Kapitola V.

MAXIMA A MINIMA. TAYLOROVA VĚTA.

Tuto kapitolu je možno studovat také hned po kap. II. nebo po kap. III. Pouze je nutno

1. uvědomit si z kap. III., § 4 definici funkce spojité v bodě $c \in M$ vzhledem k M a funkce spojité v množině M,
2. z kap. IV pojem kompaktní množiny (stačí vědět, že množina $M \subset E_k$ se nazývá kompaktní, když je uzavřená a omezená).
3. vypůjčit si z kapitoly IV tuto větu (viz "důsledek" věty 71): Je-li f reálná funkce spojitá v kompaktní množině $M \subset E_k$, potom mezi hodnotami, kterých f v M nabývá, je jedna ze všech největší a jedna ze všech nejmenší.

§ 1. Lokální maxima a minima; nutné podmínky. Stacionární body.

Budiž dána reálná funkce f, definovaná v množině $M \subset E_k$. (V této kapitole mluvím jen o reálných funkcích reálných proměnných; proto budu slovo "reálný" vynechávat.) Mezi jejími hodnotami, kterých v množině M nabývá, může být některá největší, např. hodnota $f(c)$. Potom říkáme ovšem, že číslo $f(c)$ je největší hodnota nebo maximum funkce f v množině M, a že funkce f má v bodě c maximum vzhledem k množině M. (Takových bodů může být ovšem více.) Takové maximum nemusí existovat. Je-li např. f funkce (jedné proměnné) rostoucí v otevřeném intervalu (a, b), není mezi jejími hodnotami, kterých v (a, b) nabývá, žádná největší ani žádná nejmenší. V jiných případech zase je existence největší hodnoty zaručena obecnými větami, i když ji třeba nedovedeme vždy určit. Tak např. je-li f funkce (k proměnných), která je <u>spojitá</u> v <u>kompaktní</u> množině $M \subset E_k$, má funkce v některém bodě $c \in M$ své maximum vzhledem k M (viz důsledek věty 71). Podobně jako maximum se ovšem definuje minimum.

Někdy nás zajímají <u>lokální</u> vlastnosti funkce. K tomu cíli zavedeme tuto definici:

<u>Definice.</u> Říkáme, že funkce f (k proměnných) má v bodě $c \in E_k$ <u>lokální maximum</u>, jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že je

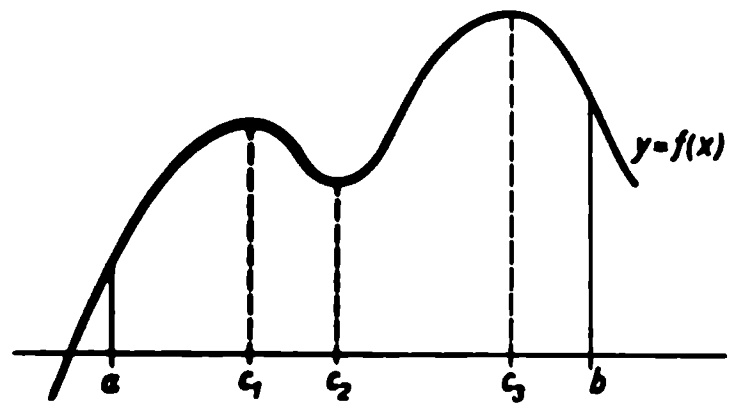
$$f(x) \leq f(c) \quad \text{pro všechna } x \in U_\delta(c) .$$

Říkáme, že f má v bodě $c \in E_k$ <u>ostré lokální maximum</u>, jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že je

$$f(x) < f(c) \quad \text{pro všechna} \quad x \in U^*_\delta(c)$$

(zde je vhodné vzít redukované okolí, protože pro $x = c$ platí znamení rovnosti). Definice lokálního minima je obdobná, jen místo $\leqq$, $<$ se píše $\geqq$, $>$. Společný název lokálních maxim a minim je lokální extrémy.

Musíme přesně rozlišovat mezi maximem funkce vzhledem k M a mezi lokálním maximem. Např. funkce načrtnutá na obr. 55 má v $\langle a, b\rangle$ lokální maxima v bodech c_1 , c_3 , lokální minimum v bodě c_2 (vesměs ostrá). V bodě c_3 nabývá funkce svého maxima vzhledem k $\langle a, b\rangle$, minima nabývá v bodě a , kde vůbec nemá lokální minimum.



Obr. 55.

Jestliže funkce f (n proměnných) má své maximum vzhledem k M v některém vnitřním bodě c množiny M , potom má f v bodě c nutně lokální maximum (neboť existuje δ - okolí $U_\delta(c) \subset M$, a tedy $f(c)$ je největší ze všech hodnot $f(x)$ pro $x \in U_\delta(c)$). Jestliže tedy funkce f nabývá v některém bodě množiny M své největší hodnoty (největší ze všech hodnot $f(x)$, $x \in M$) , potom buďto je tento bod hraničním bodem množiny M nebo má f v tomto bodě lokální maximum (viz obr. 55). Podobně pro minimum. Odtud plyne důležitost lokálních extrémů např. pro hledání největší nebo nejmenší hodnoty dané funkce f v dané množině M .

Pro funkce jedné proměnné můžeme hned odvodit jednu nutnou podmínku pro lokální extrémy.

Je-li $f'(c) > 0$ nebo $f'(c) < 0$ (připouštíme i hodnoty $f'(c) = +\infty$ nebo $-\infty$ [1]), nemá funkce f v bodě c lokální extrém.

Důkaz: je-li $f'(c) > 0$, je f "rostoucí v bodě c" , tj. existuje $\Delta > 0$ tak, že pro $c < x < c + \Delta$ je $f(x) > f(c)$, pro $c - \Delta < x < c$ je $f(x) < f(c)$. Viz D I, věta 131. Odtud je zřejmé, že f nemá v bodě c ani lokální maximum ani lokální minimum. Podobně pro $f'(c) < 0$.

Tedy: lokální extrémy mohou nastat jen v těch bodech, ve kterých derivace buďto neexistuje nebo je rovna nule. Ovšem v těchto bodech ještě lokální extrém nastat nemusí, např. funkce $f(x) = x^3$ má pro $x = 0$ derivaci $f'(0) = 0$, a přesto funkce f nemá v bodě 0 lokální extrém (neboť pro $x < 0$ má hodnoty menší než $f(0) = 0$, pro $x > 0$ má hodnoty větší). Přesto může tato jednoduchá věta být užitečná. Příklad:

---

1) Ovšem $+\infty$ počítám mezi kladné, $-\infty$ mezi záporné hodnoty.

Hledejme největší a nejmenší hodnotu spojité funkce $f(x) = 2x^3 - 9x^2 + 12x - 2$ vzhledem ke kompaktní množině $\langle \frac{2}{3}, 3 \rangle$. Funkce f vskutku někde své největší a nejmenší hodnoty v $\langle \frac{2}{3}, 3 \rangle$ nabývá. Může to nastat jenom buďto v některém z hraničních bodů $\frac{2}{3}$, 3, nebo v některém z bodů, ve kterých $f'(x) = 6x^2 - 18x + 12 = 0$; to jsou body $x = 1$, $x = 2$. Je pak $f(\frac{2}{3}) = 2 + \frac{16}{27}$, $f(1) = 3$, $f(2) = 2$, $f(3) = 7$. Tedy funkce nabývá svého maxima vzhledem k intervalu $\langle \frac{2}{3}, 3 \rangle$ v krajním bodě $x = 3$ (kde není lokální extrém, neboť $f'(3) \neq 0$) a minima ve vnitřním bodě $x = 2$, kde tedy nutně je lokální minimum.

Podobnou nutnou podmínku pro lokální extrém lze ihned odvodit pro funkce několika proměnných:

Věta 75. Budiž f funkce n proměnných. Jestliže v bodě $c = [c_1, \ldots, c_n]$ některá z derivací $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ existuje a je různá od nuly, nemá f v bodě c lokální extrém.

Důkaz: Nechť např. $\frac{\partial f}{\partial x_1}$ v bodě c existuje a je kladná.[2] Potom funkce

$$g(x_1) = f(x_1, c_2, \ldots, c_n)$$

má v bodě c_1 kladnou derivaci, tedy je "v bodě c_1 rostoucí". Tj. existuje $\Delta > 0$ tak, že pro $c_1 < x_1 < c_1 + \Delta$ je

$$g(x_1) > g(c_1), \quad \text{tj. } f(x_1, c_2, \ldots, c_n) > f(c),$$

a pro $c_1 - \Delta < x_1 < c_1$ je

$$g(x_1) < g(c_1), \quad \text{tj. } f(x_1, c_2, \ldots, c_n) < f(c).$$

Tedy v každém okolí $U_\delta(c)$ existují jak body x, v nichž $f(x) > f(c)$, tak body x, v nichž $f(x) < f(c)$. Tedy v bodě c nemá f lokální extrém.

Tedy: Jestliže funkce f má v bodě c lokální extrém, potom buďto některá z derivací $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ v bodě c neexistuje nebo jsou všechny tyto derivace v bodě c rovny nule (věta 75 říká dokonce o něco více).

Věta 75 dává nutné podmínky pro lokální extrém. V § 4 odvodíme některé podmínky postačující.

Ve fyzice i v technice se často užívá pojmu "funkce f je v bodě c stacionární"[3]. Tím se míní, zhruba řečeno, že přírůstek

---

2) Pro $\frac{\partial f}{\partial x_1} < 0$ je důkaz obdobný.

3) Říká se také, že c je stacionární bod funkce f.

$$f(c_1 + h_1, \dots, c_k + h_k) - f(c_1, \dots, c_k)$$

je pro "malá" $h_1, \dots, h_k$ "mnohokráte menší" než vzdálenost bodů $[c_1, \dots, c_k]$, $[c_1 + h_1, \dots, c_k + h_k]$. Přesná definice je tato:

Definice. Říkáme, že funkce f je stacionární v bodě $c = [c_1, \dots, c_k]$, jestliže

$$\lim_{[h_1,\dots,h_k] \to [0,\dots,0]} \frac{f(c_1 + h_1, \dots, c_k + h_k) - f(c_1, \dots, c_k)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_k^2}} = 0 .$$

To se dá přepsat také takto: označme

$$\frac{f(c_1 + h_1, \dots, c_k + h_k) - f(c_1, \dots, c_k)}{\sqrt{h_1^2 + h_2^2 + \dots + h_k^2}} = \xi(h_1, \dots, h_k) ,$$

což lze psát

(1)
$$f(c_1 + h_1, \dots, c_k + h_k) - f(c_1, \dots, c_k) =$$
$$= 0 \cdot h_1 + 0 \cdot h_2 + \dots + 0 \cdot h_k + \sqrt{h_1^2 + \dots + h_k^2}\; \xi(h_1, \dots, h_k).$$

Podmínku, aby funkce f byla stacionární v bodě c, lze tedy vyslovit také takto: funkce ξ, definovaná rovnicí (1), má vyhovovat podmínce $\lim_{[h_1,\dots,h_k]\to[0,\dots,0]} \xi(h_1, \dots, h_k) = 0$. Podle definice totálního diferenciálu to lze říci také takto:

Funkce f (k proměnných) je stacionární v bodě c tehdy a jen tehdy, jestliže jsou splněny tyto podmínky:

1. f má v bodě c totální diferenciál,
2. v bodě c je $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$.

To je tedy velmi jednoduchá nutná a postačující podmínka pro stacionárnost.

Podle věty 75 je vidět toto: Má-li funkce f v bodě c totální diferenciál a lokální extrém, je f v bodě c stacionární. Obrátit se to nedá; např. funkce jedné proměnné $(x-1)^3$ má derivaci $3(x-1)^2$, takže je stacionární v bodě $x = 1$, ale zřejmě tam nemá lokální extrém, poněvadž je rostoucí v $(-\infty, +\infty)$. Je tedy sice jakási souvislost mezi stacionárními body a lokálními extrémy, ale je dosti složitá.

§ 2. Lokální extrémy vzhledem k množině.

Začněme příkladem. Vezměme nějakou spojitou funkci dvou proměnných, třeba

$$f(x, y) = e^{xy} \sin(x^2 + xy - y^2)$$

a elipsu M, danou rovnicí

(*) $\quad x^2 + 2y^2 = 1$.

Ježto množina M je kompaktní[1], nabývá funkce f v množině M někde svého maxima a někde svého minima (vzhledem k M) . Klademe si tedy otázku, která z hodnot, jichž f nabývá v množině M , je největší a která nejmenší.

Ve vnitřních bodech množiny M nám, jak víte, může posloužit pojem lokálního extrému. Ale naše množina M vůbec vnitřní body nemá, jen body hraniční. Je proto vhodné modifikovat definici lokálních extrémů:

<u>Definice.</u> Buďiž f funkce r proměnných, $M \subset E_r$, $c \in M$. Říkáme, že funkce f má v bodě c lokální maximum <u>vzhledem k M</u>, jestliže existuje $\delta > 0$ tak, že je $f(x) \leq f(c)$ pro všechna $x \in U_\delta(c) \cap M$. Obdobně pro lokální minimum vzhledem k M . Společný název: Lokální extrém vzhledem k M . Je zřejmé: Jestliže v bodě $c \in M$ nabývá funkce f největší hodnoty vzhledem k M , má f v bodě c také lokální maximum vzhledem k M .

V našem příkladě byla množina M elipsa, daná rovnicí (*) . Tj. v tomto případě by šlo o největší a nejmenší hodnotu funkce v množině těch bodů, které vyhovují rovnici (*), popříp. o lokální maxima a minima funkce f vzhledem k množině těch bodů $[x, y]$, které vyhovují rovnici (*) . Takové případy se velmi často vyskytují v matematice, v mechanice (pohyb vázaný na určitou plochu nebo křivku apod.) i jinde; proto se jimi budeme teď zabývat. Takových rovnic tvaru (*) může býti i několik.

Vyjdeme z těchto předpokladů:

I. Je dána otevřená množina $N \subset E_{r+s}$ ($r > 0$, $s > 0$) a $s+1$ funkcí

(1) $\quad f(x_1, \ldots, x_{r+s})$,

(2) $\quad G(x_1, \ldots, x_{r+s})$, ..., $G_s(x_1, \ldots, x_{r+s})$,

které mají parciální derivace 1.řádu spojité v N .

II. Buďiž M množina oněch bodů z N , které vyhovují rovnicím

$$(3) \quad \begin{cases} G_1(x_1, \ldots, x_{r+s}) = 0 \\ \ldots\ldots \\ G_s(x_1, \ldots, x_{r+s}) = 0 \, ; \end{cases}$$

nechť matice

1) Snadno zjistíte, že doplněk množiny M , tj. množina těch bodů, ve kterých je $x^2 + 2y^2 < 1$ nebo $x^2 + 2y^2 > 1$, je otevřená.

$$(4)\qquad \begin{matrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial G_1}{\partial x_{k+s}} \\ \dots\dots \\ \dfrac{\partial G_s}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial G_s}{\partial x_{k+s}} \end{matrix}$$

má v každém bodě množiny M hodnost s (tj. aspoň jeden s-řadový determinant matice je různý od nuly).

Věta 76. Buďte splněny předpoklady I, II. Budiž $c \in M$ bod, ve kterém funkce f má lokální extrém vzhledem k M. Potom existují (reálná) čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ tak, že v bodě $x = c$ je

$$(5)\qquad \frac{\partial f}{\partial x_j} + \lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial x_j} + \dots + \lambda_s \frac{\partial G_s}{\partial x_j} = 0 \quad \text{pro } j = 1, \dots, k+s.$$

Poznámka 1. Věta dává opět nutnou (nikoliv postačující) podmínku pro lokální extrém. Bod $x = [x_1, \dots, x_{k+s}]$ může[2] dávat lokální extrém vzhledem k M jen tehdy, jestliže $x \in M$ (tj. jestliže platí (3)) a jestliže existují $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ tak, že platí (5). To je celkem $k + 2s$ rovnic pro $k + 2s$ neznámých $x_1, \dots, x_{k+s}, \lambda_1, \dots, \lambda_s$, takže je naděje, že aspoň v jednoduchých případech z nich budeme moci určit body $[x_1, \dots, x_{k+s}]$ "podezřelé" z extrémů. (Čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ jsou jen pomocná, ale potřebujeme je pro formulaci věty.) Velmi dobře se (5) pamatuje takto: Postupuje se tak, jakoby se hledaly lokální extrémy funkce $f + \lambda_1 G_1 + \dots + \lambda_s G_s$ ($k+s$ proměnných $x_1, \dots, x_{k+s}$). Kdo chce již teď si věc přiblížit příkladem, může si probrat příklad 1 a teprve potom se vrátit k důkazu věty 76.

Důkaz věty 76. Budiž $c = [c_1, \dots, c_{k+s}] \in M$ bod, ve kterém f má lokální extrém vzhledem k M. Potom aspoň jeden s-řadový determinant matice (4) je v bodě c různý od nuly. Ježto předpoklady i tvrzení věty jsou symetrické vzhledem k $x_1, \dots, x_{k+s}$, smíme bez újmy obecnosti předpokládat, že v bodě c je

$$(6)\qquad \begin{vmatrix} \dfrac{\partial G_1}{\partial x_{k+1}}, \dots, \dfrac{\partial G_1}{\partial x_{k+s}} \\ \dots\dots \\ \dfrac{\partial G_s}{\partial x_{k+1}}, \dots, \dfrac{\partial G_s}{\partial x_{k+s}} \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Nyní jsou však splněny předpoklady věty o implicitních funkcích (věta 19). Tedy existují čísla $\delta > 0$, $\delta_1 > 0$ s těmito vlastnostmi: Ke každému bodu $[x_1, \dots, x_k] \in \mathcal{U}^k_\delta([c_1, \dots, c_k])$ existuje v okolí $\mathcal{U}^s_{\delta_1}([c_{k+1}, \dots, c_{k+s}])$

[2] Ale nemusí!

právě jeden bod $[x_{k+1}, \ldots, x_{k+s}]$ tak, že platí rovnice (3). Označím-li souřadnice tohoto bodu takto:

$$x_{k+1} = \varphi_1 (x_1, \ldots, x_k) ,$$
$$\ldots\ldots$$
$$x_{k+s} = \varphi_s (x_1, \ldots, x_k) ,$$

mají funkce $\varphi_1 , \ldots, \varphi_s$ spojité parciální derivace 1.řádu v $U^k_\delta([c_1, \ldots, c_k])$. Jest ovšem

$$\text{(7)} \qquad \begin{aligned} &\varphi_1 (c_1, \ldots, c_k) = c_{k+1} , \ldots \\ &\varphi_s (c_1, \ldots, c_k) = c_{k+s} . \end{aligned}$$

Podle předpokladu má $f(x_1, \ldots, x_{k+s})$ v bodě $[c_1, \ldots, c_{k+s}]$ lokální extrém - třeba maximum[3] - vzhledem k M. Dokáži, že "složená" funkce

$$\text{(8)} \qquad \psi (x_1, \ldots, x_k) = f(x_1, \ldots, x_k , \varphi_1 (x_1, \ldots, x_k), \ldots \ldots, \varphi_s (x_1, \ldots, x_k))$$

má lokální maximum (ve smyslu § 1, nebo - chcete-li - "vzhledem k E_k") v bodě $c_1 , \ldots, c_k$. To je snadné. Existuje totiž $\Delta > 0$ tak, že je

$$\text{(9)} \qquad \begin{aligned} &f (x_1, \ldots, x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+s}) \leq \\ &\leq f(c_1, \ldots, c_k, c_{k+1}, \ldots, c_{k+s}) \quad \text{pro všechna} \\ &[x_1, \ldots, x_{k+s}] \in U^{k+s}_\Delta(c) \cap M . \end{aligned}$$

Můžeme hned volit $\Delta < \min(\delta, \delta_1)$. Ježto funkce $\varphi_1 , \ldots, \varphi_s$ jsou spojité v $U^k_\delta([c_1, \ldots, c_k])$, a v bodě $[c_1 , \ldots, c_k]$ nabývají hodnot $c_{k+1} , \ldots \ldots, c_{k+s}$, můžeme volit $\Delta_1 < \Delta$ $(\Delta_1 > 0)$ tak, že pro $[x_1 , \ldots, x_k] \in U^k_{\Delta_1}([c_1, \ldots, c_k])$ je $|\varphi_j (x_1, \ldots, x_k) - c_{k+j}| < \Delta$ pro $j = 1 , \ldots, s$. Tedy bude (9) splněno, když $[x_1 , \ldots, x_k] \in U^k_{\Delta_1}([c_1, \ldots \ldots, c_k])$ a když za x_{k+j} $(j = 1 , \ldots, s)$ dosadíme $\varphi_j(x_1, \ldots, x_k)$; podle (8), (7) to znamená, že pro $[x_1 , \ldots, x_k] \in U^k_{\Delta_1}([c_1 , \ldots, c_k])$ je $\psi(x_1, \ldots, x_k) \leq \psi(c_1 , \ldots, c_k)$; tedy vskutku má funkce ψ v bodě $[c_1, \ldots, c_k]$ lokální maximum.

Ježto všechny parciální derivace 1.řádu funkce f jsou spojité v bodě $[c_1, \ldots, c_{k+s}]$ a parciální derivace 1.řádu funkcí $\varphi_1 , \ldots, \varphi_s$ jsou spojité v bodě $[c_1 , \ldots, c_k]$, můžeme parciální derivace funkce ψ v bodě $[c_1, \ldots, c_k]$ počítat podle obvyklého vzorce, a tyto derivace jsou vesměs rovny nule (ježto ψ tam má lokální maximum). Máme tedy rovnice

---

[3] Případ minima se převede na maximum, přejdu-li od f k $-f$.

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial f}{\partial x_{r+j}} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} = 0 \quad \text{pro } k = 1, \dots, r . \tag{10}$$

Dále ovšem "složené" funkce $G_j(x_1, \dots, x_r, \varphi_1(x_1, \dots, x_r), \dots,$ $\dots, \varphi_s(x_1, \dots, x_r))$ jsou rovny nule pro všechna $[x_1, \dots, x_r] \in \mathcal{U}^r_\delta([c_1, \dots, c_r])$ a tedy i jejich parciální derivace jsou v tomto okolí a tedy speciálně v bodě $[c_1, \dots, c_r]$ rovny nule:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial G_1}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial G_1}{\partial x_{r+j}} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} = 0 , \\ &\dots\dots\dots \\ &\frac{\partial G_s}{\partial x_k} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial G_s}{\partial x_{r+j}} \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k} = 0 . \end{aligned} \qquad (k = 1, \dots, r) \tag{11}$$

Přitom se v (10), (11) derivace funkcí $\varphi_1, \dots, \varphi_s$ berou v bodě $[c_1, \dots, c_r]$, derivace funkcí $f, G_1, \dots, G_s$ v bodě $c = [c_1, \dots, c_{r+s}]$. Odstraníme nyní "nepohodlné" derivace implicitních funkcí $\frac{\partial \varphi_j}{\partial x_k}$. Ježto platí nerovnost (6), existují reálná čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ splňující soustavu rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x_{r+j}} + \sum_{p=1}^{s} \frac{\partial G_p}{\partial x_{r+j}} \lambda_p = 0 \qquad (j = 1, \dots, s) . \tag{12}$$

Násobme nyní rovnice (11) při pevném k po řadě čísly $\lambda_1, \dots, \lambda_s$ a přičtěme je k rovnici (10) (s týmž k). Vzhledem k (12) dostaneme

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} + \sum_{p=1}^{s} \frac{\partial G_p}{\partial x_k} \lambda_p = 0 \qquad (k = 1, \dots, r) . \tag{13}$$

Ale (12), (13) dávají právě $r + s$ rovnic (5).

Poznámka 2. Této metodě se říká někdy "metoda Lagrangeových multiplikátorů" (těmi multiplikátory se míní čísla $\lambda_1, \dots, \lambda_s$).

Příklad 1. Hledejme největší a nejmenší hodnotu, kterých nabývá funkce

$$f(x, y) = x^2 + 2y^2 \tag{14}$$

na množině M dané rovnicí

$$x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0 . \tag{15}$$

Funkce f je spojitá v E_2. Množina M je kompaktní, jak ihned ukážeme.[4] Především je uzavřená, neboť její doplněk je otevřená množina, což plyne takto:

[4] Věnujte následující úvaze pozornost; je typická pro podobné případy.

Je-li v některém bodě $x^2 - 2x + 2y^2 + 4y < 0$, platí tato nerovnost i v některém jeho okolí; podobně pro > 0 . Tedy množina těch bodů, pro něž $x^2 - 2x + 2y^2 + 4y \neq 0$, je otevřená. Za druhé je množina (15) omezená, neboť $x^2 - 2x = (x-1)^2 - 1$, $2y^2 + 4y = 2(y+1)^2 - 2$, takže levá strana v (15) je

$$(x-1)^2 + 2(y+1)^2 - 3 \text{ ; je tedy jistě kladná,}$$

jakmile $|x-1| \geq 2$ nebo $|y+1| \geq 2$. Množina M tedy leží celá v intervalu $(-1, 3) \times (-3, 1)$ [5]. Tedy funkce (14) jistě nabývá v M někde své největší a nejmenší hodnoty.

Zde máme $n = 1$, $s = 1$; matice (4) je

$$2x - 2 \text{ , } 4y + 4$$

a ta má všude hodnost 1 (jak ve větě 76 požadujeme), kromě bodu $[1, -1]$ - ale ten nepatří k množině M . Můžeme tudíž užít postupu věty 76. Položíme-li

$$G(x, y) = x^2 - 2x + 2y^2 + 4y,$$

jde o řešení rovnic

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \lambda \frac{\partial G}{\partial x} = 0 \text{ , } \frac{\partial f}{\partial y} + \lambda \frac{\partial G}{\partial y} = 0 \text{ , } G = 0 \text{ ,}$$

tj.

$$\begin{aligned} &2x + \lambda(2x - 2) = 0 \text{ ,} \\ (16) \qquad &4y + \lambda(4y + 4) = 0 \text{ ,} \\ &x^2 - 2x + 2y^2 + 4y = 0 \text{ .} \end{aligned}$$

První dvě rovnice pišme

$$x + \lambda(x-1) = 0, \quad y + \lambda(y+1) = 0 .$$

Násobím-li první rovnici $y + 1$, druhou $x - 1$ a odečtu, vidím, že musí být $x(y+1) - y(x-1) = 0$, tj. $x + y = 0$, načež třetí rovnice říká, že musí být $x^2 - 2x + 2x^2 - 4x = 0$, tj. $3x^2 - 6x = 0$, tedy buďto $x = 0$, $y = 0$ nebo $x = 2$, $y = -2$ (příslušné hodnoty λ jsou $\lambda = 0$, $\lambda = -2$) . Rozhodně tedy nemůže lokální extrém vzhledem k M nastat jinde než v bodech $[0, 0]$ a $[2, -2]$.

Příslušné hodnoty funkce jsou

$$f(0, 0) = 0 \text{ , } f(2, -2) = 12 \text{ .}$$

Naše funkce $f(x, y) = x^2 + 2y^2$ nabývá někde v množině M své největší a někde své nejmenší hodnoty, a nemůže to nastat jinde než v některém z lokál-

---

[5] V našem případě je M elipsa, odkud je omezenost zřejmá; ale nemusí to být vždy tak jednoduché.

ních extrémů vzhledem k M. Tedy nutně největší hodnota funkce $f(x, y)$ v množině M je 12 a funkce jí nabývá v jediném bodě množiny M, totiž v bodě $[2, -2]$; podobně nejmenší hodnoty 0 nabývá f v jediném bodě $[0, 0]$ množiny M.

§ 3. Taylorova formule pro funkce několika proměnných.

Zobecníme nyní Taylorovu formuli na funkce několika proměnných, ale budeme volit trochu speciálnější podmínky (nesnažíme se o největší možnou obecnost).

Budiž f (reálná) funkce k proměnných, buďte

(1) $$[a_1, \ldots, a_k], \quad [a_1 + h_1, \ldots, a_k + h_k]$$

dva různé body; budiž $n \geq 0$ celé a předpokládejme, že funkce f má spojité parciální derivace až do řádu $n+1$ v jisté otevřené množině M, obsahující úsečku o krajních bodech (1).

Body této úsečky jsou všechny body tvaru

(2) $$[a_1 + h_1 t, \ldots, a_k + h_k t],$$

kde t probíhá interval $\langle 0, 1 \rangle$. Budeme hledat vyjádření hodnoty

$$f(a_1 + h_1, \ldots, a_k + h_k).$$

Pro $0 \leq t \leq 1$ položme $F(t) = f(a_1 + h_1 t, \ldots, a_k + h_k t)$, takže $f(a_1 + h_1, \ldots, a_k + h_k) = F(1)$. Funkce F (jedné proměnné t) má v $\langle 0, 1 \rangle$ derivace až do řádu $n+1$, tedy je podle Taylorovy formule

(3) $$F(1) = F(0) + \frac{F'(0)}{1!} + \ldots + \frac{F^{(n)}(0)}{n!} + \frac{F^{(n+1)}(\theta)}{(n+1)!},$$

kde θ je jisté číslo intervalu $(0, 1)$. Derivace "složené funkce" se ovšem počítají podle obvyklého pravidla:

$$F'(t) = \sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f}{\partial x_j} \cdot h_j,$$

$$F''(t) = \sum_{j=1}^{k} \sum_{k=1}^{k} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \, \partial x_k} h_j h_k,$$

obecně

$$F^{(p)}(t) = \sum_{j_1=1}^{k} \cdots \sum_{j_p=1}^{k} \frac{\partial^p f}{\partial x_{j_1} \ldots \partial x_{j_p}} h_{j_1} \ldots h_{j_p};$$

přitom se derivace funkce f berou v bodě $[a_1 + h_1 t, \ldots, a_k + h_k t]$.

Dosadíme-li do (3), dostáváme (píšeme $a = [a_1, \ldots, a_k]$)

$$f(a_1+h_1, \ldots, a_k+h_k) = f(a) + \frac{1}{1!}\sum_{j=1}^{k} \frac{\partial f(a)}{\partial x_j} h_j +$$

$$(4) \qquad + \frac{1}{2!}\sum_{j_1=1}^{k}\sum_{j_2=1}^{k} \frac{\partial^2 f(a)}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}} h_{j_1} h_{j_2} + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n!}\sum_{j_1=1}^{k}\sum_{j_2=1}^{k}\ldots\sum_{j_n=1}^{k} \frac{\partial^n f(a)}{\partial x_{j_1}\partial x_{j_2}\ldots\partial x_{j_n}} h_{j_1} h_{j_2}\ldots h_{j_n} +$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!}\sum_{j_1=1}^{k}\ldots\sum_{j_{n+1}=1}^{k} \frac{\partial^{n+1} f(a_1+\theta h_1, \ldots, a_k+\theta h_k)}{\partial x_{j_1}\ldots\partial x_{j_{n+1}}} h_{j_1}\ldots h_{j_{n+1}}$$

Pro názornost poznamenejme: bod $[a_1+\theta h_1, \ldots, a_k+\theta h_k]$, který se vyskytuje ve "zbytku" této formule, je bod naší úsečky, různý od obou krajních bodů (1).

Shrňme:

Věta 77. (Taylorova formule). Budiž f reálná funkce k proměnných; buďte

(1) $\qquad [a_1, \ldots, a_k], \quad [a_1+h_1, \ldots, a_k+h_k]$

dva různé body. Nechť funkce f má spojité parciální derivace až do řádu $n+1$ v jisté otevřené množině M, obsahující úsečku o krajních bodech (1). Potom existuje číslo θ ($0<\theta<1$) tak, že platí vzorec (4).

§ 4. Postačující podmínky pro lokální extrém.

Budeme vyšetřovat lokální extrémy ve smyslu § 1 (nikoliv tedy lokální extrémy "vzhledem k M" ve smyslu § 2). U funkcí jedné proměnné nám pomůže tato známá věta (viz DI, věta 135): Budiž f spojitá v intervalu $J \subset E_1$ (jakéhokoliv druhu), a nechť ve všech vnitřních bodech intervalu J je $f'(x) > 0$. Potom f je rostoucí v J. Podobně pro $f' < 0$ (f je potom klesající v J).

Mějme nyní nějakou funkci f jedné proměnné a nějaký bod c, který je "podezřelý" z lokálního extrému (to znamená, že $f'(c)$ buďto neexistuje nebo se rovná nule). Potom můžeme často rozhodnout o tom, zda lokální extrém v bodě c nastane, podle této věty:

Věta 78. Nechť funkce f je spojitá v jistém intervalu $(c-\delta, c+\delta)$ ($\delta > 0$). Potom platí:

1. Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in (c-\delta, c)$ a $f'(x) < 0$ pro všechna $x \in (c, c+\delta)$, má f v bodě c ostré lokální maximum.

2. Je-li $f'(x) > 0$ pro všechna $x \in (c-\delta, c)$ i pro všechna $x \in (c, c+\delta)$, je f rostoucí v $(c-\delta, c+\delta)$ a tedy nemá v bodě c lokální extrém.

Důkaz: V prvním případě je f rostoucí v $(c-\delta, c\rangle$, takže $f(c)$ je větší než všechny hodnoty $f(x)$ pro $x \in (c-\delta, c)$; dále je f klesající v $\langle c, c+\delta)$, takže $f(c)$ je také větší než všechny hodnoty $f(x)$ pro $x \in (c, c+\delta)$. V druhém případě je f rostoucí v $(c-\delta, c\rangle$ i v $\langle c, c+\delta)$ a je tedy zřejmě rostoucí v $(c-\delta, c+\delta)$.

Poznámka 1. Čtenář si sám doplní ostatní kombinace znamének: $f'(x) < 0$ "vlevo" od c, $f'(x) > 0$ "vpravo" od c - nastává ostré lokální minimum; $f'(x) < 0$ "vlevo" i "vpravo" od c - f je klesající v $(c-\delta, c+\delta)$. Všimněte si, že se v bodě c vyžaduje jen spojitost, ale nevyžaduje se existence derivace $f'(c)$. Proto se této věty dá užít i na funkce, jejichž graf má např. "rohy", třeba $f(x) = |x-1| + 2|x|$ (načrtněte její graf).

Důsledek. Je-li $f'(c) = 0$, $f''(c) < 0$, má f v bodě c ostré lokální maximum (obdobně $f'' > 0$ - minimum).

Důkaz. Funkce $f'(x)$ má v bodě c derivaci $f''(c) < 0$, tedy je $f'(x)$ klesající v bodě c, tj. existuje $\delta > 0$ tak, že pro $c-\delta < x < c$ je $f'(x) > f'(c) = 0$, pro $c < x < c+\delta$ je $f'(x) < f'(c) = 0$, takže můžeme užít bodu 1 z věty 78.

Pro funkce několika proměnných je otázka trochu složitější. Mějme funkci f (n proměnných) a nechť f má v okolí bodu $c = [c_1, \ldots, c_n]$ spojité parciální derivace až do 3.řádu [1].

Nechť v bodě c je $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0$ (jinak by v bodě c nemohl nastat lokální extrém). Podle Taylorovy věty je pro dostatečně malá $|h_1|, \ldots, |h_n|$ (tj. pro $h = [h_1, \ldots, h_n] \in \mathcal{U}_\Delta([0, \ldots, 0])$, kde Δ je jisté kladné číslo)

$$(1) \qquad f(c_1 + h_1, \ldots, c_n + h_n) - f(c_1, \ldots, c_n) =$$

$$= \frac{1}{2!} \sum_{j,k=1}^{n} \frac{\partial^2 f(c)}{\partial x_j \, \partial x_k} h_j h_k + \frac{1}{3!} \sum_{j,k,l=1}^{n} \frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x_j \, \partial x_k \, \partial x_l} h_j h_k h_l,$$

kde ξ je bod tohoto tvaru: $\xi = [c_1 + \theta h_1, \ldots, c_n + \theta h_n]$, $0 < \theta < 1$.

[1] Stačilo by do 2.řádu, ale důkaz by se trochu komplikoval.

Pro zjednodušení označme

$$\frac{\partial^2 f(c)}{\partial x_j\, \partial x_k} = A_{jk} \quad (\text{jest ovšem } A_{jk} = A_{kj}),$$

$$\frac{1}{3!} \cdot \sum_{j,k,l=1}^{r} \frac{\partial^3 f(\xi)}{\partial x_j\, \partial x_k\, \partial x_l} h_j h_k h_l = R(h),$$

$$\sqrt{h_1^2 + \ldots + h_r^2} = \| h \|$$

(tedy ovšem $|h_j| \leq \|h\|$ pro $j = 1, \ldots, r$). Ze spojitosti derivací třetího řádu plyne, že tyto derivace jsou v jistém okolí bodu c omezené; zvolíme-li tedy Δ dosti malé, bude pro všechna $[h_1, \ldots, h_r] \in \mathcal{U}_\Delta([0, \ldots, 0])$ platit

$$(2) \qquad |R(h)| \leq K \|h\|^3,$$

kde $K > 0$ je jisté číslo.

Rovnost (1) pišme takto:

$$(3) \qquad f(c_1 + h_1, \ldots, c_r + h_r) - f(c) = \frac{1}{2!} \sum_{j,k=1}^{r} A_{jk} h_j h_k + R(h).$$

Součet vpravo je kvadratická forma v r proměnných $h_1, \ldots, h_r$. Zopakujme některé pojmy z teorie kvadratických forem. V počátku je ovšem hodnota formy rovna nule. Jestliže forma nabývá ve všech bodech (kromě počátku) kladných hodnot, nazývá se <u>positivně definitní</u>; podobně se definuje forma negativně definitní. Jestliže forma nabývá kladných i záporných hodnot, nazývá se <u>indefinitní</u>. Jestliže konečně forma nabývá jen nezáporných hodnot, ale nabývá hodnoty nula i v některém bodě různém od počátku, nazývá se <u>positivně semidefinitní</u>; podobně se definuje forma negativně semidefinitní. Je vidět, že těchto pět případů vyčerpává všechny možnosti. Zároveň je jasné, že se tyto případy navzájem vylučují, s jedinou triviální výjimkou: forma může být současně positivně i negativně semidefinitní, totiž tehdy, když nabývá jen hodnoty nulové; to nastane jen tehdy, když všechny koeficienty A_{jk} se rovnají nule.

Platí nyní tato věta:

<u>Věta 79.</u>

Budiž f funkce r proměnných, $c \in E_r$. Nechť $\frac{\partial f}{\partial x_1}(c) = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_r}(c) = 0$. Nechť f má v jistém okolí bodu c spojité parciální derivace až do 3. řádu. Sestrojme kvadratickou formu

$$(4) \qquad \sum_{j,k=1}^{r} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j\, \partial x_k}(c) \,.\, h_j h_k .$$

Je-li tato forma positivně definitní, má f v bodě c ostré lokální minimum; je-li negativně definitní, má f v bodě c ostré lokální maximum; je-li indefinitní, nemá f v bodě c lokální extrém.

Poznámka 2. Tato věta neřeší případ semidefinitní, který je značně obtížný.

Důkaz věty 79. Půjde o znaménko výrazu (3), jestliže h leží v jistém dostatečně malém okolí počátku.

Kvadratická forma

(5) $$Q(h) = Q(h_1, \ldots, h_r) = \sum_{j,k=1}^{r} A_{jk} h_j h_k \; ; A_{jk} = \frac{\partial^2 f(c)}{\partial x_j \, \partial x_k} \;)$$

má zřejmě tuto vlastnost: Je-li c jakékoliv číslo, je

(6) $$Q(ch_1, \ldots, ch_r) = c^2 Q(h_1, \ldots, h_r) \, .$$

I. Budiž forma (5) positivně definitní. Označme znakem S množinu těch bodů $h = [h_1, \ldots, h_r]$, pro které je $\|h\| = 1$, tj. $h_1^2 + \ldots + h_r^2 = 1$ (je to tzv. jednotková kulová nadplocha neboli jednotková sféra v E_r). Množina S je kompaktní (podobná úvaha jako v příkl. 1, § 2). Mezi všemi hodnotami, kterých funkce $Q(h)$ v množině S nabývá, je jedna nejmenší, a ta je ovšem kladná; označme ji γ ($\gamma > 0$) . Je-li nyní $h = [h_1, \ldots, h_r]$ libovolný bod různý od počátku, položme

(7) $$h_1' = \frac{h_1}{\|h\|} , \ldots , h_r' = \frac{h_r}{\|h\|} ,$$

takže
$$Q(h) = \|h\|^2 \, Q(h')$$

(viz (6)). Ale z (7) plyne
$$h_1'^2 + \ldots + h_r'^2 = \frac{h_1^2 + \ldots + h_r^2}{\|h\|^2} = 1 ,$$

tedy $h' \in S$, $Q(h') \geqq \gamma$, tedy $Q(h) \geqq \|h\|^2 \gamma$. Z (3), (2) tedy plyne
$$f(c_1 + h_1, \ldots, c_r + h_r) - f(c) \geqq \frac{1}{2} \gamma \|h\|^2 - K \|h\|^3 =$$
$$= \|h\|^2 \left(\frac{1}{2}\gamma - K \|h\| \right) > 0 ,$$ jestliže

$0 < \|h\| < \frac{\gamma}{2K}$ (a současně ovšem $h \in \mathcal{U}_\Delta([0, \ldots, 0])$). Z toho je vidět, že f má v c ostré lokální minimum.

II. Budiž $Q(h)$ negativně definitní; potom užiji bodu I. na funkci $-f$.

III. Budiž $Q(h)$ indefinitní. Existuje tedy bod H' tak, že $Q(H') > 0$ a bod H'' tak, že $Q(H'') < 0$. Ovšem H', H'' jsou různé od počátku. Položme

$$h_1' = \frac{H_1'}{\|H'\|}, \ \dots, \ h_k' = \frac{H_k'}{\|H'\|},$$

takže $h' \in S$ a ovšem $Q(h') = \frac{1}{\|H'\|^2} \cdot Q(H') > 0$; podobně sestrojím bod $h'' \in S$ tak, že $Q(h'') < 0$. Body h', h'' nyní necháme pevné a budeme vyšetřovat pro $0 < \varepsilon < 1$ body

$$h_\varepsilon' = [\varepsilon h_1', \dots, \varepsilon h_k'] \qquad h_\varepsilon'' = [\varepsilon h_1'', \dots, \varepsilon h_k''] \ ;$$

jest ovšem $\|h_\varepsilon'\| = \|h_\varepsilon''\| = \varepsilon$. Pro dosti malá ε můžeme užít (3), (2), (6) na body h_ε', h_ε'' a dostáváme

$$f(c_1 + \varepsilon h_1', \dots, c_k + \varepsilon h_k') - f(c) = \frac{1}{2}\varepsilon^2 Q(h') + R(h_\varepsilon') \geqq$$

$$\geqq \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} Q(h') - K\varepsilon\right) > 0 \ ,$$

$$f(c_1 + \varepsilon h_1'', \dots, c_k + \varepsilon h_k'') - f(c) = \frac{1}{2}\varepsilon^2 Q(h'') + R(h_\varepsilon'') \leqq$$

$$\leqq \varepsilon^2 \left(\frac{1}{2} Q(h'') + K\varepsilon\right) < 0 \ ,$$

jestliže $\varepsilon < \frac{1}{2K} Q(h')$, $\varepsilon < \frac{1}{2K} |Q(h'')|$.

Ježto tyto nerovnosti platí pro všechna dostatečně malá $\varepsilon > 0$, je vidět, že rozdíl (3) nabývá v každém okolí bodu $h = [0, \dots, 0]$ jak kladných tak záporných hodnot, takže v bodě c nenastává lokální extrém funkce f.

<u>Poznámka 3.</u> Pro $k = 2$, tj. pro formu

(8) $$Q(h, k) = ah^2 + 2bhk + ck^2,$$

můžeme snadno zjistit toto:

Je-li $b^2 - ac < 0$, je forma definitní (positivně pro $a > 0$, negativně pro $a < 0$); je-li $b^2 - ac > 0$, je forma indefinitní; je-li $b^2 - ac = 0$, je forma semidefinitní.

Důkaz: Při důkazu vylučuji počátek $h = k = 0$.

1. Budiž $a \neq 0$ nebo $c \neq 0$. Vzhledem k symetrii stačí vyšetřit případ $a \neq 0$. Potom

$$Q(h, k) = a\left(h + \frac{b}{a} k\right)^2 + \frac{ac - b^2}{a} k^2 .$$

Je-li $ac - b^2 > 0$, má $Q(h,k)$ vždy totéž znaménko jako a . Je-li $ac - b^2 < 0$, má $Q(h,k)$ pro $h=1$, $k=0$ totéž znamení jako a, pro $k=1$ $h = -\frac{b}{a}$ má znamení opačné. Je-li $ac-b^2 = 0$, nemůže mít $Q(h,k)$ opačné znaménko než a , ale $Q(-\frac{b}{a}, 1) = 0$.

2. Budiž $a = c = 0$, tedy $b^2 - ac = b^2$, $Q(h,k) = 2bxy$. To je zřejmě forma indefinitní pro $b \neq 0$, semidefinitní (nulová) pro $b = 0$.

V našem problému (lokální extrémy funkcí dvou proměnných) půjde o formu (8), kde

$$a = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad b = \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}, \quad c = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

Máme tedy toto pravidlo: Má-li $f(x,y)$ v okolí bodu $[x_0, y_0]$ spojité parciální derivace 3.řádu, a je-li $f_1 = f_2 = 0$ v bodě $[x_0, y_0]$, potom platí toto (hodnoty derivací se berou v bodě $[x_0, y_0]$) :

Je-li $(f_{12})^2 - f_{11} f_{22} < 0$, má f v bodě $[x_0, y_0]$ ostrý lokální extrém (minimum pro $f_{11} > 0$, maximum pro $f_{11} < 0$). Je-li $(f_{12})^2 - f_{11} f_{22} > 0$, nemá f v bodě $[x_0, y_0]$ lokální extrém.

<u>Příklad 1.</u> $f(x,y) = x^3 + 3xy + y^3$. Funkce f není v E_2 ani shora ani zdola omezená (stačí si všimnout hodnot $f(x,0) = x^3$). Nemá tedy největší ani nejmenší hodnotu v E_2 . Ptejme se po lokálních extrémech:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3(x^2 + y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3(x + y^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y} = 3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6y.$$

Jediné body, kde by snad mohly být lokální extrémy, musí vyhovovat rovnicím $x^2 + y = 0$, $x + y^2 = 0$, neboli $y = -x^2$, $x^4 + x = 0$, tj. buďto $x = 0$, $y = 0$ nebo $x = -1$, $y = -1$.

Výraz $\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \, \partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 9 - 36xy$ je v bodě $[0,0]$ kladný, v bodě $[-1,-1]$ záporný. Tedy naše funkce má jediný lokální extrém v bodě $[-1,-1]$.

<u>Poznámka 4.</u> Tato poznámka nepodává žádná nová fakta, a čtenář ji může vynechat; ale snad má jakýsi psychologický význam pro postoj čtenáře k otázce lokálních extrémů. Budiž $f(x_1, \ldots, x_k) = f(x)$ funkce k proměnných, která má v nějaké otevřené množině $M \subset E_k$ spojité parciální derivace do 3.řádu. Potom lokální extrémy v bodech množiny M mohou nastat jen v těch bodech, kde je $\frac{\partial f}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial f}{\partial x_k} = 0$, tj. ve stacionárních bodech. Budiž c takový stacionární bod; nastává v něm skutečně lokální extrém? Budiž předně $k = 1$; jest $f'(c) = 0$. Je-li $f''(c) \neq 0$, nastává v bodě c lokální extrém. Případ $f''(c) = 0$ je možno považovat v jistém smyslu za "výjimečný". Je te-

dy možno říci docela nepřesně, že pro funkce jedné proměnné nastává v stacionárním bodě "zpravidla" lokální extrém (což nás ovšem nezbavuje povinnosti vyšetřit, zda nenastává ten "výjimečný" případ). Docela jinak je tomu u funkcí dvou proměnných ($n = 2$) . V tomto případě nastává lokální extrém, když výraz $f_{11} f_{22} - (f_{12})^2$ je v bodě c kladný, ale nenastává, když je záporný. Žádný z těchto dvou případů nelze považovat za "častější" než druhý. To znamená: u funkcí dvou proměnných nikterak nemůžeme očekávat, že by v stacionárním bodě "zpravidla" nastával lokální extrém. Totéž by se dalo říci pro funkce většího počtu proměnných.