ÚVOD

V dalším budu potřebovat některé pojmy a věty z teorie množin v eukleidovském prostoru, které připomenu.

V metrickém prostoru P je definována vzdálenost bodů x, y, kterou budeme značit dist (x,y); je-li x bod, A množina, značíme dist $(x,A) = \inf_{y\in A}$ dist (x,y) ; jsou-li A, B dvě množiny, značíme dist $(A,B) = \inf_{\substack{x\in A\\ y\in B}}$ dist (x,y). My se budeme zabývat hlavně eukleidovským prostorem E_n ; to je množina všech "bodů" $x = [x_1,\dots,x_n]$, kde "souřadnice" $x_1,\dots,x_n$ jsou reálná čísla. Je-li $y = [y_1,\dots,y_n]$, definujeme

dist $(x,y) = (\sum_{k=1}^{n} (y_k - x_k)^2)^{\frac{1}{2}}$; často se definuje dist $(x,y) = \max_{k=1,\dots,n} |y_k - x_k|$; to potom už ovšem není týž metrický prostor, ale pro naše účely bude obyčejně lhostejno, které z obou definic užijeme.

Je-li A množina (v metrickém prostoru P , u nás obyčejně v E_n), nazýváme uzávěrem $\bar{A}$ množinu těch bodů $x \in P$, pro které je dist $(x,A) = 0$. Vždy je $A \subset \bar{A}$; je-li $A = \bar{A}$ nazývá se A uzavřenou a $P - A$ otevřenou (v P). Základní věty o uzavřených a otevřených množinách považuji za známé.

Okolím bodu a nazývám každou otevřenou množinu, obsahující bod a . Vnitřním bodem množiny A nazýváme takový bod a, jehož jisté okolí je částí množiny A 1/. Množina je otevřená tehdy a jen tehdy, když všechny její body jsou vnitřní. Množina $\bar{A}$ je vždy uzavřená.

Budiž A množina v metrickém prostoru P . Body $x \in P$ se rozpadají na tři skupiny: 1) vnitřní body A (tj. dist $(x, P-A) > 0$); 2) tzv. vnější body A , to znamená vnitřní body $P - A$ (tj. dist $(x,A) > 0$); 3) body, pro něž dist $(x,P-A) = 0 =$ dist (x,A); těmto bodům se říká hraniční body a tvoří tzv. hranici množiny A , znak $H(A)$. Tedy $H(A) = \bar{A} . \overline{P-A} = H(P-A)$ je uzavřená množina. Množina A je

1/ To lze říci takto: dist $(a, P-A) > 0$.

uzavřená tehdy a jen tehdy, když $H(A) \subset A$; je otevřená tehdy a jen tehdy, když $A \,.\, H(A) = \emptyset$.

Bod x je <u>hromadným bodem</u> množiny A , když každé okolí bodu x obsahuje nekonečně mnoho bodů z A. Množina všech hromadných bodů množiny A se někdy značí A' ("derivace množiny A ").

Platí toto: $(x \in A') \Leftrightarrow$ (existují $x_n \in A$, $x_n \neq x$, $\lim x_n = x$)

$(x \in \bar{A}) \Leftrightarrow$ (existují $x_n \in A$, $\lim x_n = x$).

Jest $\bar{A} = A \cup A'$, množina A je uzavřená tehdy a jen tehdy, když $A' \subset A$.

Je-li A množina, nazýváme jejím průměrem číslo

$$\sup_{\substack{x \in A \\ y \in A}} \operatorname{dist}(x, y) .$$

Je-li průměr $< +\infty$, nazývá se množina <u>omezenou</u> (v E_n to znamená, že absolutní hodnoty souřadnic všech jejích bodů jsou menší než jisté pevné číslo).

Množina A se nazývá <u>kompaktní</u>, když každá posloupnost x_1, x_2, x_3, ... bodů z A má hromadnou hodnotu v A , tj. jestliže z ní lze vybrati posloupnost, která má limitu ležící v A . Množina $A \subset E_n$ je kompaktní tehdy a jen tehdy, je-li uzavřená a omezená. Platí Borelova věta: Nechť A je <u>kompaktní</u> a $\mathcal{S}$ je systém otevřených množin, který "pokrývá A ", tj. každý bod z A je obsažen v některé množině se systému $\mathcal{S}$. Potom lze z $\mathcal{S}$ vybrat <u>konečný</u> počet množin, které pokrývají A .

Je-li A kompaktní, B uzavřená, $AB = \emptyset$, je $\operatorname{dist}(A, B) > 0$ (to se dokáže tím, že se dokáže existence bodu $a \in A$, pro nějž $\operatorname{dist}(a, B) = \operatorname{dist}(A, B)$).

Účelné je zavedení tzv. <u>cartézských součinů</u>. Jsou-li A , B dvě množiny, značíme znakem $A \times B$ množinu všech uspořádaných dvojic $[x, y]$ kde $x \in A$, $y \in B$. Jestliže každému $x \in A$ je přiřazen určitý prvek $y \in B$, říkáme, že je dáno <u>zobrazení</u> množiny A do B , které označme třeba symbolem f , načež prvek, přiřazený prvku x , se značí $f(x)$.

To se dá říci také takto: Zobrazení f množiny A do množiny B je jistá množina uspořádaných dvojic $[x, y]$, kde $x \in A$, $y \in B$; při tom pro každé $x \in A$ existuje v f právě jedna dvojice s prvním členem x ; druhý člen této dvojice se značí $f(x)$.[2]

Množina A se nazývá oborem (nebo definičním oborem) zobrazení. Místo "zobrazení" se říká také "funkce"; $f(x)$ se nazývá obrazem bodu x (při zobrazení f) nebo také hodnotou funkce f v bodě x. Jestliže $f(x)$ jsou vesměs reálná (komplexní) čísla, nazývá se f reálnou (komplexní) funkcí.

Jak jsem řekl, budeme nejvíce pracovat v E_n . Je-li $A \subset E_m$, $B \subset E_n$, $C \subset E_p$, budeme znakem $A \times B \times C$ značit množinu všech bodů $[x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n, z_1, \ldots, z_p]$, kde $[x_1, \ldots, x_m] \in A$, $[y_1, \ldots, y_n] \in B$, $[z_1, \ldots, z_p] \in C$ apod.

V E_1 mluvíme o intervalech $\langle a, b \rangle$, $\langle a, b)$, $(-\infty, b)$ atd.[3]; intervalem v E_n rozumím cartézský součin $i_1 \times i_2 \times \ldots$ $\ldots \times i_n$, kde i_k jsou intervaly v E_1 .

Buďte P, Q metrické prostory, $A \subset P$, f zobrazení z P do Q .[4] Budiž $x_0 \in A$. Říkáme, že f je spojité v bodě x_0 vzhledem k A , když ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(x \in A, \ \mathrm{dist}(x, x_0) < \delta) \Rightarrow (\mathrm{Dist}(f(x), f(x_0)) < \varepsilon)$$

(dist značí vzdálenost v P, Dist značí vzdálenost v Q). Jinak řečeno: f je spojité v bodě $x_0 \in A$ vzhledem k A , když:

$$(x_n \in A, \ \lim x_n = x_0) \Rightarrow (\lim f(x_n) = f(x_0)).$$

Říkáme, že f je spojité v A , když je spojité v každém bodě množiny A vzhledem k A .

Je-li f zobrazení, M množina, značí $f(M)$ množinu všech $f(x)$, kde $x \in M$.

2/ Při této interpretaci je f množina bodů v $A \times B$

3/ Vylučuji tzv. zvrhlé intervaly (jednobodové a prázdné).

4/ Mluvím o zobrazení A do B , když A je oborem; mluvím o zobrazení z A do B , když obor zobrazení je obsažen v A ; mluvím o zobrazení na B , když každý bod množiny B je obrazem některého bodu.

Je-li zobrazení f spojité v kompaktní množině M, platí:

1) $f(M)$ je kompaktní;

2) zobrazení f je "stejnoměrně spojité" v M, tj. ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(x \in M, y \in M, \mathrm{dist}(x, y) < \delta) \Rightarrow (\mathrm{Dist}(f(x), f(y)) < \varepsilon).$$

Všimněme si ještě zobrazení z E_m do E_n. Dáti zobrazení f množiny $A \subset E_m$ do E_n znamená přiřadit každému bodu $x = [x_1, \dots, x_m] \in A$ jistý bod $f(x) = y = [y_1, \dots, y_n]$.

To tedy značí, že každému bodu $[x_1, \dots, x_m] \in A$ je přiřazeno n reálných čísel $y_1, \dots, y_n$, tj.

$$y_1 = f_1(x_1, \dots, x_m), \dots, \quad y_n = f_n(x_1, \dots, x_m),$$

kde $f_1, \dots, f_n$ jsou jisté reálné funkce m reálných proměnných; dáti zobrazení f znamená tedy dáti n reálných funkcí $f_1, \dots, f_n$ m reálných proměnných.

Je zřejmo, že zobrazení f je spojité (např. v bodě a vzhledem k B) tehdy a jen tehdy, jsou-li funkce $f_1, \dots, f_n$ spojité (v a vzhledem k B).

V libovolném metrickém prostoru P platí: je-li $A \neq \emptyset$, $A \subset P$, je dist (x, A) spojitou funkcí bodu x v P.

Odtud plyne např. toto: Je-li $A \subset P$, $\rho > 0$, je množina $A = \mathop{\mathcal{E}}\limits_{x}(\mathrm{dist}(x, A) < \rho)$ otevřená a množina $A_2 = \mathop{\mathcal{E}}\limits_{x}(\mathrm{dist}(x, A) \leq \rho)$ uzavřená. Neboť je-li dist $(x_0, A) < \rho$, platí i dist$(x, A) < \rho$ pro x dosti blízká bodu x_0; je-li dist$(x_n, A) \leq \rho$, $\lim x_n = x_0$, je též dist$(x_0, A) \leq \rho$.[5/]

Tato úvaha platí pro jakékoliv spojité reálné funkce; Je-li f reálná funkce, spojitá v metrickém prostoru P a jsou-li a, b reálná čísla, jsou množiny

$\mathop{\mathcal{E}}\limits_{x}(f(x) > a)$, $\mathop{\mathcal{E}}\limits_{x}(f(x) < a)$, $\mathop{\mathcal{E}}\limits_{x}(f(x) \neq a)$, $\mathop{\mathcal{E}}\limits_{x}(a < f(x) < b)$

5/ Speciálně pro jednobodové $A = (a)$ dostáváme tzv. otevřenou kouli $\mathop{\mathcal{E}}\limits_{x}(\mathrm{dist}(x, a) < \rho)$ a uzavřenou kouli $\mathop{\mathcal{E}}\limits_{x}(\mathrm{dist}(x, a) \leq \rho)$ (o středu a a poloměru ρ).

otevřené a množiny

$$\underset{x}{E}(f(x) \geq a), \quad \underset{x}{E}(f(x) \leq a), \quad \underset{x}{E}(f(x) = a), \quad \underset{x}{E}(a \leq f(x) \leq b)$$

uzavřené.

Budiž P metrický prostor. Množiny $A \subset P$, $B \subset P$ se nazývají <u>oddělené</u>, jestliže pro každé $x \in A$ je dist $(x, B) > 0$ a pro každé $x \in B$ je dist $(x, A) > 0$; jinak řečeno, když $A\bar{B} \cup B\bar{A} = \emptyset$. Potom ovšem jsou též množiny A_1, B_1 oddělené, jestliže $A_1 \subset A$, $B_1 \subset B$.

Oddělené množiny jsou ovšem disjunktní.

Množina $M \subset P$ se nazývá <u>souvislou,</u> jestliže je neprázdná a nedá se psáti jako sjednocení dvou oddělených neprázdných množin. Tedy každá jednobodová množina je souvislá. V E_1 jsou jedinými souvislými množinami intervaly a jednobodové množiny.

Množina M se nazývá <u>uzavřenou v množině N</u>, když je $M = N\bar{M}$, tj. když $M \subset N$ a každý hromadný bod množiny M , <u>ležící v N</u>, leží v M.

I. <u>Je-li M souvislé, $M \subset A \subset \bar{M}$, je A souvislé.</u>

D ů k a z : Nechť A není souvislé, tedy $A = B \cup C$ s oddělenými $B \neq \emptyset$, $C \neq \emptyset$. Ježto $M = MB \cup MC$ je souvislé, je jeden ze sčítanců prázdný, např. $MC = \emptyset$, $M \subset B$. Existuje bod $c \in C \subset \bar{M}$. Tedy $c \in \bar{B}C$ - spor s odděleností množin B , C .

II. <u>Jsou-li množiny M_α pro $\alpha \in A$ souvislé,</u> $\bigcap_{\alpha \in A} M_\alpha \neq \emptyset$, <u>je</u> $\bigcup_{\alpha \in A} M_\alpha = M$ <u>souvislá množina.</u>

D ů k a z . Nechť to není pravda, tedy $M = X \cup Z$ s oddělenými $X \neq \emptyset$, $Z \neq \emptyset$. Zvolme bod $x \in \bigcap_{\alpha \in A} M_\alpha$ (to lze); budiž např. $x \in X$. Dále zvolme bod $z \in Z$ (to lze). Existuje M_{α_0} tak, že $z \in M_{\alpha_0}$. Jest $M = XM_{\alpha_0} \cup ZM_{\alpha_0}$ s oddělenými sčítanci neprázdnými (neboť první obsahuje x , druhý z) - spor.

III. <u>Budiž</u> $M \neq \emptyset$; <u>nechť ke každé dvojici bodů</u> $x \in M$, $y \in M$ <u>existuje souvislá</u> $N \subset M$ tak, že $x \in N$, $y \in N$. <u>Potom M je souvislá</u>.

D ů k a z : Nechť naopak $M = A \cup B$ s oddělenými $A \neq \emptyset$, $B \neq \emptyset$. Zvolme $a \in A$, $b \in B$ a sestrojme souvislou $N \subset M$, $a \in N$, $b \in N$. Je $N = AN \cup BN$ s oddělenými sčítanci, $a \in AN$, $b \in BN$, - spor.

IV. <u>Je-li A souvislé, f spojité v A, je $f(A)$ též souvislé.</u>

D ů k a z : Bez újmy obecnosti budiž A oborem zobrazení f. Nechť naopak $f(A) = M \cup N$ s oddělenými neprázdnými M, N. Potom $A = f_{-1}(M) \cup f_{-1}(N)$ 6/ s neprázdnými sčítanci. Tedy nejsou oddělení (ježto A je souvislé), takže např. existuje bod $x \in f_{-1}(N)$ jenž má nulovou vzdálenost od $f_{-1}(M)$. Tj. existují body $x_n \in f_{-1}(M)$, $\lim_{n \to \infty} x_n = x$. Tedy $\lim_{n \to \infty} f(x_n) = f(x)$. Ale $f(x_n) \in M$, $f(x) \in N$; tedy bod $f(x)$ patří do $\overline{M}N$ - spor s odděleností.

Tato věta nám dovoluje sestrojit mnoho souvislých množin. Např. kružnici $(x-a)^2 + (y-b)^2 = 1$ (v E_2) dostaneme prostřednictvím spojitého zobrazení $x = a + \cos t$, $y = b + \sin t$ z intervalu $0 \leq t \leq 2\pi$ (což je souvislá množina). Dále: Jsou-li x, y dva body v E_n a jsou-li a, b čísla, značíme $ax + by = ax_1 + by_1, \dots, ax_n + by_n$. Množinu všech bodů $tx + (1-t)y$ (x, y dané body, t probíhá interval $\langle 0,1 \rangle$, nazýváme <u>úsečkou</u> $\overline{xy}$ (x, y jsou její "krajní body"). To je "spojitý obraz" $\langle 0,1 \rangle$, tedy souvislá množina.

Množinu $A \subset E_n$ nazýváme konvexní, jestliže $A \neq \emptyset$ a <u>jestliže pro</u> $x \in A$, $y \in A$ celá úsečka $\overline{xy}$ leží v A. Zřejmě průnik libovolného systému konvexních množin je opět konvexní, není-li prázdný. Např. poloprostor, nadrovina, přímka, úsečka, koule (otevřená i uzavřená) v E_n jsou konvexní množiny. Ježto kterékoliv dva body konvexní množiny M lze spojit souvislou množinou, totiž úsečkou, ležící v M, je podle III. vidět, že <u>každá konvexní množina v E_n je souvislá.</u>

6/ $f_{-1}(M)$ (tzv. <u>vzor</u> množiny M při zobrazení f) je množina těch x , pro která $f(x) \in M$.

Budiž $M \subset P$ (P metrický prostor). $M \neq \emptyset$. Zvolme libovolný bod $x_0 \in M$ a sestrojme všechny souvislé množiny, obsahující x_0 a obsažené v M.[7] Jejich sjednocení je podle II. jistá souvislá množina K_{x_0} - největší souvislá množina, obsažená v M a obsahující x_0; říká se jí <u>komponenta</u> množiny M. Dvě komponenty K_{x_0}, K_{y_0}, mající společný bod z, jsou totožné; neboť podle II. je $K_{x_0} \cup K_{y_0}$ souvislá, obsažená v M a obsahuje body x_0, y_0; tedy $K_{x_0} \cup K_{y_0} \subset K_{x_0}$, tj. $K_{y_0} \subset K_{x_0}$ a také $K_{x_0} \cup K_{y_0} \subset K_{y_0}$, tj. $K_{x_0} \subset K_{y_0}$. Tedy se celá množina M rozpadá na <u>disjunktní komponenty.</u> Komponenta je právě jedna tehdy a jen tehdy, je-li M souvislá. Každá souvislá část množiny M je částí některé komponenty množiny M.

V. <u>Komponenta K množiny M je uzavřená v M</u>, tj. všechny hromadné body množiny K, ležící v M, patří do K. Kdyby totiž tomu tak nebylo, mohli bychom množinu K ještě zvětšit přidáním jednoho z těchto hromadných bodů, a tato zvětšená množina by zůstala souvislá.

V E_n platí ještě další věta:

VI. <u>Je-li</u> $M \subset E_n$, M <u>otevřená</u> (v E_n), <u>jsou její komponenty otevřené</u> (v E_n).

D ů k a z : Budiž x_0 nějaký bod komponenty K. Existuje ρ tak malé, že koule $\sigma = \mathcal{E}_x(\mathrm{dist}(x, x_0) < \rho)$ leží v M. Ježto σ jest souvislé a má s K společný bod x_0, je podle II. také $K \cup \sigma$ souvislá, tedy (maximálnost množiny K !) $K \cup \sigma \subset K$ tedy $\sigma \subset K$, tedy x_0 je vnitřním bodem množiny K.

VII. <u>Buďte</u> M_1, M_2, M_3, ... (konečná nebo nekonečná posloupnost) <u>souvislé množiny,</u> $M_k \cdot M_{k-1} \neq \emptyset$. <u>Potom množina</u> $\bigcup_n M_n$ <u>je souvislá.</u>

D ů k a z : Podle II. dostaneme ihned indukcí, že $M_1 \cup M_2$, $M_1 \cup M_2 \cup M_3, \dots$ jsou souvislé. Jde ještě o to, že v případě nekonečné posloupnosti je $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ souvislá. Buďte a, b

7/ Takové množiny existují: např. jednobodová množina (x_0).

dva body z M ; je tedy $a \in M_k$, $b \in M_l$ pro některé k, l. Položme $m = \max(k, l)$. Potom oba body a, b leží v souvislé množině $M_1 \cup \ldots \cup M_m$ a tedy M je souvislá podle III.

Mějme úsečky $\overline{x_1 x_2}$, $\overline{x_2 x_3}$, $\overline{x_3 x_4}$, ..., $\overline{x_{k-1} x_k}$ v E_n ; jejich sjednocení se nazývá <u>lomenou čarou.</u> Podle VII. je tedy lomená čára souvislá.

Otevřenou souvislou množinu v E_n nazveme krátce <u>oblastí.</u>

VIII. <u>Neprázdná otevřená množina $M \subset E_n$ je oblastí tehdy a jen tehdy, lze-li libovolné její dva body spojiti lomenou čarou ležící v</u> M.

D ů k a z : 1) Je-li takové spojení možné, je M souvislá podle III.

2) Naopak, budiž M souvislá otevřená. Zvolme bod $x_0 \in M$ a budiž N množina oněch $x \in M$, které lze spojit s x_0 lomenou čarou, probíhající v M . Zřejmě je N souvislá (viz II) a stačí dokázat, že $M = N$. Předpokládejme $M - N \neq \emptyset$. Je-li $a \in M$, existuje koule $K = \mathop{E}_{x}(\operatorname{dist}(a, x) < \rho)$, obsažená v M. Je nyní vidět: <u>je-li</u> $a \in N$, <u>je</u> $K \subset N$; každý bod $x \in K$ lze totiž spojit s x_0 lomenou čarou, probíhající v M - stačí spojit napřed x_0 a a a potom připojit <u>úsečku</u> $\overline{ax}$. Tedy každý bod z N je vnitřním bodem N, tedy $N . \overline{M - N} = \emptyset$ Za druhé: <u>je-li</u> $a \in M - N$, <u>je</u> $K \subset M - N$. To plyne takto: kdyby v K byl nějaký bod $x \in N$, spojili bychom x_0 s x lomenou čarou v M a ještě bychom připojili úsečku $\overline{xa}$, takže by a patřilo k N - spor. Tedy každý bod z $M - N$ je vnitřním bodem množiny $M - N$, tedy $(M - N) . \overline{N} = \emptyset$. Množiny N , $M - N$ jsou tedy neprázdné a oddělené, což je ve sporu s tím, že M je souvislá. Tím je důkaz hotov.

IX. <u>Budiž</u> $A \subset P$ (P je jakýkoliv metrický prostor). <u>Budiž</u> $S \subset P$ <u>souvislé</u>. $AS \neq \emptyset$, $S - A \neq \emptyset$. <u>Potom je</u> $S . H(A) \neq \emptyset$.

D ů k a z : Je $\mathcal{S} = A\mathcal{S} \cup (\mathcal{S}-A)$ a oba sčítanci jsou neprázdné. Nechť $\mathcal{S} . H(A) = \emptyset$. Potom každý bod z $A\mathcal{S}$ je vnitřním bodem A , tedy $A\mathcal{S} . \overline{P - A} = \emptyset$ a tím spíše $A\mathcal{S} . \overline{\mathcal{S} - A} = \emptyset$. Podobně každý bod z $\mathcal{S} - A$ je vnitřním bodem $P - A$ (neboť $(\mathcal{S}-A) . H(P-A) = (\mathcal{S}-A) . H(A) = \emptyset$), tedy $(\mathcal{S}-A).\bar{A} = \emptyset$ a tím spíše $(\mathcal{S}-A).\overline{\mathcal{S}A} = \emptyset$. Tedy $\mathcal{S}A$, $\mathcal{S} - A$ jsou oddělené množiny - spor se souvislostí množiny $\mathcal{S}$.