frac{1}{P(x)}\ ,\quad \psi(x) = \int \frac{1}{P(x)}\,dx\ .$$

Provedli jsme tento výpočet u samoadjungované rovnice jen proto, že obecný výpočet je u rovnice (52) jednodušší; při praktickém provádění je to zbytečné, můžeme odstraňovat člen s y' přímo u rovnice dané.

Ukážeme nyní, jak <u>někdy</u> je možno užít vyložených způsobů při řešení rovnice.

<u>Příklad 1.</u> Besselova rovnice má tvar

$$x^2 y'' + x y' + (x^2 - n^2)\,y = 0$$

(n je konstanta). Zbavme se členu s y' zavedením nové <u>neznámé funkce</u> z :

$$y = z\,.\,\varphi(x)\ ,$$

kde podle (48) volím

$$\varphi(x) = e^{-\frac{1}{2}\int \frac{1}{x}\,dx} = \frac{1}{\sqrt{x}}$$

(pro $x > 0$), tedy

$$y = z\,.\,x^{-\frac{1}{2}}$$

$$y' = z' x^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\,x^{-\frac{3}{2}} z$$

$$y'' = z'' x^{-\frac{1}{2}} - z' x^{-\frac{3}{2}} + \frac{3}{4}\,z\,x^{-\frac{5}{2}}\ ;$$

násobím-li rovnici $x^{-\frac{3}{2}}$, dostanu

$$z'' + z\,\left(\frac{\frac{1}{4} - n^2}{x^2} + 1\right) = 0$$

Vidíme, že pro $n = \frac{1}{2}$ dostaneme rovnici $z'' + z = 0$, s fundamentálním systémem řešení $\sin x$, $\cos x$; Besselova rovnice má tedy pro $n = \frac{1}{2}$ řešení

$$\frac{\cos x}{\sqrt{x}} , \quad \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \qquad (x > 0) .$$

Příklad 2. V rovnici

$$xy'' - y' - x^3 y = 0$$

odstraníme člen s y' zavedením nové nezávisle proměnné rovnicí $\xi = \psi(x)$:

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{d\xi} \cdot \psi'(x)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d^2y}{d\xi^2} \psi'^2 + \frac{dy}{d\xi} \psi'' ;$$

rovnice je

$$x (\psi'(x))^2 \frac{d^2y}{d\xi^2} + (x\psi''(x) - \psi'(x)) \frac{dy}{d\xi} - x^3 y = 0 .$$

Volíme $x\psi''(x) - \psi'(x) = 0$, $\psi'(x) = x$, $\psi(x) = \frac{1}{2} x^2$;

$$\xi = \frac{1}{2} x^2$$

a rovnice nabude tvaru

$$x^3 \frac{d^2y}{d\xi^2} - x^3 y = 0 ;$$

zde se pro $x \neq 0$ dá krátit x^3 11/ a máme fundamentální systém e^{ξ} , $e^{-\xi}$; přechodem k původní rovnici dostáváme řešení $e^{\frac{1}{2}x^2}$, $e^{-\frac{1}{2}x^2}$ (a to pro $x \in (-\infty, +\infty)$, tj. i pro $x = 0$).

Příklad 3. Rovnici

$$xy'' + \frac{1}{2} y' - y = 0$$

převedeme na samoadjungovaný tvar násobením funkcí $\mu(x)$; má být

$$(\mu(x)\, x)' = \frac{1}{2} \mu(x) ,$$

$$x\mu'(x) = - \frac{1}{2} \mu(x)$$

11/ Kdyby to nešlo, museli bychom ještě vyjádřit x pomocí ξ .

a vyjde $\mu(x) = x^{-\frac{1}{2}}$

$(x > 0)$. Dostaneme tedy rovnici

$$\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\,\frac{dy}{dx}\right) - \frac{1}{\sqrt{x}}\, y = 0 ,$$

$$\sqrt{x}\,\frac{d}{dx}\left(\sqrt{x}\,\frac{d}{dx}\, y(x)\right) - y(x) = 0 .$$

Zde se nám dvakrát po sobě vyskytne "operátor" $\sqrt{x}\,\frac{d}{dx}$. Uvažme, že $\frac{d}{d\xi} = \frac{dx}{d\xi}\,\frac{d}{dx}$. Zaveďme tedy novou proměnnou ξ tak, aby

$$\frac{dx}{d\xi} = \sqrt{x} , \quad \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x}} , \quad \xi = 2\sqrt{x} ;$$

potom rovnici lze psát

$$\frac{d}{d\xi}\left(\frac{dy}{d\xi}\right) - y = 0 ,$$

s řešeními $e^{\xi}, e^{-\xi}$; původní rovnice má tedy řešení $e^{2\sqrt{x}}$, $e^{-2\sqrt{x}}$ pro $x > 0$.

Ale naše rovnice má řešení též pro $x < 0$; dá se očekávat, že řešení budou opět funkce $e^{\pm 2\sqrt{x}} = e^{\pm 2i\sqrt{-x}}$ $(x < 0)$, a tedy i jejich reálná a imaginární část

$$\cos\,(2\sqrt{-x}), \quad \sin\,(2\sqrt{-x}) ;$$

přesvědčte se přímým dosazením do rovnice, že to je pravda. Obecné řešení má pro $x > 0$ zcela jiný charakter než pro $x < 0$; pro $x < 0$ je to

$$C_1 e^{2\sqrt{x}} + C_2 e^{-2\sqrt{x}}$$

které pro $x \to +\infty$ buďto v absolutní hodnotě roste do nekonečna (pro $C_1 \neq 0$ nebo konverguje k nule (pro $C_1 = 0$); pro $x > 0$ dostáváme oscilující řešení

$$C_1 \cos\,(2\sqrt{-x}) + C_2 \sin(2\sqrt{-x}) = A \sin\,(2\sqrt{-x} - \varphi)$$

$(A, \varphi$ konstanty).

§ 5 . Lineární rovnice s konstantními koeficienty.

Lineární rovnice 1. řádu dovedeme řešiti kvadraturami; v předešlém paragrafu se nám podařilo v příkladech rozřešit několik rovnic 2. řádu, ale byl to celkem náhodný úspěch. Nyní vyřešíme jistou třídu rovnic, které vždy dovedeme řešit kvadraturami, v mnohých případech dokonce algebraickými operacemi. Jsou to tzv. rovnice s konstantními koeficienty, tj. rovnice

$$L(y) = 0 \text{ , po případě } L(y) = q(x) \text{ ,}$$

kde

$$L(y) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-1} y' + a_n y \text{ ,} \tag{55}$$

$a_0, \ldots, a_n$ komplexní konstanty, $a_0 \neq 0$.

Řešme napřed rovnici $L(y) = 0$. Zkusme, nemá-li řešení tvaru $y = e^{\lambda x}$ (λ komplexní konstanta). Dosazením do (55) ihned dostáváme

$$L(e^{\lambda x}) = e^{\lambda x} . F(\lambda) \text{ ,} \tag{56}$$

kde $F(\lambda) = a_0 \lambda^n + a_1 \lambda^{n-1} + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n$.

Je tedy $L(e^{\lambda x}) = 0$ tehdy a jen tehdy, jestliže platí rovnice

$$F(\lambda) = 0 \text{ , tj. } a_0 \lambda^n + \ldots + a_{n-1} \lambda + a_n = 0 \text{ .} \tag{57}$$

Polynom $F(\lambda)$ se nazývá charakteristickým polynomem a rovnice $F(\lambda) = 0$ charakteristickou rovnicí operátoru L ; také říkáme, že F patří k L nebo že L patří k F .

Jestliže rovnice (57) má n různých kořenů $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, dostáváme n řešení

$$e^{\lambda_1 x} , e^{\lambda_2 x} , \ldots , e^{\lambda_n x} \tag{58}$$

o nichž zachvíli dokážeme, že tvoří fundamentální systém. Má-li však rovnice (57) mnohonásobné kořeny, dostáváme v (58) menší počet různých řešení a je proto nutno hledati další řešení. Vezmeme proto tuto otázku obecně.

Operátoru L, danému vzorcem (55) jsme přiřadili v (56) polynom F (prostě: místo $y^{(k)}$ jsme psali λ^k - tím přejde $L(y)$ v $F(\lambda)$).

Zvolme nyní komplexní číslo μ a funkci $y(x)$ přiřadíme funkci $z(x)$ rovnicí

(59) $$y(x) = e^{\mu x} z(x) .$$

Potom (pro derivace součinu užiji Leibnitzovy formule) je

(60) $$\begin{cases} L(y) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \dfrac{d^k y}{dx^k} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \dfrac{d^k}{dx^k} (e^{\mu x} z) = \\ = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mu^j \dfrac{d^{k-j} z}{dx^{k-j}} e^{\mu x} = e^{\mu x} M(z) , \end{cases}$$

kde M je lineární diferenciální operátor, jejž nemusím vypisovat; k němu nechť přísluší charakteristický polynom G ; podle (60) dostanu $G(\lambda)$ takto:

$$G(\lambda) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} \mu^j \lambda^{k-j} = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} (\mu + \lambda)^k =$$

$$= F(\lambda + \mu) .$$

Celkem tedy: Budiž dán lineární diferenciální operátor L (s konstantními koeficienty), kterému přísluší charakteristický polynom F :, zavedeme-li vztah (59), je

(61) $$L(y) = e^{\mu x} M(z) ,$$

kde M je opět lineární diferenciální operátor s konstantními koeficienty; jeho charakteristický polynom G je pak dán rovnicí

(62) $$G(\lambda) = F(\lambda + \mu) .$$

Odtud je vidět: Je-li nějaké číslo λ k-násobným kořenem polynomu F, je číslo $\lambda - \mu$ k- násobným kořenem polynomu G a naopak.

Budiž nyní číslo μ k-násobným ($k \geq 0$) kořenem charakteristické rovnice $F(\lambda) = 0$ [12]; potom rovnice $G(\lambda) = 0$ má k-násobný kořen 0, tedy má G tvar

$$G(\lambda) = A_0\lambda^n + A_1\lambda^{n-1} + \ldots + A_{n-k}\lambda^k = 0\,,\quad A_{n-k} \neq 0\,;$$

tedy

$$M(z) = A_0 z^{(n)} + A_1 z^{(n-1)} + \ldots + A_{n-k} z^{(k)} = 0\,,\quad A_{n-k} \neq 0\,. \tag{63}$$

Odtud je vidět, že rovnice $M(z) = 0$ má (je-li $k > 0$) řešení:

$$z = 1\,,\quad z = x\,,\quad z = x^2\,,\ldots,\quad z = x^{k-1}$$

Z (61), (59) je pak vidět, že rovnice $L(y) = 0$ má řešení

$$e^{\mu x}\,,\ x e^{\mu x}\,,\ x^2 e^{\mu x}\,,\ldots,\ x^{k-1} e^{\mu x}$$

To tedy platí, jestliže číslo μ je k-násobným kořenem charakteristické rovnice $F(\lambda) = 0$.

Nechť tedy rovnice $F(\lambda) = 0$ má p navzájem různých kořenů $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$, z nichž první je k_1-násobný, druhý k_2-násobný atd. ($k_1 > 0$, $k_2 > 0, \ldots$; $k_1 + k_2 + \ldots + k_p = n$). Potom rovnice $L(y)$ má těchto n řešení (v intervalu ($-\infty$, $+\infty$)):

$$\left\{\begin{array}{llll} e^{\lambda_1 x}, & x e^{\lambda_1 x} & ,\ldots, & x^{k_1-1} e^{\lambda_1 x} \\ e^{\lambda_2 x}, & x e^{\lambda_2 x} & ,\ldots, & x^{k_2-1} e^{\lambda_2 x} \\ \multicolumn{4}{l}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \\ e^{\lambda_p x}, & x e^{\lambda_p x} & ,\ldots, & x^{k_p-1} e^{\lambda_p x} \end{array}\right. \tag{64}$$

Dokážeme nyní, že tato řešení jsou lineárně nezávislá (v($-\infty$, $+\infty$), ba dokonce v každém sebe menším intervalu).

D ů k a z : Nechť nějaká lineární kombinace funkcí (64) je rovna nule (pro všechna x jistého intervalu J), tj. nechť je

$$P_1(x)\, e^{\lambda_1 x} + \ldots + P_p(x)\, e^{\lambda_p x} = 0 \tag{65}$$

12/Výrok "jest nulnásobným kořenem" znamená ovšem totéž jako "není kořenem".

pro všechna $x \in \mathcal{J}$, kde $P_1, \dots, P_p$ jsou polynomy (P_j stupně $< k_j$); chci dokázat, že všechny $P_1, \dots, P_p$ jsou nutně nulové polynomy.

Budu postupovat trochu obecněji:

Buďte $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ komplexní čísla, $\lambda_i \neq \lambda_j$ pro $i \neq j$; relaci

(66) $P_1(x) e^{\lambda_1 x} + \dots + P_m(x) e^{\lambda_m x} = 0$ pro všechna $x \in \mathcal{J}$

kde $P_1, \dots, P_m$ jsou nějaké polynomy) nazvu <u>r-členou relací</u>, jestliže mezi polynomy $P_1, \dots, P_m$ je právě r polynomů nenulových. A dokáži: Neexistuje žádná r-člená relace, je-li $r > 0$. Důkaz indukcí:

1) $r = 1$: Jde o relaci $P(x) e^{\lambda x} = 0$, která je ekvivalentní s relací $P(x) = 0$ (P polynom); ale tato rovnice nemůže platit v žádném intervalu, není-li P polynom nulový.

2) Budiž $1 < r \leq m$, budiž dokázáno, že neexistují $(r - 1)$-člené relace a dokažme, že neexistují r-člené relace. Nechť tedy existuje r-člená relace

(67) $P_1(x) e^{\lambda_1 x} + \dots + P_r(x) e^{\lambda_r x} = 0$ pro všechna $x \in \mathcal{J}$

tj. P_j jsou nenulové polynomy, λ_j navzájem různá) - z toho odvodíme spor.

Z (67) plyne

(68) $P_1(x) + P_2(x) e^{\mu_2 x} + \dots + P_r(x) e^{\mu_r x} = 0$ pro $x \in \mathcal{J}$,

kde $\mu_2 = \lambda_2 - \lambda_1$, $\mu_3 = \lambda_3 - \lambda_1$, ..., $\mu_r = \lambda_r - \lambda_1$ jsou čísla <u>různá od nuly a různá navzájem</u>.

Derivujme identitu (68) ℓ-krát tak, že $P_1^{(\ell)}(x) = 0$ (stačí vzít ℓ větší než je stupeň P_1). Podotkněme: Derivace výrazu $P(x) e^{\mu x}$ (P nenulový polynom, $\mu \neq 0$) má tvar $Q(x) e^{\mu x}$ kde Q má <u>přesně týž stupeň</u> jako P : neboť $\frac{d}{dx}(P(x) e^{\mu x}) = e^{\mu x}(\mu P(x) + P'(x))$, kde P' má stupeň nižší než P .

Derivujeme-li tedy (68) ℓ-kráte , dostaneme pro všechna $x \in \mathcal{J}$

$$Q_2(x)e^{\mu_2 x} + \dots + Q_k(x)e^{\mu_k x} = 0\,,$$

kde $Q_2, \dots, Q_k$ jsou nenulové polynomy; to je však ($k - 1$) -člená relace - a to je hledaný spor.

Funkce (64) dávají tedy vskutku fundamentální systém řešení rovnice $L(y) = 0$.

Velmi často se setkáváme s případem, že rovnice $L(y) = 0$ a tedy i charakteristická rovnice $F(\lambda)$ je reálná; imaginární kořeny charakteristické rovnice se tedy sdružují v páry komplexně sdružených kořenů téže násobnosti. Jsou-li $\alpha \pm i\beta$ dva k-násobné kořeny, můžeme - jak víme - místo $2k$ řešení

$$e^{(\alpha \pm i\beta)x}, \; x e^{(\alpha \pm i\beta)x}, \dots, x^{k-1} e^{(\alpha \pm i\beta)x},$$

vzít také jejich reálné a imaginární části:

$$e^{\alpha x}\cos\beta x,\; x e^{\alpha x}\cos\beta x, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x}\cos\beta x,$$

$$e^{\alpha x}\sin\beta x,\; x e^{\alpha x}\sin\beta x, \dots, x^{k-1}e^{\alpha x}\sin\beta x\,.$$

Tím dostáváme reálný fundamentální systém a každé reálné řešení rovnice $L(y) = 0$ je lineární kombinací funkcí tohoto systému s reálnými koeficienty.

Příklad 1. Řešme rovnici

(69) $$y^{(15)} + 2y^{(12)} - y^{(11)} + y^{(9)} - 2y^{(8)} - y^{(5)} = 0$$

Charakteristický polynom

$$\lambda^5(\lambda^{10} + 2\lambda^7 - \lambda^6 + \lambda^4 - 2\lambda^3 - 1) =$$

$$= \lambda^5(\lambda^4 - 1)(\lambda^6 + 2\lambda^3 + 1) =$$

$$= \lambda^5(\lambda^4 - 1)(\lambda^3 + 1)^2 =$$

$$= \lambda^5(\lambda^2 + 1)(\lambda + 1)^3(\lambda - 1)(\lambda^2 - \lambda + 1)^2$$

Kořeny : 0 , i , $-i$, -1 , 1 , $\frac{1+i\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1-i\sqrt{3}}{2}$ s násobnostmi 5 , 1, 1, 3 , 1 2 , 2 .

Fundamentální systém:

$$1, x, x^2, x^3, x^4, \cos x, \sin x, e^{-x}, xe^{-x}, x^2e^{-x}, e^{x},$$

$$e^{\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ xe^{\frac{1}{2}x}\cos\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ e^{\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x,\ xe^{\frac{1}{2}x}\sin\frac{\sqrt{3}}{2}x.$$

Obrátíme se nyní k rovnici s pravou stranou

(70) $$L(y) = q(x) .$$

Ježto dovedeme řešit rovnici $L(y) = 0$, dovedeme řešit rovnici (70) <u>kvadraturami</u> (variace konstant, viz § 3). Ale v některých případech, jež nyní probereme, dovedeme toto řešení provádět dokonce <u>algebraicky.</u> Jde o tento speciální případ:

(71) $$L(y) = p(x)e^{\mu x}$$

kde $p(x)$ je (nenulový) polynom stupně $s \geq 0$, μ komplexní číslo.

Abychom si úlohu zjednodušili, přejdeme opět k funkci z (viz (59)):

$$y = e^{\mu x}z$$

načež $L(y) = e^{\mu x}M(z)$, takže máme řešit rovnici

(72) $$M(z) = p(x) = p_0x^s + p_1x^{s-1} + \ldots + p_s .$$

<u>Nechť číslo μ je k-násobným kořenem charakteristického polynomu rovnice $L(y) = 0$, takže, jak víme, je číslo 0 k-násobným kořenem charakteristického polynomu rovnice $M(z) = 0$</u> (může být ovšem též $k = 0$ - to je dokonce "obecný případ"). To znamená, že charakteristický polynom rovnice <u>$M(z) = 0$ má tvar</u>

$$A_0\lambda^n + \ldots + A_{n-k}\lambda^k \qquad (A_{n-k} \neq 0)$$

takže

$$M(z) = A_0z^{(n)} + A_1z^{(n-1)} + \ldots + A_{n-k}z^{(k)} \qquad (A_{n-k} \neq 0)$$

a máme nalézt aspoň jedno řešení rovnice

$$(73)\quad A_0 z^{(n)} + \ldots + A_{n-k-1} z^{(k+1)} + A_{n-k} z^{(k)} = p_0 x^s + p_1 x^{s-1} + \ldots + p_s$$

Zkusíme řešení ve tvaru

$$(74)\quad z^{(k)} = q_0 \frac{x^s}{s!} + q_1 \frac{x^{s-1}}{(s-1)!} + \ldots + q_{s-1} \frac{x^1}{1!} + q_s$$ [13]

dosaďme do (73) a srovnejme koeficienty jednotlivých mocnin:

$$A_{n-k} \left(q_0 \frac{x^s}{s!} + q_1 \frac{x^{s-1}}{(s-1)!} + \ldots + q_{s-1} \frac{x}{1!} + q_s \right) +$$

$$+ A_{n-k-1} \cdot \left(q_0 \frac{x^{s-1}}{(s-1)!} + \ldots + q_{s-2} \frac{x}{1!} + q_{s-1} \right) +$$

$$+ A_{n-k-2} \cdot \left(q_0 \frac{x^{s-2}}{(s-2)!} + \ldots + q_{s-3} \frac{x}{1!} + q_{s-2} \right) +$$

$$+ \ldots \quad = p_0 x^s + p_1 x^{s-1} + \ldots + p_s$$

Srovnáme koeficienty:

$$A_{n-k} \frac{q_0}{s!} = p_0 \,;$$

$$A_{n-k} \frac{q_1}{(s-1)!} + A_{n-k-1} \frac{q_0}{(s-1)!} = p_1 \,;$$

$$A_{n-k} \frac{q_2}{(s-2)!} + A_{n-k-1} \frac{q_1}{(s-2)!} + A_{n-k-2} \frac{q_0}{(s-2)!} = p_2 \,;$$

atd. (můžeme psát docela mechanicky, ovšem kde se nám vyskytnou výrazy $A_{-1}, A_{-2}, \ldots$, znamenají nulu). Ježto $A_{n-k} \neq 0$, vidíme, že lze postupně volit $q_0, q_1, \ldots, q_s$ ($q_0 \neq 0$) tak, aby tyto rovnice byly splněny.

13/ Faktoriály tam dávám proto, aby se pěkně derivovalo:

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{x^r}{r!} \right) = \frac{x^{r-1}}{(r-1)!} \quad \text{atd.;}$$

$$\frac{d^m}{dx^m} \left(\frac{x^r}{r!} \right) = \frac{x^{r-m}}{(r-m)!} \qquad (m \leq r) .$$

Tedy: Lze zvolit $q_0, \dots, q_s$ tak, že funkce z, mající k-tou derivaci (74), splňuje rovnici (73); např. lze volit

$$(75) \quad z = q_0 \frac{x^{s+k}}{(s+k)!} + q_1 \frac{x^{s+k-1}}{(s+k-1)!} + \dots + q_s \frac{x^k}{k!} \quad ;$$

potom funkce $y = z.e^{\mu x}$ vyhovuje rovnici

$$(71) \qquad L(y) = p(x)e^{\mu x}$$

Podívejme se ještě, že funkce (75) má tvar $x^k . q(x)$, kde q je polynom právě s-tého stupně. Máme tedy toto pravidlo:

Budiž p polynom stupně právě s-tého ($s \geq 0$). Nechť číslo μ je k-násobným kořenem charakteristického polynomu, patřícího k operátoru L (může být ovšem $k = 0$). Potom rovnice

$$(71) \qquad \underline{L(y) = p(x)e^{\mu x}}$$

má řešení tvaru

$$\underline{q(x) . x^k . e^{\mu x}} \quad ,$$

kde q je též polynom stupně právě s-tého. Koeficienty polynomu q lze vypočíst dosazením do rovnice (71) a metodou neurčitých součinitelů.

Poznamka: Mám-li nalézti řešení rovnice

$$L(y) = p(x)e^{\mu x} + p_1(x)e^{\mu_1 x} \quad ,$$

najdu funkce u, v tak, že

$$L(u) = p(x)e^{\mu x} , \quad L(v) = p_1(x)e^{\mu_1 x}$$

a položím $y = u + v$.

Poznamka 2. Mám-li řešit rovnici

$$L(y) = p(x) \cos \mu x \quad ,$$

uvážím, že $\cos \mu x = \frac{1}{2} e^{i\mu x} + \frac{1}{2} e^{-i\mu x}$; dostanu tedy řešení tvaru $P(x) . e^{i\mu x} + Q(x) . e^{-i\mu x}$, kde P, Q jsou jisté polynomy; převedu-li to opět na sinus a cosinus, dostanu řešení tvaru:

$$P_1(x) \cos \mu x + Q_1(x) \sin \mu x .$$

Tedy pozor: Je-li v rovnici na pravé straně např. $\cos \mu x$, může se v hledaném řešení vyskytnout cosinus <u>i sinus</u>. Vezměme to obecně: Nechť jde o reálnou rovnici

$$(76) \quad L(y) = p_1(x) e^{\alpha x} \cos \beta x + p_2(x) e^{\alpha x} \sin \beta x$$

(α, β reálná, $\beta \neq 0$); nechť čísla $\alpha \pm i\beta$ jsou k-násobnými kořeny charakteristické rovnice; potom existuje řešení tvaru

$$q_1(x) . x^k . e^{\alpha x} \cos \beta x + q_2(x) . x^k . e^{\alpha x} . \sin \beta x ;$$

při tom stupně polynomů q_1, q_2 (z nichž ostatně některý může vyjít nulový) nepřekročí maximum ze stupně obou polynomů p_1, p_2 (z nichž ovšem také některý mohl být nulový).

<u>Příklad</u>. Řešme rovnici

$$(77) \qquad y''' - y'' + y' - y = \cos x + 2x - 1 .$$

Charakteristická rovnice $x^3 - x^2 + x - 1 = 0$ má jednoduché kořeny $\pm i$, 1 . Obecné řešení rovnice bez pravé strany je

$$c_1 \cos x + c_2 \sin x + c_3 e^x$$

Hledejme řešení rovnice $y''' - y'' + y' - y = 2x - 1$. Ježto 0 není kořenem charakteristické rovnice, existuje řešení tvaru $Ax + B$ a dosazením najdeme řešení $-2x - 1$. Hledejme dále řešení rovnice $y''' - y'' + y' - y = \cos x$. Zde jde vlastně vpravo o funkce e^{ix} , e^{-ix} a čísla i , $-i$ jsou <u>jednoduchými</u> kořeny charakteristické rovnice; tedy existuje řešení tvaru $x(A \cos x + B \sin x)$ a dosazením do rovnice dostaneme $-\frac{1}{4} x (\cos x + \sin x)$. Takže všechna řešení rovnice (77) jsou dána tvarem (C_1, C_2, C_3 libovolné konstanty)

$$y = (C_1 - \tfrac{1}{4}x)\cos x + (C_2 - \tfrac{1}{4}x)\sin x + C_3 e^{x} - 2x - 1.$$

§ 6. Eulerovy rovnice.

Vedle lineárních rovnic s konstantními koeficienty dají se úplně řešit algebraickými operacemi (po příp. kvadraturami) ještě lineární rovnice Eulerovy, tj. rovnice typu

$$L(y) = q(x) , \tag{78}$$

kde

$$L(y) = a_0 x^n \frac{d^n y}{dx^n} + a_1 x^{n-1} \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + a_{n-1} x \frac{dy}{dx} + a_n y \tag{79}$$

(a_i komplexní konstanty, $a_0 \neq 0$) .

Řešme napřed rovnici $L(y) = 0$; ježto bod $x = 0$ může dělat obtíže, omezíme se napřed na interval $x > 0$. Zkusme dosadit $y = x^{\lambda}$; vyjde

$$\begin{cases} L(x^{\lambda}) = x^{\lambda}(a_0\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1) + \\ \qquad + a_1\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+2) + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n) . \end{cases} \tag{80}$$

Položme

$$\begin{cases} F(\lambda) = a_0\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+1) + \\ \qquad + a_1\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-n+2) + \ldots + a_{n-1}\lambda + a_n \end{cases} \tag{81}$$

Je vidět, že bude $L(x^{\lambda}) = 0$ tehdy a jen tehdy, jestliže $F(\lambda) = 0$. Má-li rovnice $F(\lambda) = 0$ (která je n-tého stupně) n různých kořenů $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, dostáváme n řešení $x^{\lambda_1}, \ldots, x^{\lambda_n}$, o kterých by se snadno dokázalo, že jsou lineárně nezávislé (musili bychom si ještě říci, co rozumíme mocninou $x^{\alpha + i\beta}$). Ale bude pohodlnější, převedeme-li operátor (79) na operátor s konstantními koeficienty a použijeme potom hotové teorie, odvozené v předešlém paragrafu.

Zaveďme novou nezávisle proměnnou ξ substitucí $x = \pm e^{\xi}$

(pro $x > 0$ užiji znamení $+$, pro $x < 0$ znamení $-$, takže intervalu $0 < x < +\infty$ i intervalu $0 > x > -\infty$ odpovídá interval $-\infty < \xi < +\infty$).

Pro jakoukoliv funkci Y proměnné x je potom [14/]

$$\frac{dY}{dx} = \frac{dY}{d\xi} \cdot \frac{d\xi}{dx} = \frac{dY}{d\xi} \cdot \frac{1}{x} ,$$

neboť $\frac{dx}{d\xi} = \pm e^{\xi} = x$. Odtud dále

$$\frac{d^2Y}{dx^2} = \frac{d^2Y}{d\xi^2} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{dY}{d\xi} \cdot \frac{1}{x^2}$$

Tvrdím, že $\frac{d^kY}{dx^k}$ dostanu takto ($k > 0$): Rozvinu polynom v λ :

$$\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-k+1) = \lambda^k + A_{1,k}\lambda^{k-1} + \ldots + A_{k-1,k}\lambda \tag{82}$$

Potom

$$\frac{d^kY}{dx^k} = \left(\frac{d^kY}{d\xi^k} + A_{1,k}\frac{d^{k-1}Y}{d\xi^{k-1}} + \ldots + A_{k-1,k}\frac{dY}{d\xi}\right) \cdot \frac{1}{x^k} . \tag{83}$$

To jsme dokázali pro $k = 1$ (a též pro $k = 2$). Indukce z k na $k+1$: Z (83) plyne

$$\begin{aligned} \frac{d^{k+1}Y}{dx^{k+1}} &= \left(\frac{d^{k+1}Y}{d\xi^{k+1}} + A_{1,k}\frac{d^kY}{d\xi^k} + \ldots + A_{k-1,k}\frac{d^2Y}{d\xi^2}\right) \cdot \frac{1}{x^{k+1}} - \\ &- \frac{k}{x^{k+1}}\left(\frac{d^kY}{d\xi^k} + A_{1,k}\frac{d^{k-1}Y}{d\xi^{k-1}} + \ldots + A_{k-1,k}\frac{dY}{d\xi}\right) \end{aligned} \tag{84}$$

Dále z (82) plyne

$$\begin{aligned} &\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-k+1)(\lambda-k) = \\ &= (\lambda^{k+1} + A_{1,k}\lambda^k + \ldots + A_{k-1,k}\lambda^2) - k(\lambda^k + A_{1,k}\lambda^{k-1} + \ldots + A_{k-1,k}\lambda) \end{aligned} \tag{85}$$

14/Ovšem za předpokladu existence příslušných derivací, existuje-li $\frac{d^kY}{dx^k}$, existuje i $\frac{d^kY}{d\xi^k}$ a naopak. Ovšem: je-li $Y = f(x)$,značí $\frac{d^kY}{dx^k}$ k-tou derivaci funkce $f(x)$, kdežto $\frac{d^kY}{d\xi^k}$ značí k-tou derivaci "funkce složené" $g(\xi) = f(\pm e^{\xi})$.

Co nyní tvrdí vzorec (83)? Tvrdí toto: jestliže součin $\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-k+1)$ rozvinu podle mocnin λ a potom nahradím λ^j výrazem $\frac{d^j Y}{d\xi^j}\cdot\frac{1}{x^k}$, dostanu $\frac{d^k Y}{dx^k}$. Platí-li nyní (83) pro určité k, plyne odtud derivováním (84); ale srovnám-li (84) a (85), dostávám toto: rozvinu-li $\lambda(\lambda-1)\ldots$ $\ldots(\lambda-k+1)(\lambda-k)$ podle mocnin λ a nahradím-li λ^j výrazem $\frac{d^j Y}{d\xi^j}\cdot\frac{1}{x^{k+1}}$, dostanu $\frac{d^{k+1} Y}{dx^{k+1}}$; to je tedy právě (83) s hodnotou $k+1$ místo k.

Tedy (83) platí obecně a tedy

$$(86)\quad \begin{cases} L(y) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^k \frac{d^k y}{dx^k} = \\ = a_n y + \sum_{k=1}^{n} a_{n-k}\left(\frac{d^k y}{d\xi^k} + A_{1,k}\frac{d^{k-1}y}{d\xi^{k-1}} + \ldots + A_{k-1,k}\frac{dy}{d\xi}\right). \end{cases}$$

Pravá strana je zde jistý lineární operátor M <u>s konstantními koeficienty,</u> jehož charakteristický polynom je

$$\sum_{k=1}^{n} a_{n-k}(\lambda^k + A_{1,k}\lambda^{k-1} + \ldots + A_{k-1,k}\lambda) + a_n =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} a_{n-k}\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-k+1) \text{ [15]} = F(\lambda),$$

tj. právě polynom (81).

Řešení rovnice $L(y) = q(x)$ dostanu tedy tak, že řeším rovnici

$$(87)\qquad M(y) = q(\pm e^{\xi})$$

(kde nezávisle proměnná je označena ξ, takže vlevo stojí derivace $\frac{d^k y}{d\xi^k}$), načež do řešení $y(\xi)$ dosadím podle rovnice $x = \pm e^{\xi}$ (neboli $|x| = e^{\xi}$ neboli $\xi = \lg|x|$).

A nyní už můžeme aplikovat výsledek předešlého paragrafu:

15/ "Prázdný součin" $\lambda(\lambda-1)\ldots(\lambda-k+1) = \prod_{j=0}^{k-1}(\lambda-j)$ pro $k=0$ značí ovšem 1.

Budiž $L(y) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^k \frac{d^k y}{dx^k} \quad (a_0 \neq 0)$.

Jsou-li $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ navzájem různé kořeny "charakteristického polynomu" (81) s násobnostmi $k_1, k_2, \ldots, k_p$, má rovnice $L(y) = 0$ tento fundamentální systém řešení:

$$|x|^{\lambda_1}, \; |x|^{\lambda_1} \lg |x| \;, \ldots, \; |x|^{\lambda_1} \lg^{k_1-1} |x|,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$|x|^{\lambda_p}, \; |x|^{\lambda_p} \lg |x| \;, \ldots, \; |x|^{\lambda_p} \lg^{k_p-1} |x|.$$

Dále: Jedno řešení rovnice

$$L(y) = |x|^{\mu} \left(c_0 \lg^{s}|x| + c_1 \lg^{s-1}|x| + \ldots + c_s \right)$$

($s \geq 0$ celé) dostaneme ve tvaru

$$y = |x|^{\mu} \lg^{k}|x| \left(b_0 \lg^{s}|x| + b_1 \lg^{s-1}|x| + \ldots + b_s \right);$$

přičemž číslo k udává, kolikanásobným kořenem charakteristické rovnice je číslo μ ($k \geq 0$).

Uvedená řešení platí jednak v intervalu $0 < x < +\infty$, jednak v intervalu $0 > x > -\infty$ (bod $x = 0$ může dělat těžkosti)

Charakteristický polynom si nemusíme pamatovat: Dosadíme do $L(y)$ "zkusmo" $y = x^{\lambda}$ a dostaneme právě $L(x^{\lambda}) = x^{\lambda} . F(\lambda)$.

Ještě je snad dobře si uvědomit, co značí $|x|^{\alpha + i\beta}$. To vzniklo takto: Vzalo se $e^{(\alpha + i\beta)\xi}$ a sem se dosadilo $e^{\xi} = |x|$, $\xi = \lg |x|$.

Tedy:

$$|x|^{\alpha \pm i\beta} = e^{(\alpha \pm i\beta)\lg|x|} = e^{\alpha \lg|x|} . e^{\pm i\beta \lg|x|} =$$

$$= |x|^{\alpha} \left(\cos(\beta \lg|x|) \pm i \sin(\beta \lg|x|)\right).$$

Dále ovšem platí zase, že při <u>reálné</u> rovnici bez pravé strany mohu místo <u>komplexního</u> řešení vzít jeho reálnou a imaginární část.

<u>Příklad.</u> Řešme rovnici

$$x^3 y''' + 3x^2 y'' + xy' - y = x + 2$$

Levou stranu označme $L(y)$; charakteristická rovnice je

$\lambda(\lambda-1)(\lambda-2) + 3\lambda(\lambda-1) + \lambda - 1 = 0$ neboli $\lambda^3 - 1 = 0$

s jednoduchými kořeny 1, $-\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2}$, takže $L(y) = 0$ má řešení

$$c_1|x| + \frac{c_2}{\sqrt{|x|}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2} \lg|x|\right) + \frac{c_3}{\sqrt{|x|}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lg|x|\right)$$

pro $x > 0$ i pro $x < 0$; v členu $c_1|x|$ jsme si mohli znamení absolutní hodnoty odpustit - proč?). Ježto x^0 není řešením rovnice $L(y) = 0$, má rovnice $L(y) = 2$ ($= 2x^0$) řešení tvaru $C\,.\,|x|^0 = C$ a dostaneme dosazením $C = -2$. Dále $|x|^1$ je řešením a 1 je jednoduchým kořenem, proto rovnice $L(y) = x$ má řešení tvaru $C\,.\,|x|\,.\lg|x|$ pro $x > 0$ a podobně i pro $x < 0$. Ježto oba intervaly bereme odděleně, stačí vzít $C\,.\,x\,.\lg|x|$ a dosadit:[16] $L(Cx\lg|x|) = 3Cx$, tedy nutno volit $C = \frac{1}{3}$. Konečné řešení naší rovnice s pravou stranou je tedy (v $(-\infty, 0)$ i v $(0, +\infty)$) :

$$c_1 x + \frac{c_2}{\sqrt{|x|}} \cos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lg|x|\right) + \frac{c_3}{\sqrt{|x|}} \sin\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\lg|x|\right) - $$
$$- 2 + \frac{1}{3}\, x \lg|x|.$$

§ 7. Nulové body reálného řešení lineární rovnice 2. řádu bez pravé strany.

Pro jednoduchost budeme psáti příslušné rovnice ve tvaru $y'' + P(x)y = 0$ - víme z § 4. C, že takováto úprava je možná;[17] budeme vyšetřovat jen reálné (spojité) funkce $P(x)$ a reálná řešení y ; "triviální" řešení nulové nás ovšem nezajímá.

16/ Opatrně počítat! je $\frac{d}{dx}\lg|x| = \frac{1}{x}$ pro $x > 0$ i pro $x < 0$.

17/ Vycházíme-li od rovnice tvaru $y'' + p_1 y' + p_2 y = 0$, pak pro naši úpravu stačí spojitost $p_1(x)$.

Podotkněme napřed: Jestliže netriviální řešení $y(x)$ má nějaký nulový bod x_0, tj. $y(x_0) = 0$, je nutně $y'(x_0) \neq 0$ (jinak by bylo y nulovým řešením), a tedy $y(x)$ prochází (když x rostouc prochází hodnotou x_0) buďto od kladných hodnot k záporným (když $y'(x_0) < 0$) nebo od záporných ke kladným (když $y'(x_0) > 0$). Dále si připomeňme (věta 13), že $y(x)$ má jenom isolované nulové body (to je vidět i odtud).

Ještě připomeňme toto: mají-li dvě netriviální řešení y_1, y_2 rovnice $y'' + Py = 0$ společný nulový bod, je $y_2(x) = C y_1(x)$, kde C je konstanta od nuly různá.

D ů k a z : $y_1(x_0) = y_2(x_0) = 0$, $y_1'(x_0) \neq 0 \neq y_2'(x_0)$.

Existuje tedy $C \neq 0$ tak, že $y_2'(x_0) = C\, y_1'(x_0)$. Řešení $y(x) = y_2(x) - C y_1(x)$ má tedy tyto vlastnosti: $y(x_0) = 0 = y'(x_0)$, tedy je to řešení nulové, tj. $y_2(x) = C y_1(x)$.

Pro orientaci vezměme nyní rovnici $y'' + a^2 y = 0$ $(a > 0)$ s obecným řešením $y = A \sin(a(x - \varphi))$ (A - amplituda, φ - fáze); vylučujeme případ $A = 0$. Je vidět: dva po sobě jdoucí nulové body mají vzdálenost $\frac{\pi}{a}$. Tedy předně: jestliže dvě řešení nemají společných nulových bodů, potom mezi dvěma sousedními nulovými body jednoho řešení leží vždy právě jeden nulový bod druhého řešení. Za druhé: čím větší a, tím hustěji leží nulové body.

Okolnosti tohoto typu budeme nyní vyšetřovat obecně.

Věta 14. Funkce $P_1(x)$, $P_2(x)$ buďte reálné a spojité v intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle = J$. Budiž reálné $y_1(x)$ netriviální řešení rovnice

(88) $$y'' + P_1(x)\, y = 0$$

v J a budiž reálné $y_2(x)$ netriviální řešení rovnice

(89) $$y'' + P_2(x)\, y = 0$$

v J. Pro všechna $x \in J$ budiž $P_2(x) \geq P_1(x)$ a buďte $x_1 \in J$, $x_2 \in J$ dva sousední nulové body funkce y_1 (tj. $y_1(x_1) = y_1(x_2) = 0$, ale $y_1(x) \neq 0$ pro $x_1 < x < x_2$). Potom $y_2(x)$ má aspoň jeden nulový bod uvnitř J s touto triviální výjimkou: $P_1(x) = P_2(x)$ pro všechna $x \in J$, $y_2(x_1) = 0$ (načež, jak víme, je $y_2(x) =$

$= c\,y_1(x)$ v celém intervalu $\mathcal{J}$, kde c je konstanta, $c \neq 0$ - a tedy ovšem y_2 nemá nulového bodu uvnitř $\mathcal{J}$).

D ů k a z : Z (88), užitého na y_1, plyne

$$y_2 y_1'' + P_1 y_2 y_1 = 0$$

a podobně z (89)

$$y_1 y_2'' + P_2 y_1 y_2 = 0$$

a odtud

$$y_2 y_1'' - y_1 y_2'' = (P_2 - P_1) y_1 y_2 .$$

Levá strana je (spojitou) derivací funkce $y_1' y_2 - y_1 y_2'$ a tedy

$$\left[y_1' y_2 - y_1 y_2' \right]_{x = x_1}^{x = x_2} = \int_{x_1}^{x_2} (P_2 - P_1) y_1 y_2 \, dx .$$

Avšak $y_1(x_1) = y_1(x_2) = 0$, tedy máme

$$(90) \quad y_1'(x_2)\, y_2(x_2) - y_1'(x_1)\, y_2(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} (P_2 - P_1) y_1 y_2 \, dx$$

Předpokládejme, že y_2 <u>nemá</u> nulového bodu uvnitř $\mathcal{J}$ - odtud má vyplynout, že nastává zmíněný vyjímečný případ.

Tedy y_1 má uvnitř $\mathcal{J}$ stále totéž znamení a rovněž tak y_2 - smíme bez újmy obecnosti předpokládat, že $y_1(x) > 0$, $y_2(x) > 0$ uvnitř $\mathcal{J}$. Dále je $y_1'(x_1) \neq 0 \neq y_1'(x_2)$, ale $y_1(x_1) = y_1(x_2) = 0$. Tedy zřejmě $y_1'(x_1) > 0$, $y_1'(x_2) < 0$ a ovšem $y_2(x_2) \geq 0$, $y_2(x_1) \geq 0$. Tedy <u>levá</u> strana v (90) je vždy záporná, vyjma když $y_2(x_1) = y_2(x_2) = 0$ (potom je rovna nule); <u>pravá</u> strana je vždy kladná, vyjma když $P_2(x) = P_1(x)$ v celém intervalu $\mathcal{J}$ (potom je rovna nule). Tedy: rovnice (90) vede vždy ke sporu, vyjma když nastává právě onen vyjímečný případ.

Z věty 14 plyne řada důsledků; zhruba je možno říci asi toto: Vím-li něco o rozložení nulových bodů některého reálného řešení rovnice $y'' + P_1 y = 0$, vím, že nulové body reálných řešení rovnice $y'' + P_2 y = 0$ jsou rozloženy "hustěji", je-li $P_2 \geq P_1$ a že jsou rozloženy "řidčeji", je-li, $P_2 \leq P_1$. Bude užitečno, když si tuto okolnost (kterou jsem nyní vyslovil velmi nepřesně - přesně je formulována ve větě 14) objasníme na několika speciálnějších případech.

Věta 15. Buďte $y_1(x)$, $y_2(x)$ dvě netriviální reálná řešení rovnice

$$y' + P(x)y = 0$$

v intervalu $\mathcal{J}$ (P spojitá a reálná v $\mathcal{J}$). Není-li $y_2 = cy_1$ v $\mathcal{J}$ (c konstantní), potom mezi dvěma sousedními nulovými body funkce y_1, ležícími v $\mathcal{J}$, leží právě jeden nulový bod funkce y_2. Říká se proto, že nulové body řešení y_1, y_2 se navzájem oddělují.

D ů k a z : Buďte $x_1 < x_2$ dva sousední nulové body funkce y_1, ležící v $\mathcal{J}$, užijeme věty 14, kladouce $P_1 = P_2 = P$. Ježto nenastává výjimečný případ z věty 14, existuje $x_3 \in (x_1, x_2)$ tak, že $y_2(x_3) = 0$. Kdyby bylo ještě také $y_2(x_4) = 0$ pro nějaké $x_4 \neq x_3$, $x_4 \in (x_1, x_2)$, ležel by mezi x_3, x_4 podle věty 14 asppň jeden nulový bod funkce y_1 - proti předpokladu.

Věta 16. V intervalu $\mathcal{J}$ budiž P spojité, $P(x) \leq 0$. Budiž $y(x)$ reálné netriviální řešení rovnice

$$y'' + P(x)y = 0$$

v $\mathcal{J}$. Potom má $y(x)$ v $\mathcal{J}$ nejvýše jeden nulový bod.

D ů k a z : Nechť $y(x)$ má aspoň dva nulové body $x_1 < x_2$ v $\mathcal{J}$. Potom podle věty 14 má každé řešení rovnice $y'' + 0 \cdot y = 0$ aspoň jeden nulový bod v $\mathcal{J}$ (neboť $0 \geq P(x)$). Ale jedním řešením rovnice $y'' = 0$ je konstanta, a ta nemá nulových bodů - spor.

Věta 17. Budiž P spojitá v intervalu $\mathcal{J}$; budiž $a > 0$. Budiž $y(x)$ netriviální reálné řešení rovnice

$$y'' + P(x)y = 0 .$$

Potom platí

1) Je-li $P(x) \geq a^2$ v $\mathcal{J}$, potom každý interval $\langle \alpha, \alpha + \frac{\pi}{a} \rangle \subset \mathcal{J}$ obsahuje aspoň jeden nulový bod funkce $y(x)$.

2) Je-li $P(x) \leq a^2$ v $\mathcal{J}$, potom kterékoliv dva nulové

body funkce $y(x)$, ležící v $\mathcal{J}$, jsou od sebe vzdáleny aspoň o $\frac{\pi}{a}$.

D ů k a z : V obou případech srovnávám s řešením $z(x)$ rovnice $z'' + a^2 z = 0$. V případě 1) položím $z(x) = \sin(a(x-\alpha))$; tato funkce má nulové body α, $\alpha + \frac{\pi}{a}$. Podle věty 14 má $y(x)$ buďto nulový bod α nebo nulový bod v $(\alpha, \alpha + \frac{\pi}{a})$. V případě 2) předpokládejme, že v $\mathcal{J}$ leží dva po sobě jdoucí nulové body $x_1 < x_2$ funkce $y(x)$, pro něž $x_2 < x_1 + \frac{\pi}{a}$; z toho odvodíme spor. Sestrojíme funkci $z(x) = \sin(a(x-x_1))$, která je řešením rovnice $z'' + a^2 z = 0$. Podle věty 14 (ježto $a^2 \geq P(x)$) má $z(x)$ jistě nulový bod ξ buďto v intervalu (x_1, x_2) nebo v bodě x_2; tedy

$$x_1 < \xi \leq x_2 < x_1 + \frac{\pi}{a}, \text{ takže } 0 < a(\xi - x_1) < \pi;$$

ale potom $z(\xi) = \sin(a(\xi - x_1)) \neq 0$ - spor.

Vezměme ještě několik příkladů:

<u>Příklad 1.</u> Nechť reálná spojitá funkce $P(x)$ (v intervalu $\langle\alpha, +\infty)$) má pro $x \to +\infty$ limitu $+\infty$. Potom každé reálné netriviální řešení $y(x)$ rovnice

$$y'' + Py = 0$$

má v $\langle\alpha, +\infty)$ nekonečně mnoho nulových bodů $x_1 < x_2 < x_3 < , \dots$, a přitom je $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n - x_{n-1}) = 0$.

<u>Příklad 2.</u> Nechť reálná spojitá funkce $P(x)$ (v intervalu $\langle\alpha, +\infty)$) splňuje podmínku

$$\liminf_{x\to+\infty} P(x) > 0 .$$

Potom každé reálné netriviální řešení $y(x)$ rovnice

$$y'' + Py = 0$$

má v $\langle\alpha, +\infty)$ nekonečně mnoho nulových bodů $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$ a přitom je rozdíl $x_n - x_{n-1}$ omezený (tj. $\sup\limits_{n=2,3} (x_n - x_{n-1}) < < +\infty$)

Příklad 3. Nechť v příkladě 2 je

$$\lim_{x \to +\infty} p(x) = c > 0 .$$

Potom je

$$\lim_{n \to +\infty} (x_n - x_{n-1}) = \frac{\pi}{\sqrt{c}} .$$

Příklad 4. Vezměme jakékoliv netriviální reálné řešení $z(x)$ Besselovy rovnice [18/]

$$z'' + \left(\frac{\frac{1}{4} - n^2}{x^2} + 1 \right) z = 0$$

a označme $x_1 < x_2 < x_3 < \dots$ jeho nulové body ≥ 1. [19/] Potom je $\lim_{p \to +\infty} (x_{p+1} - x_p) = \pi$ pro $n > \frac{1}{2}$ je $x_{p+1} - x_p > \pi$, pro $0 \leq n < \frac{1}{2}$ je $x_{p+1} - x_p < \pi$.

Příklad 5. Vezměme jako příklad Eulerovu rovnici

$$x^2 y'' + k y = 0$$

(k konstanta). Omezme se třeba na $x > 0$. Víme, že existuje řešení tvaru x^λ, kde $\lambda(\lambda - 1) + k = 0$, $\lambda = \frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{1}{4} - k}$.

Je-li $k \leq \frac{1}{4}$, vyjde λ reálné a dostávám reálné řešení x^λ, nemající pro $x > 0$ nulových bodů; je-li však $k > \frac{1}{4}$, dostávám např. reálná řešení $x^{\frac{1}{2}} \cos \left(\frac{\sqrt{4k-1}}{2} \lg x \right)$, jehož nulové body mají hromadný bod $x = +\infty$ i $x = 0$ (to není ve sporu s větou 13, neboť bod $x = 0$ hraje "singulární roli").
Odtud plyne podle věty 14 toto:

18/ Toto není vlastně Besselova rovnice; ale její řešení z mají tytéž nulové body (k l a d n é) jako příslušná řešení $y = \frac{z}{\sqrt{x}}$ Besselovy rovnice (viz příklad 1. v § 4 C).

19/ Vyhýbám se okolí bodu 0, abych neměl obtíže s hromaděním nulových bodů; viz však dále ještě příklad 6.

I. Budiž $f(x)$ spojitá v jistém intervalu $\mathcal{J} = (0,\delta)(\delta > 0)$. Vyšetřujme reálné netriviální řešení $y(x)$ rovnice $y'' + \frac{f(x)}{x^2}y = 0$ v intervalu $\mathcal{J}$. Jestliže $f(x) \leq \frac{1}{4}$ v $\mathcal{J}$, není 0 hromadným bodem nulových bodů funkce $y(x)$. Jestliže však $\liminf_{x \to 0+} f(x) > \frac{1}{4}$, je 0 hromadným bodem nulových bodů funkce $y(x)$.

II. Budiž nyní $f(x)$ spojitá v jistém intervalu $\mathcal{J} = (\delta, +\infty)(\delta > 0)$. Vyšetřujme reálné netriviální řešení $y(x)$ rovnice $y'' + \frac{f(x)}{x^2}y = 0$ v intervalu $\mathcal{J}$. Jestliže $f(x) \leq \frac{1}{4}$ v $\mathcal{J}$, není $+\infty$, hromadným bodem nulových bodů funkce $y(x)$. Jestliže však $\liminf_{x \to +\infty} f(x) > \frac{1}{4}$, je $+\infty$ hromadným bodem nulových bodů funkce $y(x)$.

<u>Příklad 6.</u> Besselova rovnice [20] z příkladu 4 je

$$y'' + \frac{\frac{1}{4} - n^2 + x^2}{x^2} y = 0 \qquad (n \geq 0).$$

Vezměme nějaké její netriviální reálné řešení $y(x)(x > 0)$. Je-li $n > 0$, je $\liminf_{x \to 0+} \frac{1}{4} - n^2 + x^2 = \frac{1}{4} - n^2 < \frac{1}{4}$, tedy $\frac{1}{4} - n^2 + x^2 < \frac{1}{4}$ v jistém dosti malém intervalu $0 < x < \delta$ a tedy 0 není hromadným bodem nulových bodů podle příkladu 5. Zbývá případ $n = 0$, kde $\liminf_{x \to 0+} (\frac{1}{4} - n^2 + x^2) = \frac{1}{4}$, a současně $\frac{1}{4} - n^2 + x^2 > \frac{1}{4}$ zde se tedy výsledku příkl. 5 nedá použít.

Víme, že výsledek příkl. 5 pro $k = \frac{1}{4}$ jsme dostali srovnáním s funkcí $x^{\frac{1}{2}}$, která vyhovuje rovnici $y'' + \frac{1}{4x^2} y = 0$. Zkusme nějakou funkci podobného rázu, třeba funkci [21]

$$z = x^{\frac{1}{2}} \left(\lg \frac{1}{x} \right)^p .$$

20/ Viz 18/

21/ Omezuji se na interval $0 < x < 1$. Tam je $\lg \frac{1}{x} = -\lg x > 0$; ovšem $\lg^2 \frac{1}{x} = \lg^2 x$.

Snadno spočtěte, že

$$z'' = -\frac{1}{4} x^{-\frac{3}{2}} \left(\lg \frac{1}{x}\right)^{p} + p(p-1)\, x^{-\frac{3}{2}} \left(\lg \frac{1}{x}\right)^{p-2} ,$$

tedy

$$z'' + \frac{1}{x^2}\left(\frac{1}{4} - \frac{p(p-1)}{\lg^2 x}\right) z = 0 .$$

Aby koeficient u z byl co největší, volme $p = \frac{1}{2}$. Vidíme: Rovnice

$$z'' + \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{\lg^2 x}\right) z = 0$$

má řešení $z = \sqrt{x \lg \frac{1}{x}}$. jež v $(0,1)$ nemá nulových bodů. Odtud: Jestliže v jistém intervalu $(0, \delta)(\delta > 0)$ je $f(x) \leq \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\lg^2 x}\right)$, potom žádné reálné netriviální řešení $y(x)$ rovnice $y'' + \frac{f(x)}{x^2} y = 0$ nemá nulu za hromadný bod svých nulových bodů. To platí tedy také speciálně pro Besselovu rovnici v případě $n = 0$, tj. pro rovnici

$$y'' + \frac{\frac{1}{4} + x^2}{x^2}\, y = 0 ;$$

neboť zde je pro malá $x > 0$

$$f(x) = \frac{1}{4} + x^2 < \frac{1}{4}\left(1 + \frac{1}{\lg^2 x}\right) ,$$

ježto $\lim\limits_{x \to 0+} x^2 \lg^2 x = 0$.

§ 8. Systémy lineárních rovnic.

Vrátíme se opět k systému (4) z § 1, tj.

$$(91) \qquad \frac{dy_j}{dx} + \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x)\, y_k = b_j(x) \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

V celém tomto paragrafu budiž dán interval J, o funkcích a_{jk}, b_j se předpokládá, že jsou spojité v J; smějí být komplexní. Potom platí věta 5 : zvolím-li $x_0 \in J$ a komplexní čísla $y_1^0, \ldots, y_n^0$, potom existuje jedno a jen jedno řešení (obecně komplexní)

$$y_1(x), \dots, y_n(x)$$

v $\mathcal{J}$, pro které je

$$y_1(x_0) = y_1^0, \dots, y_n(x_0) = y_n^0$$

(jak je rozuměti slovům "jen jedno", je řečeno obšírně ve větě 5.).

Odtud vybudujeme teorii systémů (91) podobně, jak jsme to učinili v § 2 – § 3 pro jednu rovnici n-tého řádu (kterou, jak víme, je možno interpretovat jako systém (91) jistého speciálního tvaru).

Systém n funkcí $y_1, y_2, \dots, y_n$ budu značit krátce y (to je, jak se někdy říká "vektorová funkce" jedné proměnné): každé hodnotě $x \in \mathcal{J}$ je přiřazeno n hodnot $y_1(x), \dots, y_n(x)$ neboli bod $y(x) = [y_1(x), \dots, y_n(x)]$ v n-rozměrném komplexním prostoru. Je-li $z(x) = [z_1(x), \dots, z_n(x)]$ druhý takový systém, a jsou-li α, β komplexní čísla, značím ovšem znakem $\alpha y + \beta z$ systém

$$\alpha y + \beta z = [\alpha y_1 + \beta z_1, \dots, \alpha y_n + \beta z_n].$$

Někdy budu značit různé systémy také týmž písmenem s indexy nahoře, např.

$$y^{(1)} = [y_1^{(1)}, \dots, y_n^{(1)}], \quad y^{(2)} = [y_1^{(2)}, \dots, y_n^{(2)}];$$

aby nenastal omyl, budu v tomto a v následujícím paragrafu značit derivaci vždy znakem $\frac{d^k y_j}{dx^k}$ a nikoliv $y_j^{(k)}$.

Je-li dán systém n funkcí $y = [y_1, \dots, y_n]$, označím znakem $L_j(y)$ funkci

$$L_j(y) = \frac{dy_j}{dx} + \sum_{k=1}^{n} a_{j,k}(x) y_k \qquad (j = 1, 2, \dots, n),$$

máme tedy opět operátory podobně jako dříve. Systém (91) lze tedy napsat ve tvaru

$$L_1(y) = b_1, \dots, L_n(y) = b_n \tag{92}$$

a současně s ním budeme vyšetřovat příslušný systém "bez pravé strany"

(93) $L_1(y) = 0 \ ,\ldots, \ L_n(y) = 0$.

Je zřejmo, že je $L_j(\alpha y + \beta z) = \alpha L_j(y) + \beta L_j(z)$.

Odtud plyne především:

Je-li z řešením systému (92) a je-li u řešením systému (93), je $u + z$ řešením systému (92). Neboť $L_j(u+z) = L_j(u) + L_j(z) = b_j$.

Za druhé: Jsou-li y , z dvě řešení systému (92), je $y-z$ řešením systému (93).

Neboť $L_j(y-z) = L_j(y) - L_j(z) = b_j - b_j = 0$.

Odtud plyne jako v § 2: Probíhá-li u všechna řešení systému (93) (bez pravé strany) a je-li z jedno řešení systému (92) (s pravou stranou), probíhá $u + z$ všechna řešení systému (92).

Tedy máme opět 2 úkoly:

A) Nalézt <u>všechna</u> řešení systému bez pravé strany.

B) Nalézt <u>jedno</u> řešení systému s pravou stranou.

Studujme napřed úkol A).

Především poznamenejme: Jestliže některé řešení $[y_1,\ldots,y_n]$ systému (93) se v některém bodě $x_0 \in \mathcal{J}$ "rovná nule", tj. jestliže

$$y_1(x_0) = \ldots = y_n(x_0) = 0 \ ,$$

potom je

$$y_1(x) = \ldots = y_n(x) = 0$$

pro <u>všechna</u> $x \in \mathcal{J}$. Neboť tyto "nulové funkce" dávají řešení systému (93) s podmínkou $y_1(x_0) = \ldots = y_n(x_0) = 0$ a takové řešení je podle věty 5 <u>jen</u> jedno.

Jsou-li $y^{(1)}, y^{(2)},\ldots, y^{(k)}$ řešení systému (93) (bez pravé strany) a jsou-li $c_1, c_2,\ldots,c_k$ konstanty (komplexní), je také $c_1 y^{(1)} + \ldots + c_k y^{(k)}$ řešením systému (93).

Budiž dáno k systémů po n funkcích ($k > 0$)

$$(94)\quad \begin{cases} y^{(1)} = [y_1^{(1)}, \dots, y_n^{(1)}] \\ y^{(2)} = [y_1^{(2)}, \dots, y_n^{(2)}] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(k)} = [y_1^{(k)}, \dots, y_n^{(k)}] \end{cases} .$$

Říkáme, že tyto systémy jsou <u>lineárně závislé</u> v $\mathcal{J}$, jestliže existují čísla $c_1, \dots, c_k$ tak, že $|c_1| + \dots + |c_k| > 0$ [22] a že

$$c_1 y^{(1)}(x) + \dots + c_k y^{(k)}(x) = o$$

všude v $\mathcal{J}$;[23] to znamená, že

$$(95)\quad \begin{cases} c_1 y_1^{(1)}(x) + \dots + c_k y_1^{(k)}(x) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ c_1 y_n^{(1)}(x) + \dots + c_k y_n^{(k)}(x) = 0 \end{cases}$$

pro všechna $x \in \mathcal{J}$.

Budiž nyní dáno n systémů po n funkcích:

$$y^{(1)} = [y_1^{(1)}, \dots, y_n^{(1)}]$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^{(j)} = [y_1^{(j)}, \dots, y_n^{(j)}]$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y^{(n)} = [y_1^{(n)}, \dots, y_n^{(n)}]$$

22/ To znamená, že aspoň jedno z těchto čísel je různé od nuly.

23/ Znakem o rozumím "počátek", tj. bod $[0, 0, \dots, 0]$.

označme

$$(96)\quad W(x) = W_{y^{(1)},\dots,y^{(n)}}(x) = \begin{vmatrix} y_1^{(1)}(x), \dots, y_n^{(1)}(x) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1^{(n)}(x), \dots, y_n^{(n)}(x) \end{vmatrix}.$$

Věta 18. Jestliže systémy $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$ (každý o n funkcích) jsou lineárně závislé v $\mathcal{J}$, potom všude v $\mathcal{J}$ je

$$W_{y^{(1)},\dots,y^{(n)}}(x) = 0 .$$

D ů k a z : Existují $c_1, \dots, c_n$ (která nejsou vesměs rovna nule) tak, že pro každé $x \in \mathcal{J}$ platí rovnosti (95), kde nutno klásti $k = n$. Tedy je determinant této soustavy roven nule.

Obrátit se tato věta nedá. Např. pro $n = 2$ a pro systémy

$$y^{(1)}(x) = [x, 0]$$

$$y^{(2)}(x) = [x^2, 0]$$

je $W(x) = \begin{vmatrix} x, & 0 \\ x^2, & 0 \end{vmatrix} = 0$, ale v žádném intervalu $\mathcal{J}$ neplatí rovnice

$$c_1 y^{(1)}(x) + c_2 y^{(2)}(x) = 0 \text{ , tj. } c_1 x + c_2 x^2 = 0 ,$$

$c_1 . 0 + c_2 . 0 = 0$ s konstantními c_1, c_2 , jež nejsou obě rovny nule. Neboť jakmile je $c_1 x + c_2 x^2 = 0$ ve třech různých bodech, je nutně $c_1 = c_2 = 0$.

Ale u řešení systému (93) se tato věta obrátit dá:

Věta 19. Budiž $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$ n řešení systému (93) v $\mathcal{J}$ ($y^{(j)} = [y_1^{(j)}, \dots, y_n^{(j)}]$) .

Jestliže

$$W_{y^{(1)},\dots,y^{(n)}}(x_0) = 0$$

aspoň v jednom bodě $x_0 \in \mathcal{J}$, jsou systémy $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$ lineárně závislé v $\mathcal{J}$.

D ů k a z : Určíme čísla $c_1, \dots, c_n$, ne vesměs rovná nule tak, že

$$c_1 y_1^{(1)}(x_0) + \ldots + c_n y_1^{(n)}(x_0) = 0$$

$$c_1 y_2^{(1)}(x_0) + \ldots + c_n y_2^{(n)}(x_0) = 0 \quad ;$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$c_1 y_n^{(1)}(x_0) + \ldots + c_n y_n^{(n)}(x_0) = 0$$

to je možné, ježto $W(x_0) = 0$. Sestrojme systém $y = c_1 y^{(1)} + \ldots$ $\ldots + c_n y^{(n)}$ (k-tá funkce systému je $y_k(x) = c_1 y_k^{(1)}(x) + \ldots$ $\ldots + c_n y_k^{(n)}(x)$) . To je opět řešení systému (93) a je

$$y_1(x_0) = \ldots = y_n(x_0) = 0 ,$$

takže (jak víme) je nutně $y_1(x) = \ldots = y_n(x) = 0$ pro všechna $x \in \mathcal{J}$, tj. $c_1 y^{(1)}(x) + \ldots + c_n y^{(n)}(x) = \sigma$ pro všechna $x \in \mathcal{J}$ - máme lineární závislost.

Odtud a z věty 18 ihned plyne:

<u>Věta 20.</u> Mám-li n řešení $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$ systému (93), potom funkce (96) je buďto pro všechna $x \in \mathcal{J}$ různá od nuly nebo je pro všechna $x \in \mathcal{J}$ rovna nule. První případ nastává, jsou-li řešení lineárně nezávislá, druhý, jsou-li řešení linerárně závislá v $\mathcal{J}$.

Vidíte, že věc je úplně analogická, jako v § 2 u jedné rovnice n-tého řádu. Funkce $W_{y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}}$ zde hraje touž roli jako dříve hrál Wrońského determinant $W_{y_1, \ldots, y_n}$. Omyl v označení nemůže nastat: jsou-li $y_1, \ldots, y_n$ funkce, jde o determinant Wrońského; jsou-li $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$ systémy po n funkcích ($y^{(k)} = \left[y_1^{(k)}, \ldots, y_n^{(k)}\right]$ jde o funkci (96); pro $n = 1$ obojí splývá.

Jestliže systém n řešení soustavy (93) je lineárně nezávislý v $\mathcal{J}$, říkáme mu <u>fundamentální systém řešení</u> (v $\mathcal{J}$).

<u>Věta 21.</u> Budiž $y^{(1)}, \ldots, y^{(n)}$ fundamentální systém řešení soustavy (93). Potom každé řešení y lze psát ve tvaru

$$y = c_1 y^{(1)} + \dots + c_n y^{(n)} ,$$

kde c_i jsou konstanty; tyto konstanty jsou řešením y jednoznačně určeny.

D ů k a z : Zvolme bod $x_0 \in \mathcal{J}$ a určeme $c_1, \dots, c_n$ tak, že

$$y_1(x_0) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_1^{(j)}(x_0)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$y_n(x_0) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_n^{(j)}(x_0) .$$

Potom řešení $y = [y_1, \dots, y_n]$ a řešení

$$z = [z_1, \dots, z_n] = \sum_{j=1}^{n} c_j y^{(j)} \quad \text{kde} \quad z_k(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_k^{j}(x)$$

mají tu vlastnost, že

$$y_1(x_0) = z_1(x_0) , \dots , y_n(x_0) = z_n(x_0) .$$

Podle věty o jednoznačnosti je tedy

$$y(x) = z(x) = \sum_{j=1}^{n} c_j y^{(j)}(x) .$$

Je-li současně také $y(x) = \sum_{j=1}^{n} d_j y^{(j)}(x)$, je

$$\sum_{j=1}^{n} (c_j - d_j)\, y^{(j)}(x) = o$$

pro $x \in \mathcal{J}$ a tedy z lineární nezávislosti plyne $c_j = d_j$ $(j = 1, \dots, n)$.

Věta 22. Existují fundamentální systémy (při reálných $a_{j,k}(x)$ dokonce reálné fundamentální systémy).

D ů k a z : Zvolme $x_0 \in \mathcal{J}$. Podle věty 5 existují řešení

$$y^{(j)} = [y_1^{(j)}, \dots, y_n^{(j)}] \qquad (j = 1, \dots, n)$$

tak, že

$$y_k^{(j)}(x_0) = 0 \quad \text{pro} \quad k \neq j , \quad y_k^{(k)}(x_0) = 1 .$$

Tedy

$$W_{y^{(1)},\dots,y^{(n)}}(x_0) = \begin{vmatrix} 1, & 0, & \dots, & 0 \\ 0, & 1, & \dots, & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0, & 0, & \dots, & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Při reálných $a_{j,k}$ jsou $y_k^{(j)}(x)$ podle pozn.2. k větě 5 též reálné.

Věta 23. Buďte $y^{(1)},\dots, y^{(n)}$ řešení soustavy (93), $y^{(k)} = \left[y_1^{(k)},\dots, y_n^{(k)}\right]$, buďte $a_{k,r}$ komplexní čísla a položme

$$z_j^{(r)} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,r} y_{(j)}^{(k)} \qquad (j = 1,\dots, n\ ;\ r = 1,\dots,n).$$

Potom

$$z^{(1)} = \left[z_1^{(1)},\dots, z_n^{(1)}\right],\dots,\ z^{(n)} = \left[z_1^{(n)},\dots, z_n^{(n)}\right]$$

jsou řešeními systému (93) 24/ a je

$$W_{z^{(1)},\dots,z^{(n)}} = \begin{vmatrix} a_{1,1},\dots, a_{1n} \\ \dots\dots\dots \\ a_{n1},\dots, a_{nn} \end{vmatrix} . W_{y^{(1)},\dots,y^{(n)}}$$

Tedy $z^{(1)},\dots, z^{(n)}$ tvoří fundamentální systém tehdy a jen tehdy, tvoří-li $y^{(1)},\dots,y^{(n)}$ fundamentální systém a je-li mimoto determinant čísel a_{kr} různý od nuly.

D ů k a z : plyne okamžitě z věty o násobení determinentů.

Podobně jako v dodatku k větě 10 můžeme také zde připojit poznámky o realitě: Předpokládejme, že v systému (93) $L_1(y) = 0,\dots, L_n(y) = 0$ jsou funkce a_{jk} reálné. Je-li

---

24/ Můžeme totiž psáti $z^{(r)} = \sum_{k=1}^{n} a_{k,r} y^{(k)}$

$$y = [y_1, \dots, y_n]$$

nějaké komplexní řešení ($y = u + iv$, $y_k = u_k + iv_k$, $u = [u_1, \dots, u_n]$, $v = [v_1, \dots, v_n]$; u_k, v_k reálné funkce) je zřejmě

$$0 = L_j(y) = L_j(u) + iL_j(v) ,$$

kde funkce $L_j(u)$, $L_j(v)$ jsou reálné. Tedy je nutně

$$L_j(u) = 0 , \quad L_j(v) = 0 ,$$

tj. <u>reálná i imaginární část řešení jsou zase řešeními.</u> Vyjdeme-li z reálného fundamentálního systému $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$, a napíšeme-li kterékoliv řešení ve tvaru

$$y = c_1 y^{(1)} + \dots + c_n y^{(n)}$$

je zřejmě

$$\mathcal{R} y = \mathcal{R} c_1 . y^{(1)} + \dots + \mathcal{R} c_n . y^{(n)}$$

$$\mathcal{J} y = \mathcal{J} c_1 . y^{(1)} + \dots + \mathcal{J} c_n . y^{(n)} ;$$

tedy y je reálné tehdy a <u>jen</u> tehdy, když $c_1, \dots, c_n$ jsou reálná čísla.

Často dostáváme fundamentální systém ve tvaru

$$v^{(1)}, \dots, v^{(r)}, \ w^{(1)}, \ \overline{w^{(1)}}, \dots, w^{(s)}, \ \overline{w^{(s)}}$$

kde $v^{(j)}$ jsou reálná řešení, $w^{(k)}$, $\overline{w^{(k)}}$ vždy dvě komplexně sdružená. Chceme-li dostati reálný fundamentální systém, můžeme každý pár $w^{(k)}$, $\overline{w^{(k)}}$ nahradit párem

$$\mathcal{R} w^{(k)} = \frac{1}{2} (w^{(k)} + \overline{w^{(k)}})$$

$$\mathcal{J} w^{(k)} = \frac{1}{2i} (w^{(k)} - \overline{w^{(k)}}) ,$$

neboť determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} , & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2i} , & -\frac{1}{2i} \end{vmatrix} = -\frac{1}{2i} \neq 0 .$$

Odvodíme ještě analogon věty 11:

<u>Věta 24.</u> Pro libovolný systém n řešení $y^{(1)}, \dots, y^{(n)}$ soustavy (93) a pro $x_0 \in \mathcal{J}$ platí vzorec

$$W_{y^{(1)},\dots,y^{(n)}}(x) = W_{y^{(1)},\dots,y^{(n)}}(x_0) . \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{n} a_{kk}(t) dt\right)$$

pro $x \in \mathcal{J}$ (pro zřetelnost píši $\exp z = e^z$).

D ů k a z : $\frac{dW(x)}{dx}$ je součet n determinantů, z nichž k-tý má tvar

$$\begin{vmatrix} y_1^{(1)}, \dots, y_{k-1}^{(1)}, \frac{dy_k^{(1)}}{dx}, y_{k+1}^{(1)}, \dots, y_n^{(1)} \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y_1^{(n)}, \dots, y_{k-1}^{(n)}, \frac{dy_k^{(n)}}{dx}, y_{k+1}^{(n)}, \dots, y_n^{(n)} \end{vmatrix}$$

Dosadím-li sem $\frac{dy_k^{(j)}}{dx} = -\sum_{l=1}^{n} a_{kl} y_l^{(j)}$ a přičtu ke k-tému sloupci ostatní sloupce, násobené $a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{k,k-1}, a_{k,k+1}, \dots, a_{k,n}$, dostanu $-a_{kk}(x)\, W(x)$, takže

$$\frac{dW(x)}{dx} = -\sum_{k=1}^{n} a_{kk}(x) . W(x)$$

Této diferenciální rovnici vyhovují <u>pouze</u> funkce tvaru

$$W(x) = C . \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \sum_{k=1}^{n} a_{kk}(t) dt\right);$$

konstanta C se určí dosazením $x = x_0$.

Můžeme dále dokázat, že neexistuje více než n lineárně nezávislých řešení a podobné poznámky, jako jsme dokázali mezi větami 11 a 12. Dále můžeme dokázat větu analogickou větě 12 (existence jedné a jen jedné soustavy (93) s danými n řešeními - za jistých předpokladů). To všechno nebudeme v dalším potřebovat; čtenář si to může odvodit jako cvičení.

Úloha A) (řešení systému bez pravé strany) se tedy redukuje na úlohu nalézt fundamentální systém řešení. Jestliže pak tento fundamentální systém je nalezen, dovedeme řešení soustavy (92) (s pravou stranou) nalézti kvadraturami; jak se to dá dělat, nyní vyložíme.

Nechť tedy $y^{(1)},\dots,y^{(n)}$ ($y^{(j)} = [y_1^{(j)},\dots,y_n^{(j)}]$)

je fundamentální systém řešení soustavy

$$L_1(y) = 0,\dots,L_n(y) = 0 \quad \left(L_j(y) = \frac{dy_j}{dx} + \sum_{k=1}^{n} a_{jk}(x)\, y_k \right) \tag{97}$$

Budeme se snažit nalézt funkce $C_1(x),\dots,$ $C_n(x)$ se spojitou první derivací tak, aby

$$C_1 y^{(1)} + C_2\, y^{(2)} + \dots + C_n y^{(n)} = Y \tag{98}$$

bylo řešením soustavy

$$L_1(y) = b_1(x)\ ,\dots,\ L_n(y) = b_n(x) \tag{99}$$

Přitom a_{jk}, b_j jsou spojité a $y_k^{(j)}$ mají spojité derivace v $\mathcal{J}$. Výraz (98) značí ovšem systém n funkcí $Y_1,\dots,Y_n$, kde

$$Y_k = C_1 y_k^{(1)} + \dots + C_n y_k^{(n)}.$$

Jest

$$L_j(Y) = \frac{dY_j}{dx} + \sum_{k=1}^{n} a_{jk} Y_k =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} C_r \frac{dy_j^{(r)}}{dx} + \sum_{r=1}^{n} y_j^{(r)} \frac{dC_r}{dx} + \sum_{k=1}^{n}\sum_{r=1}^{n} a_{jk}\, C_r\, y_k^{(r)} =$$

$$= \sum_{r=1}^{n} y_j^{(r)} \frac{dC_r}{dx} + \sum_{r=1}^{n} C_r \left(\frac{dy_j^{(r)}}{dx} + \sum_{k=1}^{n} a_{jk}\, y_k^{(r)} \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} y_j^{(k)} \frac{dC_k}{dx} + \sum_{k=1}^{n} C_k L_j(y^{(k)}) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} y_j^{(k)} \frac{dC_k}{dx} .$$

Aby Y dávalo řešení systému (99), je nutno a stačí, aby bylo

$$\sum_{k=1}^{n} y_j^{(k)}(x) \frac{dC_k(x)}{dx} = b_j(x) \quad \text{pro } j = 1,\ldots,n .$$

Ježto $W_{y^{(1)},\ldots,y^{(n)}}(x) \neq 0$, lze odtud vskutku (podle Cramerova pravidla) vypočíst $\frac{dC_k(x)}{dx}$ jako spojité funkce a a odtud získáme hledané funkce C_k ($k = 1,\ldots,n$) kvadraturami.

Tím je úkol rozřešen.

§ 9. Systémy lineárních rovnic s konstantními koeficienty.

Budeme se nyní zabývat systémy bez pravé strany

$$\frac{dy_j}{dx} + \sum_{k=1}^{n} a_{jk} y_k = 0 \qquad (j = 1,\ldots,n), \tag{100}$$

kde a_{jk} jsou konstanty (komplexní). Řešení ovšem hledáme v intervalu $(-\infty, +\infty)$.

Jsouce vedeni analogií s jednou rovnicí n-tého řádu, zkusíme, zda neexistuje řešení tvaru

$$y = [c_1 e^{\lambda x}, c_2 e^{\lambda x}, \ldots, c_n e^{\lambda x}] \tag{101}$$

(tj. $y_j = c_j e^{\lambda x}$), kde c_j jsou konstanty, z nichž aspoň jedna má být od nuly různá (jinak bychom dostali triviální řešení $y_1 = \ldots = y_n = 0$). Dosadíme-li do (100) $y_j = c_j e^{\lambda x}$ a krátíme číslem $e^{\lambda x} \neq 0$, vidíme, že má být

$$\lambda c_j + \sum_{k=1}^{n} a_{jk} c_k = 0 \qquad (j = 1,\ldots,n) \tag{102}$$

- to je nutná a postačující podmínka. Přepišme to názorněji:

$$
\begin{aligned}
(a_{11}+\lambda)c_1 + a_{12}c_2 + \dots + a_{1n}c_n &= 0 \\
a_{21}c_1 + (a_{22}+\lambda)c_2 + \dots + a_{2n}c_n &= 0 \\
\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\
a_{n1}c_1 + a_{n2}c_2 + \dots + (a_{nn}+\lambda)c_n &= 0 .
\end{aligned}
$$

Aby se těmto rovnicím dalo vyhovět čísly $c_1, \dots, c_n$, která nejsou vesměs rovna nule, je nutno a stačí, aby λ splňovalo podmínku

$$
(103) \qquad \begin{vmatrix} a_{11}+\lambda, & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}+\lambda, & \dots, & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \dots, & a_{nn}+\lambda \end{vmatrix} = 0 .
$$

Levou stranu v (103) (je to polynom stupně n-tého v λ) nazveme <u>charakteristickým polynomem</u> soustavy (100). Vidíme: <u>Je-li λ kořenem charakteristického polynomu, potom existuje netriviální řešení soustavy (100),</u> které má tvar (101).

Dokážeme nyní obecně:

Nechť λ_0 je p-násobným kořenem charakteristického polynomu : potom soustava (100) má p lineárně nezávislých řešení $y^{(0)}, \dots, y^{(p-1)}$ tohoto tvaru

$$
(104) \qquad y^{(h)}(x) = \left[P_{h1}(x)e^{\lambda_0 x}, P_{h2}(x)e^{\lambda_0 x}, \dots, P_{hn}(x)e^{\lambda_0 x} \right]
$$

kde P_{hk} jsou polynomy nejvýše stupně h.

D ů k a z : Tuto větu jsme právě dokázali pro $p = 1$. Buďiž tedy $p > 1$, buďiž věta dokázána pro $(p-1)$-násobné kořeny a dokažme ji pro p-násobný kořen. Pro zkrácení zaveďme toto označení:

$$\begin{vmatrix} \alpha_{11}, & \dots, & \alpha_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \alpha_{n1}, & \dots, & \alpha_{nn} \end{vmatrix} = \underset{\substack{j=1,\dots,n \\ k=1,\dots,n}}{\mathfrak{Det}} (\alpha_{j,k}) \quad ;$$

$\delta_{jk} = 0$ pro $j \neq k$, $\delta_{kk} = 1$;

(105) $$\mathfrak{D}(\lambda) = \underset{\substack{j=1,\dots,n \\ k=1,\dots,n}}{\mathfrak{Det}} (a_{jk} + \delta_{jk}\lambda) .$$

$\mathfrak{D}(\lambda)$ je tedy charakteristický polynom; předpokládejme, že $\mathfrak{D}(\lambda)$ má p-násobný kořen λ_0. Víme už, že soustava (100) má řešení

(106) $$y^0(x) = [c_1 e^{\lambda_0 x}, \dots, c_n e^{\lambda_0 x}]$$

kde $c_1, \dots, c_n$ je nenulové řešení soustavy lineárních rovnic (102) (v nichž je nutno psát $\lambda = \lambda_0$), tj.

(107) $$\lambda_0 c_j + \sum_{k=1}^{n} a_{jk} c_k = 0 \qquad (j = 1, \dots, n) .$$

Bez újmy obecnosti předpokládejme $c_1 \neq 0$ (kdyby tomu tak nebylo, přečíslujme $y_1, \dots, y_k$ v (100), čímž se v $\mathfrak{D}(\lambda)$ pouze permutují sloupce a týmž způsobem řádky - neboť $\frac{dy_j}{dx}$ se má vyskytnout v j-té rovnici).

Zkusme nyní napsat řešení soustavy (100) ve tvaru $[y_1, \dots, y_n]$, kde

(108) $y_1 = c_1 z_1$, $y_2 = c_2 z_1 + z_2, \dots, y_k = c_k z_1 + z_k, \dots, y_n =$
$= c_n z_1 + z_n$.

Tj. : Ptáme se, jak musí vypadat $z_1, \dots, z_n$, aby funkce $y_1, \dots, y_n$, dané rovnicemi (108), dávaly řešení soustavy (100).[25]

25/ Jedno řešení už známe: klademe-li $z_1 = e^{\lambda_0 x}$, $z_2 = z_3 =$ $= \dots = z_n = 0$, dostáváme řešení (106).

Za tím účelem dosadíme do rovnic (100) za $y_1, \ldots, y_n$ funkce (108). Dostáváme z první rovnice

$$(109) \qquad c_1 \frac{dz_1}{dt} + z_1 \sum_{k=1}^{n} a_{1k} c_k + \sum_{k=2}^{n} a_{1k} z_k = 0$$

a z ostatních

$$(110) \quad c_j \frac{dz_1}{dt} + \frac{dz_j}{dt} + z_1 \sum_{k=1}^{n} a_{jk} c_k + \sum_{k=2}^{n} a_{jk} z_k = 0 \quad (j = 2, \ldots, n).$$

Ve (109) a (110) užijeme (107) a dostaneme

$$(111) \qquad \frac{dz_1}{dt} - \lambda_0 z_1 + \frac{1}{c_1} \sum_{k=2}^{n} a_{1k} z_k = 0 ,$$

$$(112) \quad c_j \frac{dz_1}{dt} - c_j \lambda_0 z_1 + \frac{dz_j}{dt} + \sum_{k=2}^{n} a_{jk} z_k = 0 \quad (j = 2, \ldots, n)$$

Odečteme-li od (112) rovnici (111) násobenou c_j, vypadne z_1 a rovnice (112) nabudou tvaru

$$(113) \quad \frac{dz_j}{dt} + \frac{1}{c_1} \sum_{k=2}^{n} (a_{jk} c_1 - a_{1k} c_j) z_k = 0 \quad (j = 2, \ldots, n).$$

Máme tedy pro $z_1, \ldots, z_n$ rovnice (111), (113). Přitom (113) je $n - 1$ rovnic pro $z_2, \ldots, z_n$; určíme-li $z_2, \ldots, z_n$, je (111) lineární rovnice pro z_1 (1.řádu), kterou dovedeme řešit kvadraturami.

Položme $\frac{1}{c_1} (a_{jk} c_1 - a_{1k} c_j) = A_{jk}$ ($j = 2, \ldots, n$; $k = 2, \ldots, n$).

Charakteristickým polynomem soustavy (113) je polynom

$$(114) \qquad \Delta(\lambda) = \underset{\substack{j = 2, \ldots, n \\ k = 2, \ldots, n}}{\mathrm{Det}} (A_{jk} + \delta_{jk} \lambda)$$

V determinantu

$$c_1 \mathfrak{D}(\lambda) = \begin{vmatrix} c_1 a_{11} + c_1 \lambda, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ c_1 a_{21}, & a_{22} + \lambda, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ c_1 a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} + \lambda \end{vmatrix}$$

násobme druhý, třetí ,..., n-tý sloupec čísly $c_2, c_3, \dots c_n$ a přičteme k prvnímu sloupci, načež v prvním sloupci a j-tém řádku bude
řádku bude $c_j\lambda + \sum_{k=1}^{n} a_{jk}c_k$, což podle (107) dá $c_j(\lambda-\lambda_o)$; tedy

$$c_1\mathcal{D}(\lambda) = \begin{vmatrix} c_1(\lambda-\lambda), & a_{12}, & \dots, & a_{1n} \\ c_2(\lambda-\lambda_o), & a_{22}+\lambda, & \dots & , a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ c_n(\lambda-\lambda_o), & a_{n2}, & \dots, & a_{nn}+\lambda \end{vmatrix}$$

Nyní od j-tého řádku odečtu první řádek násobený $\frac{c_j}{c_1}$; uvážíme-li, že

$$a_{jk} - \frac{c_j}{c_1} a_{1k} = A_{jk}$$, dostaneme

$$c_1\mathcal{D}(\lambda) = \begin{vmatrix} c_1(\lambda-\lambda_o), & a_{12}, & a_{13}, & \dots, & a_{1n} \\ 0 & , A_{22}+\lambda, & A_{23}, & \dots, & A_{2n} \\ 0 & , A_{32} & , A_{33}+\lambda, & \dots, & A_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & , A_{n2} & , A_{n3}, & \dots, & A_{nn}+\lambda \end{vmatrix}$$

tedy (viz (114))

$$\mathcal{D}(\lambda) = (\lambda-\lambda_o)\,\Delta(\lambda) .$$

Ježto $\mathcal{D}(\lambda)$ měl p-násobný kořen λ_o, má $\Delta(\lambda)$ - tj. charakteristický polynom soustavy (113) - kořen λ_o (p - 1)-násobný.

Podle indukčního předpokladu má tedy soustava (113) (pro n - 1 neznámých funkcí $z_2, \dots, z_n$) p - 1 lineárně nezávislých řešení

(115)

$$z_2^{(h)} = \left[Q_{h2}(x)e^{\lambda_o x},\ z_3^{(h)} = Q_{h3}(x)e^{\lambda_o x}, \dots, z_n^{(h)} = Q_{hn}(x)e^{\lambda_o x}\right]$$

(h = 1,2,..., p - 1), kde Q_{hk} je polynom stupně nejvýše h - 1.

Ale já mám řešit soustavu n rovnic (111), (113): tj. mám k systému $x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$ přidat ještě funkci $x_1^{(k)}$ tak, aby platilo (111) (pro $x_j = x_j^{(k)}$).

Zopakujme řešení rovnice $\frac{dx}{dt} - \lambda_0 x + P(t) = 0$:

Řeší se rovnice bez pravé strany $\frac{dx}{dt} - \lambda_0 x = 0$, $x = Ce^{\lambda_0 t}$, kde C je konstanta. Nyní užiji variace konstant: hledám C jako funkci t tak, aby $x = Ce^{\lambda_0 t}$ vyhovovalo rovnici s pravou stranou, tj.

$$\frac{dC}{dt} e^{\lambda_0 t} + \lambda_0 C e^{\lambda_0 t} - \lambda_0 C e^{\lambda_0 t} + P(t) = 0$$

neboli

$$\frac{dC}{dt} = - P(t) e^{-\lambda_0 t}$$

a k tomu stačí např.

$$C(t) = -\int_0^t P(t) e^{-\lambda_0 t} dt$$

V případě rovnice (111) (kam za $x_2, \dots, x_n$ dosadím funkce $x_2^{(k)}, \dots, x_n^{(k)}$ ze (115) dostávám rovnici

$$\frac{dx_1^{(k)}}{dt} - \lambda_0 x_1^{(k)} + \frac{1}{c_1} \sum_{k=2}^{n} a_{1k} Q_{hk}(t) e^{\lambda_0 t} = 0$$

a tedy vyhovuje řešení

$$x_1^{(k)}(t) = -e^{\lambda_0 t} \int_0^t \frac{1}{c_1} \sum_{k=2}^{n} a_{1k} Q_{hk}(t) dt \quad ,$$

což lze psát ve tvaru

$$x_1^{(k)}(t) = Q_{k1}(t) e^{\lambda_0 t} \quad , \tag{116}$$

kde $Q_{k1}(t)$ je polynom stupně nejvýše k .

A nyní najdeme již snadno p řešení soustavy (100) tvaru (104):

(104) $y^{h}(x) = [P_{h1}(x)e^{\lambda_0 x},\ P_{h2}(x)e^{\lambda_0 x}, \dots, P_{hn}(x)e^{\lambda_0 x}]$

($h = 0, 1, \dots, p-1$), kde P_{hk} je polynom nejvýše h-tého stupně. Vskutku máme především řešení (106), položíme tedy

(117) $P_{01}(x) = c_1\ ,\ P_{02}(x) = c_2\ , \dots,\ P_{0n}(x) = c_n\ .$

Za druhé máme $p - 1$ lineárně nezávislých řešení (115) soustavy (113), k nímž se ještě přidají funkce (116), načež podle (108) funkce

$$y_1^{(h)} = c_1 z_1^{(h)},\ y_2^{(h)} = c_2 z_1^{(h)} + z_2^{(h)}, \dots,\ y_n^{(h)} = c_n z_1^{(h)} + z_n^{(h)}$$

($h = 1, \dots, p-1$) vytvoří řešení soustavy (100). Klademe tedy v (104)

(118) $$\begin{cases} P_{h1}(x) = c_1 Q_{h1}(x),\ P_{h2}(x) = c_2 Q_{h1}(x) + Q_{h2}(x), \dots \\ \dots,\ P_{hn}(x) = c_n Q_{h1}(x) + Q_{hn}(x)\ . \end{cases}$$

($h = 1, \dots, p-1$). Tím tedy dostáváme p řešení $y^{(0)}, \dots, y^{(p-1)}$ tvaru (104) a jde ještě jen o to, zda jsou lineárně nezávislá

Ze vztahu

$$K_0 y^{(0)} + K_1 y^{(1)} + \dots + K_{p-1} y^{(p-1)} = o$$

(K_h konstanty) plyne

(119) $$\sum_{h=0}^{p-1} K_h P_{hk}(x) = 0$$

pro všechna x a pro $k = 1, \dots, n$. Pro $k = 1$ odtud plyne podle (118)

(120) $$c_1 (K_0 + \sum_{h=1}^{p-1} Q_{h1}(x) K_h) = 0 \qquad (c_1 \neq 0)$$

Násobme tuto rovnice $\frac{c_k}{c_1}$ a odečteme od k-té rovnice (119); vyjde vzhledem k (117), (118)

$$\sum_{h=1}^{p-1} K_h (P_{hk}(x) - c_k Q_{h1}(x)) = 0 \qquad (k = 2, \dots, n)$$

tj.

$$\sum_{h=1}^{p-1} K_h \cdot Q_{hk}(x) = 0 \qquad (k = 2,\dots,n)$$

Následkem nezávislosti $p-1$ řešení (115) je tedy $K_1 = K_2 = \dots = K_{p-1} = 0$, načež z (120) plyne též $K_0 = 0$. Tím je lineární nezávislost dokázána.

Nyní snadno najdeme fundamentální systém n řešení soustavy (100).

Nechť charakteristický polynom soustavy (100) má celkem s různých kořenů

$$\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_s ,$$

přičemž nechť λ_r je p_r násobný, takže

$$p_1 + p_2 + \dots + p_s = n .$$

Ke každému r ($r = 1,\dots,s$) existuje podle předešlého p_r lineárně nezávislých řešení

$$(121) \quad \begin{cases} y^{(0,r)} = \left[P_{01}^{(r)}(x)e^{\lambda_r x}, \dots, P_{0n}^{(r)}(x)e^{\lambda_r x}\right] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ y^{(p_r-1,r)} = \left[P_{p_r-1,1}^{(r)}(x)\, e^{\lambda_r x}, \dots, P_{p_r-1,n}^{(r)}(x)e^{\lambda_r x}\right] \\ \text{obecně } y^{(h,r)} = \left[P_{h1}^{(r)}(x)e^{\lambda_r x}, \dots, P_{hn}^{(r)}(x)e^{\lambda_r x}\right] \end{cases}$$

$$(h = 0,1,\dots,p_r-1)$$

kde $P_{hk}^{(r)}$ je polynom stupně nejvýše h. Tak dostáváme celkem n řešení $y^{(h,r)}$ ($r = 1,2,\dots,s$; $h = 0,1,\dots,p_r-1$) a jde jen o to dokázat, že jsou lineárně nezávislá. Nechť tedv

$$(122) \qquad \sum_{r=1}^{s} \sum_{h=0}^{p_r-1} C_{h,r}\, y^{(h,r)} = \sigma ,$$

kde $C_{h,r}$ jsou konstanty. To tedy znamená, že pro každé ($k = 1,\dots,n$) je

$$\sum_{r=1}^{s} e^{\lambda_r x} \sum_{h=0}^{p_r-1} C_{h,r}\, P_{h,k}^{(r)}(x) = 0 \qquad (\text{pro všechna } x)$$

Ale vnitřní součet je polynom a čísla λ_r jsou navzájem různá; podle toho, co jsme dokázali v § 5 (viz rovnici (65)), je tedy nutně

$$\sum_{k=0}^{p_r-1} C_{k,r} \, P_{k,k}^{(r)}(x) = 0$$

pro každé r ($r = 1,\ldots,s$), každé k ($k = 1,\ldots,n$) a pro všechna x. Násobíme-li tuto identitu $e^{\lambda_r x}$, dostáváme (viz (121))

$$\sum_{k=0}^{p_r-1} C_{k,r} \, y^{(k,r)} = o .$$

Ale řešení (121) (při daném r) jsou lineárně nezávislá, tedy $C_{k,r} = 0$ pro $k = 0,1,\ldots,p_r - 1$, a to pro každé r ($r = 1,\ldots,s$). Tím je dokázáno (viz (122)), že jsme dostali vskutku n lineárně nezávislých řešení.

Jak nyní prakticky můžeme nalézt takový fundamentální systém? Najdeme napřed kořeny charakteristického polynomu; budiž např. λ kořen, a to p-násobný. Víme, že existuje p lineárně nezávislých řešení tvaru

$$[M_1(x)e^{\lambda x}, M_2(x)e^{\lambda x}, \ldots, M_n(x)e^{\lambda x}] \tag{123}$$

kde $M_1,\ldots,M_n$ jsou polynomy stupně nejvýše $p - 1$. Abychom zjistili všechna řešení tohoto tvaru (123), dosadíme do soustavy (100)

$$y_1 = M_1(x)e^{\lambda x}, \ldots, y_n = M_n(x)e^{\lambda x} ,$$

kde koeficienty polynomů $M_1,\ldots,M_n$ (těch je dohromady $n.p$) necháme zatím neurčené. Dosadíme-li a krátíme číslem $e^{\lambda x} \neq 0$, dostaneme ze (100) celkem n identit tvaru "Polynom se rovná identicky nule". To znamená, že všechny koeficienty se rovnají nule. Položíme-li tyto koeficienty rovny nule, dostaneme soustavu několika homogenních lineárních (algebraických) rovrovnic pro koeficienty polynomů $M_1,\ldots,M_n$. Takovou soustavu dovedeme úplně řešit (některé koeficienty zůstanou libovolné, ostatní se jeví jejich funkcemi) a tím dostaneme všechna řešení tvaru (123) - víme, že mezi nimi je p řešení lineárně nezávislých.

Příklad 1. **Řešme soustavu**

$$\frac{dy_1}{dx} - y_1 - \frac{1}{2} y_2 - \frac{1}{2} y_3 = 0$$

$$\frac{dy_2}{dx} \qquad - \frac{1}{2} y_2 + \frac{1}{2} y_3 = 0$$

$$\frac{dy_3}{dx} \qquad - \frac{1}{2} y_2 - \frac{3}{2} y_3 = 0 .$$

Charakteristický polynom

$$\begin{vmatrix} -1 + \lambda , & -\frac{1}{2} , & \frac{1}{2} \\ 0 , & -\frac{1}{2} + \lambda , & \frac{1}{2} \\ 0 , & -\frac{1}{2} , & -\frac{3}{2} + \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)\left[(\lambda - \tfrac{3}{2})(\lambda - \tfrac{1}{2}) + \tfrac{1}{4}\right] = (\lambda - 1)^3 .$$

Máme trojnásobný kořen $\lambda = 1$ a hledáme tedy řešení tvaru

$$(124) \quad y_1 = (a + bx + cx^2)e^x , \quad y_2 = (A + Bx + Cx^2)e^x ;$$

$$y_3 = (\alpha + \beta x + \gamma x^2)e^x \quad ;$$

dosazením do soustavy rovnic a srovnáním koeficientů dostáváme rovnice:

Koef. při x^2 : $C + \gamma = 0$; $2C = C - \gamma$; $2\gamma = C + 3\gamma$

Koef. při x : $4c = B + \beta$; $2B + 4C = B - \beta$; $2\beta + 4\gamma = B + 3\beta$

prosté členy: $2b = A + \alpha$; $A + 2B = -\alpha$; $2\beta = A + \alpha$

Třetí řádek říká, že $b = \beta = -B$, $A + \alpha = 2\beta$.

Druhý řádek pak říká, že $c = C = \gamma = 0$ (v důsledku rovnice $B + \beta = 0$), načež rovnice prvního řádku jsou splněny.

Tedy: a , α , β lze volit libovolně, načež

$$b = \beta \quad , \qquad c = 0$$

$$A = 2\beta - \alpha , \quad B = -\beta , \quad C = 0$$

$$\gamma = 0$$

a nejobecnější řešení naší soustavy je

$$y_1 = (a+\beta x)e^x, \quad y_2 = (2\beta-\alpha-\beta x)e^x, \quad y_3 = (\alpha+\beta x)e^x$$

Volby $a = 1$, $\alpha = \beta = 0$; $\alpha = 1$, $a = \beta = 0$; $\beta = 1$, $a = \alpha = 0$ vedou k fundamentálnímu systému řešení:

$$\begin{matrix} [e^x, & 0, & 0] \\ [0, & -e^x, & e^x] \\ [xe^x, & 2e^x - xe^x, & xe^x] \end{matrix}$$

Vidíte, že zde členy s x^2e^x ve skutečnosti nevystupují; zato zde vystupují <u>dvě</u> lineárně nezávislé řešení s polynomy nultého stupně (tj. s funkcemi e^x . konst.).

<u>Příklad 2.</u> Řešme soustavu

$$\frac{dy_1}{dx} - y_1 - \frac{1}{2}y_2 + \frac{1}{2}y_3 = 0$$

$$\frac{dy_2}{dx} - \frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}y_3 = 0$$

$$\frac{dy_3}{dx} - y_1 - \frac{1}{2}y_2 - \frac{3}{2}y_3 = 0 .$$

Charakteristický polynom je

$$\begin{vmatrix} -1+\lambda, & -\frac{1}{2}, & \frac{1}{2} \\ 0, & -\frac{1}{2}+\lambda, & -\frac{1}{2} \\ -1, & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2}+\lambda \end{vmatrix} = (\lambda-1)^3 .$$

Zkusíme tedy opět řešení tvaru (124). Vyjdou tyto rovnice:

$$0 = C - \gamma, \quad 2C = C + \gamma, \qquad 0 = 2c + C + \gamma$$

$$4c = B - \beta, \quad 2B + 4C = B + \beta, \quad 4\gamma = 2b + B + \beta$$

$$2b = A - \alpha, \quad 2B + A = \alpha, \qquad 2\beta = 2a + A + \alpha ,$$

které lze přepsat takto:

$$C = \gamma = -c$$

$$4c = B - \beta$$

$$A - \alpha = 2b = -2B$$

$$A + \alpha = 2\beta - 2a$$

Vidíme, že lze volit a, b, c libovolné, načež

$$A = -a - 4c \,, \qquad B = -b \,, \qquad C = -c$$
$$\alpha = -a - 2b - 4c \,, \quad \beta = -b - 4c \,, \quad \gamma = -c$$

a nejobecnější řešení je toto:

$$y_1 = (a + bx + cx^2)e^x$$

$$y_2 = (-a - 4c - bx - cx^2)e^x$$

$$y_3 = (-a - 2b - 4c - (b + 4c)x - cx^2)e^x \,.$$

Klademe-li po řadě $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$; $a = 0$, $b = 1$, $c = 0$; $a = 0$, $b = 0$, $c = 1$, dostaneme tento fundamentální systém řešení :

$$[e^x, \quad -e^x \quad -e^x]$$

$$[xe^x, \quad -xe^x \quad -2e^x - xe^x]$$

$$[x^2e^x, \quad -4e^x - x^2e^x, \quad -4e^x - 4xe^x - x^2e^x]$$

Zde se tedy - na rozdíl od předešlého případu - vskutku objevily polynomy druhého stupně.

Příklad 3. Ukažme si ještě na jednoduchém případě, že fundamentální systém řešení může být tvořen pouze funkcemi tvaru e^x.konst.

$$\frac{dy_1}{dx} = y_1$$

$$\frac{dy_2}{dx} = y_2$$

$$\frac{dy_3}{dx} = y_3$$

$$\mathcal{D}(\lambda) = \begin{vmatrix} -1 + \lambda, & 0 & 0 \\ 0 & , -1 + \lambda, & 0 \\ 0 & , \quad 0 & , -1 + \lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^3$$

Zkusme řešení tvaru (124), dostaneme rovnice:

$$
\begin{array}{lll}
a + b = a & A + B = A & \alpha + \beta = \alpha \\
b + 2c = b & B + 2C = B & \beta + 2\gamma = \beta \\
c = c & C = C & \gamma = \gamma
\end{array}
$$

což dává $b = c = B = C = \beta = \gamma = 0$; a, A, α libovolné. Nejobecnější řešení naší soustavy je tedy:

$$y_1 = a e^t, \quad y_2 = A e^t, \quad y_3 = \alpha e^t$$

Volby $a = 1$, $A = \alpha = 0$; $A = 1$, $a = \alpha = 0$; $\alpha = 1$, $a = A = 0$, nám dají fundamentální systém řešení:

$$
\begin{array}{l}
[e^t, \ 0, \ 0] \\
[0, \ e^t, \ 0] \\
[0, \ 0, \ e^t]
\end{array}
$$

což bylo ovšem lehko uhodnout hned na začátku.

Vidíme, že to vypadá dosti nepravidelně. Vskutku bychom hlouběji nahlédli do struktury řešení soustavy (100) teprve tehdy, kdybychom matici koeficientů a_{jk} převedli na normální tvar (jak se tomu učí v lineární algebře) a užili teorii invariantů lineární transformace (zde jde hlavně o tzv. elementární dělitele).

Podotýkám ještě toto: Jde-li o <u>reálný</u> systém (100) (tj. o reálná a_{jk}), vyskytují se imaginární kořeny charakteristického polynomu ve dvojicích $\alpha \pm i\beta$ komplexně sdružených kořenů se stejnou násobností. Vezme-li řešení, příslušné ke kořenu $\alpha + i\beta$, potom funkce k nim komplexně sdružené dávají řešení, příslušná ke kořenu $\alpha - i\beta$ a naopak. Podle poznámky za větou 23 v § 8 můžeme postupovat takto: Místo, abychom vzali řešení (komplexní) příslušná ke kořenu $\alpha + i\beta$ a řešení příslušná ke kořenu $\alpha - i\beta$, můžeme vzíti jednak reálné, jednak imaginární části řešení příslušných ke kořenu $\alpha + i\beta$; to budou opět řešení našeho systému (100)a vyšli-li jsme původně z fundamentálního systému, dostaneme takto opět fundamentální systém, nyní však složený z <u>reálných</u> řešení.

Příklad 4. Systém

$$\frac{dy_1}{dx} + y_2 = 0$$
$$\frac{dy_2}{dx} - y_1 = 0$$

má charakteristický polynom $\begin{vmatrix} \lambda, & 1 \\ -1, & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1$

s jednoduchými kořeny $\pm i$. Zkusím tedy

$$y_1 = c_1 e^{ix}, \quad y_2 = c_2 e^{ix}$$

a dostanu rovnice

$$ic_1 + c_2 = 0, \quad ic_2 - c_1 = 0,$$

tj. c_2 libovolné, $c_1 = ic_2$.

Za druhé zkusím

$$y_1 = d_1 e^{-ix}, \quad y_2 = d_2 e^{-ix}$$

a dostanu

$$-id_1 + d_2 = 0, \quad -id_2 - d_1 = 0,$$

tj. d_2 libovolné, $d_1 = -id_2$.

Tedy mám (např. volbou $c_2 = 1$, $d_2 = 1$) fundamentální systém

$$(125) \qquad \begin{cases} y^{(1)} = [ie^{ix}, e^{ix}] \\ y^{(2)} = [-ie^{-ix}, e^{-ix}] \end{cases}$$

Lineární kombinací těchto dvou řešení dostanu nový fundamentální systém

$$(126) \qquad \begin{cases} \frac{1}{2}(y^{(1)} + y^{(2)}) = [-\sin x, \cos x] \\ \frac{1}{2i}(y^{(1)} - y^{(2)}) = [\cos x, \sin x] \end{cases}$$

- teď již reálný.

Mohli jsme však postupovat kratčeji a [illegible] jen řešení

$y^{(1)} = [ie^{it}, e^{it}]$ a napsat zvlášť jeho reálnou a imaginární část. Tím dospějeme k fundamentálním systému

$$[-\sin t\ ,\quad \cos t]$$
$$[\cos t\ ,\quad \sin t]\ ,$$

totožnému se (126).

Ježto dovedeme řešit systém (100) bez pravé strany, dovedeme řešit kvadraturami i systém s pravou stranou

$$\frac{dy_j}{dt} + \sum_{k=1}^{n} a_{jk} y_k = b_j(t) \qquad (j = 1, 2, \dots, n)$$

(a_{jk} konstanty); viz metodu variace konstant. V případě funkcí $b_j(t) = e^{\mu t} p_j(t)$, kde p_j je polynom, dovedli bychom řešení nalézti algebraicky, tak jak jsme to dělali u jedné rovné rovnice n-tého řádu v § 5. Nebudeme se však tím zabývat; viz I.G. Petrovskij, Lekcii po teorii obyknovennych differencialnych uravnenij, 4. vydání, str. 185-188.