Kapitola 2. Diferenciální počet pro funkce několika proměnných

In: Vojtěch Jarník (author): Matematická analýza pro 3. semestr. (Czech). Praha: Univerzita Karlova v Praze, 1978. pp. 55--106.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402338

K a p i t o l a II.

DIFERENCIÁLNÍ POČET PRO FUNKCE NĚKOLIKA PROMĚNNÝCH

§ 1. Množiny v k-rozměrném kartézském prostoru.

Budeme studovat reálné funkce k reálných proměnných: $f(x_1, x_2, \dots, x_k)$.

Napřed si musíme povědět několik slov o množinách v k-rozměrném kartézském prostoru E_k.

Kartézským k-rozměrným prostorem E_k budeme nazývat množinu všech k-členných posloupností neboli uspořádaných k-tic reálných čísel: $[x_1, x_2, \dots, x_k]$. Každou takovou k-tici nazveme bodem prostoru E_k, čísla $x_1, \dots, x_k$ nazýváme jeho souřadnicemi. Body budeme značit také jedním písmenem: píši-li $x = [x_1, x_2, \dots, x_k]$, znamená to, že x je bod o souřadnicích $x_1, \dots, x_k$. Jde-li o konkrétní dimensi nepříliš velkou, označujeme souřadnice někdy různými písmeny místo abychom je odlišovali indexy. Např. píšeme $[x, y]$; $[x, y, z, t]$ atd. (první je bod v E_2, druhý v E_4).

Máme-li dva body $x = [x_1, x_2, \dots, x_k]$, $y = [y_1, y_2, \dots, y_k]$, nazýváme jejich vzdáleností číslo

$$\rho(x, y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} (y_i - x_i)^2} = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + \dots + (y_k - x_k)^2} . \tag{1}$$

Tedy E_k s touto definicí vzdálenosti je vlastně k-rozměrný euklidovský prostor s pevně zvolenou pravoúhlou soustavou souřadnic. (Tedy je to euklidovský prostor plus jedna jeho ortogonální base.) Vzdálenost (1) má tyto tři vlastnosti:

I. $\rho(x, x) = 0$; pro $x \neq y$ je $\rho(x, y) > 0$.

II. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$.

III. $\rho(x, z) \leqq \rho(x, y) + \rho(y, z)$.

První dvě vlastnosti jsou zřejmé, třetí (tzv. trojúhelníková nerovnost) znáte z geometrie.

Bude-li vhodno vytknout dimensi, budeme psát též ρ_k místo ρ .

Všechny úvahy, které budeme provádět, platí ovšem též v E_1, tj. na "číselné ose".

Poznámka 1 pro ty, kteří chtějí vidět trochu dále. Je-li P nějaká množina, a je-li každé uspořádané dvojici prvků $x \in P$, $y \in P$ přiřazeno číslo

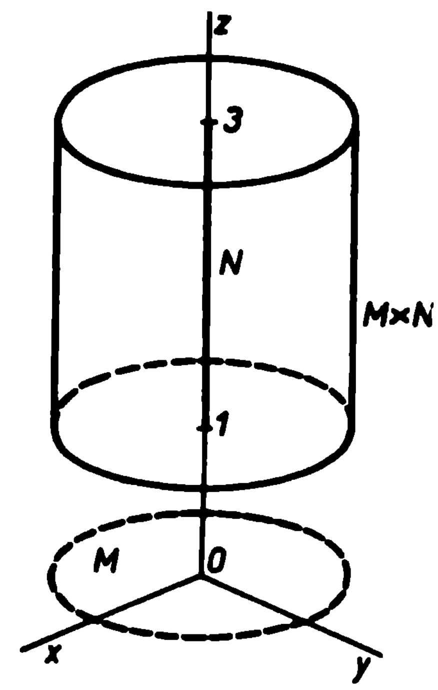
$\rho(x, y)$ tak, že platí I, II, III, říkáme, že P je <u>metrický prostor</u>, ρ udává jeho <u>metriku</u>. Při důkazu některých vět budeme užívat <u>jenom</u> těchto tří vlastností I, II, III. Tyto věty ovšem platí pro každý metrický prostor. Prvkům metrického prostoru se často říká "body".

Mějme množiny $M \subset E_k$, $N \subset E_s$. <u>Kartézským součinem</u> $M \times N$ množin M, N nazýváme množinu všech bodů

$$[x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_s] \in E_{k+s} ,$$

pro něž je $[x_1, x_2, \ldots, x_k] \in M$, $[y_1, \ldots, y_s] \in N$.

Příklad: Budiž $M \subset E_2$ množina těch bodů $[x, y]$, pro něž $x^2 + y^2 < 1$ (vnitřek jednotkové kružnice); budiž $N \subset E_1$ interval $(1, 3)$. Potom $M \times N \subset E_3$ je množina oněch bodů $[x, y, z]$, pro něž je $x^2 + y^2 < 1$, $1 < z < 3$ (je to vnitřek válce, viz obr. 11). Není ovšem pravda, že by každá množina bodů v E_{k+s} byla kartézským součinem množiny v E_k a množiny v E_s.



Obr. 11.

Příklad: Nechť množina $P \subset E_2$ se skládá ze dvou bodů: $[1, 0]$, $[0, 1]$. Kdyby bylo $P = M \times N$, $M \subset E_1$, $N \subset E_1$, musila by množina M obsahovat oba body $0, 1$, a stejně tak množina N. Potom by však množina P musila obsahovat body $[0, 0]$, $[1, 1]$, což není pravda (nakreslete!).

Podobně se definuje kartézský součin libovolného konečného počtu množin $M_1 \subset E_{k_1}$, $M_2 \subset E_{k_2}$, ..., $M_m \subset E_{k_m}$. Např. je-li $M \subset E_k$, $N \subset E_s$, $P \subset E_l$, znamená $M \times N \times P$ množinu všech bodů

(2) $$[x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, y_2, \ldots, y_s, z_1, z_2, \ldots, z_l] \in E_{k+s+l} ,$$

pro něž je $[x_1, \ldots, x_k] \in M$, $[y_1, \ldots, y_s] \in N$, $[z_1, \ldots, z_l] \in P$. Označíme-li $[x_1, x_2, \ldots, x_k] = x$, $[y_1, \ldots, y_s] \in y$, $[z_1, \ldots, z_l] = z$, píšeme místo (2) kratčeji $[x, y, z]$. Podle této definice je $E_{k+s+l+m} = E_k \times E_s \times E_t \times E_m$.

Dále je jasné, že platí asociativní zákon: $(M \times N) \times P = M \times (N \times P) = M \times N \times P$.

Víme, co to jsou <u>intervaly</u> v E_1. <u>Intervalem</u> v E_k nazýváme kartézský součin k jednorozměrných intervalů:

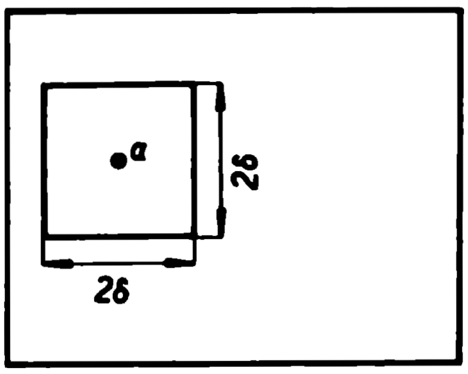
(3) $$I = I_1 \times I_2 \times \ldots \times I_k \quad (I_k \subset E_1) .$$

Je-li např. $I_1 = (a_1, b_1)$, $I_2 = (a_2, b_2)$, $I_3 = (a_3, b_3)$, je I vnitřek kvádru v E_3 (totiž množina těch bodů $[x, y, z]$, pro něž je $a_1 < x < b_1$, $a_2 < y < b_2$, $a_3 < z < b_3$). Je-li některé z čísel a_k, b_k nevlastní, není to ovšem kvádr v obvyklém smyslu slova. Jsou-li v (3) všechny intervaly $I_1, \dots, I_n$ otevřené, nazývá se také I *otevřeným* intervalem.

Je-li a libovolný bod v E_n, nazvu *okolím* bodu a každý otevřený (n-rozměrný) interval, obsahující bod a. (Obyčejně se pojem "okolí" definuje obecněji, ale my vystačíme s touto definicí.) Speciálně: Je-li $a = [a_1, \dots, a_n]$ a δ kladné číslo, nazvu *δ-okolím* bodu a interval

$$(a_1 - \delta, a_1 + \delta) \times (a_2 - \delta, a_2 + \delta) \times \dots \times (a_n - \delta, a_n + \delta);$$

je to tedy vnitřek n-rozměrné "krychle", která má střed a, hrany rovnoběžné s osami souřadnic, a délku hrany 2δ.



Obr. 12.

Každé δ-okolí bodu a je okolím bodu a; naopak, každé okolí bodu a obsahuje nějaké δ-okolí bodu a (stačí volit δ dostatečně malé - viz obr. 12). δ-okolí bodu a budu značit $U_\delta(a)$.

Jsou-li $M_1, M_2, \dots, M_k$ libovolné množiny (s prvky jakéhokoliv rázu), znamená symbol $M_1 \cup M_2 \cup \dots \cup M_k$ nebo $\bigcup_{p=1}^{k} M_p$ jejich *sjednocení*, tj. množinu všech prvků, jež patří aspoň k jedné z množin $M_1, \dots, M_k$. Symbol $M_1 \cap M_2 \cap \dots \cap M_k$ nebo $\bigcap_{p=1}^{k} M_p$ znamená jejich *průnik*, tj. množinu všech prvků, jež patří ke všem množinám $M_1, \dots, M_k$. Symbol $\emptyset$ značí prázdnou množinu. Zaveďme ještě *rozdíl* $M - N$ neboli $M \setminus N$ jakožto množinu těch prvků, jež patří k M, ale nepatří k N. Je-li speciálně $N \subset M$, nazýváme $M - N$ *doplňkem* nebo *komplementem* množiny N vzhledem k M. Je jasné, že komplement množiny $M - N$ vzhledem k M je množina N (zde je předpoklad $N \subset M$ nutný!). Speciálně: Je-li $N \subset E_n$, budeme množinu $E_n - N$ nazývat krátce doplňkem množiny N (bez dodatku "vzhledem k E_n", to se přitom tedy rozumí samo sebou).

Množina $M \subset E_n$ se nazývá *omezená*, jestliže existuje číslo K tak, že absolutní hodnoty souřadnic všech jejích bodů jsou menší než K. Vidíte, že pro $n = 1$ (tj. pro množiny reálných čísel) je tato definice ve shodě s naší dřívější definicí.

A teď přijde důležitá klasifikace bodů z E_n vzhledem k nějaké množině $M \subset E_n$.

Budiž $M \subset E_k$. Bod $a \in E_k$ nazvu <u>vnitřním bodem</u> množiny M, jestliže existuje okolí $\mathcal{U}$ bodu a, jež je částí množiny M. (Potom ovšem $a \in M$).

Rozdělíme nyní všechny body prostoru E_k podle jejich vztahu k množině $M \subset E_k$ do tří skupin:

I. Vnitřní body množiny M.

II. Vnitřní body doplňku množiny M; říká se jim také vnější body množiny M (ty ovšem nepatří do M).

III. Body prostoru E_k, které nejsou ani vnitřními body množiny M ani vnitřními body jejího doplňku $E_k - M$; těm se říká <u>hraniční body</u> množiny M; množina všech těchto hraničních bodů se nazývá <u>hranicí</u> množiny M, znak $\mathcal{H}(M)$. Ze symetričnosti definice (doplněk k $E_k - M$ je množina M) je vidět, že <u>hranice množiny</u> M se rovná hranici množiny $E_k - M$: $\mathcal{H}(M) = \mathcal{H}(E_k - M)$.

Množina $M \subset E_k$ se nazývá <u>otevřená</u>, jestliže každý bod množiny M je vnitřním bodem množiny M. Např. každý otevřený interval je otevřená množina. Nebo v E_2 je "vnitřek" kteréhokoliv kruhu otevřená množina.

Otevřenou množinu M lze charakterisovat[1)] také tím, že žádný hraniční bod množiny M neleží v množině M, tj. celá hranice množiny M (neboli celá hranice množiny $E_k - M$) leží v $E_k - M$. To lze psát také $\mathcal{H}(M) \cap M = \emptyset$.

Jestliže $\mathcal{H}(M) \subset M$ (tj. jestliže celá hranice množiny M leží v M), nazývá se množina M <u>uzavřená</u>. Je vidět, že <u>doplněk množiny otevřené je množina uzavřená, doplněk množiny uzavřené je množina otevřená</u>.

Příklady: v E_2 je kruh $x^2 + y^2 < 1$ otevřená množina; její hranice je kružnice $x^2 + y^2 = 1$. Kruh $x^2 + y^2 \leqq 1$ je uzavřená množina; její hranice je opět kružnice $x^2 + y^2 = 1$. E_k, $\emptyset$ jsou otevřené množiny; jejich doplňky $\emptyset$, E_k jsou tedy uzavřené. Tyto dvě množiny jsou tedy současně otevřené i uzavřené. Dá se dokázat, že žádná jiná množina v E_k už tuto vlastnost nemá. V E_1 jsou tzv. otevřené intervaly vskutku otevřené množiny. Interval $\langle a, b \rangle$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ je uzavřená množina; její hranice se skládá ze dvou bodů a, b. Je-li $-\infty < a < b < +\infty$, nejsou intervaly $(a, b\rangle$, $\langle a, b)$ ani otevřené ani uzavřené (ze dvou hraničních bodů a, b jeden k intervalu patří, druhý ne). Ale intervaly $(-\infty, b\rangle$, $\langle a, +\infty)$ jsou uzavřené množiny (jediný hraniční bod je b, popříp. a).

---

1) Slova "charakterisovat" se v matematických textech užívá zpravidla ve smyslu nutné a postačující podmínky. Řekneme-li např., že otevřené množiny lze charakterisovat jistou vlastností, rozumím tím, že množina je otevřená tehdy a jen tehdy, má-li tuto vlastnost. Také říkáme, že tato vlastnost je charakteristická pro otevřené množiny. Protože jde o zestručněné rčení, je vhodno ho užívat jen tehdy, je-li ze souvislosti jasný jeho přesný smysl; jinak je vhodnější obšírnější formulace ("tehdy a jen tehdy" apod.).

Množiny usavřené a množiny otevřené tvoří dvě důležité speciální třídy množin.

§ 2. Funkce několika proměnných: spojitost a limita.

Budiž $M \subset E_k$. Jestliže každému bodu $x = [x_1, \ldots, x_k] \in M$ je přiřazeno reálné číslo, jež označíme $f(x)$ nebo $f(x_1, \ldots, x_k)$, říkáme, že f je (reálná) funkce k reálných proměnných v oboru M. Množině M říkáme obor nebo definiční obor funkce f.

Funkci f jedné proměnné s definičním oborem M lze také plně popsat jejím **grafem** v E_2; to je množina všech bodů $[x, f(x)]$ pro všechna $x \in M$.

Podobně funkci f dvou proměnných v oboru $M \subset E_2$ lze plně popsat jejím "grafem" v E_3; to je množina všech bodů $[x, y, f(x, y)]$ pro všechny body $[x, y] \in M$.

Obecně funkci f (k proměnných) s definičním oborem $M \subset E_k$ lze plně popsat jejím "grafem" v E_{k+1}; to je množina všech bodů $[x_1, x_2, \ldots, x_k, f(x_1, \ldots, x_k)]$ pro všechny body $[x_1, \ldots, x_k] \in M$. (Nebo, ve zkráceném označení, které jsme už zavedli v § 1: Graf funkce f je množina všech bodů $[x, f(x)]$ pro všechny body $x \in M$). Při tomto označení znamená f funkci (tedy chcete-li její graf, tj. jistou množinu v E_{k+1}), kdežto $f(x)$ znamená hodnotu funkce f v bodě x, tedy jisté číslo.

Někdy užíváme trochu nedůsledného označení: Např. mluvíme o funkci tří proměnných

(1) $\qquad x^2 e^{yz}$,

ačkoliv bychom vlastně měli mluvit o funkci f, jež je pro všechna reálná x, y, z definována rovnicí $f(x, y, z) = x^2 e^{yz}$. Výraz (1) by vlastně neměl znamenat funkci, nýbrž její hodnotu v určitém bodě $[x, y, z]$. Na tuto odchylku jste zvyklí. Psali jsme např. $(x^2)' = 2x$, ačkoliv jsme vlastně měli říci: Je-li $f(x) = x^2$ pro všechna reálná x, je $f'(x) = 2x$ pro všechna reálná x. Budu se přirozeně této nedůslednosti vyhýbat tam, kde by mohla vést k nedorozumění.

Z funkce k proměnných mohu vytvořit nové funkce tím, že za některé z proměnných dosadím konstanty. Tak např. do funkce f, definované v E_3 rovnicí

$$f(x, y, z) = e^{xyz} \sin xy + 1,$$

dostanu dosazením $z = 1$ funkci dvou proměnných g v oboru E_2:

$$g(x, y) = f(x, y, 1) = e^{xy} \sin xy + 1;$$

dosazením $x = \frac{\pi}{2}$, $z = 2$ dostanu funkci h v oboru E_1 :

$$h(y) = f(\tfrac{\pi}{2}, y, 2) = e^{\pi y} \sin \tfrac{\pi}{2} y + 1 \;;$$

dosazením $x = 1$, $y = \pi$ dostanu funkci k v oboru E_1 :

$$k(z) = f(1, \pi, z) = e^{\pi z} \sin \pi + 1 = 1 \;;$$

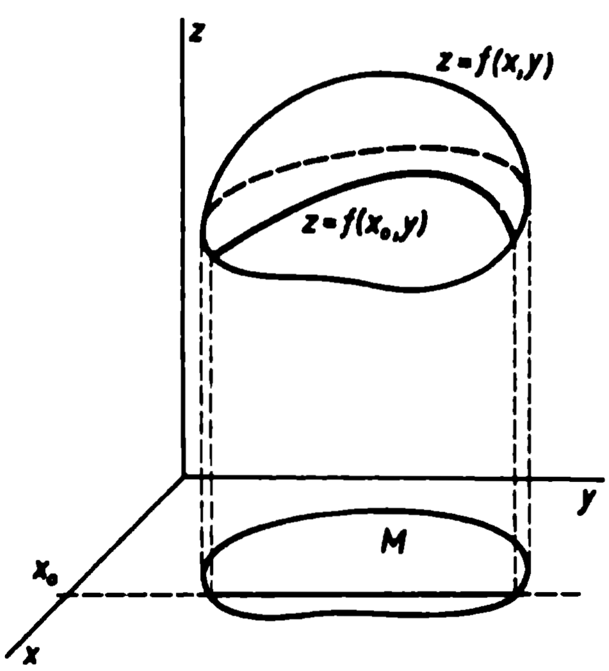
dosazením $y = 0$ dostanu funkci l v oboru E_2 :

$$l(x, z) = f(x, 0, z) = e^{0} \sin 0 + 1 = 1 \;.$$

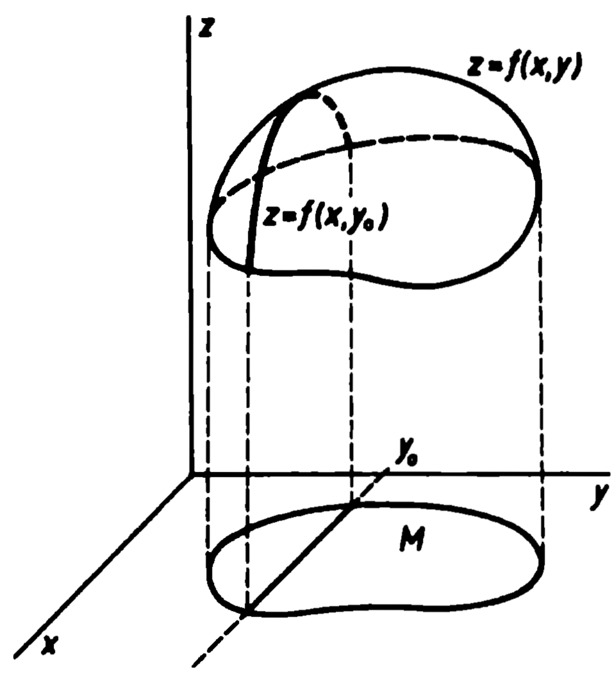
Funkce k, l jsou různé! Funkce k je definována v E_1, jejím grafem je přímka rovnoběžná s osou abscis; l je definována v E_2, jejím grafem je rovina, totiž množina těch bodů, jejichž třetí souřadnice je rovna jedné.

U funkcí dvou proměnných leží jejich graf v E_3, a tedy si to dovedeme trochu naznačit v projekci:

Máme funkci dvou proměnných f v oboru M. Zvolme x_0 ; položím $g(y) = f(x_0, y)$. Tato funkce je definována pro ona y, pro něž $[x_0, y] \in M$. Její graf vidíte na obr. 13 v rovině $x = x_0$. Podobně můžeme zvolit y_0 a vyšetřovat funkci $h(x) = f(x, y_0)$ (viz obr. 14).



Obr. 13.



Obr. 14.

Obrátíme se nyní k pojmu spojitosti. Zavedli jsme vzdálenost $\rho(x, y)$ dvou bodů v E_k. Pro nás bude někdy výhodnější vyšetřovat místo

$$\rho(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_k - y_k)^2} \qquad x = [x_1, \ldots, x_k] \quad y = [y_1, \ldots, y_k]$$

jinou funkci, totiž

$$d(x, y) = d_k(x, y) = \max_{k=1,\ldots,n} |x_k - y_k| \;;$$

1014-4527

někdy se hodí také

$$d'(x,y) = d'_k(x,y) = \sum_{k=1}^{k} |x_k - y_k| .$$

Zřejmě je

$$d(x,y) \leqq \rho(x,y) \leqq d'(x,y) \leqq k\,d(x,y) ,$$

tj. největší z těchto tří funkcí je nejvýše k-krát větší než nejmenší z nich; proto v mnohých úvahách je lhostejno, které z těchto funkcí užíváme (je to hlavně v úvahách o spojitosti a limitě, kde jde - zhruba řečeno - o to, zda se některá z těchto tří funkcí za jistých okolností stává "libovolně malou"). Pro nás bude pohodlná funkce d . Má tyto tři vlastnosti:

I. $d(x,x) = 0$; pro $x \neq y$ je $d(x,y) > 0$.

II. $d(x,y) = d(y,x)$.

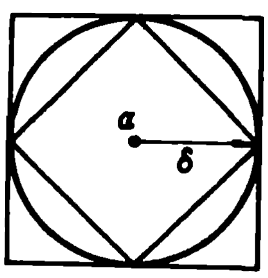
III. $d(x,z) \leqq d(x,y) + d(y,z)$.

První dvě vlastnosti jsou zřejmé. Důkaz třetí: Pro $k = 1, 2, \ldots, k$ je

$$|x_k - z_k| = |x_k - y_k + y_k - z_k| \leqq |x_k - y_k| + |y_k - z_k| \leqq$$
$$\leqq d(x,y) + d(y,z) , \quad \text{a tedy též}$$

$$d(x,z) = \max_{k=1,2,\ldots,k} |x_k - z_k| \leqq d(x,y) + d(y,z) .$$

Vidíte, že d má tytéž tři základní vlastnosti, které jsme uvedli u funkce ρ . Také d' má tyto vlastnosti; dokažte si to sami.



Obr. 15.

Pro větší názornost je nakreslen obr. 15 (v E_2) . Kružnice o poloměru δ je množina oněch bodů x , pro něž $\rho(a,x) = \delta$; opsaný čtverec je množina oněch x , pro něž $d(a,x) = \delta$; vepsaný čtverec je množina těch bodů x , pro něž $d'(a,x) = \delta$.

V E_1 všechny tři funkce splývají:

$$d(x,y) = \rho(x,y) = d'(x,y) = |x - y| .$$

δ- okolí bodu $a = [a_1, \ldots, a_k]$ značme dále $U_\delta(a)$ ($\delta > 0$) . Co je to δ- okolí bodu a (v E_k) ? To je množina všech bodů x , pro něž je $a_k - \delta < x_k < a_k + \delta$, tj. $|x_k - a_k| < \delta$ pro $k = 1, 2, \ldots, k$. Neboli: $U_\delta(a)$ je množina těch bodů x , pro něž $d(x,a) < \delta$. Definujme ještě redukované δ-okolí bodu a ; to dostaneme, když z $U_\delta(a)$ odstraníme bod a . Označíme je $U^*_\delta(a)$.

Budiž $V(x)$ nějaká vlastnost "věci" x ; např. vlastnost $x > 3$ (zde tedy x znamená reálné číslo) nebo $d_k(x,a) < 1$ (zde jde o body $x \in E_k$; x má tuto vlastnost, jestliže jeho "vzdálenost" d_k od daného bodu $a \in E_k$ je

1014-4527

menší než 1). Symbolem $\underset{x}{\mathcal{E}}(V(x))$ značíme množinu všech x, která mají vlastnost $V(x)$. Pracujeme-li s body v E_k, je zřejmě

$$\mathcal{U}_\delta(a) = \underset{x}{\mathcal{E}}(d(x,a) < \delta), \quad \mathcal{U}^*_\delta(a) = \underset{x}{\mathcal{E}}(0 < d(x,a) < \delta).$$

Nyní definujme spojitost a limitu:

Definice: Funkce f (k proměnných) se nazývá spojitá v bodě $c \in E_k$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že je

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in \mathcal{U}_\delta(c).$$

Poznámka: mohli bychom též psát "pro všechna $x \in \mathcal{U}^*_\delta(c)$". Neboť je-li $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ pro všechna $x \in \mathcal{U}^*_\delta(c)$ (tj. pro všechna $x \in \mathcal{U}_\delta(c)$ kromě - snad - bodu c), je $f(c)$ definováno, načež nerovnost $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ je splněna sama sebou i pro $x = c$.

Definice. Říkáme, že funkce f má v bodě c (vlastní) limitu A, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že je

$$|f(x) - A| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in \mathcal{U}^*_\delta(c).$$

Uvážíme-li, že pro $k = 1$ je $\mathcal{U}_\delta(c)$ interval $(c - \delta, c + \delta)$, vidíme, že pro $k = 1$, (tj. pro funkce jedné proměnné) jsou naše definice ve shodě s těmi, které znáte z 1.semestru. Poznamenejme (jako u funkce jedné proměnné), že se smysl definice a spojitosti nezmění, píši-li $\leq \varepsilon$ místo $< \varepsilon$.

Stejně jako u funkcí jedné proměnné se dokáže, že daná funkce f má v daném bodě c nejvýše jednu limitu, kterou opět označujeme

$$\lim_{x \to c} f(x) \quad \text{nebo (je-li to užitečné)} \quad \lim_{[x_1,\dots,x_k] \to [c_1,\dots,c_k]} f(x_1, x_2, \dots, x_k)$$

(samozřejmě můžeme místo písmena x užívat také jiných písmen).

Srovnáme-li definici limity s definicí spojitosti (ve které můžeme místo $\mathcal{U}_\delta(c)$ psát $\mathcal{U}^*_\delta(c)$), vidíme, že i pro funkce k proměnných platí známá věta:

Funkce f je spojitá v bodě c tehdy a jen tehdy, je-li $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$.

Věty o limitě a spojitosti absolutní hodnoty, součtu, rozdílu, součinu a podílu platí ve stejném znění jako pro funkce jedné proměnné. Také důkaz je stejný, jenom místo $|x - c| < \delta$ se píše $x \in \mathcal{U}_\delta(c)$ a místo $0 < |x - c| < \delta$ se píše $x \in \mathcal{U}^*_\delta(c)$.

Je-li f spojitá v každém bodě otevřené množiny M, říkáme krátce, že f je spojitá v M. (O spojitosti v množině, která není otevřená, budeme mluvit později - půjde o to, jak účelně definovat spojitost funkce v hraničních bodech množiny M, které leží v M.)

Dokažme větu o spojitosti složených funkcí. Budiž dána funkce r proměnných $f(x_1, x_2, \ldots, x_r)$ a r funkcí s proměnných $\varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_s)$, $\varphi_2(t_1, t_2, \ldots, t_s), \ldots, \varphi_r(t_1, t_2, \ldots, t_s)$.

Definujme funkci $\mathcal{F}$ (s proměnných) rovnicí

$$\mathcal{F}(t_1, t_2, \ldots, t_s) = f(\varphi_1(t_1, t_2, \ldots, t_s), \ldots, \varphi_r(t_1, t_2, \ldots, t_s)).$$

Věta. Nechť funkce $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_r$ jsou spojité v bodě $c = [c_1, \ldots, c_s]$; označme $\varphi_1(c) = d_1, \ldots, \varphi_r(c) = d_r$. Nechť funkce f je spojitá v bodě $d = [d_1, \ldots, d_r]$. Potom funkce $\mathcal{F}$ je spojitá v bodě c.

Důkaz. Budiž $\varepsilon > 0$. Máme dokázat, že existuje $\delta > 0$ tak, že platí

$|\mathcal{F}(t) - \mathcal{F}(c)| < \varepsilon$ pro všechna $t \in U_\delta(c)$, tj.

(2) $\quad |f(\varphi_1(t), \ldots, \varphi_r(t)) - f(\varphi_1(c), \ldots, \varphi_r(c))| < \varepsilon$ pro všechna $t \in U_\delta(c)$.

Ježto f je spojitá v bodě $d = [d_1, \ldots, d_r] = [\varphi_1(c), \ldots, \varphi_r(c)]$, existuje k našemu $\varepsilon > 0$ číslo $\eta > 0$ tak, že je

(3) $\quad |f(x_1, \ldots, x_r) - f(\varphi_1(c), \ldots, \varphi_r(c)| < \varepsilon$

pro všechny body $[x_1, \ldots, x_r] \in U_\eta(d)$ tj. pro $|x_1 - d_1| < \eta, \ldots, |x_r - d_r| < \eta$, tj. pro

(4) $\quad |x_1 - \varphi_1(c)| < \eta \quad, \ldots, |x_r - \varphi_r(c)| < \eta$.

Ale funkce $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$ jsou spojité v bodě c; tedy k číslu $\eta > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že je

$$|\varphi_1(t) - \varphi_1(c)| < \eta, \ldots, |\varphi_r(t) - \varphi_r(c)| < \eta \quad \text{pro všechna } t \in U_\delta(c).$$

To však znamená: Je-li $t \in U_\delta(c)$, je splněno (4), když za x_k dosadím $\varphi_k(t)$; tedy nerovnost (3)

$$|f(x_1, \ldots, x_r) - f(\varphi_1(c), \ldots, \varphi_r(c))| < \varepsilon$$

je splněna, když $x_k = \varphi_k(t)$ $\quad (k = 1, 2, \ldots, r, \quad t \in U_\delta(c))$, takže skutečně platí (2).

Důkaz byl snadný, ale formálně trochu neohrabaný; později si odvodíme obecnější větu o zobrazeních z E_k do E_l, kde to bude přehlednější.

Setkáváme se často s funkcemi několika proměnných, které na některých proměnných nezávisí. Typický případ je tento: Je dána funkce g (r proměnných), definovaná v nějaké množině $M \subset E_r$; tj. $g(x) = g(x_1, \ldots, x_r)$ je definováno, když $x = [x_1, \ldots, x_r] \in M$. Budiž f funkce $r + s$ proměnných, definovaná rovnicí

$$f(x, y) = f(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_s) = g(x_1, \ldots, x_k) = g(x)$$

pro $x \in M$ a libovolné $y \in E_s$ (takže definiční obor je $M \times E_s$).

Tvrdím: je-li $[a, b] = [a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_s]$ libovolný bod z $M \times E_s$ (tj. $a \in M$, b libovolné), potom je f spojitá v bodě $[a, b]$ tehdy a jen tehdy, je-li g spojitá v bodě a. Důkaz: Spojitost funkce f v bodě $[a, b]$ znamená: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro

$$|x_1 - a_1| < \delta, \ldots, |x_k - a_k| < \delta, |y_1 - b_1| < \delta, \ldots, |y_s - b_s| < \delta$$

je $|f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon$;

ale to znamená totéž, jako že je $|g(x) - g(a)| < \varepsilon$ pro $|x_1 - a_1| < \delta, \ldots, |x_k - a_k| < \delta$ (y se zde vůbec nevyskytuje), tj. spojitost $f(x, y)$ v bodě $[a, b]$ znamená totéž jako spojitost funkce $g(x)$ v bodě a.

Přirozeně, že ty proměnné, na kterých funkce f nezávisí, nemusí být zrovna ty poslední (jako to bylo zde); ale nechtěl jsem komplikovat označení. (Např. je-li $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = g(x_2, x_4)$, potom platí: f je spojitá v bodě $[a_1, a_2, a_3, a_4, a_5]$ tehdy a jen tehdy, je-li g spojitá v bodě $[a_2, a_4]$).

Tato věta nám ve spojení s větou o spojitosti součtu, součinu, podílu a složených funkcí dovoluje často rozhodnout o spojitosti funkcí několika proměnných. Např. funkce jedné proměnné

$$g_1(x) = x^2, \quad g_2(y) = y^3, \quad g_3(x) = \sqrt{1 + x^2}, \quad g_4(z) = z$$

jsou funkce jedné proměnné, které jsou spojité v E_1, takže funkce tří proměnných

$$f_1(x, y, z) = x^2, \quad f_2(x, y, z) = y^3, \quad f_3(x, y, z) = \sqrt{1 + x^2},$$

$f_4(x, y, z) = z$ jsou spojité v E_3. Tedy funkce tří proměnných

$$\varphi(x, y, z) = x^2 y^3 + z\sqrt{1 + x^2}$$

je spojitá v E_3 (spojitost součtu a součinu). Dále funkce $f(\xi) = \sin \xi$ je spojitá v E_1, a tedy podle věty o složených funkcích je funkce $\mathcal{F}$, definovaná rovnicí

$$\mathcal{F}(x, y, z) = \sin \varphi(x, y, z) = \sin (x^2 y^3 + z\sqrt{1 + x^2})$$

spojitá v E_3.

Tady jsme tedy ze spojitých funkcí jedné proměnné g_1, g_2, g_3, g_4, f sestrojili spojitou funkci $\mathcal{F}$ tří proměnných.

Uveďme dva obecné příklady.

Polynomem např. ve třech proměnných x, y, z nazýváme součet konečného počtu členů tvaru $cx^k y^l z^m$ kde k, l, m jsou celá nezáporná čísla, např.

$$3x^2yz^3 - \frac{1}{2}xz^4 + \pi y + 3$$

(nemusím jistě definovat obecně polynom v n proměnných). Je vidět, že každý polynom v n proměnných je funkce spojitá v E_n .

Racionální funkce je podíl dvou polynomů; je ovšem spojitá ve všech bodech, ve kterých je jmenovatel různý od nuly.

Naopak uvedeme nyní jednu větu, která dovoluje ze spojité funkce několika proměnných sestrojovat spojité funkce menšího počtu proměnných. Nechť $f(x, y) = f(x_1, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_s)$ je funkce $k+s$ proměnných, spojitá v bodě $[a_1, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_s] = [a, b]$. Potom funkce $g(x) = f(x, b)$ je spojitá v bodě a .

Důkaz: Budiž $\varepsilon > 0$; existuje $\delta > 0$ tak, že

(5) $$|f(x, y) - f(a, b)| < \varepsilon$$

pro $|x_1 - a_1| < \delta, \ldots, |x_k - a_k| < \delta, |y_1 - b_1| < \delta, \ldots, |y_s - b_s| < \delta$.
Tedy (5) platí speciálně pro

$$|x_1 - a_1| < \delta, \ldots, |x_k - a_k| < \delta, y_1 = b_1, \ldots, y_s = b_s .$$

Tj. pro $|x_1 - a_1| < \delta, \ldots, |x_k - a_k| < \delta$ je $|f(x, b) - f(a, b)| < \varepsilon$, tj. $|g(x) - g(a)| < \varepsilon$. Tedy je g spojitá v bodě a .

Je jasné, že ty proměnné, které byly položeny rovny konstantám, zase nemusí být srovna ty poslední proměnné. Např. u funkce dvou proměnných: Je-li $f(x, y)$ spojitá v bodě $[a, b]$, je $f(x, b)$ spojitá v bodě a, $f(a, y)$ je spojitá v bodě b .

Jestliže je $a \in E_k$, a jestliže funkce

$$g(x) = f(a_1, a_2, \ldots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \ldots, a_n)$$

je spojitá v bodě a_k , říká se často, že f je spojitá v bodě a vzhledem ke k-té proměnné. Tedy funkce, která je spojitá v bodě a , je podle předešlé věty také spojitá v bodě a vzhledem ke každé proměnné.

Ale obrátit se to nedá, jak ukážeme na příkladě: Budiž f funkce dvou proměnných:

$$f(x, y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \text{ pro } [x, y] \neq [0, 0] , \quad f(0, 0) = 0 .$$

Tato funkce je spojitá v každém bodě $[x, y] \neq [0, 0]$. V bodě $[0, 0]$ je spojitá vzhledem k první i vzhledem k druhé proměnné, neboť

$f(x, 0) = 0$ pro všechna x ,
$f(0, y) = 0$ pro všechna y .

Ale f není spojitá v bodě $[0, 0]$; neboť pro $x = y \neq 0$ je
$f(x, x) = \frac{2x^2}{2x^2} = 1$, takže nemůže být $\lim_{[x, y] \to [0, 0]} f(x, y) = f(0, 0)$.

Stojí za to všimnout si průběhu funkce v okolí bodu $[0, 0]$. Na obou osách souřadnic je $f(x, y) = 0$. Na každé přímce $y = kx$ ($k \neq 0$) je
$f(x, y) = \frac{2kx^2}{x^2 + k^2x^2} = \frac{2k}{1 + k^2}$ kromě počátku (kde je hodnota funkce rovna nule).

§ 3. Parciální derivace.

Budiž f funkce n proměnných, budiž $a = [a_1, \ldots, a_n]$ bod. Sestrojme funkci g jedné proměnné:

$$g(x) = f(a_1, \ldots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \ldots, a_n) .$$

Jestliže funkce g má v bodě a_k derivaci $g'(a_k)$, říkáme, že funkce f má parciální derivaci podle k-té proměnné v bodě a ; hodnota této parciální derivace je pak číslo $g'(a_k)$. Tedy ta parciální derivace je

$$\lim_{h \to 0} \frac{g(a_k + h) - g(a_k)}{h} , \text{ neboli}$$

(1) $$\lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + h, a_{k+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_n)}{h} .$$

V dalším budeme mluvit jen o vlastní (neboli konečné) parciální derivaci. Proto slovy parciální derivace budu rozumět vždy vlastní parc. derivaci (tj. vlastní limitu tvaru (1)). Pokud někde připouštím také nevlastní derivace, zdůrazním to zvláště.

Tato parciální derivace je definována v každém bodě a , ve kterém je definována vlastní limita (1), takže je to opět jistá funkce n proměnných; značívá se $\frac{\partial f}{\partial x_k}$, takže

(2) $$\frac{\partial f(x_1, \ldots, x_n)}{\partial x_k} = \frac{\partial f(x)}{\partial x_k}$$ značí

parc. derivaci funkce f podle k-té proměnné v bodě $x = [x_1, \ldots, x_n]$.
Při malém počtu proměnných píšeme často např. $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}$, $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z}$ pro parciální derivace funkce $f(x, y, z)$ podle první, druhé, třetí proměnné.

Často se píše také
$$f'_x(x, y, z) \quad , \quad f'_y(x, y, z) \quad \text{atd.}$$
Někdy se vynechávají čárky a píše se f_x, f_y, f_z atd. Hodnotu parciální derivace $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}$ v bodě $[3, 5, 2]$ píšeme $\left[\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}\right]_{[3, 5, 2]}$ nebo $\left[\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}\right]_{\substack{x = 3\\ y = 5\\ z = 2}}$

Pojem parciální derivace se vyskytl již na konci 1.semestru, a byl trochu procvičen; proto početní příklady celkem neuvádím.

V uvedeném označení je jistá nedůslednost. Děláme to obyčejně tak, že píšeme $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}$ nebo $f'_y(x, y, z)$ a míníme tím někdy funkci (např. píšeme $\frac{\partial xy^2z}{\partial y} = 2xyz$ a míníme tím často, že funkce f definovaná rovnicí $f(x, y, z) = xy^2z$ má za parciální derivaci podle druhé proměnné funkci, jejíž hodnota v každém bodě $[x, y, z]$ je $2xyz$; jindy tím míníme vskutku hodnotu té parciální derivace v určitém bodě $[x, y, z]$). Mohli bychom říci, že $\frac{\partial f}{\partial y}$ bude značit funkci, a $\frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y}$ její hodnotu v bodě $[x, y, z]$. Ale mnoho si tím nepomůžeme. Např. jde-li nám o parciální derivaci podle druhé proměnné v bodě, jenž má všechny souřadnice stejné, řekněme v bodě $[x, x, x]$, měli bychom napsat $\frac{\partial f(x, x, x)}{\partial y}$. Ale jak poznáme, že y značí druhou proměnnou? Kdyby někdo psal $f(t, x, y)$, rozuměl by pod $\frac{\partial f}{\partial y}$ asi parc. derivaci podle třetí proměnné.

Můžeme to obejít takto: parciální derivaci funkce f podle k-té proměnné označme f'_k nebo f_k. Hodnota této funkce v bodě $x = [x_1, \ldots, x_n]$ se potom důsledně značí $f_k(x)$ nebo $f_k(x_1, \ldots, x_n)$.

Tady je obtíž jen technická: indexy $1, 2, 3, \ldots, k, \ldots$ často potřebujeme k rozlišování různých funkcí. Musili bychom se tedy smluvit, že indexy značící derivace budeme psát a tisknout třeba červeně; to se ovšem nedělá z technických důvodů. Jest ovšem ještě jedno východisko: psát indexy, značící derivaci, za středník, takže např. jsou-li dány funkce $f_1, f_2, f_3, \ldots$, znamená $f_{j;k}$ parciální derivaci funkce f_j podle k-té proměnné. Aby nedošlo k nedorozumění, musila by se parc. derivace funkce f podle k-té proměnné značit $f_{;k}$. Ježto však toto jistě účelné označení není obvyklé, nezavedeme ho.

Budeme tedy užívat hlavně toho nedůsledného označení $\frac{\partial f}{\partial x}$, f_x (spíše než f'_x), pokud nebude hrozit nedorozumění; často, hlavně v teoretických úvahách, bude výhodné užít označení f_1, f_2, ... pro parciální derivace podle první, druhé, ... proměnné.

Funkce $f(x_1, \dots, x_n)$ v oboru M nechť má v některých bodech derivaci podle x_k; tedy $\frac{\partial f}{\partial x_k}$ je opět funkce n proměnných v jistém oboru M_1, a můžeme opět počítat její derivaci podle kterékoliv proměnné x_l. Funkci, kterou takto dostaneme, označíme

$\frac{\partial^2 f}{\partial x_k \partial x_l}$ a nazveme ji parciální derivací 2.řádu. Podobně dále; např.

$\frac{\partial^7 f(x, y, z)}{\partial x\, \partial x\, \partial y\, \partial x\, \partial z\, \partial z\, \partial y}$ znamená parciální derivaci, kde se derivuje napřed dvakrát po sobě podle x, potom jednou podle y, jednou podle x, dvakrát podle z, a ještě jednou podle y. Zkráceně se užívá označení

$\frac{\partial^7 f(x, y, z)}{\partial x^2\, \partial y\, \partial x\, \partial z^2\, \partial y}$ (všimněte si různého umístění indexu při $\partial^7 f$ a ∂x^2).

Užívá se ovšem též označení f'_{xy}, f_{xy} nebo f_{12} místo $\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$, podobně f'_{xx}, f_{xx} nebo f_{11} místo $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ atd. (je-li nebezpečí, že by někdo dvojici 11 četl jako jedenáct, píši $f_{1,1}$). Tak funkce dvou proměnných $f(x, y)$ má parc. derivace (pokud existují) $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$;

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \left(= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} \left(= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\right), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2};$$

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x^3}, \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\, \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y\, \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial y\, \partial x^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial x\, \partial y^2}, \frac{\partial^3 f}{\partial y\, \partial x\, \partial y}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^2\, \partial x}, \frac{\partial^3 f}{\partial y^3}.$$

Celkem je to 2^n derivací n-tého řádu.

Naše definice parciální derivace se aplikuje též na funkce jedné proměnné $f(x)$. Tam ovšem $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ není nic jiného než obyčejná derivace $f'(x)$ neboli $\frac{df(x)}{dx}$, a podobně pro derivace vyšších řádů. Ovšem víme-li, že f je funkcí jedné proměnné, neužíváme obyčejně symbolu $\frac{\partial f}{\partial x}$, nýbrž $\frac{df}{dx}$ nebo f'.

Uveďme jenom jeden příklad: $f(x, y) = \sin(xy^2)$. Při derivování podle x se na y dívám jako na konstantu, podobně při derivování podle y:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \cos(xy^2), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy \cos(xy^2);$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y^4 \sin(xy^2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = 2y \cos(xy^2) - 2xy^3 \sin(xy^2),$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}, \quad \frac{\partial^3 f}{\partial x^2\, \partial y} = -4y^3 \sin(xy^2) - 2xy^5 \cos(xy^2)$$

atd. To, že vychází $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$, není náhoda. Platí totiž

<u>Věta 11.</u> Budiž f funkce dvou proměnných, $[x_0, y_0] \in E_2$. Nechť $\frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$, $\frac{\partial f(x, y)}{\partial y}$ existují v jistém okolí bodu $[x_0, y_0]$. Nechť

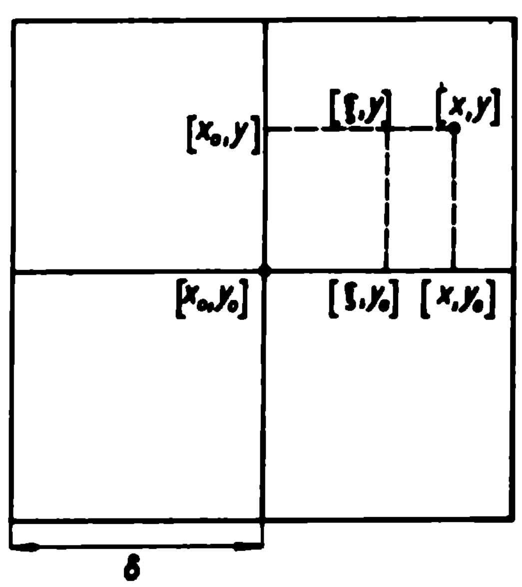
$\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\ \partial y}$ je funkce spojitá v bodě $[x_0, y_0]$. Potom existuje též

$$\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\ \partial x}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} \quad \text{a je}$$

$$\left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial y\ \partial x}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}} = \left[\frac{\partial^2 f(x,y)}{\partial x\ \partial y}\right]_{\substack{x=x_0\\y=y_0}}$$

Důkaz. Užívejme označení f_1, f_2, f_{12}, f_{21}. Předpokládá se existence funkcí f_1, f_2 v okolí bodu $[x_0, y_0]$ a spojitost funkce f_{12} v bodě $[x_0, y_0]$; označme $f_{12}[x_0, y_0] = A$. Máme dokázat, že funkce f_2 má v bodě $[x_0, y_0]$ parc. derivaci podle první proměnné rovnou A, tj. máme dokázat, že

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x, y_0) - f_2(x_0, y_0)}{x - x_0} = A .$$



Obr. 16.

Derivace f_1, f_2, f_{12} existují v jistém $U_\Delta(x_0, y_0)$. Budiž $\varepsilon > 0$; potom existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechny body $[x, y] \in U_\delta(x_0, y_0)$ je

(3) $$|f_{12}(x,y) - A| \leq \varepsilon .$$

Volme hned $\delta < \Delta$. Pro

(4) $$|x - x_0| < \delta, \quad |y - y_0| < \delta, \quad x \neq x_0, \quad y \neq y_0$$

zaveďme tuto funkci:

(5) $$\mathcal{F}(x, y) = \frac{f(x,y) - f(x_0, y) - f(x, y_0) + f(x_0, y_0)}{(x - x_0)(y - y_0)} .$$

Budiž $[x, y]$ bod, pro nějž platí (4) a vyšetřujeme hodnotu (5) v tomto bodě (x, y jsou teď na chvíli pevně zvolena). Sestrojme tuto funkci proměnné ξ:

(6) $$\varphi(\xi) = f(\xi, y) - f(\xi, y_0) .$$

Hodnotu $\mathcal{F}(x, y)$ lze nyní napsat takto:

(7) $$\mathcal{F}(x, y) = \frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} \cdot \frac{1}{y - y_0} .$$

Protože funkce φ má pro $|\xi - x_0| < \delta$ derivaci

$$\varphi'(\xi) = f_1(\xi, y) - f_1(\xi, y_0)$$

(a je tam tedy spojitá), existuje bod ξ_0 mezi x a x_0 tak, že

$$\frac{\varphi(x) - \varphi(x_0)}{x - x_0} = f_1(\xi_0, y) - f_1(\xi_0, y_0),$$

takže podle (7) je

$$(8) \qquad \mathcal{F}(x, y) = \frac{f_1(\xi_0, y) - f_1(\xi_0, y_0)}{y - y_0}.$$

ξ_0 je teď pevný bod; zvolme funkci proměnné η

$$g(\eta) = f_1(\xi_0, \eta).$$

Tato funkce má v intervalu $|\eta - y_0| < \delta$ derivaci:

$$g'(\eta) = f_{12}(\xi_0, \eta)$$

a je tam tedy spojitá, takže existuje bod η_0 mezi y_0 a y tak, že (podle (8))

$$(8^a) \qquad \mathcal{F}(x, y) = \frac{f_1(\xi_0, y) - f_1(\xi_0, y_0)}{y - y_0} = \frac{g(y) - g(y_0)}{y - y_0} = g'(\eta_0) = f_{12}(\xi_0, \eta_0).$$

Ale bod $[\xi_0, \eta_0]$ leží zřejmě v $U_\delta(x_0, y_0)$ (viz obr. 16), takže podle (3)

$$|f_{12}(\xi_0, \eta_0) - A| \leqq \varepsilon.$$

Bod $[x, y]$ byl libovolný bod oboru (4), takže (8^a) nám dává tento výsledek:

I. Je-li $[x, y]$ libovolný bod oboru (4), je $|\mathcal{F}(x, y) - A| \leqq \varepsilon$.

Zvolme nyní pevně x, $0 < |x - x_0| < \delta$, a počítejme $\lim\limits_{y \to y_0} \mathcal{F}(x, y)$. Je

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x, y) - f(x, y_0)}{y - y_0} = f_2(x, y_0), \quad \lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0} = f_2(x_0, y_0),$$

takže (viz (5))

$$(9) \qquad \lim_{y \to y_0} \mathcal{F}(x, y) = \frac{f_2(x, y_0) - f_2(x_0, y_0)}{x - x_0}.$$

Ale x vyhovuje podmínce $0 < |x - x_0| < \delta$, takže pro $0 < |y - y_0| < \delta$ leží bod $[x, y]$ v oboru (4), takže podle I je $|\mathcal{F}(x, y) - A| \leqq \varepsilon$, a tedy i $|\lim\limits_{y \to y_0} \mathcal{F}(x, y) - A| \leqq \varepsilon$, neboli - podle (9) -

$$(10) \qquad \left| \frac{f_2(x, y_0) - f_2(x_0, y_0)}{x - x_0} - A \right| \leqq \varepsilon;$$

to platí pro každé x z redukovaného δ-okolí $0 < |x - x_0| < \delta$.

Tedy: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé x redukovaného okolí $0 < |x - x_0| < \delta$ platí (10). To však znamená, že

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f_2(x, y_0) - f_2(x_0, y_0)}{x - x_0} = A .$$

To jsme však měli dokázat.

Obdobná věta platí pro funkce více proměnných. Např.:

Nechť funkce $f(x_1, x_2, x_3, x_4)$ má parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_2}$, $\frac{\partial f}{\partial x_3}$ v okolí bodu $x^{(0)} = [x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}]$ a nechť $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}$ je spojitá v bodě $x^{(0)}$. Potom v bodě $x^{(0)}$ existuje také $\frac{\partial^2 f}{\partial x_3 \partial x_2}$, a má v tomto bodě stejnou hodnotu jako $\frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_3}$.

Důkaz neprovádím; ostatně se dostane okamžitě z věty 11, jestliže této věty užijete na funkci dvou proměnných $g(x_2, x_3) = f(x_1^{(0)}, x_2, x_3, x_4^{(0)})$.

Z věty 11 plyne snadno tato věta, které nejčastěji užíváme v jednoduchých aplikacích.

<u>Věta 12.</u> Nechť je n celé, $n \geqq 2$, $f(x, y)$ funkce dvou proměnných, která má v otevřené množině M spojité parciální derivace až do řádu $n - 1$. Nechť jsou p, q přirozená čísla, $p + q = n$. Nechť jedna z derivací n-tého řádu, kde se derivuje p-krát podle x a q-krát podle y, je spojitá v M. Potom všechny tyto derivace (v nichž se derivuje p-kráte podle x a q-kráte podle y) existují a jsou si rovny v celé množině M.

Tj. záleží jen na tom, kolikrát se derivuje podle x a kolikrát podle y; nezáleží na tom, v jakém pořadí se to děje. Např. chci-li počítat postupně derivace funkce f, vypočtu napřed f_1, f_2. Potom počítám derivace druhého řádu; zjistím-li, že f_1, f_2, f_{12} jsou spojité v M, nemusím již počítat f_{21}; vypočtu ještě f_{11}, f_{22}. Jsou-li všechny derivace až do 2. řádu spojité v M, a zjistím-li např., že f_{112} je spojitá v M, nemusím již počítat f_{121}, f_{211}; podobně dále.

Např. je $2^{10} = 1024$ derivací 10. řádu; jsou-li splněny uvedené podmínky spojitosti, stačí jich vypočítat 11 (podle toho, zda se podle x derivuje nulkrát, jednou, dvakrát, ..., desetkrát).

Věta 12 pro $n = 2$ je obsažena ve větě 11 (užiji věty 11 na každý bod množiny M). Dále se dokazuje indukcí podle n; tento ryze formální důkaz nebudu provádět. Obdobná věta platí pro funkce většího počtu proměnných; také ji nebudu vyslovovat ani dokazovat. (Sami si uvědomíte, jak vypadá.)

Podotýkám, že předpoklad o spojitosti $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ nelze vynechat. Snadno se sestrojí funkce $f(x, y)$, u které $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ jsou spojité v E_2, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$,

$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y}$ existují všude, ale v některém bodě je
$\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} \neq \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}$ (viz např. D I, kap. XIII, § 3, cvič. 4).

Pojem derivace nás u funkcí jedné proměnné vedl k důležité větě o přírůstku funkce: Je-li f spojitá v $\langle a, b\rangle$ a má-li derivaci v (a, b), potom existuje $c \in (a, b)$ tak, že

$$f(b) - f(a) = f'(c)\,(b-a)\;.$$

Tato věta dává tedy např. možnost odhadu "přírůstku funkce" pomocí odhadu její derivace. Odvodíme obdobnou (trochu méně dokonalou) větu pro funkce několika proměnných; provedu to pro funkce dvou proměnných, abych nemusil psát nepřehledné vzorce.

Mějme funkci $f(x, y)$, která nechť má parciální derivace f_1, f_2 v otevřeném intervalu $\mathcal{I} = \mathcal{I}_1 \times \mathcal{I}_2$ ($f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$). Buďte $[a, b]$, $[a+h, b+k]$ dva body z $\mathcal{I}$. Přírůstek funkce $f(a+h, b+k) - f(a, b)$ vyjádřím jako součet dvou přírůstků, kde se v každém z těch dvou přírůstků mění jen jedna proměnná:

$$\begin{aligned} f(a+h, b+k) - f(a, b) &= \\ &= [f(a+h, b+k) - f(a, b+k)] + [f(a, b+k) - f(a, b)]\;. \end{aligned} \tag{11}$$

Je-li $h \neq 0$, splňuje funkce $\varphi(x) = f(x, b+k)$ v intervalu $\langle a, a+h\rangle$ (popříp. $\langle a+h, a\rangle$, když $h < 0$) předpoklady věty o přírůstku funkce; tedy

$$\varphi(a+h) - \varphi(a) = \varphi'(c)\,.\,h$$

pro jisté c mezi a, $a+h$, neboli

$$f(a+h, b+k) - f(a, b+k) = f_1(c, b+k)\,.\,h\;.$$

Tento vzorec platí i pro $h = 0$, položím-li např. $c = a$. Podobně mohu na funkci

$$\psi(y) = f(a, y)$$

užít věty o přírůstku funkce:

$$\psi(b+k) - \psi(b) = \psi'(d)\,.\,k\;, \quad \text{tj.}$$
$$f(a, b+k) - f(a, b) = f_2(a, d)\,k\;,$$

kde d leží mezi b, $b+k$ nebo je $d = b$ (pro $k = 0$). Dosazením do (11) dostávám

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = f_1(c, b+k)\,h + f_2(a, d)\,k\;.$$

O poloze bodů $[c, b+k]$, $[a, d]$ nás bude zajímat jen toto: jejich první souřadnice c, a leží mezi a, $a+h$ nebo splývají s některým z těchto čísel; jejich druhé souřadnice leží mezi b, $b+k$ nebo splývají s některým z těchto čísel. Tedy

$$f(a+h, b+k) - f(a, b) = f_1(\xi)h + f_2(\eta)k ,$$

kde ξ, η jsou dva body s těmito vlastnostmi: u každého z nich první souřadnice buďto leží mezi a, $a+h$ nebo je rovna některému z těchto čísel; druhá leží buďto mezi b, $b+k$ nebo je rovna některému z těchto čísel. Podobně se postupuje u funkcí většího počtu proměnných; např. u funkcí tří proměnných rozložím

$$\begin{aligned} &f(a+h, b+k, c+l) - f(a, b, c) = \\ &= [f(a+h, b+k, c+l) - f(a, b+k, c+l)] + \\ &\quad + [f(a, b+k, c+l) - f(a, b, c+l)] + \\ &\quad + [f(a, b, c+l) - f(a, b, c)] . \end{aligned}$$

Vyslovím příslušnou větu obecně pro funkce n proměnných; důkaz neprovádím, postup by se okopíroval podle případu $n = 2$:

Věta 13. Budiž f funkce n proměnných, která má v otevřeném intervalu $J \subset E_n$ derivace $f_1, f_2, \dots, f_n$. Buďte $[a_1, a_2, \dots, a_n]$, $[a_1+h_1, a_2+h_2, \dots, a_n+h_n]$ dva body z J. Potom existují body ξ_1, ξ_2, ..., ξ_n v J tak, že

$$\begin{aligned} &f(a_1+h_1, \dots, a_n+h_n) - f(a_1, a_2, \dots, a_n) = \\ &= f_1(\xi_1)h_1 + f_2(\xi_2)h_2 + \dots + f_n(\xi_n)h_n . \end{aligned}$$

Přitom m-tá souřadnice každého z bodů $\xi_1, \dots, \xi_n$ buďto leží mezi a_m, a_m+h_m nebo se rovná a_m nebo a_m+h_m.

(Pro $n = 1$ je věta o něco méně dokonalá než věta o přírůstku funkce; např. se existence derivace předpokládá v otevřeném intervalu, jenž obsahuje body a_1, a_1+h_1. Věta 13 by se ovšem dala ještě zdokonalit, ale nebudeme to potřebovat.)

Poznámka. Uveďme ještě jedno použití věty o přírůstku funkce. Označme $\overline{pq}$ úsečku v E_n o krajních bodech p, q. Lomenou čarou rozumímę sjednocení úseček

(12) $$\overline{p_1p_2},\ \overline{p_2p_3},\ \dots,\ \overline{p_{m-1}p_m} ;$$

říkáme, že tato lomená čára spojuje bod p_1 s bodem p_m. Množinu $M \subset E_n$ nazýváme oblastí, jestliže má tyto dvě vlastnosti: 1) M je otevřená, 2) každé dva body z M lze spojit lomenou čarou ležící v M [a složenou z úseček rovnoběžných s osami souřadnic]. Dá se dokázat, že dodatek v závorkách [ ] lze vynechat, aniž se změní smysl definice oblasti, ale nebudeme to dokazovat. Platí pak

Věta. Budiž f funkce n proměnných; nechť pro všechna x oblasti $M \subset E_n$ je

$$f_1 = f_2 = \dots = f_n = 0 \qquad \text{(píši } \frac{\partial f}{\partial x_k} = f_k \text{)} .$$

Potom f je konstantní v M.

Důkaz. Budiž $\overline{pq}$ úsečka ležící v M a rovnoběžná s k-tou osou souřadnic, tj. všechny souřadnice s výjimkou k-té jsou na té úsečce konstantní, takže $\overline{pq}$ je množina všech bodů $[a_1, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_n]$, kde a_j jsou určitá čísla, x probíhá jistý interval $\langle c, d\rangle$. Funkce jedné proměnné

$$g(x) = f(a_1, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_n)$$

má v $\langle c, d\rangle$ derivaci $g'(x) = f_k(a_1, \dots, a_{k-1}, x, a_{k+1}, \dots, a_n) = 0$ a tedy je g konstantní v $\langle c, d\rangle$ podle věty o přírůstku funkce. Tedy je speciálně $g(c) = g(d)$, tj. $f(p) = f(q)$. Buďte nyní a, b dva body z M; máme dokázat, že $f(a) = f(b)$. Spojíme tedy a s b lomenou čarou (12) ($p_1 = a$, $p_m = b$) ležící v M, složenou z úseček rovnoběžných s osami souřadnic. Podle toho, co jsme právě dokázali, je vskutku

$$f(a) = f(p_1) = f(p_2) = \dots = f(p_m) = f(b) .$$

§ 4. Totální diferenciál.

Všimněme si napřed funkcí jedné proměnné. Co to znamená, že funkce f má v bodě a derivaci $f'(a)$ rovnou číslu A ?[1] To znamená, že funkce (proměnné h) $\frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ má za limitu (pro $h \to 0$) číslo A, neboli že funkce

$$\text{(1)} \qquad \eta_1(h) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - A$$

má za limitu nulu:

$$\text{(2)} \qquad \lim_{h \to 0} \eta_1(h) = 0 .$$

(1) můžeme napsat také ve tvaru

$$\text{(3)} \qquad f(a+h) - f(a) = Ah + h\eta_1(h) .$$

[1] Řekli jsme již v § 3, že slovem derivace (popř. parciální derivace) budeme stále rozumět jen vlastní derivaci.

Tedy: funkce f má v bodě a derivaci tehdy a jen tehdy, jestliže existuje číslo A tak, že funkce $\eta_1(h)$, definovaná pro $h \neq 0$ rovnicí (3), splňuje podmínku (2); potom $f'(a) = A$.

Číslo h je, po případě až na znaménko, rovno vzdálenosti bodů a, $a+h$, která je rovna $|h|$. Smysl rovnice (3) bude trochu názornější, když do posledního členu zavedu činitele $|h|$ místo h.

Je totiž $h\eta_1(h) = |h| \cdot \eta(h)$, kde $\eta(h) = \eta_1(h)$ pro $h > 0$, $\eta(h) = -\eta_1(h)$ pro $h < 0$. Zřejmě znamená (2) totéž jako

$$\lim_{h \to 0} \eta(h) = 0 \;. \tag{4}$$

Tedy definitivně:

Funkce f má v bodě a derivaci tehdy a jen tehdy, jestliže existuje číslo A tak, že funkce η, definovaná pro $h \neq 0$ rovnicí

$$f(a+h) - f(a) = Ah + |h|\,\eta(h) \,, \tag{5}$$

splňuje podmínku (4), načež ovšem $A = f'(a)$. Rovnice (5) a (4) říkají zhruba asi toto: rozdíl $f(a+h) - f(a)$ je pro "malá" h "přibližně" úměrný číslu h; "chyba" $|h| \cdot \eta(h)$ je pro "malá" h "mnohokráte menší" než $|h|$, tj. než vzdálenost obou bodů a, $a+h$.

Zkusme vyjádřit nějakou podobnou vlastnost pro funkce několika proměnných. Půjde o rozdíl

$$f(a_1 + h_1, \ldots, a_k + h_k) - f(a_1, \ldots, a_k) \,. \tag{6}$$

Pro $k = 1$ byl člen Ah lineární formou v jedné proměnné; pro větší k zkusme tento výraz nahradit lineární formou v k proměnných $h_1, \ldots, h_k$:

$$A_1 h_1 + A_2 h_2 + \ldots + A_k h_k \,.$$

Zvolme tedy libovolná čísla $A_1, \ldots, A_k$ a napišme rovnici

$$\begin{aligned} &f(a_1 + h_1, \ldots, a_k + h_k) - f(a_1, \ldots, a_k) = \\ &= A_1 h_1 + \ldots + A_k h_k + \sqrt{h_1^2 + \ldots + h_k^2} \cdot \eta(h_1, \ldots, h_k) \,; \end{aligned} \tag{7}$$

touto rovnicí je tedy (pokud $[h_1, \ldots, h_k] \neq [0, \ldots, 0]$) definována jistá funkce η, totiž

$$\eta(h_1, \ldots, h_k) = \frac{1}{\sqrt{h_1^2 + \ldots + h_k^2}} \bigl(f(a_1 + h_1, \ldots, a_k + h_k) - f(a_1, \ldots, a_k) - A_1 h_1 - \ldots - A_k h_k\bigr)$$

a nás bude zajímat ten případ, kdy

(8) $$\lim_{[h_1, \ldots, h_k] \to [0, \ldots, 0]} \eta(h_1, \ldots, h_k) = 0 \ .$$

Tomuto případu dáme zvláštní název.

Definice. Budiž f funkce k proměnných, $a = [a_1, a_2, \ldots, a_k] \in E_k$. Budeme říkat, že funkce f má totální diferenciál v bodě a, jestliže existují čísla $A_1, \ldots, A_k$ tak, že funkce

$$\eta(h) = \eta(h_1, h_2, \ldots, h_k)$$

(píši $h = [h_1, \ldots, h_k]$), definovaná rovnicí (7), vyhovuje podmínce (8). Funkce (proměnných $h_1, \ldots, h_k$)

(9) $$A_1 h_1 + \ldots + A_k h_k$$

se pak nazývá totálním diferenciálem funkce f v bodě a ; značí se $df(a)$.

Smysl této definice je týž, jako jsme již podotkli v případě $k = 1$: Nahradíme-li přírůstek $f(a_1 + h_1, \ldots, a_k + h_k) - f(a_1, \ldots, a_k)$ funkce f lineární formou $A_1 h_1 + \ldots + A_k h_k$, dopustíme se chyby, která je "mnohokráte menší" než vzdálenost bodů $[a_1, \ldots, a_k]$, $[a_1 + h_1, \ldots, a_k + h_k]$, pokud tato vzdálenost je "dostatečně malá". V tom tkví význam totálního diferenciálu: levou stranu rovnice (7), která může být velmi složitá, můžeme nahradit jednoduchou funkcí (9) s chybou, která je tak malá, že v mnohých úvahách neruší.

Pro $k = 1$ znamená existence totálního diferenciálu funkce f v bodě a toto: existuje číslo A tak, že je

$$f(a + h) - f(a) = Ah + |h| \eta(h),$$

kde $\lim_{h \to 0} \eta(h) = 0$, tj.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - A = \lim_{h \to 0} \eta(h) \ . \ \mathrm{sgn}\, h = 0 \ ^{2)} \ .$$

To však znamená totéž, jako že existuje $f'(a) = A$. Tedy: Pro funkce jedné proměnné platí: f má totální diferenciál v bodě a tehdy a jen tehdy, když f má v bodě a derivaci (vlastní). Uvidíte za chvíli, že pro funkce více proměnných to vypadá jinak.

Ještě je vhodno definici totálního diferenciálu poněkud upravit - je to spíše početně - technická úprava: Je zřejmé, že

(10) $$\sqrt{h_1^2 + \ldots + h_k^2} \leq |h_1| + \ldots + |h_k| \leq k \sqrt{h_1^2 + \ldots + h_k^2} \ .$$

---

2) Definuji $\mathrm{sgn}\, h = 1$ pro $h > 0$, $\mathrm{sgn}\, h = -1$ pro $h < 0$, $\mathrm{sgn}\, 0 = 0$ (čte se "signum" = znamení).

Protože s výrazem $|h_1| + \ldots + |h_k|$ se často lépe počítá než s odmocninou, zaveďme novou funkci ξ rovnicí

$$\sqrt{h_1^2 + \ldots + h_k^2}\,\eta(h_1, \ldots, h_k) = (|h_1| + \ldots + |h_k|)\,\xi(h_1, \ldots, h_k)$$

(pokud $[h_1, \ldots, h_k] \neq [0, \ldots, 0]$).

Podle (10) je

$$\frac{1}{k}|\eta(h_1, \ldots, h_k)| \leq |\xi(h_1, \ldots, h_k)| \leq |\eta(h_1, \ldots, h_k)| \quad ,$$

takže $\lim\limits_{[h_1,\ldots,h_k]\to[0,\ldots,0]} \eta(h_1, \ldots, h_k) = 0$

platí tehdy a jen tehdy, když

(11) $$\lim_{[h_1,\ldots,h_k]\to[0,\ldots,0]} \xi(h_1, \ldots, h_k) = 0 .$$

V definici totálního diferenciálu můžeme tedy místo (7) psát rovnici

(12) $$f(a_1 + h_1, \ldots, a_k + h_k) - f(a_1, \ldots, a_k) = A_1h_1 + \ldots + A_kh_k + (|h_1| + \ldots + |h_k|)\,\xi(h_1, \ldots, h_k)$$

a místo podmínky (8) podmínku (11). A ještě jednu úpravu provedeme: Rovnice (12) nedefinuje hodnotu $\xi(0, 0, \ldots, 0)$, neboť pro $h_1 = \ldots = h_k = 0$ je rovnice (12) splněna, ať volíme $\xi(0, 0, \ldots, 0)$ jakkoliv; volme tedy $\xi(0, 0, \ldots, 0) = 0$: potom rovnice (11) znamená, že limita funkce ξ v bodě $[0, \ldots, 0]$ je rovna hodnotě funkce v tomto bodě, tj. znamená, že ξ je spojitá v bodě $[0, \ldots, 0]$. Můžeme tedy vysloviti tento druhý tvar definice tot. diferenciálu:

Říkáme, že funkce f (k proměnných) má v bodě $a = [a_1, \ldots, a_k]$ totální diferenciál, jestliže existují čísla $A_1, \ldots, A_k$ s touto vlastností: definuji-li $\xi(h_1, \ldots, h_k)$ pro $[h_1, \ldots, h_k] \neq [0, \ldots, 0]$ rovnicí (12)[3] a v bodě $[0, \ldots, 0]$ rovnicí

(13) $$\xi(0, \ldots, 0) = 0 \ ,$$

je funkce ξ spojitá v bodě $[0, \ldots, 0]$.

Budeme užívat nejčastěji tohoto tvaru; někdy místo spojitosti v bodě $[0, \ldots, 0]$ budeme užívat rovnice (11), jež ovšem ze spojitosti a z (13) plyne.

Dokážeme několik vět o totálním diferenciálu.

Věta 14. Má-li f v bodě a totální diferenciál, je f spojitá v bodě a .

---

[3] Samozřejmě: jen pro ta $h_1, \ldots, h_k$, pro něž levá strana je definována.

Důkaz: z rovnic (12), (11) plyne, že

$$\lim_{[h_1,\dots,h_k]\to[0,\dots,0]} f(a_1+h_1,\ \dots,\ a_k+h_k) - f(a_1,\ \dots,\ a_k) = 0 \ .$$

Jaký je vztah mezi totálním diferenciálem a parciálními derivacemi?

Věta 15. Má-li f v bodě a totální diferenciál $A_1h_1 + \dots + A_kh_k$, existují v bodě a parciální derivace

$$\left[\frac{\partial f(x_1,\ \dots,\ x_k)}{\partial x_1}\right]_{x=a} = A_1 \quad , \ \dots, \quad \left[\frac{\partial f(x_1,\ \dots,\ x_k)}{\partial x_k}\right]_{x=a} = A_k \ .$$

Tedy: Existuje-li v a totální diferenciál, má nutně tvar

$$\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}h_1 + \dots + \frac{\partial f(a)}{\partial x_k}h_k$$

($\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}$ znamená hodnotu parciální derivace podle první proměnné v bodě a).

Důkaz. V rovnici (12) položím $h_2 = \dots = h_k = 0$, $h_1 \neq 0$, takže mám

$$\text{(14)} \qquad f(a_1+h_1,\ a_2,\ \dots,\ a_k) - f(a_1,\ \dots,\ a_k) = \\ = A_1h_1 + |h_1|\ \xi(h_1, 0,\ \dots,\ 0) \ .$$

Ježto $\xi(h_1, h_2,\ \dots,\ h_k)$ je spojitá v bodě $[0, 0,\ \dots,\ 0]$, je funkce $\xi(h_1, 0,\ \dots,\ 0)$ spojitá v bodě $h_1 = 0$; tedy existuje

$$\lim_{h_1\to 0} \xi(h_1, 0,\ \dots,\ 0) = \xi(0, 0,\ \dots,\ 0) = 0 \ .$$

Dělím-li (14) číslem h_1 , mám

$$\frac{f(a_1+h_1, a_2,\ \dots,\ a_k) - f(a_1,\ \dots,\ a_k)}{h_1} = A_1 + \xi(h_1, 0,\ \dots,\ 0)\ \operatorname{sgn} h_1 \ .$$

Tedy je limita levé strany pro $h_1 \to 0$ rovna A_1 , tj. $\frac{\partial f(a)}{\partial x_1}$ existuje a rovná se A_1 .

Z existence tot. diferenciálu plyne tedy spojitost funkce a existence parc. derivací 1.řádu. U funkcí jedné proměnné znamená dokonce existence totálního diferenciálu totéž jako existence derivace. Ale u funkcí většího počtu proměnných tomu tak není. Příklad: Budiž dán bod $[a, b]$ a volme $f(x, b) = f(a, y) = 0$, ale $f(x, y) = 1$ pro $x \neq a$, $y \neq b$. Zřejmě existují $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ v bodě $[a, b]$, ale f není v tomto bodě spojitá, a tedy v něm nemá podle věty 14 totální diferenciál. Výsledek není překvapující: čísla $\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right]_{\substack{x=a\\y=b}}$, $\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right]_{\substack{x=a\\y=b}}$ závisí jen na hodnotách funkce na přímkách $x = a$ a $y = b$, kdežto totální diferenciál popisuje chování rozdílu $f(a+h, b+k) -$

$- f(a,b)$ i pro $h \cdot k \neq 0$. Existuje dokonce funkce $f(x,y)$, která v určitém bodě $[a,b]$ má obě derivace $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial f}{\partial y}$ a je v tom bodě <u>spojitá</u>, a přesto nemá v bodě $[a,b]$ totální diferenciál. Příklad: $f(x,y) = \frac{2x^2y}{x^2+y^2}$ pro $[x,y] \neq [0,0]$, $f(0,0) = 0$. Zřejmě $f_1(0,0) = 0$, $f_2(0,0) = 0$; dále $2|xy| \leq x^2+y^2$, takže $|f(x,y)| \leq |x|$, takže f je spojitá v bodě $[0,0]$. Kdyby měla v tomto bodě totální diferenciál, bylo by $f(h,k) = f(h,k) - f(0,0) = (|h|+|k|)\,\xi(h,k)$, kde $\lim_{[h,k]\to[0,0]} \xi(h,k) = 0$, tj.

$$\lim_{[h,k]\to[0,0]} \frac{f(h,k)}{|h|+|k|} = 0 \quad . \tag{15}$$

Ale např. pro $h = k > 0$ je $\frac{f(h,h)}{2h} = \frac{h^3}{2h^3} = \frac{1}{2}$, což je ve sporu s (15).

Existence parciálních derivací nestačí tedy k existenci tot. diferenciálu. Ale existence a <u>spojitost</u> parciálních derivací už stačí:

<u>Věta 16.</u> Budiž f funkce n proměnných, $a = [a_1, \ldots, a_n] \in E_n$. Nechť parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_n}$ jsou spojité v bodě a. Potom f má v bodě a totální diferenciál.

<u>Důkaz</u> provedu pro $n = 2$, abych zkrátil psaní. Nechť tedy parciální derivace $f_1(x,y)$, $f_2(x,y)$ funkce $f(x,y)$ jsou spojité v bodě $[a,b]$, takže f_1, f_2 existují v jistém okolí tohoto bodu. Jestliže bod $[a+h, b+k]$ leží v tomto okolí, můžeme užít věty 13 a dostaneme

$$f(a+h, b+k) - f(a,b) = h f_1(\xi_1, \eta_1) + k f_2(\xi_2, \eta_2) \,, \tag{16}$$

kde ξ_1 leží buďto mezi a, $a+h$ nebo je rovno a nebo $a+h$; podobně ξ_2; obdobně η_1 leží buďto mezi b, $b+k$ nebo je rovno b nebo $b+k$; podobně η_2.

Náš cíl je tento: definujeme-li funkci $\xi(h,k)$ rovnicí $f(a+h, b+k) - f(a,b) = f_1(a,b)h + f_2(a,b)k + (|h|+|k|)\,\xi(h,k)$, máme dokázat, že

$$\lim_{[h,k]\to[0,0]} \xi(h,k) = 0 \,.$$

Srovnáme-li tuto rovnici s (16), vidíme, že

$$\begin{aligned} &(|h|+|k|)\,\xi(h,k) = \\ &= (f_1(\xi_1,\eta_1) - f_1(a,b))h + (f_2(\xi_2,\eta_2) - f_2(a,b))k \,. \end{aligned} \tag{17}$$

Budiž $\varepsilon > 0$; ze spojitosti funkcí f_1, f_2 v bodě $[a, b]$ plyne, že existuje δ- okolí $U_\delta(a, b)$ tak, že pro $[x, y] \in U_\delta(a, b)$ je

$$|f_1(x, y) - f_1(a, b)| \leq \varepsilon , \quad |f_2(x, y) - f_2(a, b)| \leq \varepsilon .$$

Je-li tedy $|h| < \delta$, $|k| < \delta$, je podle (17)

$$(|h| + |k|) \, |\xi(h, k)| \leq (|h| + |k|) \, \varepsilon .$$

Pokud není $h = k = 0$, lze dělit, a dostáváme

$$|\xi(h, k)| \leq \varepsilon . \tag{18}$$

Tato nerovnost platí tedy v $U^*_\delta(0, 0)$: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro $[h, k] \in U^*_\delta(0, 0)$ platí (18). Tedy vskutku

$$\lim_{[h, k] \to [0, 0]} \xi(h, k) = 0 .$$

Tím je věta dokázána.

Takže máme toto schema:

spojitost parciálních derivací $\Longrightarrow$ existence totálního diferenciálu $\Longrightarrow$ $\Longrightarrow$ existence parciálních derivací a spojitost funkce (vše v určitém bodě).

Bod, v němž jsme vyšetřovali totální diferenciál, jsem značil písmenem $a = [a_1, \ldots, a_n]$, abyste si stále uvědomovali, že jde o pevně zvolený bod. Předešlé úvahy lze ovšem provést v každém bodě $x = [x_1, \ldots, x_n]$.

Tedy: Budiž dána funkce f (n proměnných) a bod $x = [x_1, \ldots, x_n]$. Má-li funkce f mít v bodě x totální diferenciál, musí ve vzorci (12) podle věty 15 být $A_1 = \frac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, A_n = \frac{\partial f}{\partial x_n}$.

Tedy: definujeme funkci $\xi(h_1, \ldots, h_n)$ rovnicí

$$\begin{aligned} & f(x_1 + h_1, \ldots, x_n + h_n) - f(x_1, \ldots, x_n) = \\ & = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} \cdot h_1 + \ldots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} h_n + (|h_1| + \ldots + |h_n|) \, \xi(h_1, \ldots, h_n) \end{aligned} \tag{19}$$

pro $[h_1, \ldots, h_n] \neq [0, \ldots, 0]$, $\xi(0, \ldots, 0) = 0$.
Potom funkce f má v bodě x totální dif. tehdy a jen tehdy, když ξ je spojitá v bodě $[0, \ldots, 0]$.

Označme znakem $M_1 \subset E_n$ množinu těch bodů $x \in E_n$, v nichž funkce f má totální diferenciál. Pro každé $x \in M_1$ jsme totální diferenciál v bodě x definovali jako tuto funkci proměnných $h_1, \ldots, h_n$:

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} h_1 + \ldots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} h_n . \tag{20}$$

Je to tedy funkce $2n$ proměnných $x_1, \dots, x_n, h_1, \dots, h_n$, definovaná pro všechna $h_1, \dots, h_n$, když $[x_1, \dots, x_n] \in M_1$. Definiční obor této funkce je tedy $M_1 \times E_n$. Tato funkce (20) $2n$ proměnných se nazývá totální diferenciál funkce f, a značí se df.

Dosadím-li za x libovolný pevný bod z M_1, dostanu z (20) funkci proměnných $h_1, \dots, h_n$ (lineární formu), kterou jsme už nazvali totální diferenciál funkce f v bodě x; značí se $df(x)$ nebo $df(x_1, \dots, x_n)$, takže

(21) $$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} h_n .$$

Je-li funkce f dána konkrétně nějakým výrazem, užívá se často oné "nedůslednosti", o které jsme již mluvili: do symbolu $df(x_1, \dots, x_n)$ se místo $f(x_1, \dots, x_n)$ píše ten výraz. Např. se píše

(22) $$d(x^3y^2 + 3y \sin x) = 3x^2y^2h + (2x^3y + 3\sin x)k + 3y\cos x \cdot l$$

(místo h_1, h_2, h_3 jsem psal h, k, l; existence totálního diferenciálu plyne zde ze spojitosti derivací, viz větu 16).

Položme
$$\varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_1 ,$$
$$\varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_2 ,$$
$$\dots\dots\dots\dots$$
$$\varphi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = x_n .$$

Potom
$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_1} = 1 , \quad \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2} = \dots = \frac{\partial \varphi_1}{\partial x_n} = 0 ,$$

takže

(23) $$\begin{cases} d\varphi_1(x) = h_1 ; \text{ obdobně} \\ d\varphi_2(x) = h_2 , \dots, d\varphi_n(x) = h_n . \end{cases}$$

Lze tedy (21) psát

(24) $$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} d\varphi_1(x) + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} d\varphi_n(x) .$$

Ješto $\varphi_k(x_1, \dots, x_n) = x_k$, píše se často se stejnou nedůsledností jako v (22) dx_k místo $d\varphi_k(x)$, takže místo (24) se píše

(25) $$df(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_1} dx_1 + \dots + \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} dx_n .$$

Kde $dx_1, \dots, dx_n$ není nic jiného než naše dřívější $h_1, \dots, h_n$; tedy $df(x)$ (tot. diferenciál funkce f v daném bodě x) je lineární formou n proměnných $dx_1, \dots, dx_n$.

Symbolu dx_k se často říká "diferenciál k-té nezávisle proměnné", protože je to diferenciál funkce φ_k, kde $\varphi_k(x_1, \dots, x_n) = x_k$. Proč jsem o těchto "nedůslednostech" tolik mluvil? Protože se označení (25) (dx_k místo h_k) často užívá.

Ještě jednu poznámku. Říká se, že funkce f (n proměnných) je <u>stacionární</u> v bodě $x = [x_1, \ldots, x_n]$, když

(26) $$\lim_{[h_1,\ldots,h_n]\to[0,\ldots,0]} \frac{f(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_n+h_n) - f(x_1, \ldots, x_n)}{|h_1| + \ldots + |h_n|} = 0 .$$

(Víme, že by se význam této rovnice nezměnil, kdybychom ve jmenovateli místo $|h_1| + \ldots + |h_n|$ psali vzdálenost $\sqrt{h_1^2 + \ldots + h_n^2}$). Píši-li tedy

(27) $$\begin{aligned} &f(x_1+h_1, x_2+h_2, \ldots, x_n+h_n) - f(x_1, \ldots, x_n) = \\ &= (|h_1| + \ldots + |h_n|) \, . \, \xi(h_1, \ldots, h_n) = \\ &= 0 \, . \, h_1 + \ldots + 0 \, . \, h_n + (|h_1| + \ldots + |h_n|)\, \xi(h_1, \ldots, h_n) , \end{aligned}$$

znamená (26) totéž jako

(28) $$\lim_{[h_1,\ldots,h_n]\to[0,\ldots,0]} \xi(h_1, \ldots, h_n) = 0 .$$

To však podle definice tot. diferenciálu znamená, že funkce f má v bodě x totální diferenciál $df(x)$, identicky rovný nule pro všechna $h_1, \ldots, h_n$ (to znamená, že $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} = 0$) .

Tedy: funkce f je stacionární v bodě x tehdy a jen tehdy, jsou-li splněny tyto dvě podmínky:

1) f má v bodě x totální diferenciál,

2) v bodě x je $\frac{\partial f(x)}{\partial x_1} = \ldots = \frac{\partial f(x)}{\partial x_n} = 0$.

Poznamenejme, že k existenci totálního diferenciálu <u>nestačí</u> existence uvedených parciálních derivací, ale <u>stačí</u> jejich spojitost v bodě x .

<u>§ 5. Totální diferenciály a parciální derivace složených funkcí.</u>

Už jsme mluvili o spojitosti složených funkcí; nyní promluvíme o jejich parciálních derivacích a totálních diferenciálech.

Připomeňme, jak to bylo u funkcí jedné proměnné. Byla dána funkce $f(x)$, do které se za x dosadilo $\varphi(t)$, čímž vznikla "složená funkce" $\mathcal{F}$, definovaná rovnicí $\mathcal{F}(t) = f(\varphi(t))$. Dokázali jsme: Jestliže φ má derivaci v bodě t_0 , a jestliže f má derivaci v "příslušném" bodě $x_0 = \varphi(t_0)$, potom funkce $\mathcal{F}$ má derivaci v bodě t_0 :

$$\mathcal{F}'(t_0) = f'(x_0) \, . \, \varphi'(t_0) .$$

Dokážeme nyní obdobnou větu pro funkce několika proměnných; pro jednoduchost zápisu (abych se vyhnul mnoha indexům) se omezím na tento případ: jsou dány dvě funkce tří proměnných $\varphi(t, u, v)$, $\psi(t, u, v)$, které mají <u>totální diferenciál</u> v bodě $[t_0, u_0, v_0]$. Dále je dána funkce $f(x, y)$ dvou proměnných, mající totální diferenciál v bodě $[x_0, y_0]$, kde

$$x_0 = \varphi(t_0, u_0, v_0), \quad y_0 = \psi(t_0, u_0, v_0).$$

Sestrojím "složenou funkci" $\mathcal{F}$, definovanou rovnicí $\mathcal{F}(t, u, v) = f(\varphi(t, u, v), \psi(t, u, v))$. Dokáži, že $\mathcal{F}$ má také totální diferenciál v bodě $[t_0, u_0, v_0]$ a vypočtu parciální derivace funkce $\mathcal{F}$ v tomto bodě.

Předpoklady jsou tedy tyto (derivace značím indexy: $f_1 = \frac{\partial f}{\partial x}$, $f_2 = \frac{\partial f}{\partial y}$ atd.):

1) funkce φ, ψ mají totální diferenciál v bodě $[t_0, u_0, v_0]$. To znamená:

$$\begin{aligned} &\varphi(t_0 + h, u_0 + k, v_0 + l) - \varphi(t_0, u_0, v_0) = \\ (1) \qquad &= \varphi_1(t_0, u_0, v_0)h + \varphi_2(t_0, u_0, v_0)k + \varphi_3(t_0, u_0, v_0)l + \\ &+ (|h| + |k| + |l|)\, \eta_1(h, k, l), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\psi(t_0 + h, u_0 + k, v_0 + l) - \psi(t_0, u_0, v_0) = \\ (2) \qquad &= \psi_1(t_0, u_0, v_0)h + \psi_2(t_0, u_0, v_0)k + \psi_3(t_0, u_0, v_0) \cdot l + \\ &+ (|h| + |k| + |l|)\, \eta_2(h, k, l). \end{aligned}$$

Přitom η_1, η_2 jsou spojité v bodě $[0, 0, 0]$, $\eta_1(0, 0, 0) = \eta_2(0, 0, 0) = 0$.

2) Označme $x_0 = \varphi(t_0, u_0, v_0)$, $y_0 = \psi(t_0, u_0, v_0)$.

Potom f má totální diferenciál v bodě $[x_0, y_0]$. To znamená

$$(3) \quad f(x_0 + H, y_0 + K) - f(x_0, y_0) = f_1(x_0, y_0)H + f_2(x_0, y_0)K + (|H| + |K|) \cdot \xi(H, K),$$

kde ξ je spojitá v bodě $[0, 0]$, $\xi(0, 0) = 0$. Máme dokázat, že $\mathcal{F}$ má totální diferenciál v bodě $[t_0, u_0, v_0]$. Tj. máme dokázat toto: Existují tři čísla A, B, C tak, že

$$(4) \quad \mathcal{F}(t_0 + h, u_0 + k, v_0 + l) - \mathcal{F}(t_0, u_0, v_0) = Ah + Bk + Cl + R(h, k, l),$$

kde $R(h, k, l) = (|h| + |k| + |l|)\, Z_1(h, k, l)$, při čemž

$$\lim_{[h, k, l] \to [0, 0, 0]} Z_1(h, k, l) = 0 \qquad \text{neboli}$$

1014-4527

(5) $$\lim_{[h,k,l]\to[0,0,0]} \frac{R(h,k,l)}{|h|+|k|+|l|} = 0 .$$

Dále máme vypočítat ještě čísla A, B, C (to budou derivace $\mathcal{F}_1$, $\mathcal{F}_2$, $\mathcal{F}_3$ v bodě $[t_0, u_0, v_0]$).

Spočteme levou stranu v (4). Ta je rovna

(6) $$f(\varphi(t_0+h, u_0+k, v_0+l), \psi(t_0+h, u_0+k, v_0+l)) - \\ - f(\varphi(t_0, u_0, v_0), \psi(t_0, u_0, v_0)) .$$

Je $\varphi(t_0, u_0, v_0) = x_0$, $\psi(t_0, u_0, v_0) = y_0$; levá strana v (1) je jistou funkcí $H(h,k,l)$:

(7) $$H(h,k,l) = \varphi(t_0+h, u_0+k, v_0+l) - x_0$$

a obdobně levá strana v (2) je jistou funkcí $K(h,k,l)$:

(8) $$K(h,k,l) = \psi(t_0+h, u_0+k, v_0+l) - y_0 .$$

Dosadím-li do (6), dostanu, že levá strana v (4) je rovna

$$f(x_0 + H(h,k,l), y_0 + K(h,k,l)) - f(x_0, y_0) ,$$

což se podle (3) rovná

(9) $$f_1(x_0, y_0) H(h,k,l) + f_2(x_0, y_0) K(h,k,l) + \\ + (|H(h,k,l)| + |K(h,k,l)|) \xi(H(h,k,l), K(h,k,l)).$$

Zde je $\xi(H(h,k,l)), K(h,k,l)) = Z(h,k,l)$ jistá funkce. Přitom H, K jsou funkce spojité v bodě $[0,0,0]$ a mají tam hodnotu 0 (to plyne ze (7), (8), neboť φ, ψ jsou v bodě $[t_0, u_0, v_0]$ spojité, ježto tam mají totální diferenciál). Dále funkce $\xi(H, K)$ je spojitá v bodě $[0,0]$, takže složená funkce $Z(h,k,l)$ je spojitá v bodě $[0,0,0]$; její limita v tomto bodě se tedy rovná její hodnotě $Z(0,0,0) = \xi(H(0,0,0), K(0,0,0)) = \xi(0,0) = 0$:

(10) $$\lim_{[h,k,l]\to[0,0,0]} Z(h,k,l) = 0 .$$

Levá strana v (1) (popříp. v (2)) je právě $H(h,k,l)$, (popříp. $K(h,k,l)$). Dosadím-li tyto výrazy do (9), dostávám, že levá strana v (4) se rovná

$$f_1(x_0, y_0) [\varphi_1(t_0, u_0, v_0) h + \varphi_2 k + \varphi_3 l + (|h| + |k| + |l|) \eta_1(h,k,l)] + \\ + f_2(x_0, y_0) [\psi_1 h + \psi_2 k + \psi_3 l + (|h| + |k| + |l|) \eta_2(h,k,l)] + \\ + (|H(h,k,l)| + |K(h,k,l)|) Z(h,k,l) .$$

To lze psát ve tvaru

$$Ah + Bk + Cl + R(h,k,l) ,$$

kde

$$A = f_1(x_0, y_0)\,\varphi_1(t_0, u_0, v_0) + f_2(x_0, y_0)\,\psi_1(t_0, u_0, v_0)\,,$$
$$(11)\qquad B = f_1(x_0, y_0)\,\varphi_2(t_0, u_0, v_0) + f_2(x_0, y_0)\,\psi_2(t_0, u_0, v_0)\,,$$
$$C = f_1(x_0, y_0)\,\varphi_3(t_0, u_0, v_0) + f_2(x_0, y_0)\,\psi_3(t_0, u_0, v_0)\,;$$

$$(12)\qquad \frac{R(h,k,l)}{|h|+|k|+|l|} = f_1(x_0,y_0)\,\eta_1(h,k,l) + f_2(x_0,y_0)\,\eta_2(h,k,l) + \frac{|H(h,k,l)|+|K(h,k,l)|}{|h|+|k|+|l|}\,Z(h,k,l)\,.$$

Máme ještě dokázat (5). První dva členy mají v bodě $[0,0,0]$ limitu rovnou nule, funkce Z rovněž.

Jde ještě o podíl (13) $\dfrac{|H(h,k,l)|+|K(h,k,l)|}{|h|+|k|+|l|}$.

Je

$$H(h,k,l) = \varphi_1(t_0,u_0,v_0)h + \varphi_2(t_0,u_0,v_0)k + \varphi_3(t_0,u_0,v_0)l + (|h|+|k|+|l|)\,.\,\eta_1(h,k,l)\,.$$

Zde $\varphi_p(t_0,u_0,v_0)$ $(p=1,2,3)$ jsou konstanty; funkce $\eta_1(h,k,l)$ má v bodě $[0,0,0]$ limitu 0, a tedy je v jistém jeho redukovaném okolí v absolutní hodnotě menší než 1. Odtud plyne, že v jistém redukovaném okolí bodu $[0,0,0]$ je $|H(h,k,l)| < C_1(|h|+|k|+|l|)$, kde C_1 je nějaká konstanta; podobně pro $K(h,k,l)$. Tedy funkce (13) je omezená v jistém redukovaném okolí bodu $[0,0,0]$, a tedy i třetí sčítanec v (12) má limitu 0, takže platí (5).

Zároveň jsme vypočetli parciální derivace funkce $\mathcal{F}$ v bodě $[t_0,u_0,v_0]$ (to jsou čísla A, B, C v (11)). Vyslovme to jako větu:

<u>Věta 17.</u> Nechť funkce $\varphi(t,u,v)$, $\psi(t,u,v)$ mají totální diferenciál v bodě $[t_0,u_0,v_0]$; položme $x_0=\varphi(t_0,u_0,v_0)$, $y_0=\psi(t_0,u_0,v_0)$. Nechť funkce $f(x,y)$ má totální diferenciál v bodě $[x_0,y_0]$. Potom funkce $\mathcal{F}$, definovaná rovnicí

$$(14)\qquad \mathcal{F}(t,u,v) = f(\varphi(t,u,v),\ \psi(t,u,v))$$

má v bodě $[t_0,u_0,v_0]$ totální diferenciál.

Parciální derivace funkce $\mathcal{F}$ v bodě $[t_0,u_0,v_0]$ jsou:

$$(15)\qquad \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial t}\,,\quad \frac{\partial\mathcal{F}}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial u}\,,$$
$$\frac{\partial\mathcal{F}}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial\varphi}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial\psi}{\partial v}\,.$$

Přitom se derivace $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial u}$, $\frac{\partial}{\partial v}$ berou v bodě $[t_0, u_0, v_0]$, derivace $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ se berou v bodě $[x_0, y_0]$.

Pravidlo pro derivování je podobné jako u funkcí jedné proměnné. Obyčejně se to píše takto:

(16) $$\frac{\partial z}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t},$$

čímž se vpravo míní toto: tím z je míněna funkce f ; tím x v derivaci $\frac{\partial x}{\partial t}$ je míněna funkce φ a tím y v derivaci $\frac{\partial y}{\partial t}$ je míněna funkce ψ . To je ještě docela v pořádku: není závady, abychom vnitřní funkce místo písmen φ, ψ označili písmeny x, y :

$$x(t, u, v), \qquad y(t, u, v)$$

a vnější funkci místo f označili písmenem z : $z(x, y)$.

Pravá strana je tedy v pořádku, označíme-li vnější funkci z , vnitřní funkce x , y . S levou stranou je to horší. $\frac{\partial z}{\partial t}$ značí derivaci funkce z "jakožto funkce t, u, v" ; to znamená: do $z(x, y)$ dosadím podle rovnic $x = x(t, u, v)$, $y = y(t, u, v)$, a dostanu funkci tří proměnných $z(x(t, u, v), y(t, u, v))$; to ovšem <u>není</u> $z(t, u, v)$, nýbrž nějaká jiná funkce $z^*(t, u, v)$ (je to právě ta "složená funkce"). A symbol $\frac{\partial z}{\partial t}$ v (16) vlevo znamená právě parciální derivaci té funkce z^* , takže bychom vlevo měli psát $\frac{\partial z^*}{\partial t}$. Ale často se užívá způsobu psaní (16), přičemž se právě symbolem $\frac{\partial z}{\partial t}$ nerozumí parciální derivace funkce $z(x, y)$, nýbrž parciální derivace toho " z jakožto funkce t , u , v " , tj. parciální derivace funkce, kterou dostaneme, když do $z(x, y)$ dosadíme $x = x(t, u, v)$ $y = y(t, u, v)$.

Zpočátku budeme raději užívat vlevo znaku $\frac{\partial z^*}{\partial t}$, tedy $\frac{\partial z^*}{\partial t} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial t}$. Až si na to zvyknete, budeme třeba občas užívat - pokud není nebezpečí nedorozumění - toho nedůsledného označení $\frac{\partial z}{\partial t}$. Ale to může někdy vést k nedorozuměním; např. ve funkci $z(x, y)$ nechme x stát, místo y tam pišme $x^2 + t$; tím dostaneme funkci $z^*(x, t) = z(x, x^2 + t)$.

Je $\frac{\partial z^*}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial x}\cdot 1 + \frac{\partial z}{\partial y}\cdot 2x$; kdybyste vlevo vynechali hvězdičku, vznikl by zmatek (nebo by se to musilo zvlášť vysvětlovat).

Sami jste již jistě poznali, jak vypadá obdobná věta v obecném případě, když do funkce $f(x_1, \ldots, x_r)$ r proměnných dosazuji za $x_1, \ldots, x_r$ funkce s proměnných $\varphi_1(t_1, \ldots, t_s)$, ..., $\varphi_r(t_1, \ldots, t_s)$, čímž vznikne funkce $\mathcal{F}$, definovaná rovností

$$\mathcal{F}(t_1, \ldots, t_s) = f(\varphi_1(t_1, \ldots, t_s), \ldots, \varphi_k(t_1, \ldots, t_s))$$

(podrobně je věta 17 pro obecné r, s dokázána např. v DII, věta 189).

Vraťme se ještě jednou k případu $k = 2$, $s = 3$: máme funkce $x(t, u, v)$, $y(t, u, v)$ a funkci $\kappa(x, y)$. Do této funkce dosaďme

(17) $$x = x(t, u, v), \qquad y = y(t, u, v).$$

Dostáváme funkci κ^* tří proměnných, definovanou rovnicí

(18) $$\kappa^*(t, u, v) = \kappa(x(t, u, v), y(t, u, v)).$$

Jestliže nyní funkce $x(t, u, v)$, $y(t, u, v)$ mají totální diferenciál v jistém bodě $[t, u, v]$, a jestliže funkce $\kappa(x, y)$ má totální diferenciál v "příslušném" bodě $[x, y]$, daném rovnicemi (17), potom funkce $\kappa^*(t, u, v)$ má totální diferenciál v bodě $[t, u, v]$ a její parciální derivace v tomto bodě vypočteme ze vzorce

(19) $$\frac{\partial \kappa^*}{\partial t} = \frac{\partial \kappa}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \kappa}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t},$$
$$\frac{\partial \kappa^*}{\partial u} = \frac{\partial \kappa}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial \kappa}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u},$$
$$\frac{\partial \kappa^*}{\partial v} = \frac{\partial \kappa}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial \kappa}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}.$$

Přitom derivace $\frac{\partial}{\partial t}$, $\frac{\partial}{\partial u}$, $\frac{\partial}{\partial v}$ se berou v uvedeném bodě $[t, u, v]$, derivace $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$ v "příslušném" bodě $[x, y]$, daném rovnicemi (17). Podle věty 16 lze tohoto postupu užít mj. v tom případě, když funkce $x(t, u, v)$, $y(t, u, v)$ mají spojité parciální derivace 1.řádu v bodě $[t, u, v]$ a $\kappa(x, y)$ má spojité parciální derivace 1.řádu v bodě $[x, y]$, daném rovnicemi (17).

Poznámka 1 (velmi důležitá pro početní praxi). V aplikacích je nejčastější tento případ: Funkce $x(t, u, v)$, $y(t, u, v)$ mají spojité parciální derivace až do řádu m ($m \geq 1$) v jisté otevřené množině $M \subset E_3$ a funkce $\kappa(x, y)$ má spojité parciální derivace až do řádu m v jisté otevřené množině $N \subset E_2$. Nechť dále pro každý bod $[t, u, v] \in M$ leží bod $[x(t, u, v), y(t, u, v)]$ v množině N; $\kappa^*(t, u, v)$ je funkce (18). Potom rovnice (19) platí všude v M a z věty o spojitosti složených funkcí plyne spojitost funkcí $\frac{\partial \kappa^*}{\partial t}$, $\frac{\partial \kappa^*}{\partial u}$, $\frac{\partial \kappa^*}{\partial v}$ v M. Tvrdím nyní, že v případě $m \geq 2$ existují v M také derivace 2.řádu funkce κ^* a jsou v M spojité. Dokažme to třeba pro $\frac{\partial^2 \kappa^*}{\partial t\, \partial u}$.

Jest podle (19) všude v M

(20) $$\frac{\partial \kappa^*}{\partial t} = \frac{\partial \kappa}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \kappa}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}.$$

Přitom, počítám-li $\frac{\partial x^*}{\partial t}$ v bodě $[t, u, v]$, je nutno $\frac{\partial x}{\partial x}$, $\frac{\partial x}{\partial y}$ brát v bodě $[x, y]$, daném rovnicemi (17). Aby bylo vyloučeno nedorozumění, označujme derivace indexy. Tedy (20) zapíši ve tvaru

$$
(21)\quad \begin{aligned} x_1^*(t, u, v) &= x_1(x(t, u, v), y(t, u, v))\; x_1(t, u, v) + \\ &+ x_2(x(t, u, v), y(t, u, v))\; y_1(t, u, v)\,. \end{aligned}
$$

Pravou stranu mám derivovat podle u, tj. podle druhé proměnné. Jde o derivaci součtu dvou sčítanců, a každý sčítanec je součinem dvou činitelů. Derivace funkce x_1 podle u je x_{12}, derivace funkce y_1 podle u je y_{12}. Dále jde o derivaci "složené funkce" $\xi(t, u, v) = x_1(x(t, u, v), y(t, u, v))$ podle u. Ježto $x_1(x, y)$ má ještě spojité derivace $x_{11}(x, y)$, $x_{12}(x, y)$, můžeme derivovat podle věty 17 a dostaneme:

$$
\begin{aligned} \xi_2(t, u, v) &= x_{11}(x(t, u, v), y(t, u, v))\; x_2(t, u, v) + \\ &+ x_{12}(x(t, u, v), y(t, u, v))\; y_2(t, u, v)\,. \end{aligned}
$$

Pišme to zase obvyklejším způsobem

$$
\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 x}{\partial x\, \partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}\,.
$$

Podobně se derivuje $\frac{\partial x}{\partial y}$ a dostane se

$$
\frac{\partial^2 x}{\partial y\, \partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}\,.
$$

Tedy celkem

$$
(22)\quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 x^*}{\partial t\, \partial u} &= \left(\frac{\partial^2 x}{\partial x^2} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 x}{\partial x\, \partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}\right) \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial x}\, \frac{\partial^2 x}{\partial t\, \partial u} + \\ &+ \left(\frac{\partial^2 x}{\partial y\, \partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 x}{\partial y^2} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}\right) \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial x}{\partial y} \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial t\, \partial u}\,. \end{aligned}
$$

Přitom derivace funkce x (podle x a y) se berou v bodě $[x(t, u, v), y(t, u, v)]$, derivace funkcí x, y, x^* (podle t, u, v) v bodě $[t, u, v]$. Ježto derivace 2.řádu funkce $x(x, y)$ jsou spojité v N, je podle věty 12

$\frac{\partial^2 x}{\partial y\, \partial x} = \frac{\partial^2 x}{\partial x\, \partial y}$; dále je podle (22) $\frac{\partial^2 x^*}{\partial t\, \partial u}$ spojitá v M, tedy je

$\frac{\partial^2 x^*}{\partial u\, \partial t} = \frac{\partial^2 x^*}{\partial t\, \partial u}$.

Podobně vypočteme ostatní derivace 2.řádu:

$$
(23)\quad \frac{\partial^2 x^*}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 x}{\partial x^2}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\right)^2 + 2\,\frac{\partial^2 x}{\partial x\, \partial y}\, \frac{\partial x}{\partial t}\, \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial^2 x}{\partial y^2}\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 + \frac{\partial x}{\partial x}\, \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} + \frac{\partial x}{\partial y}\, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\,.
$$

$\frac{\partial^2 x^*}{\partial u^2}$ je podobné, jen místo ∂t se píše ∂u. Konečně

$$\frac{\partial^2 \varkappa^*}{\partial t\,\partial u} = \frac{\partial^2 \varkappa}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial^2 \varkappa}{\partial x\,\partial y}\left(\frac{\partial x}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial x}{\partial u}\right) + \frac{\partial^2 \varkappa}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial t}\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial \varkappa}{\partial x}\frac{\partial^2 x}{\partial t\,\partial u} +$$
$$+ \frac{\partial \varkappa}{\partial y}\frac{\partial^2 y}{\partial t\,\partial u}.$$

Podobně se vypočtou ony derivace 2.řádu, v nichž se vyskytuje $\frac{\partial}{\partial v}$. Jestliže je $n \geq 3$, dají se z (23) podobně počítat derivace třetího řádu funkce $\varkappa^*$, a zjistí se jejich spojitost v M.

Poznámka 2. Vyskytne-li se někde funkce jedné proměnné, můžeme místo ∂ psát d. Např. do funkce $\varkappa(x, y)$ dosaďme $x = x(t)$, $y = y(t)$; dostaneme funkci $\varkappa^*(t) = \varkappa(x(t), y(t))$ jedné proměnné, takže za příslušných předpokladů je

$$\frac{d\varkappa^*}{dt} = \frac{\partial \varkappa}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial \varkappa}{\partial y}\frac{dy}{dt};$$

můžeme ovšem též psát $(\varkappa^*)'$, x', y'.

Poznámka 3. Někdy se některé proměnné ve funkci $\varkappa(x_1, \dots, x_k)$ nechají beze změny, za ostatní se dosazují nějaké funkce. Např. do $\varkappa(x, y, u)$ dosaďme $u = u(x, y)$; dostaneme $\varkappa^*(x, y) = \varkappa(x, y, u(x, y))$. Ježto $\frac{\partial x}{\partial x} = 1$, $\frac{\partial x}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial y}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial y}{\partial y} = 1$, máme

$$\frac{\partial \varkappa^*}{\partial x} = \frac{\partial \varkappa}{\partial x} + \frac{\partial \varkappa}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial x}, \tag{24}$$

$$\frac{\partial \varkappa^*}{\partial y} = \frac{\partial \varkappa}{\partial y} + \frac{\partial \varkappa}{\partial u}\cdot\frac{\partial u}{\partial y}$$

(vynechání hvězdičky vlevo by vedlo ke zmatkům). Kdo by to chtěl mít i formálně shodné s větou 17, mohl by dosazovat: $x = t$, $y = v$, $u = u(t, v)$, a dostal by $\varkappa^*(t, v) = \varkappa(t, v, u(t, v))$, načež

$$\frac{\partial \varkappa^*}{\partial t} = \frac{\partial \varkappa}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial \varkappa}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial \varkappa}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial \varkappa}{\partial x} + \frac{\partial \varkappa}{\partial u}\frac{\partial u}{\partial t}, \tag{25}$$

kde derivace $\frac{\partial}{\partial t}$ (a podobně $\frac{\partial}{\partial v}$) se bere v bodě $[t, v]$, $\frac{\partial}{\partial x}$, $\frac{\partial}{\partial y}$, $\frac{\partial}{\partial u}$ v bodě $[t, v, u(t, v)]$. Je to ovšem totéž jako předešlý vzorec, jen s písmeny t, v místo x, y. (Poznáte to, když místo $\frac{\partial \varkappa}{\partial x}$ píšete $\varkappa_1$, ovšem $\varkappa_1(t, v, u(t, v))$ apod. (24) se přepíše na

$$\varkappa_1^*(x, y) = \varkappa_1(x, y, u(x, y)) + \varkappa_3(x, y, u(x, y)) \cdot u_1(x, y)$$

a (25) se přepíše na

$$\varkappa_1^*(t, v) = \varkappa_1(t, v, u(t, v)) + \varkappa_3(t, v, u(t, v)) \cdot u_1(t, v).$$

Obojí znamená ovšem totéž, ježto $x = t$, $y = v$.) Ale snad je zbytečné zavádět nová písmena pro x, y, která v "složené funkci" sůstávají beze změny.

Při aplikacích věty 17 se nejčastěji vyskytují čtyři případy (vezmeme třeba $z(x, y)$, kde $x = x(t, u)$, $y = y(t, u)$):

1. Všechny tyto funkce jsou explicite dány, např. $z(x, y) = xy^2$, $x(t, u) = (t+u)^2$, $y(t, u) = \sin u$; zde nebudeme užívat obecné věty, nýbrž dosadíme:

$$z^*(t, u) = (t+u)^2 \sin^2 u$$

a přímo počítáme odtud parciální derivace (např. "myslím si" u konstantní a počítám $\frac{\partial z^*}{\partial t}$ jako derivaci funkce jedné proměnné; užívám ovšem pravidla pro derivování složených funkcí jedné proměnné).

2. Funkce $z(x, y)$ není dána, ale jsou dány explicitně funkce $x(t, u)$, $y(t, u)$. Tj. hledáme vzorce, platné při daných funkcích $x(t, u)$, $y(t, u)$ pro všechny funkce $z(x, y)$, mající jisté rozumné vlastnosti (např. spojitost parciálních derivací až do jistého řádu). Např. bychom měli řešit parciální diferenciální rovnici

$$x \frac{\partial z(x, y)}{\partial x} + y \frac{\partial z(x, y)}{\partial y} = 0 . \tag{26}$$

Budeme hledat např. jenom řešení mající spojité parc. derivace 1. řádu v nějaké otevřené množině $M \subset E_2$. Zkusíme, zda se rovnice nezjednoduší zavedením polárních souřadnic: $x = \rho \cos \varphi$, $y = \rho \sin \varphi$. Označme

$$z(\rho \cos \varphi, \rho \sin \varphi) = z^*(\rho, \varphi) . \tag{27}$$

Musíme vypočítat levou stranu rovnice (26). Je

$$\frac{\partial z^*}{\partial \rho} = \frac{\partial z}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial z}{\partial y} \sin \varphi . \tag{27a}$$

Násobíme-li ρ, vidíme, že $x \frac{\partial z}{\partial x} + y \frac{\partial z}{\partial y} = \rho \frac{\partial z^*}{\partial \rho}$, takže rovnici (26) lze (pokud $\rho > 0$) psát $\frac{\partial z^*}{\partial \rho} = 0$; tj. jestliže nějaká úsečka $x = \rho \cos \varphi_0$, $y = \rho \sin \varphi_0$ ($0 \leqq \rho_1 < \rho < \rho_2$) leží v M, je na ní z konstantní. Zhruba řečeno: $z(x, y)$ závisí jen na poměru $y : x$ (bylo by nutno to rozebrat kritičtěji, ale mně jde jenom o to, ukázat, že tento 2.případ se vskutku často vyskytuje).

Derivace vyššího řádu počítám ovšem z (27a) zase užitím věty 17, např.[1]

$$\frac{\partial^2 z^*}{\partial \rho\, \partial \varphi} = \left(- \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \rho \sin \varphi + \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} \rho \cos \varphi \right) \cos \varphi - \frac{\partial z}{\partial x} \sin \varphi +$$

$$+ \left(- \frac{\partial^2 z}{\partial y\, \partial x} \rho \sin \varphi + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \rho \cos \varphi \right) \sin \varphi + \frac{\partial z}{\partial y} \cos \varphi$$

atd.

---

1) Míním ovšem obecně funkci tvaru (27), nikoliv řešení rovnice (26).

3. Funkce $z(x, y)$ je dána, nejsou dány $x(t, u)$, $y(t, u)$. Např.

$$z(x, y) = x^2 \sqrt{1 - x^2 y^2},$$

$$z^*(t, u) = x^2(t, u) \sqrt{1 - x^2(t, u)\, y^2(t, u)} .$$

V tomto příkladě naši větu nepotřebuji; myslím si např. $u = konst$ a počítám $\frac{\partial z^*(t, u)}{\partial t}$ jako derivaci složené funkce jedné proměnné; vychází

$$2x \frac{\partial x}{\partial t} \sqrt{1 - x^2 y^2} - x^2 \frac{xy^2 \frac{\partial x}{\partial t} + x^2 y \frac{\partial y}{\partial t}}{\sqrt{1 - x^2 y^2}}$$

(což se dá ještě upravit); přitom x, y znamenají $x(t, u)$, $y(t, u)$.

4. Funkce $z(x, y)$ není dána, a aspoň jedna z funkcí $x(t, u)$, $y(t, u)$ také není dána. Tedy počítám parciální derivace 1., 2., 3. ... řádu postupným užíváním věty 17; užívám přitom výhod, plynoucích z toho, jestliže např. jedna z funkcí $x(t, u)$, $y(t, u)$ je dána. Vezměme třeba případ,[2] že jde o funkce $z(x, y)$, $y(x)$, a že klademe

$$z^*(x) = z(x, y(x)) .$$

Zde je

$$\frac{dz^*(x)}{dx} = \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dx},$$

$$\frac{d^2 z^*(x)}{dx^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{d^2 y}{dx^2}.$$

Předpoklady pro přípustnost těchto operací již neopakuji.

Podotkněme ještě, že pro platnost vzorce o derivování složených funkcí několika proměnných stačí existence totálních diferenciálů, ale nestačí existence parciálních derivací. Např. pro funkci

$$z(x, y) = \frac{2x^2 y}{x^2 + y^2} \quad \text{pro} \quad [x, y] \neq [0, 0], \quad z(0, 0) = 0$$

platí $\quad z(x, 0) = z(0, y) = 0,$

tedy $\quad z_1(0, 0) = z_2(0, 0) = 0 .$

Dosaďme $x = t$, $y = t$. Dostaneme "složenou funkci"

$$z^*(t) = \frac{2t^3}{2t^2}, \quad \text{tj.} \quad z^*(t) = t \qquad (\text{to platí i pro } t = 0) .$$

Pravidlo o derivování složených funkcí by dalo

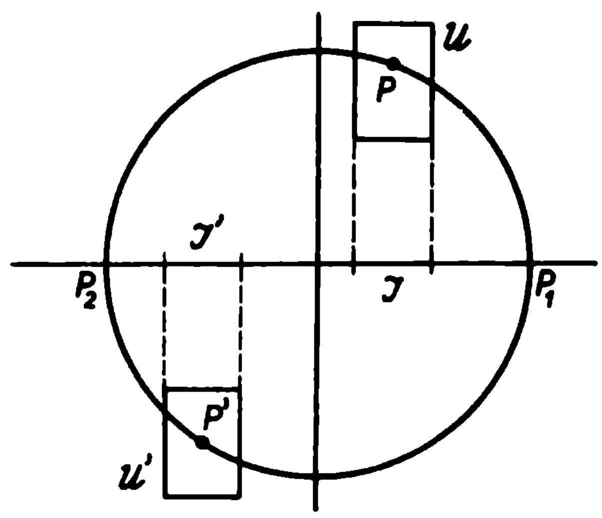
$$(z^*(t))'_{t=0} = z_1(0, 0) \left(\frac{dx}{dt}\right)_{t=0} + z_2(0, 0) \left(\frac{dy}{dt}\right)_{t=0} = 0 ,$$

ale to není pravda, neboť $(z^*(t))' = 1$ pro každé t. Jistě tedy funkce $z(x, y)$ nemá v bodě $[0, 0]$ totální diferenciál.

2) Odlišný od případu $z = z(x, y)$, $z^*(t, u) = z(x(t, u), y(t, u))$.

§ 6. Implicitní funkce.

Napřed si objasníme problém, o který jde. Začneme v E_2 ; budiž dána nějaká funkce dvou proměnných $F(x, y)$. Označíme znakem M množinu oněch bodů $[x, y]$, pro které je $F(x, y) = 0$. Jestliže $F(x, y)$ má tvar $y - f(x)$, je M množina oněch bodů $[x, y]$, pro něž $y = f(x)$, tj. M je graf funkce f . To je ovšem zvláště jednoduchý případ. Už např. v případě $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ je množina M jednotková kružnice, a tedy M není grafem žádné funkce (neboť ke každé hodnotě $x \in (-1, 1)$ příslušejí dvě hodnoty $y = \pm \sqrt{1 - x^2}$, a ne jedna). Zkusme, zda by to nešlo aspoň lokálně: vezmu nějaký bod P na kružnici a ptám se, zda existuje nějaké okolí $\mathcal{U}$ bodu P tak, aby aspoň průnik $\mathcal{U} \cap M$, tj. ta část množiny M , která leží v $\mathcal{U}$, byl grafem nějaké funkce. To je skutečně možné, když P je na horní polokružnici;[1] viz obr. 17, kde množina $M \cap \mathcal{U}$ je grafem funkce $\sqrt{1 - x^2}$ s definičním oborem $\mathcal{J}$; podobně pro bod P' na dolní polokružnici je $M \cap \mathcal{U}'$ grafem funkce $-\sqrt{1 - x^2}$ s definičním oborem $\mathcal{J}'$. Ale v okolí bodu $P_1 = [1, 0]$ to nejde provést: ať volím jakkoliv okolí bodu P_1 , vždy v něm existují dvojice bodů $[x, y]$ kružnice M s týmž x , ale s dvěma různými y , totiž $[x, \sqrt{1 - x^2}]$, $[x, -\sqrt{1 - x^2}]$. Právě tak selže okolí bodu $P_2 = [-1, 0]$. Podotkněme, že pro naši funkci $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ je $\frac{\partial F}{\partial x} = 2x$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2y$; body kružnice M , ve kterých náš pokus selhal, byly oba body s $y = 0$, tj. ty body kružnice M , pro které je $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$.



Obr. 17.

Vezměme za druhé $F(x, y) = 4x^2 - y^2$; množina M těch bodů $[x, y]$, pro něž $F(x, y) = 0$, se skládá ze dvou přímek $y = 2x$, $y = -2x$. Opět je vidět (obr. 18):

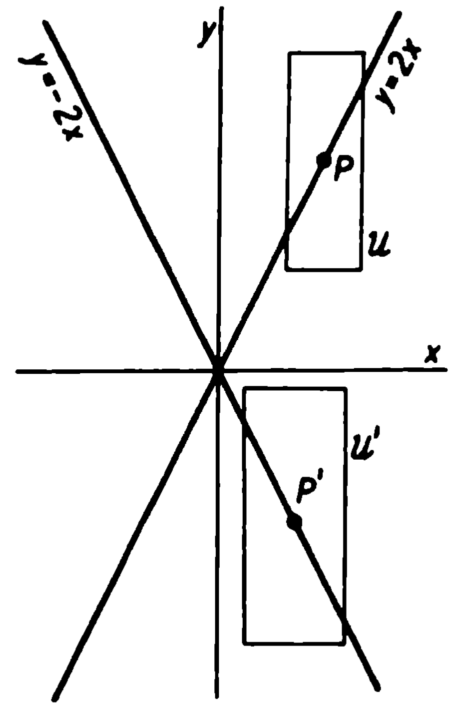
Zvolím-li libovolný bod $P \in M$ různý od počátku, existuje jeho okolí $\mathcal{U}$ tak, že $M \cap \mathcal{U}$ je grafem jisté funkce ($2x$ u bodu P , $-2x$ u bodu P'). Pokus selže, když za P zvolíme počátek $[0, 0]$, což je zase jediný bod množiny M , ve kterém je $\frac{\partial F}{\partial y} = -2y = 0$.

Body množiny M , ve kterých je $\frac{\partial F}{\partial y} = 0$, mohou tedy asi působit obtíže a proto se jim prozatím vyhneme. Formulujeme tedy náš úkol takto: Je dána

---

[1]) Nemluvím zatím o bodech $P_1 = [1, 0]$, $P_2 = [-1, 0]$.

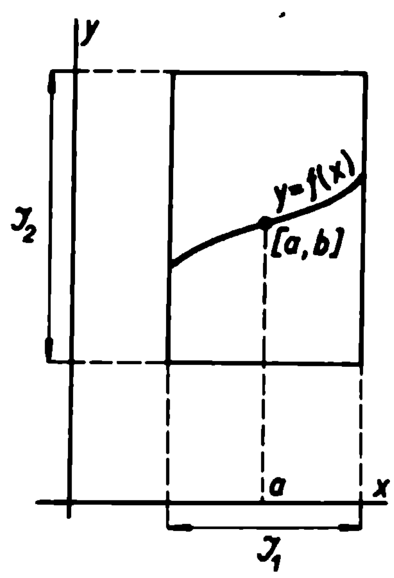
funkce $F(x, y)$; M budiž množina těch bodů $[x, y]$, pro něž $F(x, y) = 0$. Zvolme $[a, b] \in M$ (tj. $F(a, b) = 0$). Předpokládejme, že funkce F je v okolí bodu $[a, b]$ "rozumná", totiž že tam má spojité parciální derivace $\frac{\partial F}{\partial x}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ a že $\left[\frac{\partial F}{\partial y}\right]_{\substack{x=a \\ y=b}} \neq 0$. Za těchto předpokladů dokážeme, že existuje otevřený interval (viz obr. 19).



Obr. 18.

$$\mathcal{J} = \mathcal{J}_1 \times \mathcal{J}_2 \quad ([a, b] \in \mathcal{J}, \text{ tj. } a \in \mathcal{J}_1, \ b \in \mathcal{J}_2)$$

tak, že $M \cap \mathcal{J}$ je grafem nějaké funkce f s definičním oborem $\mathcal{J}_1$, tj. že ke každému $x \in \mathcal{J}_1$ existuje v $\mathcal{J}_2$ <u>právě jedno y</u> (které potom označíme $f(x)$), pro které je $F(x, y) = 0$. Budeme potom ovšem ještě vyšetřovat vlastnosti této funkce - její spojitost a derivaci. Samozřejmě $f(a) = b$.



Obr. 19.

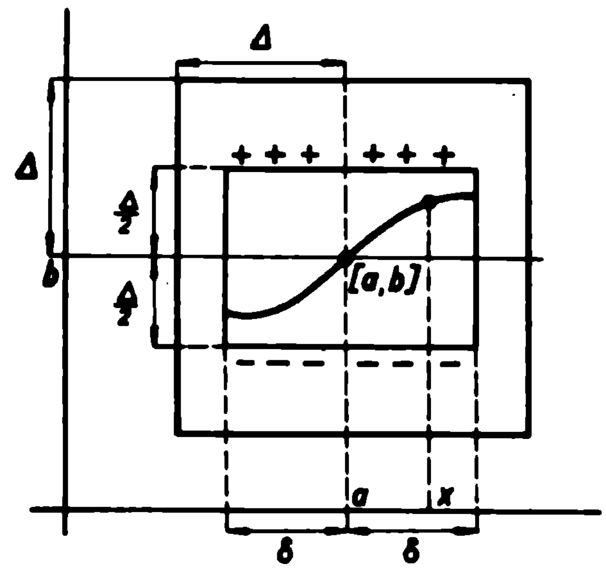
Přitom není podstatné, že x znamená reálné číslo; může znamenat také bod v E_k, takže jde o funkci $k+1$ proměnných: $F(x_1, x_2, \ldots, x_k, y)$, načež ovšem bude $\mathcal{J}_1$ k-rozměrný interval, a $f(x)$ (tj. řešení rovnice $F(x, y) = 0$, ležící v $\mathcal{J}_2$) bude funkcí k proměnných.

Začnu s důkazem, výsledek vyslovím jako větu až nakonec. Předpoklady buďte tyto:

Je dána funkce $F(x_1, x_2, \ldots, x_k, y)$ a bod $[a, b] = [a_1, a_2, \ldots, a_k, b]$ takový, že $F(a_1, a_2, \ldots, a_k, b) = 0$. Funkce F má v jistém okolí bodu $[a, b]$ spojité parciální derivace 1. řádu $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial F}{\partial x_k}, \frac{\partial F}{\partial y}$. Dále v bodě $[a, b]$ je $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ (naším cílem je nalézt intervaly $\mathcal{J}_1 \subset E_k$, $\mathcal{J}_2 \subset E_1$ ($a \in \mathcal{J}_1$, $b \in \mathcal{J}_2$) tak, aby ke každému bodu $[x_1, x_2, \ldots, x_k] \in \mathcal{J}_1$ existovalo v $\mathcal{J}_2$ <u>právě jedno</u> y tak, že $F(x_1, x_2, \ldots, x_k, y) = 0$). Můžeme bez újmy obecnosti předpokládat, že v bodě $[a, b]$ je $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$ (jinak bychom místo F vzali $-F$, a rovnice $-F = 0$ znamená totéž jako $F = 0$).

Zvolme okolí $U_\Delta^{k+1}(a,b)$[2] tak (při důkazu sledujte obr. 20), že v něm $\frac{\partial F}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial F}{\partial x_k}, \frac{\partial F}{\partial y}$ jsou spojité, a že

(1) $\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} > 0$ pro všechna $x \in U_\Delta^{k+1}(a,b)$.



Obr. 20.

Vyšetřujme nyní funkci $F(a,y)$ v intervalu $b-\frac{\Delta}{2} \le y \le b+\frac{\Delta}{2}$. Funkce $F(a,y)$ je v tomto intervalu spojitá a podle (1) rostoucí. Přitom $F(a,b) = 0$, tedy $F(a, b-\frac{\Delta}{2}) < 0$,

$$F(a, b+\frac{\Delta}{2}) > 0$$ [3].

Vezmu teď funkce $F(x, b-\frac{\Delta}{2})$, $F(x, b+\frac{\Delta}{2})$. To jsou funkce (k proměnných) spojité v $U_\Delta^k(a)$. V bodě $x = a$ je první z nich záporná, druhá kladná. Z jejich spojitosti plyne: Existuje $\delta > 0$ tak, že je

(2) $$F(x, b-\frac{\Delta}{2}) < 0 \quad , \qquad F(x, b+\frac{\Delta}{2}) > 0$$

pro všechna $x \in U_\delta^k(a)$. Volím hned $\delta < \Delta$. Vezměme nyní určitý bod $x \in U_\delta^k(a)$. Při tomto pevném x je $F(x,y)$ funkcí jedné proměnné y, která je v intervalu $\langle b-\frac{\Delta}{2}, b+\frac{\Delta}{2}\rangle$ spojitá, v bodě $b-\frac{\Delta}{2}$ záporná (viz (2)), v bodě $b+\frac{\Delta}{2}$ kladná. Tedy existuje $y \in (b-\frac{\Delta}{2}, b+\frac{\Delta}{2})$ tak, že $F(x,y) = 0$; a takové y existuje jen jedno, poněvadž $F(x,y)$ je při daném x rostoucí funkcí y v $\langle b-\frac{\Delta}{2}, b+\frac{\Delta}{2}\rangle$ podle (1). Tedy jsme dokázali toto:

T_1: Ke každému $x \in [x_1, \dots, x_k] \in U_\delta^k(a)$ existuje v intervalu $(b-\frac{\Delta}{2}, b+\frac{\Delta}{2})$ právě jedna hodnota y, pro kterou je $F(x,y) = 0$. Označme tuto hodnotu y znakem $f(x_1, \dots, x_k) = f(x)$, takže f je funkce k proměnných s definičním oborem $U_\delta^k(a)$.

Tím je řešena naše otázka: Označím-li M množinu těch bodů $[x_1, \dots, x_k, y] \in E_{k+1}$, pro které je $F(x_1, \dots, x_k, y) = 0$, a označím-li $U^{k+1} = U_\delta^k(a) \times (b-\frac{\Delta}{2}, b+\frac{\Delta}{2})$ (což je jisté okolí - obecně ne δ-okolí! - bodu $[a,b]$), potom průnik $M \cap U^{k+1}$ je grafem jisté funkce, totiž funkce $f(x_1, \dots, x_k)$, jež má definiční obor $U_\delta^k(a)$.

---

[2] Budeme brát okolí v prostorech E_p různé dimense; proto budu pro lepší přehled psát někdy $U_\delta^p(a)$, když jde o bod $a \in E_p$ a tedy o okolí v E_p; podobně d_p, ρ_p.

[3] Na obr. 20 je připsáno + (nebo -) u některých bodů, v nichž je $F(x,y) > 0$ (nebo < 0).

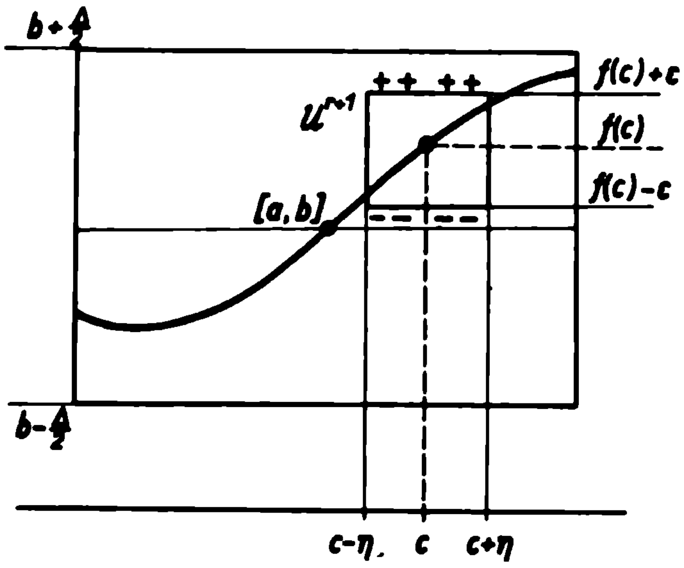
1014-4527

Je zřejmé, že $f(a) = b$ (neboť $F(a, b) = 0$, a b je jediná hodnota $y \in (b - \frac{\Delta}{2}, b + \frac{\Delta}{2})$, pro kterou $F(a, y) = 0$).

Dokážeme teď, že

T_2: funkce f je spojitá v $\mathcal{U}_\delta^k(a)$.

Je to v podstatě opakování předešlého postupu (viz obr. 21). Zvolme bod $c \in \mathcal{U}_\delta^k(a)$. Hodnota $f(c)$ leží v $(b - \frac{\Delta}{2}, b + \frac{\Delta}{2})$. Budeme dokazovat spojitost funkce f v bodě c. Budiž $\varepsilon > 0$; smíme se omezit na tak malá ε, že $f(c) + \varepsilon < b + \frac{\Delta}{2}$, $f(c) - \varepsilon > b - \frac{\Delta}{2}$.



Obr. 21.

Funkce $F(c, y)$ je rovna nule v bodě $y = f(c)$, je v int. $\langle f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon \rangle$ rostoucí (ježto $\frac{\partial F}{\partial y} > 0$), tedy $F(c, f(c) + \varepsilon) > 0$, $F(c, f(c) - \varepsilon) < 0$.

Existuje tedy okolí $\mathcal{U}_\eta^k(c)$ ($\eta > 0$) tak, že $F(x, f(c) + \varepsilon) > 0$, $F(x, f(c) - \varepsilon) < 0$ pro každé $x \in \mathcal{U}_\eta^k(c)$.

Pro pevně zvolené $x \in \mathcal{U}_\eta^k(c)$ je funkce $F(x, y)$ funkce proměnné y spojitá a rostoucí v $\langle f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon \rangle$, záporná v bodě $f(c) - \varepsilon$, kladná v bodě $f(c) + \varepsilon$; tedy v intervalu $(f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon)$ existuje y tak, že $F(x, y) = 0$. Ale takové y v celém intervalu $(b - \frac{\Delta}{2}, b + \frac{\Delta}{2})$ je jen jedno, totiž $f(x)$. Tedy toto y je právě $f(x)$, tedy $f(x) \in (f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon)$ pro všechna $x \in \mathcal{U}_\eta^k(c)$. To však znamená, že f je spojitá v bodě c, což byl libovolný bod z $\mathcal{U}_\delta^k(a)$.

Dokažme nyní, že

T_3: f má spojité parciální derivace 1. řádu v $\mathcal{U}_\delta^k(a)$.

To je obtížnější. Počítejme třeba derivaci podle x_1 v nějakém bodě $c = [c_1, \ldots, c_k] \in \mathcal{U}_\delta^k(a)$. Označme $d = f(c_1, \ldots, c_k) = f(c)$. Ježto funkce F má v bodě $[c, d]$ spojité parc. derivace 1. řádu, má tam i totální diferenciál, a je tedy

$$F(c_1 + h, c_2, \ldots, c_k, d + k) - F(c_1, c_2, \ldots, c_k, d) =$$

$$= \frac{\partial F(c, d)}{\partial x_1} h + \frac{\partial F(c, d)}{\partial y} k + (|h| + |k|)\, \eta(h, k),$$

kde η je spojitá v bodě $[0, 0]$, $\eta(0, 0) = 0$.[4]

[4] V definici tot. dif. stála funkce $\xi(h_1, \ldots, h_k, k)$, spojitá v bodě $[0, 0, \ldots, 0]$, $\xi(0, 0, \ldots, 0) = 0$. Naše funkce $\eta(h, k) = \xi(h, 0, 0, \ldots, 0, k)$ je tedy spojitá v bodě $[0, 0]$ a má tam hodnotu 0.

Dosaďme nyní za $d + k$ hodnotu $f(c_1 + h, c_2, \ldots, c_r)$, takže k je teď funkcí h:

$$k(h) = f(c_1 + h, c_2, \ldots, c_r) - f(c_1, \ldots, c_r) .$$

To je funkce spojitá v bodě $h = 0$ a je $k(0) = 0$. Tedy $\eta(h, k(h)) = Z(h)$ je podle věty o spojitosti složených funkcí spojitá v bodě 0; $Z(0) = \eta(0, k(0)) = \eta(0, 0) = 0$. Tedy $\lim\limits_{h \to 0} Z(h) = 0$.

Máme

$$F(c_1 + h, c_2, \ldots, c_r, f(c_1 + h, c_2, \ldots, c_r)) - F(c_1, c_2, \ldots, c_r, f(c_1, \ldots, c_r)) =$$

$$= h \frac{\partial F(c, f(c))}{\partial x_1} + k(h) \frac{\partial F(c, f(c))}{\partial y} + (\pm h \pm k(h))\, Z(h)$$

(je totiž $|h| = h$ pro $h \geqq 0$, $|h| = -h$ pro $h < 0$, podobně $|k(h)|$). Ale levá strana je 0, neboť $F(x_1, \ldots, x_r, f(x_1, \ldots, x_r)) = 0$. Tedy

$$k(h) \left(\frac{\partial F(c, f(c))}{\partial y} \pm Z(h) \right) = - h \left(\frac{\partial F(c, f(c))}{\partial x_1} \pm Z(h) \right) .$$

Odtud pro $h \neq 0$ (ježto v našem oboru je $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$)

$$\lim_{h \to 0} \frac{k(h)}{h} = - \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial F(c, f(c))}{\partial x_1} \pm Z(h)}{\frac{\partial F(c, f(c))}{\partial y} \pm Z(h)} ,$$

tj.

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(c_1 + h, c_2, \ldots, c_r) - f(c_1, c_2, \ldots, c_r)}{h} = - \frac{\frac{\partial F(c, f(c))}{\partial x_1}}{\frac{\partial F(c, f(c))}{\partial y}} .$$

Ale levá strana je právě $\frac{\partial f(c)}{\partial x_1}$. Podobný důkaz a výsledek platí ovšem pro $\frac{\partial f}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f}{\partial x_r}$. Ježto c byl libovolný bod z $\mathcal{U}^r_\delta(a)$, vidíme: pro každé $x \in \mathcal{U}^r_\delta(a)$ existují

$$\frac{\partial f(x)}{\partial x_k} = - \left[\frac{\frac{\partial F(x, y)}{\partial x_k}}{\frac{\partial F(x, y)}{\partial y}} \right]_{y = f(x)} \qquad (k = 1, \ldots, r) ;$$

derivace vpravo se berou v bodě $x, f(x)$. Dále: funkce $\frac{\partial F(x_1, \ldots, x_r, y)}{\partial x_k}$, $\frac{\partial F}{\partial y}$ jsou spojité v $\mathcal{U}^{r+1}$ a do nich za y dosazuji spojitou funkci f; tedy $\frac{\partial f(x)}{\partial x_k}$ jsou spojité funkce r proměnných v $\mathcal{U}^r_\delta(a)$. Tím je dokázáno tvrzení T_3.

Shrňme (číslo $\frac{\Delta}{2}$ označme teď δ_1):

<u>Věta 18.</u> Budiž $F(x_1, \ldots, x_r, y)$ funkce $r + 1$ proměnných. Budiž $[a, b] = [a_1, \ldots, a_r, b]$ bod, v němž $F(a, b) = 0$, $\frac{\partial F(a, b)}{\partial y} \neq 0$.

1014-4527

Nechť F má spojité parciální derivace 1.řádu v jistém okolí bodu $[a, b]$. Potom existují čísla $\delta > 0$, $\delta_1 > 0$ s těmito vlastnostmi:

1) Ke každému $x \in U_\delta^k(a)$ existuje v intervalu $(b - \delta_1, b + \delta_1)$ právě jedno číslo y takové, že $F(x, y) = 0$. Označme toto y znakem $f(x_1, \ldots, x_k) = f(x)$, takže f je funkce v oboru $U_\delta^k(a)$.

2) Funkce f má v $U_\delta^k(a)$ spojité parciální derivace 1.řádu (tedy tam má totální diferenciál a tedy tam je spojitá).

3) Má-li F v intervalu $U_\delta^k(a) \times (b - \delta_1, b + \delta_1)$ spojité parciální derivace až do řádu m, má funkce f v $U_\delta^k(a)$ spojité parciální derivace až do řádu m.

Tvrzení 3 jsme dosud nedokázali - dokažme je tedy. Označme tu funkci f raději znakem y: $y(x_1, \ldots, x_k)$. Dokázali jsme, že

$$(3) \qquad \frac{\partial y}{\partial x_k} = - \frac{\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}},$$

kde vpravo se derivace berou v bodě $[x, y(x)]$, takže se jeví jako "složené funkce" proměnných $x_1, \ldots, x_k$. Předpokládejme, že F má v uvedeném intervalu spojité derivace až do 2.řádu. Pokusme se derivovat (3) podle x_l. To znamená derivovat pravou stranu, tj. podíl. Jde o to, zda se dá derivovat čitatel

$$(4) \qquad F_k(x_1, \ldots, x_k, y(x_1, \ldots, x_k))$$

a podobně jmenovatel. Funkce F_k má podle předpokladu spojité parciální derivace podle všech proměnných, a vnitřní funkce y také - podle vzorce (3). Tedy existuje parciální derivace složené funkce (4) podle x_l a rovná se

$$F_{k,l}(x_1, \ldots, x_k, y(x_1, \ldots, x_k)) + F_{k,k+1}(x_1, \ldots, x_k, y(x_1, \ldots, x_k)) \cdot$$
$$\cdot \frac{\partial y(x_1, \ldots, x_k)}{\partial x_l}$$

a podobně se dá derivovat jmenovatel. Tedy existuje

$$(5) \qquad \frac{\partial^2 y}{\partial x_k \partial x_l} = \frac{\left(\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \, \partial x_l} + \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y^2} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial x_l}\right)\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial x_k} - \left(\dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x_k \partial x_l} + \dfrac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x_k \partial y} \cdot \dfrac{\partial y}{\partial x_l}\right)\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}}{\left(\dfrac{\partial F(x,y)}{\partial y}\right)^2}.$$

vpravo se derivace funkce $F(x, y)$ berou v bodě $[x, y(x)]$, jeví se tedy jako složené funkce $x_1, \ldots, x_k$, zřejmě spojité v $U_\delta^k(a)$. Tím je tvrzení 3 dokázáno pro $m = 2$. Z formule (5) analogicky dostaneme: Má-li F v $U_\delta^k(a) \times (b - \delta_1, b + \delta_1)$ ještě spojité derivace třetího řádu, můžeme v (5) ještě derivovat složené funkce $\dfrac{\partial^2 F}{\partial y \, \partial x_l}$ atd. a ovšem také $\dfrac{\partial y}{\partial x_l}$, a vyjde existence a spojitost derivací třetího řádu funkce $y(x)$. Obecně se důkaz vede indukcí podle n (viz v D I důkaz věty 179 pro $k = 1$ - pro obecné k je postup zcela obdobný). Nebudu ho provádět.

Poznámka 1. Funkci $y(x_1, \ldots, x_k)$ (nebo $f(x_1, x_2, \ldots, x_k)$), která podle věty 18 vyhovuje v okolí jistého bodu $[a_1, \ldots, a_k]$ rovnici

$$F(x_1, \ldots, x_k, f(x_1, \ldots, x_k)) = 0 ,$$

se říká "implicitní funkce" definovaná rovnicí $F(x_1, \ldots, x_k, y) = 0$. Je snad lépe říkat, že funkce $f(x_1, \ldots, x_k)$ je touto rovnicí implicitně definována. Neboť každou funkci $f(x_1, \ldots, x_k)$ je možno "implicitně" definovat např. rovnicí

$$y - f(x_1, x_2, \ldots, x_k) = 0$$

nebo rovnicí

$$e^y - e^{f(x_1, \ldots, x_k)} = 0$$

nebo rovnicí

$$y^2 - 2yf(x_1, \ldots, x_k) + f^2(x_1, \ldots, x_k) = 0 ;$$

každá z těchto rovnic je totiž splněna tehdy a jen tehdy, je-li $y = f(x_1, \ldots, x_k)$. Slova "implicitní funkce" se tedy netýkají podstaty funkce, nýbrž pouze způsobu, jakým je nám tato funkce předložena. Slova "implicitní funkce" nejsou matematickým pojmem (na rozdíl od pojmů "přirozené číslo", "funkce spojitá v bodě c"), ale jsou užitečným dorozumívacím prostředkem. Zrovna tak jako výrok: "věta o přírůstku funkce je základní větou diferenciálního počtu" není matematickou větou (teorémem), ale je to důležité upozornění: kdo si neuvědomí význam věty o přírůstku funkce, nepochopí dobře strukturu diferenciálního počtu.

Poznámka 2 (velmi důležitá pro početní praxi). Ukázali jsme, jak lze počítat parciální derivace implicitní funkce:

je

$$\frac{\partial y}{\partial x_k} = - \frac{\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial x_k}}{\dfrac{\partial F(x, y)}{\partial y}}$$

a další derivace se dají počítat (současně jsme tím dokázali jejich existenci) derivováním podílu na pravé straně. Ale to by byl nepohodlný způsob (už rovnice (5) pro derivace 2.řádu byla dost složitá). Proto se při praktických výpočtech těchto derivací postupuje jiným způsobem, který teď vyložím. Nechť třeba $F(x, y, z)$ je funkce, která má spojité parciální derivace do 3.řádu v okolí jistého bodu $[a, b, c]$, přičemž

$$F(a, b, c) = 0 , \quad \left[\frac{\partial F(x, y, z)}{\partial z}\right]_{\substack{x = a \\ y = b \\ z = c}} \neq 0 .$$

Potom, jak víme, existují $\delta > 0$, $\delta_1 > 0$ tak, že ke každému bodu

$$[x , y] \in (a - \delta, a + \delta) \times (b - \delta, b + \delta) = U^2_\delta (a, b)$$

existuje v intervalu $(c - \delta_1 , c + \delta_1)$ právě jedno číslo z tak, že $F(x , y, z) = 0$; toto číslo z označme $z(x , y)$, čísla δ, δ_1 volme tak malá, že $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$ v $U^2_\delta (a, b) \times (c - \delta_1 , c + \delta_1)$ a že parc. derivace funkce F až do 3.řádu tam jsou spojité. Víme, že funkce z má v $U^2_\delta (a, b)$ spojité parc. derivace do 3.řádu. Počítejme je. Pro všechny body $[x , y] \in U^2_\delta (a, b)$ platí rovnost

$$F(x , y, z(x , y)) = 0 .$$

Tedy také všechny parciální derivace (všech řádů) funkce $F(x , y, z(x , y))$ jsou v $U^2_\delta (a, b)$ rovny nule; ježto vnější funkce F i vnitřní funkce z mají spojité parc. derivace do 3.řádu, lze tyto derivace počítat podle pravidel o derivování složených funkcí, § 5, pozn. 1. Napišme tedy rovnici $F(x , y, z) = 0$ (kde ovšem z znamená funkci $z(x , y)$) a derivujme :

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = 0 , \qquad \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y} = 0 ;$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 0 ,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 0 ,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial F}{\partial z} \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 .$$

Ježto $\frac{\partial F}{\partial z} \neq 0$, lze z prvních dvou rovnic vypočítat $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, potom z dalších tří $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$; sami si sestavte např. rovnici pro $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$. Hodnoty derivací $\frac{\partial z}{\partial x}$ atd. v určitém bodě $[x , y]$ dostanu z těchto rovnic tak, že do derivací $\frac{\partial F(x , y, z)}{\partial x}$, $\frac{\partial F(x , y, z)}{\partial y}$, $\frac{\partial F(x , y, z)}{\partial z}$, atd. dosadím za z hodnotu $z(x , y)$ - tj. k výpočtu derivací "implicitní funkce" $z(x , y)$ v určitém bodě $[x , y]$ musím znát hodnotu této funkce z v bodě $[x , y]$.

Přesto, že tento způsob výpočtu je jednodušší než způsob, kterého jsme užili v důkazu věty 18, nebyl onen důkaz zbytečný: neboť funkci $F(x , y, z(x , y))$ nesmím n-kráte derivovat podle pravidla o derivování složených funkcí, dokud jsem nedokázal, že vnitřní funkce $z(x , y)$ má spojité parciální derivace n-tého řádu. Je

$$F(x , y, z(x , y)) = 0$$

pro všechna x, y jistého okolí bodu $[a, b]$, tedy všechny derivace složené funkce vlevo jsou identicky rovny nule. Ale nevěděli bychom, zda derivace levé strany podle x je $\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial x}$, kdybychom už napřed nevěděli, že $\frac{\partial \alpha}{\partial x}$ existuje. Vezměme varovný příklad:

$$\text{Budiž} \quad f(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro racionální } x, \\ 0 & \text{pro iracionální } x. \end{cases}$$

Funkce f není v žádném bodě spojitá a nikde nemá derivaci (ani nevlastní). Sestrojme složenou funkci $F(x) = f(f(x))$. Pro racionální x je $F(x) = f(f(x)) = f(1) = 1$, pro iracionální x je $F(x) = f(f(x)) = f(0) = 1$; tedy $F(x) = 1$ pro všechna x, funkce F má derivace všech řádů všude rovné nule. Ale nesmíme ovšem psát $F'(x) = f'(f(x)) \cdot f'(x)$, protože pravá strana nemá smysl (tj. funkci F, ač má derivaci, nesmíme derivovat podle pravidla o derivování složených funkcí).

<u>Příklad 1.</u> Budiž $F(x, y) = x^3 - 3x^2y + (x^2+1)y^5$. Zde je $\frac{\partial F}{\partial y} = -3x^2 + 5(x^2+1)y^4$. Hledáme "implicitní funkci" $y(x)$, vyhovující rovnici

$$x^3 - 3x^2y + (x^2+1)y^5 = 0 \tag{6}$$

(pro každé x je to rovnice 5.stupně!).

Vezměme některý bod $[a, b]$, ve kterém je $F(a, b) = 0$, ale $\frac{\partial F(a, b)}{\partial y} \neq 0$ a sestrojme příslušnou implicitní funkci $y(x)$ spojitou v jistém dostatečně malém okolí bodu a, pro kterou $y(a) = b$. Tato funkce má v okolí bodu a derivace všech řádů, které budeme značit $y', y'', y''' \dots$ ($y(x)$ je funkce jedné proměnné). Dostanu je derivováním rovnice $F(x, y) = 0$; ježto funkce F je explicitně dána, nebudu počítat podle obecných vzorců, nýbrž přímo z rovnice (6):

$$3x^2 - 6xy - 3x^2y' + 2xy^5 + 5(x^2+1)y^4y' = 0,$$

$$6x - 6y - 6xy' - 6xy' - 3x^2y'' + 2y^5 + 10xy^4y' + 10xy^4y' +$$
$$+ 20(x^2+1)y^3(y')^2 + 5(x^2+1)y^4y'' = 0$$

atd. Z první rovnice vypočtu y' pomocí x, y; dosadím do druhé rovnice za y' vypočtenou hodnotu a vypočtu y'' pomocí x, y atd. Např. pro $x = y = 1$ je $F = 0$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 7 \neq 0$; tedy dovedu pro "implicitní funkci" $y(x)$, pro kterou $y(1) = 1$, počítat $y'(1)$, $y''(1)$, ...:

$$y'(1) = \frac{1}{7}, \quad y''(1) = -\frac{194}{7^3} \quad \text{atd.}$$

Např. umíme stanovit tečnu ke křivce $y = y(x)$ v bodě $[1, 1]$; je to přímka $y = \frac{1}{7}(x - 1) + 1 = \frac{1}{7}x + \frac{6}{7}$ (ač jsme zjistili jen jeden bod $[1, 1]$ té křivky).

Příklad 2. Rovnice $x^2 + y^2 - 1 = 0$ (kružnice) má řešení $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ pro $x \in \langle -1, 1 \rangle$. Derivace funkcí $\sqrt{1 - x^2}$, $-\sqrt{1 - x^2}$ v $(-1, 1)$ lze počítat přímo. Ale pohodlněji se počítají jako derivace implicitních funkcí:

$$x + yy' = 0 , \quad 1 + y'^2 + yy'' = 0 ,$$

$$3y'y'' + yy''' = 0 , \quad 4y'y''' + 3(y'')^2 + yy^{(4)} = 0$$

atd; přitom ovšem y znamená funkci $\sqrt{1 - x^2}$ nebo $-\sqrt{1 - x^2}$. Např. pro $x = 0$, $y = 1$ vyjde $y' = 0$, $y'' = -1$, $y''' = 0$, $y^{(4)} = -3$ atd.

Ve větě 18 jsme "řešili" jednu rovnici $F(x_1, \dots, x_k, y) = 0$ "podle y". Vezměme teď s takových rovnic

$$\left\{ \begin{array}{l} F_1(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_s) = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ F_s(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_s) = 0 \end{array} \right. \tag{7}$$

a budeme je "řešit podle $y_1, \dots, y_s$". Uvedu hned příslušnou větu, napřed však zavedu tento pojem:

Budiž dáno s funkcí $k + s$ proměnných

$F_k(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_s)$ $(k = 1, 2, \dots, s)$.

Determinant

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial y_1}, & \dots, & \frac{\partial F_1}{\partial y_s} \\ \frac{\partial F_2}{\partial y_1}, & \dots, & \frac{\partial F_2}{\partial y_s} \\ \vdots & & \\ \frac{\partial F_s}{\partial y_1}, & \dots, & \frac{\partial F_s}{\partial y_s} \end{vmatrix}$$

nazýváme Jacobiovým determinantem nebo Jacobiánem funkcí $F_1, \dots, F_s$ podle $y_1, \dots, y_s$. Značívá se někdy

$$\frac{\mathcal{D}(F_1, \dots, F_s)}{\mathcal{D}(y_1, \dots, y_s)} \tag{8}$$

(to ovšem není žádný podíl, nýbrž nedělitelný symbol). Je to funkce $k + s$ proměnných.

Prozradím, že podmínka $\frac{\partial F}{\partial y} \neq 0$ z věty 18 (při jedné rovnici, tj. pro $s = 1$) bude nyní nahrazena podmínkou, že Jacobián (8) není roven nule.

Věta 19. Buďte

$$F_1(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_s),$$
$$F_2(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_s),$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$F_s(x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_s)$$

funkce $k+s$ proměnných (píšeme také $F_k(x, y)$. Budiž $[a, b] = [a_1, \dots, a_k, b_1, \dots, b_s]$ bod, pro nějž platí

$$F_1(a, b) = \dots = F_s(a, b) = 0 .$$

Nechť funkce $F_1, \dots, F_s$ mají v okolí bodu $[a, b]$ spojité parciální derivace 1.řádu.

Nechť Jacobián
$$\frac{\mathcal{D}(F_1, \dots, F_s)}{\mathcal{D}(y_1, \dots, y_s)}$$
je v bodě $[a, b]$ různý od nuly. Potom existují čísla $\delta > 0$, $\delta_1 > 0$ s těmito vlastnostmi:

1) Ke každému bodu $x = [x_1, \dots, x_k] \in U^k_\delta(a)$ existuje v $U^s_{\delta_1}(b)$ právě jeden bod $y = [y_1, \dots, y_s]$ tak, že je

$$F_1(x, y) = 0 , \dots, F_s(x, y) = 0 .$$

Souřadnice $y_1, \dots, y_s$ jsou tedy jisté funkce $y_1 = f_1(x_1, \dots, x_k)$, ..., $y_s = f_s(x_1, \dots, x_k)$ s definičním oborem $U^k_\delta(a)$.

2) Funkce f_k $(k = 1, \dots, s)$ mají v $U^k_\delta(a)$ spojité parc. derivace 1.řádu.

3) Mají-li funkce $F_1, \dots, F_s$ v $U^k_\delta(a) \times U^s_{\delta_1}(b)$ spojité parciální derivace až do řádu m-tého, mají také funkce $f_1, \dots, f_s$ v $U^k_\delta(a)$ spojité parciální derivace až do řádu m-tého.

Důkaz. Pro $s = 1$ je to věta 18. Důkaz se provádí úplnou indukcí podle s. Provedu jenom přechod od $s = 1$ k $s = 2$; základní myšlenku indukce bude z něho vidět, a nebude formálně tak složitý jako obecný krok z s k $s+1$. Jsou tedy dány dvě funkce

$$F_1(x_1, \dots, x_k, y_1, y_2), \quad F_2(x_1, \dots, x_k, y_1, y_2), \tag{9}$$

bod $[a_1, \dots, a_k, b_1, b_2] = [a, b_1, b_2]$, ve kterém tyto funkce jsou rovny nule; nechť jsou splněny podmínky věty. V bodě $[a, b_1, b_2]$ je Jacobián

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{\partial F_2}{\partial y_2} - \frac{\partial F_2}{\partial y_1}\frac{\partial F_1}{\partial y_2} \tag{10}$$

různý od nuly. Tedy některá z derivací $\frac{\partial F_1}{\partial y_1}$, $\frac{\partial F_2}{\partial y_1}$ je různá od nuly v bodě $[a, b_1, b_2]$; budiž to (bez újmy obecnosti) třeba $\frac{\partial F_1}{\partial y_1}$ [5]. Potom můžeme na rovnici

(11) $$F_1(x_1, \ldots, x_k, y_1, y_2) = 0$$

užít věty 18: existují čísla $\delta' > 0$, $\delta_1' > 0$ tak, že ke každému bodu $[x_1, \ldots, x_k, y_2] \in U_{\delta'}^{k+1}(a, b_2)$ existuje v intervalu $(b_1 - \delta_1', b_1 + \delta_1')$ právě jedno číslo y_1 tak, že platí (11). Toto y_1 je jistou funkcí $x_1, \ldots, x_k, y_2$:

$$y_1 = \varphi(x_1, \ldots, x_k, y_2) = \varphi(x, y_2) \qquad (\varphi(a, b_2) = b_1),$$

která má pro $d(a, x) < \delta'$, $|y_2 - b_2| < \delta'$ spojité parciální derivace 1. řádu, po případě n-tého řádu (za předpokladu, že F_1 má spojité parc. derivace n-tého řádu).

Pro
$$d(a, x) < \delta', \quad |y_2 - b_2| < \delta', \quad |y_1 - b_1| < \delta_1'$$
jsou tedy rovnice

(12 a) $$F_1(x, y_1, y_2) = 0,$$

(12 b) $$F_2(x, y_1, y_2) = 0$$

splněny tehdy a jen tehdy, je-li

(13 a) $$y_1 = \varphi(x, y_2),$$

(13 b) $$F_2(x, \varphi(x, y_2), y_2) = 0.$$

Čísla δ_1', δ' mohu ještě libovolně zmenšit. Použiji nyní věty 18 na rovnici (13 b). K tomu cíli musím ověřit podmínku, že složená funkce

(14) $$F_2(x, \varphi(x, y_2), y_2) = H(x, y_2)$$

(proměnných $x_1, \ldots, x_k, y_2$) je v bodě $[a, b_2]$ rovna nule a že derivace funkce H podle y_2 je v bodě $[a, b_2]$ různá od nuly. Vskutku je

$$H(a, b_2) = F_2(a, \varphi(a, b_2), b_2) = F_2(a, b_1, b_2) = 0.$$

Z pravidla o derivování složených funkcí plyne, že funkce (14) má spojité parciální derivace 1. řádu (popříp. n-tého řádu) v okolí tohoto bodu. V jistém okolí bodu $[a, b_2]$ je

$$\frac{\partial H}{\partial y_2} = \frac{\partial F_2}{\partial y_1}\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2}.$$

---

[5] Jinak by stačilo přečíslovat funkce F_1, F_2.

Jak se vypočte $\frac{\partial \varphi}{\partial y_2}$, víme z důkazu věty 18 a pozn. 2. Ale proveďme to. Pro všechna $x \in \mathcal{U}^n_{\delta'}(a)$, $y_2 \in (b_2 - \delta', b_2 + \delta')$ je $F_1(x, \varphi(x, y_2), y_2) = 0$, tedy

$$\frac{\partial F_1}{\partial y_1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y_2} + \frac{\partial F_1}{\partial y_2} = 0$$

a odtud (ježto $\frac{\partial F_1}{\partial y_1} \neq 0$)

$$\frac{\partial \varphi}{\partial y_2} = - \frac{\frac{\partial F_1}{\partial y_2}}{\frac{\partial F_1}{\partial y_1}} ,$$

takže

$$\frac{\partial H}{\partial y_2} = \frac{1}{\frac{\partial F_1}{\partial y_2}} \left(- \frac{\partial F_2}{\partial y_1} \frac{\partial F_1}{\partial y_2} + \frac{\partial F_2}{\partial y_2} \frac{\partial F_1}{\partial y_1} \right) \neq 0 ,$$

jestliže δ', δ_1' byla zvolena dostatečně malá (tady vidíte význam předpokladu, že Jacobián je různý od nuly). Podle věty 18 existují tedy $\delta'' > 0$, $\delta_1'' > 0$ tak, že ke každému $x \in \mathcal{U}^n_{\delta''}(a)$ existuje v intervalu $(b_2 - \delta_1'', b_2 + \delta_1'')$ právě jedno y_2 tak, že $H(x, y_2) = 0$, tj.

$$F_2(x, \varphi(x, y_2), y_2) = 0 ;$$

označme $y_2 = f_2(x) = f_2(x_1, \ldots, x_n)$, $f_2(a) = b_2$; tato funkce má v $\mathcal{U}^n_{\delta''}(a)$ spojité parc. derivace 1.řádu (popříp. m-tého řádu). Pokud se tedy omezím na body $[x, y_1, y_2]$, které splňují všechny podmínky

$$d(x, a) < \delta', \quad |y_2 - b_2| < \delta', \quad |y_1 - b_1| < \delta_1',$$
$$d(x, a) < \delta'', \quad |y_2 - b_2| < \delta_1'',$$

jsou rovnice (12^a), (12^b) splněny tehdy a jen tehdy, je-li

$$y_2 = f_2(x), \quad y_1 = \varphi(x, y_2) = \varphi(x, f_2(x)) .$$

Poslední "složenou funkci" označíme $f_1(x)$; má v jistém okolí bodu a spojité parc. derivace 1.řádu (popříp. m-tého řádu). Poznamenali jsme, že

$$f_2(a) = b_2 , \quad f_1(a) = \varphi(a, f_2(a)) = \varphi(a, b_2) = b_1 .$$

Ježto funkce f_1, f_2 jsou spojité v bodě a, lze zvolit $\delta > 0$, $\delta < \delta'$, $\delta < \delta''$ tak malá, že pro $d(x, a) < \delta$ budou splněny všechny podmínky

$$|f_1(x) - b_1| < \mathrm{Min}(\delta', \delta_1', \delta_1'') ,$$
$$|f_2(x) - b_2| < \mathrm{Min}(\delta', \delta_1', \delta_1'') .$$

Položme $\delta_1 = \mathrm{Min}(\delta', \delta_1', \delta_1'')$, takže pro každé $x \in \mathcal{U}^n_\delta(a)$ máme zaručeno, že bod $[f_1(x), f_2(x)]$ bude ležet v $\mathcal{U}^2_{\delta_1}(b_1, b_2)$. Tj. vskutku: Jestliže x je libovolný bod v $\mathcal{U}^n_\delta(a)$, existuje v $\mathcal{U}^2_{\delta_1}(b_1, b_2)$ právě jeden bod

$[y_1, y_2]$, splňující rovnice (12^a), (12^b), totiž právě bod $[f_1(x), f_2(x)]$. Víme dále, že funkce f_1, f_2 mají v jistém okolí bodu a spojité parc. derivace 1.řádu (popříp. n-tého řádu). Zmenším-li ještě δ, mohu docílit toho, že tyto parciální derivace jsou spojité v celém okolí $U_\delta^k(a)$.

Tím je věta dokázána pro $s = 2$. Vidíte, že důkaz je v podstatě jednoduchý (první rovnice se "řeší" podle y_1, dosadí se za y_1 do druhé rovnice, a ta se "řeší" podle y_2). Jenom správné vybalansování různých čísel δ tvoří obtíž, která je však jen formálního rázu.

Poznámka 3 (velmi důležitá pro početní praxi). Mějme systém rovnic

(15) $$F_1(x, y_1, \dots, y_s) = 0, \qquad (x = [x_1, \dots, x_k])$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$F_s(x, y_1, \dots, y_s) = 0$$

vyhovující předpokladům věty 19. "Implicitní funkce" $f_1(x), \dots, f_s(x)$ z této věty označme $y_1(x), \dots, y_s(x)$. Parciální derivace těchto funkcí se počítají podobně jako pro jednu rovnici $F(x, y) = 0$. Rovnice (15) jsou splněny pro všechna $x \in U_\delta^k(a)$, jestliže za $y_1, \dots, y_s$ dosadím funkce $y_1(x), \dots, y_s(x)$:

(16) $$F_k(x, y_1(x), \dots, y_s(x)) = 0 \qquad (k = 1, \dots, s).$$

Tedy i všechny parciální derivace těchto "složených funkcí" (jež stojí v (16) vlevo) jsou rovny nule v $U_\delta^k(a)$. Derivujeme tedy (16) podle pravidla o derivování složených funkcí třeba podle x_k. Dostaneme všude v $U_\delta^k(a)$

(17) $$\frac{\partial F_1}{\partial x_k} + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial y_s}\frac{\partial y_s}{\partial x_k} = 0,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\frac{\partial F_s}{\partial x_k} + \frac{\partial F_s}{\partial y_1}\frac{\partial y_1}{\partial x_k} + \dots + \frac{\partial F_s}{\partial y_s}\frac{\partial y_s}{\partial x_k} = 0.$$

Chci-li počítat $\frac{\partial y_1}{\partial x_k}, \dots, \frac{\partial y_s}{\partial x_k}$ v jistém bodě $[x_1, \dots, x_k]$, dostávám zde pro ně soustavu s lineárních rovnic, kde determinant soustavy je právě Jacobián $\frac{\mathcal{D}(F_1, \dots, F_s)}{\mathcal{D}(y_1, \dots, y_s)} \neq 0$, takže soustava má řešení a to jediné.

Chci-li počítat $\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_k \partial x_l}, \dots, \frac{\partial^2 y_s}{\partial x_k \partial x_l}$, derivuji dále podle x_l. Derivováním funkce $\frac{\partial F_j}{\partial x_k}$ dostanu

$$\frac{\partial^2 F_j}{\partial x_k \partial x_l} + \sum_{m=1}^{s} \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_k \partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_l},$$

což jsou veličiny již "známé"; podobně při derivování funkcí $\frac{\partial F_j}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial F_j}{\partial y_s}$.

Když však v součinu $\frac{\partial F_j}{\partial y_m}\frac{\partial y_m}{\partial x_k}$ derivuji druhého činitele, dostanu $\frac{\partial F_j}{\partial y_m}\frac{\partial^2 y_m}{\partial x_k \partial x_l}$.
Je tedy vidět, že derivováním rovnic (17) dostanu rovnice

$$
\begin{aligned}
&A_1 + \frac{\partial F_1}{\partial y_1}\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_k \partial x_l} + \dots + \frac{\partial F_1}{\partial y_s}\frac{\partial^2 y_s}{\partial x_k \partial x_l} = 0 ,\\
(18)\qquad &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
&A_s + \frac{\partial F_s}{\partial y_1}\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_k \partial x_l} + \dots + \frac{\partial F_s}{\partial y_s}\frac{\partial^2 y_s}{\partial x_k \partial x_l} = 0 ,
\end{aligned}
$$

kde $A_1, \dots, A_s$ obsahují jednak derivace funkcí $F_1, \dots, F_s$ druhého řádu, jednak derivace funkcí $y_1, \dots, y_s$ prvního řádu podle x_k (které lze vypočítat ze (17)) a podle x_l. Soustava (18) je tedy soustavou s lineárních rovnic pro s hodnot

$$\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_k \partial x_l}, \dots, \frac{\partial^2 y_s}{\partial x_k \partial x_l} \quad \text{(při daných } k, l \text{)} ;$$

determinant soustavy je opět náš Jacobián, tedy číslo různé od nuly. Podobně pro derivace 3.řádu atd.

<u>Příklad 3.</u> Mějme dvě funkce F, G tří proměnných; rovnice $F(x, y, z) = G(x, y, z) = 0$ určují za předpokladů věty 19 "implicitní" funkce jedné proměnné $y(x)$, $z(x)$. Jejich derivace počítáme z rovnic

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y}y' + \frac{\partial F}{\partial z}z' = 0 , \qquad \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y}y' + \frac{\partial G}{\partial z}z' = 0 ;$$

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}y' + \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}z' + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial x}y' + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(y')^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}y'z' + \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial x}z' +\\
&+ \frac{\partial^2 F}{\partial z \partial y}z'y' + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(z')^2 + \frac{\partial F}{\partial y}y'' + \frac{\partial F}{\partial z}z'' = 0
\end{aligned}
$$

neboli

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(y')^2 + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(z')^2 + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}y' + 2\frac{\partial^2 F}{\partial x \partial z}z' + 2\frac{\partial^2 F}{\partial y \partial z}y'z' +\\
&+ \frac{\partial F}{\partial y}y'' + \frac{\partial F}{\partial z}z'' = 0
\end{aligned}
$$

a obdobná rovnice pro G ; atd.