Kapitola III

POSLOUPNOSTI A ŘADY

§ 1. Posloupnosti s komplexními členy

V 1.ročníku jsme probírali posloupnosti s reálnými členy. Bude pro nás užitečné přenést tuto teorii také na posloupnosti s komplexními členy. Budiž dána posloupnost

(1) $$a_1, a_2, a_3, \dots$$

komplexních čísel.

Limitu posloupnosti (1) definujeme podobně jako u reálných posloupností:

Definice. Říkáme, že komplexní číslo a je limitou posloupnosti (1), jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje přirozené číslo n_0 tak, že pro všechna $n \geq n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon$. (Píšeme opět $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$.)

Jako při reálných posloupnostech můžeme místo $< \varepsilon$ psát $\leq \varepsilon$, místo $\geq n_0$ lze psát $> n_0$; n_0 nemusí být přirozené (stačí, když je reálné). A stačí se omezit na ε menší než libovolně předepsané kladné číslo. Uvědomme si, že množina všech komplexních x, pro něž $|x - a| < \varepsilon$, je vnitřek kruhu o středu a a poloměru ε; množina všech komplexních x, pro něž $|x - a| = \varepsilon$, je kružnice o středu a a poloměru ε.

Připomeňme, že pro absolutní hodnoty komplexních čísel platí tytéž věty jako pro absolutní hodnoty čísel reálných:

$$|-a| = |a|, \quad |ab| = |a| \cdot |b|, \quad \left|\frac{a}{b}\right| = \frac{|a|}{|b|} \quad \text{pro } b \neq 0,$$
$$|a + b| \leq |a| + |b|.$$

Nevlastní limitu nebudeme zavádět, nejsou-li členy posloupnosti reálné. Posloupnost, která má vlastní limitu, se nazývá konvergentní. Podobně jako u reálných posloupností platí věta: Každá posloupnost (komplexních čísel) má nejvýše jednu limitu.

Důkaz: Nechť číslo a i číslo b ($b \neq a$) je limitou posloupnosti (1); z toho odvodíme spor. Ježto $b \neq a$, je $|b - a| > 0$. Zvolme $\varepsilon = \frac{1}{2}|b - a|$. Ježto a je limitou, existuje n_1 (přirozené) tak, že pro všechna $n \geq n_1$ je $|a_n - a| < \varepsilon$ (míním přirozená n - slovo "přirozená" budu často vynechávat, kde se rozumí samo sebou). Ježto také b je limitou, existuje n_2 tak, že

1014-4527

pro všechna $n \geqq n_2$ je $|a_n - b| < \varepsilon$. Zvolme $n_0 = \max(n_1, n_2)$; potom je tedy $|a_{n_0} - a| < \varepsilon$, $|a_{n_0} - b| < \varepsilon$ a tedy $|a - b| = |a - a_{n_0} + a_{n_0} - b| \leqq$ $\leqq |a - a_{n_0}| + |a_{n_0} - b| < 2\varepsilon = |a - b|$, tj. $|a - b| < |a - b|$, což je spor.

Jiný důkaz: Nechť číslo a i číslo b je limitou posloupnosti (1). Máme dokázat, že $a = b$. Budiž $\varepsilon > 0$. Potom existují přirozená čísla n_1, n_2 tak, že pro všechna $n \geqq n_1$ je $|a_n - a| \leqq \varepsilon$, a pro všechna $n \geqq n_2$ je $|a_n - b| \leqq \varepsilon$. Pro $n = \max(n_1, n_2)$ platí tedy obě tyto nerovnosti, a tedy je

$$|a - b| \leqq |a - a_n| + |a_n - b| \leqq 2\varepsilon .$$

Pro každé $\varepsilon > 0$ je tedy $|a - b| \leqq 2\varepsilon$. Odtud však plyne $a = b$.

Také řada dalších vět platí i pro posloupnost komplexních čísel: Je-li $\lim a_n = a$ (vynechávám $n \to \infty$), $\lim b_n = b$, je $\lim |a_n| = |a|$, $\lim (a_n + b_n) = a + b$, $\lim (a_n - b_n) = a - b$, $\lim a_n b_n = ab$, a v případě $b \neq 0$ také $\lim \frac{a_n}{b_n} = \frac{a}{b}$.

Ježto se v definici limity pracuje s absolutní hodnotou $|a_n - a|$, a ježto pro absolutní hodnoty komplexních čísel platí táž pravidla jako pro absolutní hodnoty reálných čísel, dají se důkazy těchto tvrzení doslova opsat z důkazů obdobných vět pro reálné posloupnosti, a proto je nebudu provádět.

Připomeňme, že z $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$ plyne $\lim\limits_{n \to \infty} |a_n| = 0$ (to je speciální případ jedné z uvedených vět), a že tuto implikaci lze obrátit:

Je-li $\lim\limits_{n \to \infty} |a_n| = 0$, je $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Pojem vybrané posloupnosti se definuje jako u reálné posloupnosti a platí opět věta: Jestliže posloupnost je konvergentní, $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$, mají všechny vybrané posloupnosti limitu a.

Posloupnost (1) se nazývá <u>omezená</u>, jestliže existuje kladné číslo K tak, že pro všechna n je $|a_n| \leqq K$. Jestliže v omezené posloupnosti některé členy vynechám, zůstane posloupnost omezená. Jestliže k omezené posloupnosti přidám <u>konečný</u> počet členů, zůstane omezená. To jsou samozřejmosti - mluvili jsme o nich ostatně v 1.ročníku.

<u>Věta</u>: Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Důkaz: Budiž $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = a$. Zvolme třeba $\varepsilon = 1$. Tedy existuje n_0 tak, že pro $n \geqq n_0$ je $|a_n - a| < 1$, tedy $|a_n| = |a + a_n - a| \leqq$ $\leqq |a| + |a_n - a| < |a| + 1$, takže posloupnost $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \dots$ je omezená. Přidám-li k ní na začátek ještě členy $a_1, a_2, \dots, a_{n_0-1}$, zůstane omezená.

Některé pojmy, kterých jsme užívali u reálných posloupností, ztrácejí v komplexním oboru smysl; jsou to ty pojmy, které souvisí s uspořádáním reálných čísel podle velikosti: supremum, infimum, posloupnost shora nebo zdola omezená, monotonní posloupnost, limes superior a inferior.

U posloupnosti

(1) $a_1, a_2, a_3, \ldots$

pišme $a_n = b_n + i c_n$ (b_n, c_n reálná) a sestrojme posloupnost reálných a imaginárních částí:

(2) $b_1, b_2, b_3, \ldots.$

(3) $c_1, c_2, c_3, \ldots.$

Uvažme, že pro libovolné komplexní číslo $x = x + iy$ (x, y reálná) je $|x| = \sqrt{x^2 + y^2}$ a tedy

$$\mathrm{Max}(|x|, |y|) \leqq |x| \leqq |x| + |y| .$$

Věta 20. Posloupnost (1) má limitu $a = b + ic$ (b, c reálná) tehdy a jen tehdy, když (2) má limitu b a (3) má limitu c .

Důkaz. 1) Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a = b + ic$. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro všechna $n \geqq n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon$, tj. $|(b_n - b) + i(c_n - c)| < \varepsilon$, a tedy též $|b_n - b| < \varepsilon$, $|c_n - c| < \varepsilon$, takže $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$.

2) Nechť $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$, $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = c$. Budiž $\varepsilon > 0$. Existují n_1, n_2 tak, že pro $n \geqq n_1$ je $|b_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$ a pro $n \geqq n_2$ je $|c_n - c| < \frac{\varepsilon}{2}$.

Položím-li $n_0 = \mathrm{Max}(n_1, n_2)$, potom pro všechna $n \geqq n_0$ je

$$|b_n - b + i(c_n - c)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

tj. $|a_n - (b + ic)| < \varepsilon$, takže $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = b + ic$.

Věta 21. (Bolzano - Weierstrass). Každá omezená posloupnost obsahuje vybranou posloupnost konvergentní.

Důkaz. 1) Budiž napřed

(1) $a_1, a_2, a_3, \ldots$

reálná omezená posloupnost. Existují tedy dvě reálná čísla x_1, y_1 tak, že všechna a_n leží v intervalu $\mathcal{J}_1 = \langle x_1 , y_1 \rangle$.

Rozdělme $\mathcal{I}_1$ na dva stejně dlouhé intervaly

$$(*) \qquad \left\langle x_1, \frac{x_1+y_1}{2}\right\rangle, \left\langle \frac{x_1+y_1}{2}, y_1\right\rangle .$$

Aspoň jeden z těchto dvou intervalů obsahuje nekonečně mnoho členů posloupnosti (1) [1]; označme tento interval $\mathcal{I}_2 = \langle x_2, y_2\rangle$

(kdyby v obou intervalech $(*)$ leželo nekonečně mnoho členů té posloupnosti, vezmu za $\mathcal{I}_2$ třeba první z nich). Rozdělme opět $\mathcal{I}_2$ na intervaly

$$(**) \qquad \left\langle x_2, \frac{x_2+y_2}{2}\right\rangle, \left\langle \frac{x_2+y_2}{2}, y_2\right\rangle ;$$

ježto v $\mathcal{I}_2$ leželo nekonečně mnoho členů posloupnosti (1), obsahuje aspoň jeden z intervalů $(**)$ nekonečně mnoho členů posloupnosti (1); tento interval označím $\mathcal{I}_3 = \langle x_3, y_3\rangle$.

Tak pokračuji dále a obdržím posloupnost intervalů

$$(4) \qquad \begin{aligned} &\mathcal{I}_1 \supset \mathcal{I}_2 \supset \mathcal{I}_3 \supset \ldots \supset \mathcal{I}_n \supset \ldots ; \quad \mathcal{I}_n = \langle x_n, y_n\rangle, \\ &y_n - x_n = \frac{y_1 - x_1}{2^{n-1}} , \end{aligned}$$

které mají tu vlastnost, že každý z nich obsahuje nekonečně mnoho členů a_n posloupnosti (1). Ze vztahů (4) plyne:

$$x_1 \leqq x_2 \leqq x_3 \leqq \ldots ; \quad y_1 \geqq y_2 \geqq y_3 \geqq \ldots ;$$
$$x_1 \leqq x_n < y_n \leqq y_1 .$$

Posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ je neklesající a shora omezená (neboť $x_n \leqq y_1$ pro všechna n) a posloupnost $y_1, y_2, \ldots$ je nerostoucí a zdola omezená; tedy existují vlastní limity

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \alpha , \qquad \lim_{n\to\infty} y_n = \beta$$

(viz DI, věta 63 a 64). Ze vztahu $y_n - x_n = \dfrac{y_1 - x_1}{2^{n-1}}$ plyne $\beta - \alpha = \lim \dfrac{y_1 - x_1}{2^{n-1}} = 0$, tj. $\beta = \alpha$.

Sestrojím nyní vybranou posloupnost

$$(5) \qquad a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots, a_{k_n}, \ldots \qquad (k_1 < k_2 < k_3 < \ldots)$$

takto:

Položím $k_1 = 1$; jest $a_{k_1} \in \mathcal{I}_1$.

---

[1] Tím míním: Existuje nekonečně mnoho přirozených čísel n , pro něž a_n leží v tom intervalu.

Ježto $\mathcal{J}_2$ obsahuje nekonečně mnoho členů a_n, obsahuje i členy a_n s indexem $n > k_1$; vezmu za k_2 nejmenší číslo větší než k_1, pro které $a_{k_2} \in \mathcal{J}_2$. Ježto $\mathcal{J}_3$ obsahuje nekonečně mnoho členů a_n, obsahuje i členy s indexem $n > k_2$; vezmu za k_3 nejmenší číslo větší než k_2, pro které $a_{k_3} \in \mathcal{J}_3$ atd. Tak dostávám vybranou posloupnost (5) takovou, že

$$a_{k_1} \in \mathcal{J}_1 , \quad a_{k_2} \in \mathcal{J}_2 , \quad a_{k_3} \in \mathcal{J}_3 , \ \ldots , \ a_{k_n} \in \mathcal{J}_n , \ \ldots$$

Tedy je $x_n \leqq a_{k_n} \leqq y_n$ pro každé n. Ježto $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n = \alpha$, je (viz DI, věta 61) též $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} = \alpha$, takže (5) je vskutku konvergentní posloupnost.

2) Budiž teď

(1) $\quad a_1 , a_2 , a_3 , \ldots$

omezená posloupnost s komplexními členy; položme $a_n = b_n + i c_n$ (b_n, c_n reálné).

Reálné posloupnosti

(2) $\quad b_1 , b_2 , b_3 , \ldots$

(3) $\quad c_1 , c_2 , c_3 , \ldots$

jsou tedy omezené. Podle toho, co jsme již dokázali, existuje taková posloupnost přirozenýoh čísel

(6) $\quad k_1 < k_2 < k_3 < \ldots$

že posloupnost

(7) $\quad b_{k_1} , b_{k_2} , b_{k_3} , \ldots$

je konvergentní.

Příslušná posloupnost

(8) $\quad c_{k_1} , c_{k_2} , c_{k_3} , \ldots$

je ovšem omezená. Tedy z ní lze opět vybrat konvergentní posloupnost. Tj. z posloupnosti (6) lze vybrat posloupnost

(9) $\quad p_1 < p_2 < p_3 < \ldots .$

tak, že posloupnost

(10) $\quad c_{p_1} , c_{p_2} , c_{p_3} , \ldots$

je konvergentní. Posloupnost

(11) $\quad b_{p_1} , b_{p_2} , b_{p_3} , \ldots$

je vybrána z konvergentní posloupnosti (7) a je tedy také konvergentní. Podle věty 20 plyne však z konvergence posloupností (11), (10) konvergence posloupnosti

$$a_{p_1}, a_{p_2}, a_{p_3}, \ldots,$$

jež je vybrána z posloupnosti (1). Tím je existence konvergentní vybrané posloupnosti dokázána.

Poznámka. Všimněte si ještě jednou důkazu bodu 2). Mohl jsem to říci stručněji (ale chtěl jsem se vyhnout nedorozumění): Z posloupnosti $a_1, a_2, a_3, \ldots$ vyberu posloupnost $a_{k_1}, a_{k_2}, a_{k_3}, \ldots$ tak, aby posloupnost reálných částí byla konvergentní; a z posloupnosti $a_{k_1}, a_{k_2}, \ldots$ vyberu posloupnost $a_{p_1}, a_{p_2}, a_{p_3}, \ldots$ tak, aby i posloupnost imaginárních částí byla konvergentní.

Z věty 21 snadno odvodíte důležitou podmínku Bolzanovu-Cauchyovu:

Věta 21^b. Posloupnost (1) je konvergentní tehdy a jen tehdy, jestliže je splněna tato podmínka:

(B.C.) Ke každému kladnému číslu ε existuje přirozené n_0 tak, že pro všechna přirozená p je

$$|a_{n_0+p} - a_{n_0}| \leqq \varepsilon .$$

Poznámka 1. Tuto větu jsme pro posloupnosti reálných čísel odvodili již v 1.ročníku. Tento důkaz je obsažen v Dodatku, věta B. Tam je také řečeno několik slov o významu této věty. Z věty (týkající se reálných posloupností) bychom snadno odvodili větu 21^b užitím věty 20. Předkládám zde jiný důkaz, spočívající na větě 21 a neužívající věty B z Dodatku.

Důkaz věty 21^b. 1) Nechť (1) je konvergentní, $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

Budiž $\varepsilon > 0$. Potom existuje n_0 tak, že pro všechna $n \geqq n_0$ je $|a_n - \alpha| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$. Pro každé přirozené p je tedy

$$|a_{n_0+p} - a_{n_0}| \leqq |a_{n_0+p} - \alpha| + |\alpha - a_{n_0}| \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon ,$$

takže podmínka (B.C.) je splněna.

2) Nechť je splněna podmínka (B.C.). Potom k číslu $\varepsilon = 1$ existuje n_0 tak, že pro všechna přirozená p je

$$|a_{n_0+p} - a_{n_0}| \leqq 1 , \quad \text{tedy} \quad |a_{n_0+p}| \leqq |a_{n_0}| + 1 .$$

Tedy posloupnost $a_{n_0}, a_{n_0+1}, a_{n_0+2}, \ldots$ je omezená, a totéž platí o celé posloupnosti (1).

Podle věty 21 existuje tedy konvergentní vybraná posloupnost $a_{k_1}, a_{k_2}, \dots$;

(12) $$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \alpha .$$

Tvrdím, že celá posloupnost (1) má limitu α. Důkaz: Budiž $\varepsilon > 0$; podle podmínky (B.C.) existuje n_0 tak, že pro všechna přirozená p je

(13) $$|a_{n_0+p} - a_{n_0}| \leqq \frac{\varepsilon}{3} .$$

Z (12) plyne, že existuje $n_1 > n_0$ tak, že $|a_{k_{n_1}} - \alpha| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$. Ježto $k_{n_1} \geqq n_1 > n_0$, plyne z (13) $|a_{k_{n_1}} - a_{n_0}| \leqq \frac{\varepsilon}{3}$. Tedy pro každé přirozené p je

$$|a_{n_0+p} - \alpha| \leqq |a_{n_0+p} - a_{n_0}| + |a_{n_0} - a_{k_{n_1}}| + |a_{k_{n_1}} - \alpha| \leqq$$
$$\leqq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon .$$

Tedy vskutku $\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha$.

Poznámka 2. V praxi se vyskytují často posloupnosti takto definované: Je dána funkce f jedné reálné proměnné, definovaná v nějakém intervalu $(a, +\infty)$ a vyšetřujeme posloupnost

(14) $$f(1), f(2), f(3), \dots$$

(nevadí, jestliže několik prvních členů posloupnosti nemá smysl). Nechť funkce f má limitu A v bodě $+\infty$. Potom také posloupnost (14) má limitu A. Důkaz (pro vlastní limitu): Budiž $\varepsilon > 0$; potom existuje x_0 tak, že nerovnost $|f(x) - A| < \varepsilon$ platí pro všechna reálná $x \geqq x_0$ a tedy speciálně též pro všechna přirozená $x \geqq x_0$. Např. pro každé reálné c je

$$\lim_{x\to+\infty} x^{\frac{c}{x}} = 1$$

(pište $x^{\frac{c}{x}} = e^{c\frac{\lg x}{x}}$ a užijte toho, že $\lim_{x\to+\infty} \frac{\lg x}{x} = 0$). Tedy též posloupnost čísel $n^{\frac{c}{n}}$ $(n = 1, 2, \dots)$ má limitu 1. Obrátit se ovšem tato věta nedá: posloupnost čísel $\sin \pi$, $\sin 2\pi$, ..., $\sin n\pi$, ... má limitu 0, ač funkce $\sin x\pi$ zřejmě nemá limitu v bodě $+\infty$.

§ 2. Nekonečné řady.

Už v 1.ročníku jsme probrali pojem součtu nekonečné řady. Zopakujeme to, ale budeme vyšetřovat obecněji řady s komplexními členy. Budiž tedy dána posloupnost komplexních čísel

(1) $\quad a_1, a_2, a_3, \ldots$

Sestrojme posloupnost "částečných součtů"

(2) $\quad s_1 = a_1, \; s_2 = a_1 + a_2, \; \ldots, \; s_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n, \; \ldots$

Jestliže tato posloupnost má vlastní limitu

$$\lim_{n \to \infty} s_n = s,$$

říkáme, že nekonečná řada

(3) $\quad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \qquad$ neboli $\quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n$

je <u>konvergentní</u> a má <u>součet</u> s ; píšeme pak také

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s \qquad \text{nebo} \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = s,$$

takže znak (3) znamená jednak nekonečnou řadu, jednak její součet (nedorozumění sotva může nastat). Číslo a_n nazýváme n-tým členem řady (3). Řadu, která není konvergentní, nazýváme <u>divergentní</u>. Jestliže řada (3) má <u>reálné</u> členy a je divergentní, může ještě posloupnost (2) mít nevlastní limitu $+\infty$ nebo $-\infty$; říkáme potom, že řada (3) má součet $+\infty$ nebo $-\infty$ a píšeme

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty \qquad (\text{nebo } -\infty) \qquad \text{neboli}$$

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots = +\infty \qquad (\text{nebo } -\infty).$$

Řady dělíme tedy na konvergentní a divergentní. Divergentní řady s reálnými členy můžeme ještě dále dělit na řady se součtem $+\infty$ nebo $-\infty$ (neboli řady divergující k $+\infty$ nebo k $-\infty$) a na řady, které nemají vůbec součet (tj. $\lim_{n \to \infty} s_n$ neexistuje, ani vlastní ani nevlastní) - těm se někdy říká <u>oscilující</u> řady.

Dát řadu $a_1 + a_2 + \ldots$ znamená totéž jako dát její členy, tj. posloupnost $a_1, a_2, a_3, \ldots$ Přesto užíváme zvláštního slova "řada" z toho důvodu, že nás zajímá u řady (3) jiná otázka než u posloupnosti (1): studuji-li posloupnost (1), zajímá mě především existence a hodnota její limity $\lim_{n \to \infty} a_n$; studuji-li řadu (3), zajímá mě hlavně existence a hodnota jejího součtu, tj. nikoliv limita posloupnosti (1), nýbrž limita posloupnosti (2).

<u>Věta 22.</u> Je-li řada $a_1 + a_2 + \ldots$ konvergentní, je $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$.

<u>Důkaz.</u> Nechť s_n značí n-tý částečný součet řady (3), s její součet, takže $\lim_{n \to \infty} s_n = s$. Zřejmě $s_n = s_{n-1} + a_n$, $a_n = s_n - s_{n-1}$; dále $\lim_{n \to \infty} s_{n-1} = s$, takže $\lim_{n \to \infty} a_n = s - s = 0$.

Příklad 1. Řada

(4) $$a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^n + \dots$$

(n-tý člen je $a_1 q^{n-1}$) se nazývá geometrická řada s kvocientem q. Předpokládejme $a_1 \neq 0$. Je-li $|q| \geqq 1$, je $|q^{n-1}| = |q|^{n-1} \geqq 1$, tedy $|a_1 q^{n-1}| \geqq |a_1| > 0$, takže n-tý člen nemá limitu 0 a řada (4) podle věty 22 diverguje.

Zbývá vyšetřit případ $|q| < 1$. Je

$$(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1})(1 - q) = 1 - q^n,$$

jak víte nebo jak se přesvědčíte vynásobením. Tedy n-tý částečný součet řady (4) je

(5) $$s_n = a_1 \frac{1 - q^n}{1 - q}, \text{ pokud } q \neq 1 .$$

Je-li $0 \leqq b < 1$, je $\lim\limits_{n\to\infty} b^n = 0$. Protože $|q^n| = |q|^n$, platí pro $|q| < 1$ rovnost $\lim\limits_{n\to\infty} |q^n| = 0$ a odtud $\lim\limits_{n\to\infty} q^n = 0$. Podle (5) je tedy $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = \dfrac{a_1}{1-q}$. Řada (4) je tedy pro $|q| < 1$ konvergentní a má součet $\dfrac{a_1}{1-q}$.

Příklad 2. Implikaci z věty 22 "Je-li řada konvergentní, je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$" nelze obrátit. Sestrojíme totiž řadu, u které je $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ a která přesto je divergentní. Vyšetřujme tzv. harmonickou řadu

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

(n-tý člen je $\frac{1}{n}$). Zde je $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$. Dokážeme, že řada je divergentní. Její n-tý částečný součet je $s_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$. Zřejmě $s_{n+1} > s_n$, takže posloupnost $s_1, s_2, s_3, \dots$ je rostoucí a tedy má limitu, buďto vlastní nebo $+\infty$. Dokážeme, že $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = +\infty$. Je

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{4} > \frac{2}{4} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} > \frac{4}{8} = \frac{1}{2},$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \dots + \frac{1}{16} > \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$$

a obecně pro celé $n > 1$

$$\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^n}>2^{n-1}\cdot\frac{1}{2^n}=\frac{1}{2}\,.$$

Tedy pro $n>1$

$$s_{2^n}=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{8}\right)+\ldots$$

$$\ldots+\left(\frac{1}{2^{n-1}+1}+\frac{1}{2^{n-1}+2}+\ldots+\frac{1}{2^n}\right)>1+\frac{n}{2}\,.$$

Odtud je vidět, že posloupnost $s_1, s_2, \ldots$ není shora omezená, tedy nemá vlastní limitu a tedy (poněvadž je rostoucí) je $\lim\limits_{n\to\infty} s_n=+\infty$.

<u>Věta 23.</u> Buďte $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = t$ [1] konvergentní řady, buďiž c komplexní číslo. Potom jsou konvergentní i řady

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=s+t\,,\qquad \sum_{n=1}^{\infty} c\,a_n = c\,.\,s\,.$$

<u>Důkaz.</u> Buďte $s_n = a_1+\ldots+a_n$, $t_n = b_1+\ldots+b_n$ částečné součty daných řad. Potom n-tý částečný součet řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)$ je

$$(a_1+b_1)+(a_2+b_2)+\ldots+(a_n+b_n)=s_n+t_n$$

a jeho limita je $s+t$. Podobně řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c\,a_n$ má n-tý částečný součet $c a_1+\ldots+c a_n = c s_n$, a jeho limita je $c\,.\,s$.

<u>Poznámka 1.</u> U řad s <u>reálnými</u> členy a_n, b_n je možno tuto větu ještě doplnit. Jestliže $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = +\infty$ [2] a jestliže posloupnost částečných součtů řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ je zdola omezená (což nastane např. tehdy, jestliže tato řada konverguje nebo má součet $+\infty$), potom je $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n+b_n)=+\infty$; řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c\,a_n$ má součet $+\infty$ pro $c>0$, součet $-\infty$ pro $c<0$. Důkaz si čtenář provede sám.

[illegible] 1 . Např. $a_3+a_4+\ldots$ neboli [illegible] člený a_1 atd. Podobně [illegible] $n=0$

$a_{-4}+a_{-3}+a_{-2}+a_{-1}+a_0+a_1+a_2+\ldots$ neboli $\sum\limits_{n=-4}^{\infty}$ apod. "Sčítací

[1] Napsané rovnosti ovšem znamenají, že součet první řady je číslo s , součet druhé řady je číslo t .

[2] To znamená, že řada diverguje k $+\infty$.

index" se nemusí vždy značit písmenem n ; např. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ znamená totéž jako $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$. Ještě jedno zjednodušení symboliky: řadu s členy $a_1, -a_2, a_3, -a_4, a_5, -a_6, \dots$ bychom měli psát $a_1 + (-a_2) + a_3 + (-a_4) + \dots$; místo toho píšeme $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$; nedorozumění nemůže nastat; druhý způsob zápisu je ovšem $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$.

Poznámka 3. Pojem součtu konvergentní řady je přirozeným zobecněním pojmu součtu konečného počtu čísel. Dá se proto očekávat, že mnohé vlastnosti součtu konečného počtu čísel budou platit i pro součty nekonečných řad (jinak by pojem nekonečné řady neměl mnoho smyslu); jako příklad může sloužit věta 23. Ale pojem součtu nekonečné řady je zobecněním pojmu součtu konečného počtu čísel[3] a proto se musíme u každé vlastnosti součtu konečného počtu čísel přesvědčit, zda se dá přenést na součty konvergentních řad a nesmí nás překvapit, jestliže některé vlastnosti se přenést nedají. Vezměme příklad. Nechť $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ je konvergentní řada. Tedy $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, kde $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$. Zvolme rostoucí posloupnost přirozených čísel $k_1 < k_2 < k_3 < \dots$ a sestrojme řadu

$$(6)\qquad \begin{aligned} &(a_1 + a_2 + \dots + a_{k_1}) + (a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \dots + a_{k_2}) + \\ &+ (a_{k_2+1} + a_{k_2+2} + \dots + a_{k_3}) + \dots \end{aligned}$$

(první člen je tedy $a_1 + a_2 + \dots + a_{k_1}$, druhý $a_{k_1+1} + a_{k_1+2} + \dots + a_{k_2}$, atd.). Částečné součty této nové řady jsou s_{k_1} , s_{k_2} , s_{k_3} , ... a tvoří vybranou posloupnost z posloupnosti $s_1, s_2, \dots$; tedy tato vybraná posloupnost má rovněž limitu s , neboli řada (6) je také konvergentní a má opět součet s[4]. V konvergentní řadě můžeme tedy "přidat závorky" a konvergence ani součet řady se tím nezmění. Ale jinak je to s vynecháním závorek. Vezměme řadu

$$(7)\qquad (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \dots$$

(každý člen je $1 + (-1) = 0$). Řada je zřejmě konvergentní a má součet 0 . Vynechám-li závorky, dostanu řadu

$$(8)\qquad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots ;$$

částečné součty jsou $1, 0, 1, 0, 1, 0, \dots$ a nemají tedy limitu. Řada (8) tedy diverguje. Zkusme ještě v (7) přemístit závorky takto:

$$1 + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + \dots ;$$

---

3) Součet $a + b + c$ je možno pojímat také jako součet nekonečné řady $a + b + c + 0 + 0 + 0 + \dots$.

4) Úvaha by platila beze změny i pro $s = +\infty$ a $s = -\infty$.

dostáváme řadu $1 + 0 + 0 + 0 + \dots$, která je konvergentní, ale má součet 1 a nikoliv 0 .

Poznámka 4. Součet konečného počtu čísel se nezmění přidáním nebo vynecháním sčítanců rovných nule; ukážeme, že totéž platí pro nekonečné řady. Mějme řadu

$$(9) \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \dots$$

s částečnými součty

$$(10) \qquad s_1 , s_2 , s_3 , \dots$$

Přidejme do řady (9) nějaké nulové členy (třeba i v nekonečném počtu), např.

$$(11) \qquad 0 + a_1 + a_2 + 0 + 0 + 0 + a_3 + 0 + 0 + a_4 + \dots ;$$

částečné součty řady (11) jsou

$$(12) \qquad 0 , s_1 , s_2 , s_2 , s_2 , s_2 , s_3 , s_3 , s_3 , s_4 , \dots ;$$

až na tu nulu na začátku se (10), (12) liší jen tím, že se v (12) někteří členové posloupnosti (10) několikrát opakují. Velmi snadno byste dokázali toto: má-li jedna z posloupností (10), (12) limitu (v reálném případě třeba i nevlastní), mají obě touž limitu. Tedy: Jestliže v nekonečné řadě vynechám nebo přidám nulové členy (třeba i v nekonečném počtu), má nová řada stejné vlastnosti jako původní, pokud se týče existence a hodnoty součtu. (Čtenář se sotva zalekne triviálního případu, kdy řada obsahuje jen konečný počet nenulových členů nebo se dokonce skládá ze samých nul.)

Poznámka 5. U součtu konečného počtu čísel smíme sčítance libovolně přerovnat:

$$a + b + c = c + a + b \quad \text{apod. (komutativní zákon).}$$

Jak je to u nekonečných řad, povíme si později.

Budiž nyní n přirozené. Bude pro nás důležité zjistit, kdy a v jakém smyslu platí rovnost

$$(13) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k .$$

Levá strana zde znamená součet řady $a_1 + a_2 + \dots$. Pravá strana je součet $n + 1$ sčítanců; první je a_1 , druhý a_2 , ... n-tý a_n, poslední sčítanec je součet nekonečné řady $a_{n+1} + a_{n+2} + \dots$ (říkává se mu "zbytek řady $a_1 + a_2 + \dots$ po n-tém členu").

Věta 24. Je-li jedna z řad ve vzorci (13) konvergentní, jsou konvergentní obě a pro jejich součty platí rovnost (13). Jsou-li a_k reálná čísla, a má-li jedna z řad v (13) součet $+\infty$ (popříp. $-\infty$), mají obě součet $+\infty$ (popříp. $-\infty$).

Důkaz.[5] p-tý částečný součet řady vlevo je $s_p = a_1 + \dots + a_p$; p-tý částečný součet řady vpravo je $\sigma_p = a_{n+1} + a_{n+2} + \dots + a_{n+p}$. Z toho $s_{n+p} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \sigma_p$,

$$\sigma_p = s_{n+p} - a_1 - a_2 - \dots - a_n .$$

Odtud ihned plyne: Existuje-li vlastní limita $\lim\limits_{p\to\infty} \sigma_p = \sigma$, existuje také vlastní limita $\lim\limits_{p\to\infty} s_{n+p} = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \sigma$ a ovšem $\lim\limits_{p\to\infty} s_p = \lim\limits_{p\to\infty} s_{n+p}$ [6]. Naopak, existuje-li vlastní limita $\lim\limits_{p\to\infty} s_p = s$, existuje i vlastní limita

$$\lim_{p\to\infty} \sigma_p = s - a_1 - a_2 - \dots - a_n .$$

Tedy: Vlastní limita $\lim\limits_{p\to\infty} s_p = s$ existuje tehdy a jen tehdy, existuje-li vlastní limita $\lim\limits_{p\to\infty} \sigma_p = \sigma$, načež platí rovnost $s = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \sigma$. Podobně se v reálném případě dokáže, že $\lim\limits_{p\to\infty} \sigma_p = +\infty$ (popříp. $-\infty$) tehdy a jen tehdy, když $\lim\limits_{p\to\infty} s_p = +\infty$ (popříp. $-\infty$).

Poznámka 6. Nechť řada $a_1 + a_2 + \dots$ je konvergentní a má součet s; je-li s_n její n-tý částečný součet, označme $r_n = s - s_n$ (r_n je tzv. "zbytek řady po n-tém členu"). Ježto $\lim\limits_{n\to\infty} s_n = s$, je $\lim\limits_{n\to\infty} r_n = 0$. Podle věty 24 je zbytek r_n součtem nekonečné řady:

$$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k .$$

Dovedeme-li odhadnout velikost součtu řady $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$, je tím zároveň odhadnuta chyba, které se dopustíme, když součet nekonečné řady $a_1 + a_2 + \dots$ nahradíme n-tým částečným součtem.

Poznámka 7. Z věty 24 plyne také toto: Jestliže v konvergentní řadě přidám, vynechám nebo změním konečný počet členů, dostanu opět konvergentní řadu a součet se změní zřejmým způsobem. Např. je-li $a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots$ konvergentní řada se součtem s, má řada

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + a_3 + a_4 + a_5 + \dots$$

součet

$$s + b_1 + b_2 + b_3 + b_4 - a_1 - a_2 ;$$

[5] n je teď pevné číslo; indexy musíme proto značit jinými písmeny.

[6] Vlevo je limita posloupnosti $s_1, s_2, s_3, \dots$, vpravo limita posloupnosti $s_{n+1}, s_{n+2}, s_{n+3}, \dots$; obojí znamená totéž, jak víme.

neboť podle věty 24 má první řada součet

$$a_1 + a_2 + \sum_{k=3}^{\infty} a_k \ ,$$

a druhá má součet

$$b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + \sum_{k=3}^{\infty} a_k \ .$$

Provedu-li tedy takovou změnu u řady divergentní, zůstane divergentní. A konečně (v případě reálných řad) provedu-li takovou změnu v řadě o součtu $+\infty$ (popříp. $-\infty$), bude mít i změněná řada součet $+\infty$ (popříp. $-\infty$). To plyne rovněž z věty 24.

Poznámka 8. Buďte

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s \ , \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = t$$

dvě konvergentní řady s reálnými členy; nechť pro všechna k je $a_k \leqq b_k$. Potom je $s \leqq t$. To je zřejmé, ježto $a_1 + \ldots + a_m \leqq b_1 + \ldots + b_m$ pro každé m, a limitním přechodem odtud plyne $s \leqq t$. Nechť opět $a_k \leqq b_k$ pro všechna k a nechť existuje určitý index n_0 tak, že $a_{n_0} < b_{n_0}$. Tvrdím, že nyní je dokonce $s < t$. Je-li $m \geqq n_0$, dostaneme $a_1 + a_2 + \ldots + a_m < b_1 + b_2 + \ldots + b_m$ (ostrá nerovnost!), ale limitním přechodem dostáváme zase jenom $s \leqq t$. Tento postup nevede tedy k cíli. Proto postupujeme jinak. V rovnosti (13) položíme $n = n_0$, označíme $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} a_k = \sigma$, $\sum_{k=n_0+1}^{\infty} b_k = \tau$. Podle věty 24 je

$$s = a_1 + \ldots + a_{n_0} + \sigma \ , \qquad t = b_1 + \ldots + b_{n_0} + \tau \ .$$

Zde je $\sigma \leqq \tau$, $a_1 + \ldots + a_{n_0} < b_1 + \ldots + b_{n_0}$ (ostrá nerovnost!), tedy vskutku $s < t$.

Přepíšeme-li Bolzanovu-Cauchyovu podmínku (viz větu 21[b]) vhodným způsobem, dostáváme tuto větu:

Věta 25. Řada $a_1 + a_2 + \ldots$ je konvergentní tehdy a jen tehdy, je-li splněna tato podmínka:

(B.C.) $\left\{ \begin{array}{l} \text{Ke každému } \varepsilon > 0 \text{ existuje přirozené } n_0 \text{ tak, že pro všechna} \\ \text{přirozená } p \text{ je} \\ |a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \ldots + a_{n_0+p}| \leqq \varepsilon \ . \end{array} \right.$

Důkaz. Jde o to, kdy posloupnost částečných součtů s_n je konvergentní. To platí tehdy a jen tehdy, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje přirozené n_0 tak, že pro všechna přirozená p je $|s_{n_0+p} - s_{n_0}| \leqq \varepsilon$. Ale

$s_{n_0+p} - s_{n_0} = a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \ldots + a_{n_0+p}$; tím je důkaz proveden

Uvažme, že

$$|a_{n_0+1} + a_{n_0+2} + \ldots + a_{n_0+p}| \leq |a_{n_0+1}| + |a_{n_0+2}| + \ldots + |a_{n_0+p}| .$$

Jestliže tedy $|a_1| + |a_2| + \ldots$ splňuje podmínku B.C., splňuje ji také řada $a_1 + a_2 + \ldots$. Jinými slovy:

<u>Věta 26.</u> Jestliže je konvergentní řada

(14) $$|a_1| + |a_2| + |a_3| + \ldots ,$$

je konvergentní také řada

(15) $$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots .$$

<u>Definice:</u> O řadě (15) říkáme, že je absolutně konvergentní[7], jestliže řada (14) je konvergentní. Jestliže řada (15) konverguje, ale řada (14) diverguje, říkáme, že řada (15) konverguje neabsolutně[8].

Věta 26 tedy říká, že každá absolutně konvergentní řada je konvergentní.

<u>Příklad 3.</u> (neabsolutně konvergentní řada).

Řada

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \ldots$$

má částečné součty

$$1 , 0 , \frac{1}{2} , 0 , \frac{1}{3} , 0 , \frac{1}{4} , 0 , \ldots$$

Řada je tedy konvergentní a má součet 0 . Řada absolutních hodnot je

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \ldots .$$

Tato řada je divergentní; to je vidět z toho, že harmonická řada $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$ má součet $+\infty$ (viz příklad 2) a každý člen řady

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{3} + \ldots$$

(až na první člen) je větší než člen harmonické řady se stejným indexem.

Podmínka (B.C.) pro konvergenci posloupnosti je sice nutná a postačující, ale často se obtížně ověřuje. Existuje však důležitá třída posloupností, kde lze konvergenci vyšetřit snadněji. Jsou to posloupnosti monotonní, např. posloupnosti neklesající. Taková posloupnost je konvergentní tehdy a jen tehdy, je-li shora omezená; není-li shora omezená, má limitu $+\infty$. V teorii řad odpovídají neklesajícím posloupnostem <u>řady s nezápornými členy</u>. Je-li to-

---

[7] nebo bezpodmínečně konvergentní.

[8] nebo podmínečně nebo relativně.

též $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ řada s nezápornými členy ($a_n \geqq 0$ pro všechna přirozená n), platí pro částečné součty s_n vztah $s_n = s_{n-1} + a_n \geqq s_{n-1}$, takže posloupnost $s_1, s_2, s_3, \dots$ je neklesající. Tedy $\lim_{n\to\infty} s_n$ existuje a je vlastní nebo $+\infty$ podle toho, zda posloupnost $s_1, s_2, \dots$ je či není shora omezená. V případě omezené posloupnosti je $\lim_{n\to\infty} s_n = \sup_{n=1,2,3,\dots} s_n$.
Tedy máme tuto větu:

Věta 27. Budiž $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ řada s nezápornými členy. Je-li posloupnost $s_1, s_2, \dots$ částečných součtů shora omezená, je řada konvergentní a má součet $s = \sup_{n=1,2,3,\dots} s_n$. Není-li posloupnost částečných součtů shora omezená, má řada součet $+\infty$.

Často se mluví o řadách s kladnými členy. To není žádné podstatné omezení proti řadám s nezápornými členy, neboť podle pozn. 4 lze nulové členy vynechat.

Poznámka 9. Budiž $a_1 + a_2 + \dots$ konvergentní řada s nezápornými členy a se součtem s. Potom pro její částečné součty s_n platí $s_n \leqq s$. Jestliže řada má nekonečně mnoho nenulových členů, je dokonce $s_n < s$. Důkaz: Nerovnost $s_n \leqq s$ je zřejmá, ježto s je supremum částečných součtů. Jestliže řada má nekonečně mnoho nenulových (a tedy kladných) členů, potom ke každému přirozenému n existuje $m > n$ tak, že $a_m > 0$. Potom je $s_n < s_m$ a ovšem $s_m \leqq s$, tedy $s_n < s$.

Věta 28. Buďte dány dvě řady

(16[a]) $\qquad a_1 + a_2 + \dots$

(16[b]) $\qquad b_1 + b_2 + \dots$

Nechť pro všechna přirozená n je $0 \leqq a_n \leqq b_n$. Potom platí: Je-li (16[b]) konvergentní, je (16[a]) konvergentní (a tedy: je-li (16[a]) divergentní, je (16[b]) divergentní).

Důkaz. Položme $s_n = a_1 + \dots + a_n$, $t_n = b_1 + \dots + b_n$, takže $s_n \leqq t_n$. Je-li (16[b]) konvergentní, jsou t_n shora omezená, tedy existuje číslo K tak, že pro všechna přirozená n je $t_n < K$, tedy také $s_n < K$, a tedy je (16[a]) konvergentní.

Poznámka 10. Co rozumíme nekonečným desetinným zlomkem

$$(*) \qquad s = 0{,}a_1 a_2 a_3 a_4 \dots$$

kde a_n jsou celá čísla, $0 \leqq a_n \leqq 9$?

Tím rozumíme součet nekonečné řady

$$\frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \dots + \frac{a_n}{10^n} + \dots .$$

Ježto $0 \leqq \frac{a_n}{10^n} \leqq \frac{9}{10^n}$ a ježto řada $\frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \frac{9}{10^3} + \ldots$ je konvergentní geometrická řada s kvocientem $\frac{1}{10}$ a se součtem $\frac{9}{10} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = 1$, je podle věty 27 a podle pozn. 8 řada ($*$) konvergentní a je $0 \leqq s \leqq 1$; přitom je $s = 0$ tehdy a jen tehdy, jsou-li všechna a_n rovna nule, a je $s = 1$ tehdy a jen tehdy, jsou-li všechna a_n rovna devíti. Na tom lze založit vyjadřování reálných čísel nekonečnými desetinnými zlomky; podrobný výklad viz např. DI, kap. IV § 5.

Poznámka 11. Věta 28 by zůstala v platnosti, kdybychom nerovnosti $0 \leqq a_n \leqq b_n$ nepožadovali pro všechna n, nýbrž pouze pro všechna n větší než jisté číslo n_0. Neboť podle pozn. 7 se na konvergenci řady nic nezmění, vynechám-li konečný počet členů. Dávejte však velmi dobrý pozor na to, že věta platí jen za předpokladu, že jde o řady, jejichž členy jsou - aspoň od jistého indexu n_0 - nezáporné. Ježto absolutní hodnoty jsou čísla nezáporná, lze věty 28 užít k vyšetřování absolutní konvergence řad s komplexními členy:

Věta 29. Nechť pro všechna přirozená n (od jistého indexu n_0 počínajíc) je $|a_n| \leqq b_n$ [9] a nechť $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konverguje. Potom $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konverguje absolutně.

Důkaz: Podle věty 28 je řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergentní.

Víme, že řada $q + q^2 + q^3 + \ldots$ je konvergentní řada s kladnými členy, jestliže $0 < q < 1$. Vezmu-li tuto řadu ve větě 29 za řadu $b_1 + b_2 + \ldots$, dostanu tuto užitečnou větu:

Věta 30 (tzv. odmocninové nebo Cauchyovo kriterium).

1) Nechť existuje přirozené číslo n_0 a číslo $q < 1$ tak, že pro všechna přirozená $n \geqq n_0$ je

$$\sqrt[n]{|a_n|} \leqq q \quad (17)$$

Potom $a_1 + a_2 + \ldots$ konverguje absolutně.

2) Nechť existuje přirozené číslo n_0 tak, že pro všechna přirozená $n \geqq n_0$ je

$$\sqrt[n]{|a_n|} \geqq 1 \quad (18)$$

Potom $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ diverguje.

---

9) Tedy je $b_n \geqq 0$.

Důkaz. 1) Platí-li (17) pro $n \geqq n_0$, je $|a_n| \leqq q^n$ pro $n \geqq n_0$ a podle věty 29 je $a_1 + a_2 + \ldots$ absolutně konvergentní.

2) Platí-li (18) pro $n \geqq n_0$, je pro tato n splněno $|a_n| \geqq 1$, tedy není $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$, takže podle věty 22 je $a_1 + a_2 + \ldots$ divergentní.[10)]

Pohodlnější než věta 30 je často tato věta (limitní Cauchyovo kriterium):

Věta 31. Jestliže $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1$, je $a_1 + a_2 + \ldots$ absolutně konvergentní; jestliže $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1$,[11)] je $a_1 + a_2 + \ldots$ divergentní.

Důkaz. Označme $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \alpha$. Je-li $\alpha < 1$, lze zvolit číslo q tak, že $\alpha < q < 1$. Existuje číslo n_0 tak, že pro všechna $n \geqq n_0$ je $\sqrt[n]{|a_n|} < q$ a z věty 30 plyne absolutní konvergence. Je-li $\alpha > 1$, existuje číslo n_0 tak, že pro všechna $n \geqq n_0$ je $\sqrt[n]{|a_n|} > 1$ a z věty 30 plyne divergence.

Věta 31 neříká ovšem nic, když $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|}$ buďto neexistuje nebo se rovná jedné. V případě $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$ nastává ovšem divergence.

Příklad 4. Budiž c reálné číslo, x komplexní číslo. Vyšetřujeme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} n^c x^n$. Je $\lim n^{\frac{c}{n}} = 1$ (viz poslední poznámku v § 1), tedy

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{n^c |x|^n} = |x| \quad ;$$

tedy řada je konvergentní pro $|x| < 1$, divergentní pro $|x| > 1$, ať je c jakékoliv. Pro $|x| = 1$ nedává věta 31 žádnou odpověď. Ale aspoň částečnou odpověď dává věta 30. Pro $|x| = 1$, $c \geqq 0$ je $\sqrt[n]{n^c |x|^n} = \sqrt[n]{n^c} \geqq 1$, takže řada je podle věty 30 divergentní. Pro $|x| = 1$, $c < 0$ nedává nám ani věta 30 ani věta 31 žádnou odpověď.

O něco méně vydatné než odmocninové kriterium, ale zato často pohodlnější, je toto podílové nebo d'Alembertovo kriterium:

Věta 32. 1) Nechť existuje přirozené číslo n_0 a číslo $q < 1$ tak, že pro všechna přirozená $n \geqq n_0$ je

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \leqq q \; . \tag{19}$$

---

10) Poznamenejme, že užití věty 29 zde nevede k cíli. Ježto řada $1 + 1 + \ldots$ je divergentní, plyne z věty jen, že řada $|a_1| + |a_2| + \ldots$ je divergentní tj. že $a_1 + a_2 + \ldots$ je buďto divergentní nebo neabsolutně konvergentní.

11) Sem počítáme také případ $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = +\infty$.

Potom řada $a_1 + a_2 + \dots$ je absolutně konvergentní.

2) Nechť existuje přirozené číslo n_0 tak, že pro všechna přirozená $n \geqq n_0$ je

(20) $$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| \geqq 1 .$$

Potom řada $a_1 + a_2 + a_3 + \dots$ je divergentní.[12)]

Důkaz. 1) Z (19) plyne, že pro $n \geqq n_0$ je

$$|a_n| = \left| a_{n_0} \cdot \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}} \cdot \frac{a_{n_0+2}}{a_{n_0+1}} \cdot \dots \cdot \frac{a_n}{a_{n-1}} \right| \leqq |a_{n_0}|\, q^{n-n_0} .$$

Řada $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_{n_0}| \cdot q^{n-n_0}$ je geometrická řada s kvocientem q, tedy konvergentní. Tedy je $a_1 + a_2 + \dots$ podle věty 29 absolutně konvergentní.

2) Z (20) plyne

$$|a_{n_0}| \leqq |a_{n_0+1}| \leqq |a_{n_0+2}| \leqq \dots$$

Pro všechna $n \geqq n_0$ je tedy $|a_n| \geqq |a_{n_0}| > 0$, tedy není $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ a tedy je řada divergentní podle věty 22.

Stejně jako jsme z věty 30 odvodili větu 31, lze z věty 32 odvodit toto limitní kriterium:

<u>Věta 33.</u> Je-li $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1$, je $a_1 + a_2 + \dots$ absolutně konvergentní.
Je-li $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > 1$[13)], je $a_1 + a_2 + \dots$ divergentní. Důkaz si čtenář provede sám.

<u>Poznámka 12.</u> Všimněme si malého rozdílu, který se týká případu divergence ve větách 30, 32. Ve větě 30 bychom mohli kriterium pro divergenci ještě trochu zlepšit: pro divergenci stačí, když nerovnost (18) platí pro nekonečně mnoho n; neboť potom je $|a_n| \geqq 1$ pro nekonečně mnoho n a tedy není $\lim_{n \to \infty} a_n = 0$. Takové zlepšení u věty 32 není možné. Např. pro řadu $\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{16} + \dots$ platí (20) pro nekonečně mnoho n a přesto je řada konvergentní, jak velmi snadno dokážete.

---

12) [illegible]
členy můžeme podle poznámky 4 vynechat.

13) Sem počítáme též případ $\lim_{n \to \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = +\infty$.

Příklad 5. Budiž x komplexní číslo. Vyšetřujeme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} x^n$. Pro $x = 0$ je řada zřejmě absolutně konvergentní (součet je 0). Pro $x \neq 0$ jsou členy řady vesměs různé od nuly a můžeme skusit větu 32 nebo 33. Výraz $\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ je zde

$$(21) \qquad \frac{((n+1)!)^2}{(2n+2)!} \cdot \frac{(2n)!}{(n!)^2} |x| = \frac{1}{4} \frac{n+1}{n+\frac{1}{2}} |x| .$$

Jeho limita je $\frac{1}{4}|x|$, tedy máme podle věty 33 absolutní konvergenci pro $|x| < 4$, divergenci pro $|x| > 4$. Pro $|x| = 4$ je limita 1, takže věta 33 selhává. Ale výraz (21) je pro $|x| = 4$ roven $\frac{n+1}{n+\frac{1}{2}} > 1$, takže věta 32 dává divergenci.

Pro řady s nezápornými členy, u nichž je $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \ldots$, je často užitečné toto integrální kriterium.

Věta 34. Budiž f funkce nerostoucí, spojitá a nezáporná v intervalu $\langle c, +\infty)$. Potom platí:

Řada

$$(22) \qquad f(c) + f(c+1) + f(c+2) + \ldots$$

je konvergentní tehdy a jen tehdy, jestliže integrál

$$(23) \qquad \mathcal{F}(x) = \int_c^x f(t)\,dt$$

má vlastní limitu $\lim_{x \to +\infty} \mathcal{F}(x)$.

Poznámka 13. Tuto limitu jsme v prvním ročníku značili

$$\int_c^{+\infty} f(t)\,dt .$$

Poznamenejme, že funkce $\mathcal{F}$ je neklesající v $\langle c, +\infty)$ (protože f je nezáporná). Tedy má funkce $\mathcal{F}$ jistě limitu v bodě $+\infty$, a to vlastní (popř. nevlastní), jestliže $\mathcal{F}$ je (popř. není) v $\langle c, +\infty)$ omezená. Tedy lze tvrzení věty 34 vyslovit také takto: Řada (22) je konvergentní tehdy a jen tehdy, když funkce $\mathcal{F}$, definovaná rovností (23), je omezená v intervalu $\langle c, +\infty)$.

Důkaz věty 34. Označme $\lim_{x \to +\infty} \mathcal{F}(x) = A$ (to je buďto konečné číslo nebo $+\infty$). Potom je ovšem A také limitou posloupnosti $\mathcal{F}(c)$, $\mathcal{F}(c+1)$, $\mathcal{F}(c+2)$, ..., neboli

$$\lim_{n \to +\infty} \int_c^{c+n} f(t)\,dt = A .^{14)}$$

---

14) Viz posn. 2 v § 1.

Ježto (22) je řada s nezápornými členy, má určitý součet B , který je opět buďto konečný nebo $+\infty$. Máme dokázat, že B je konečné tehdy a jen tehdy, když A je konečné. Pro každé celé $k \geqq 0$ je

$$f(c+k+1) \leqq \int_{c+k}^{c+k+1} f(t)\,dt \leqq f(c+k) .$$

Odtud jednak

$$s_n = f(c) + f(c+1) + \ldots + f(c+n-1) \geqq \int_c^{c+n} f(t)\,dt ,$$

jednak

$$\int_c^{c+n-1} f(t)\,dt \geqq f(c+1) + f(c+2) + \ldots + f(c+n-1) = s_n - f(c) .$$

Odtud je vidět: Je-li $B = \lim_{n\to\infty} s_n$ konečné číslo, plyne z první nerovnosti limitním přechodem, že též A je konečné (a to $A \leqq B$). Je-li naopak $A = \lim_{n\to\infty} \int_c^{c+n-1} f(t)\,dt$ konečné, plyne z druhé nerovnosti, že B je konečné (a to $B \leqq A + f(c)$). Tím je důkaz proveden.

Poznámka 14. Zároveň jsme dostali tento důležitý odhad: V případě konvergence je $A \leqq B \leqq A + f(c)$, tj.

$$\int_c^{+\infty} f(x)\,dx \leqq \sum_{n=0}^{\infty} f(c+n) \leqq \int_c^{+\infty} f(x)\,dx + f(c) . \tag{24}$$

Příklad 6. Zkoumejme řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$, kde $\alpha > 0$. To je náš případ, kde $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$, $c = 1$. Jde tedy o to, zda $\int_1^x \frac{dt}{t^\alpha}$ má limitu vlastní či nevlastní pro $x \to +\infty$. Najdete-li primitivní funkci, zjistíte okamžitě, že limita je vlastní pro $\alpha > 1$, nevlastní pro $0 < \alpha \leqq 1$. Tedy naše řada je konvergentní pro $\alpha > 1$, divergentní pro $0 < \alpha \leqq 1$.

V početní praxi bývá důležité nejenom zjistit konvergenci nebo divergenci předložené řady, ale v případě konvergence také vypočítat součet řady s požadovanou přesností. K tomu cíli lze užít rozkladu

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k ,$$

který podle věty 24 platí pro konvergentní řady: Zvolím n , vypočtu $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ a odhadnu "chybu" $\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k$. Je velmi důležité procvičit se v odhadování této chyby. Zde vezmeme pro ilustraci jen jeden příklad. Máme vypočítat součet s konvergentní řady $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$. Zvolíme nějaké přirozené n , načež je podle věty 24

$$s = \frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} + r_n ,$$

kde $$r_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{k^3} .$$

Součet této řady dovedeme odhadnout podle (24); zde je

$$f(x) = \frac{1}{x^3} , \quad c = n + 1 ,$$

tedy

$$\int_{n+1}^{+\infty} \frac{dt}{t^3} = \frac{1}{2(n+1)^2} ,$$

$$\frac{1}{2(n+1)^2} \leqq r_n \leqq \frac{1}{2(n+1)^2} + \frac{1}{(n+1)^3} .$$

Při volbě $n = 99$ nám vyjde r_n asi $1 : 20\,000$. Ale odhad čísla s se dá podstatně zlepšit. Vidíme, že r_n se rovná číslu $\frac{1}{2(n+1)^2}$ s chybou nejvýše $\frac{1}{(n+1)^3}$ (tedy pro $n = 99$ je chyba nejvýše 10^{-6}). Lepší přiblížení čísla s než součet $\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{n^3}$ dává tedy součet

$$\frac{1}{1^3} + \frac{1}{2^3} + \ldots + \frac{1}{n^3} + \frac{1}{2(n+1)^2} .$$

Mluvili jsme dosud hlavně o řadách absolutně konvergentních. Uveďme aspoň jednu větu, která je užitečná někdy i pro zjišťování neabsolutní konvergence.[15)]

Věta 35 (Leibniz). Nechť $a_1 \geqq a_2 \geqq a_3 \geqq \ldots$, $\lim_{n \to +\infty} a_n = 0$ (tedy $a_n \geqq 0$). Potom řada

$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \ldots$ (neboli $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n$) je konvergentní.

Důkaz. Budeme vyšetřovat zvlášť částečné součty se sudým a zvlášť s lichým indexem. Je

$$s_{2n+2} = s_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geqq s_{2n} ,$$
$$s_{2n+1} = s_{2n-1} - a_{2n} + a_{2n+1} \leqq s_{2n-1} ,$$

tedy

$$s_2 \leqq s_4 \leqq s_6 \leqq \ldots ,$$
$$s_1 \geqq s_3 \geqq s_5 \geqq \ldots .$$

Dále

$$s_{2n} = s_{2n-1} - a_{2n} \leqq s_{2n-1} \leqq s_1 ,$$

---

15) Vydatnější věty viz v § 5, poznámka 3.

$$s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1} \geqq s_{2n} \geqq s_2 .$$

Posloupnost $s_2, s_4, s_6, \ldots$ je tedy neklesající shora omezená a tedy má vlastní limitu α ; posloupnost $s_1, s_3, s_5, \ldots$ je nerostoucí a zdola omezená a tedy má vlastní limitu β . Teď teprve užijeme toho, že $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$: Je

$$s_{2n+1} = s_{2n} + a_{2n+1} \quad \text{a odtud}$$

pro $n \to \infty$ plyne $\beta = \alpha$. Tedy částečné součty se sudým indexem mají touž vlastní limitu α jako částečné součty s lichým indexem; tedy celá posloupnost $s_1, s_2, s_3, \ldots$ má vlastní limitu α [16], tj. řada $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$ je konvergentní.

<u>Příklad 7.</u> Řada

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} \quad \text{je konvergentní,}$$

a to neabsolutně, neboť řada (harmonická)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots \quad \text{je divergentní.}$$

<u>Poznámka 15</u> (velmi důležitá). Omezuji se zde na větu 35. Další důležitá kriteria, použitelná na neabsolutně konvergentní řady, najdete v § 5 v poznámce 3 za větou 46 (odkládám tyto věci až do paragrafu o stejnoměrné konvergenci řad, abych nemusil v podstatě touž věc vykládat dvakrát).

Obrátíme se nyní <u>k přerovnávání řad</u>. Musíme si napřed říci, co tím rozumíme. Budiž dána řada

$$(25) \qquad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

a sestrojme nějakou posloupnost přirozených čísel

$$(26) \qquad k_1, k_2, k_3, \ldots$$

která obsahuje všechna přirozená čísla a každé jen jednou (tj. $k_n \neq k_m$ pro $n \neq m$). [17]

---

16) Podrobněji: Je-li $\varepsilon > 0$, existuje předně n_1 tak, že pro $n > n_1$ je $|s_{2n} - \alpha| < \varepsilon$ a existuje za druhé n_2 tak, že pro $n > n_2$ je $|s_{2n+1} - \alpha| < \varepsilon$. Je-li tedy $m > \mathrm{Max}(2n_1, 2n_2+1)$, je $|s_m - \alpha| < \varepsilon$, ať je m sudé či liché.

17) To lze říci ještě trochu jinak: Přiřadím-li každému přirozenému číslu n číslo k_n , dostanu jisté zobrazení k , a toto zobrazení je prosté zobrazení množiny všech přirozených čísel na sebe (komu není pojem "zobrazení" znám, může se o něm poučit v kap. IV, § 1.)

Potom o řadě

$$(27) \qquad a_{k_1} + a_{k_2} + a_{k_3} + \dots$$

říkáme, že vzniká z řady (25) přerovnáním. (Podobně říkáme, že posloupnost $a_{k_1}, a_{k_2}, \dots$ vzniká z posloupnosti $a_1, a_2, \dots$ přerovnáním).

Populárně (ale ne docela přesně) řečeno: přerovnaná řada (27) má tytéž členy jako (25), ale v jiném pořádku.

Věta 36. Jestliže řada (25) je absolutně konvergentní a má součet s, potom každá řada, vzniklá z (25) přerovnáním, je také absolutně konvergentní a má rovněž součet s.

Poznámka 16. Populárně řečeno: součet absolutně konvergentní řady nezávisí na pořadí členů - to je zobecnění komutativního zákona, platného pro součty konečného počtu čísel. Pro neabsolutně konvergentní řady platí věta zcela opačného charakteru (nebudu ji zde dokazovat, viz třeba D II, věta 38): Budiž dána neabsolutně konvergentní řada s reálnými členy a se součtem s. Zvolme libovolné reálné číslo t. Potom lze řadu přerovnat tak, že přerovnaná řada je konvergentní a má součet t; také ji lze přerovnat tak, že přerovnaná řada je divergentní.

Důkaz věty 36. Nechť řada (25) je absolutně konvergentní a má součet s. Tedy je konvergentní řada

$$(28) \qquad \sum_{p=1}^{\infty} |a_p| = S .$$

Všechny částečné součty řady (28) jsou tedy $\leqq S$. Nechť řada (27) vzniká z (25) přerovnáním. Potom pro každé n je

$$\sum_{p=1}^{n} |a_{k_p}| \leqq S .$$ [18]

Tedy řada $\sum_{p=1}^{\infty} |a_{k_p}|$ je konvergentní, tj. řada (27) je absolutně konvergentní; budiž t její součet:

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_{k_p} = t .$$

Máme ještě dokázat, že $s = t$. Položme

$$s_n = \sum_{p=1}^{n} a_p , \qquad t_n = \sum_{p=1}^{n} a_{k_p} ;$$

tedy $\lim_{n\to\infty} s_n = s$, $\lim_{n\to\infty} t_n = t$, takže $\lim_{n\to\infty} (s_n - t_n) = s - t$. Stačí tedy

---

[18] Je-li totiž $r = \mathrm{Max}(k_1, k_2, \dots, k_n)$, je zřejmě $\sum_{p=1}^{n} |a_{k_p}| \leqq \sum_{p=1}^{r} |a_p| \leqq S$, protože druhý součet obsahuje všechny sčítance prvního součtu.

dokázat, že

$$(29) \qquad \lim_{n\to\infty}(s_n - t_n) = 0 .$$

Budiž $\varepsilon > 0$. Ježto (28) je konvergentní řada, má její zbytek po n-tém členu limitu rovnou nule (pro $n \to \infty$). Existuje tedy přirozené n_1 tak, že pro všechna $n \geqq n_1$ je zbytek po n-tém členu menší než ε . My to budeme potřebovat jen pro $n = n_1$:

$$(30) \qquad \sum_{p=n_1+1}^{\infty} |a_p| < \varepsilon .$$

Tedy také každý částečný součet řady (30) je menší než ε . Zvolme nyní číslo n_0 tak, že konečná posloupnost

$$k_1, k_2, k_3, \ldots, k_{n_0}$$

obsahuje všechna čísla $1, 2, \ldots, n_1$ [19] (takže zřejmě $n_0 \geqq n_1$). Tvrdím, že pro všechna $n \geqq n_0$ je $|s_n - t_n| < \varepsilon$. Podívejme se k tomu cíli na rozdíl

$$s_n - t_n = \sum_{p=1}^{n} a_p - \sum_{p=1}^{n} a_{k_p} \qquad (n \geqq n_0) .$$

Ty členy a_k , které vystupují i v s_n i v t_n , se zruší; zůstanou tam jen sčítanci $\pm a_k$, kteří vystupují v s_n a nevystupují v t_n (se znaménkem +) a sčítanci, kteří vystupují v t_n a nevystupují v s_n (se znaménkem -). Ale číslo n_0 bylo zvoleno tak, že všechny členy a_k pro $k = 1, 2, \ldots, n_1$ se vyskytují jak v s_n tak v t_n , takže $s_n - t_n$ obsahuje jen takové členy $\pm a_k$, kde $k \geqq n_1 + 1$. Tedy

$$|s_n - t_n| \leqq \sum_{p=n_1+1}^{M} |a_p| ,$$

kde M je vhodně zvolené číslo (stačí zvolit $M = \max(k_1, \ldots, k_n) \geqq n$).

Podle (30) je tedy $|s_n - t_n| < \varepsilon$. Tedy: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro všechna $n \geqq n_0$ je $|s_n - t_n| < \varepsilon$. Tedy platí (29) a důkaz je hotov.

Ještě si odvodíme, jak se násobí absolutně konvergentní řady. Pro konečné součty máme toto pravidlo:

$$\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot \sum_{k=1}^{m} b_k = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} a_j b_k ,$$

tj. pravá strana je součet všech součinů $a_j b_k$. Např.

[19] To je možné, neboť každé z čísel $1, 2, \ldots, n_1$ vystupuje někde v nekonečné posloupnosti $k_1, k_2, k_3, \ldots$

$$(a_1 + a_2)(b_1 + b_2 + b_3) = a_1 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_3 + a_2 b_1 + a_2 b_2 + a_2 b_3 .$$

Jestliže ovšem u <u>nekonečných</u> řad

$$a_1 + a_2 + a_3 + \dots , \qquad b_1 + b_2 + b_3 + \dots$$

sestrojíme všechny součiny $a_j b_k$, nejsou dosud tyto součiny srovnány v posloupnost; můžeme je srovnat v posloupnost různými způsoby. Např. "podle úhlopříček"

$$\begin{matrix} a_1 b_1, & a_1 b_2, & a_1 b_3, & a_1 b_4, & \dots \\ a_2 b_1, & a_2 b_2, & a_2 b_3, & a_2 b_4, & \dots \\ a_3 b_1, & a_3 b_2, & a_3 b_3, & a_3 b_4, & \dots \\ a_4 b_1, & a_4 b_2, & a_4 b_3, & a_4 b_4, & \dots \\ \dots\dots & & & & \end{matrix}$$

$$a_1 b_1 , a_1 b_2 , a_2 b_1 , a_1 b_3 , a_2 b_2 , a_3 b_1 , a_1 b_4 , \dots$$

nebo "podle čtverců"

$$a_1 b_1 , a_1 b_2 , a_2 b_2 , a_2 b_1 , a_1 b_3 , a_2 b_3 , a_3 b_3 , a_3 b_2 , a_3 b_1 , \dots , \text{ atd.}$$

Takových uspořádání je nekonečně mnoho, ale všechna mají tu vlastnost, že jedna posloupnost vzniká z druhé přerovnáním.

<u>Věta 37.</u> Buďte

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = s , \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = t$$

absolutně konvergentní řady. Sestrojme všechny součiny $a_j b_k$ a srovnejme je jakýmkoliv způsobem v posloupnost $c_1 , c_2 , c_3 , \dots$ Potom řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k$$

je také absolutně konvergentní a má součet $s \cdot t$.

<u>Důkaz.</u> Vezměme některé uspořádání $c_1 , c_2 , \dots$ součinů $a_j b_k$ v nekonečnou posloupnost. Řady

$$\sum_{j=1}^{\infty} |a_j| = S , \quad \sum_{j=1}^{\infty} |b_j| = T$$

jsou konvergentní.

Budiž $|c_1| + |c_2| + \dots + |c_m| = w_m$ nějaký částečný součet řady $\sum_{m=1}^{\infty} |c_m|$.

Potom w_m je součet konečného počtu čísel tvaru $|a_j| \cdot |b_k|$. Je-li J největší z indexů j, které se vyskytují ve w_m, a K největší z indexů k, které se vyskytují ve w_m, je zřejmě

$$w_m \leqq \sum_{j=1}^{J} |a_j| \cdot \sum_{k=1}^{K} |b_k| \leqq S \cdot T .$$

1014-4527

Řada $|c_1| + |c_2| + \dots$ (s nezápornými členy) má tedy omezené částečné součty a je tedy konvergentní, tj. řada $c_1 + c_2 + c_3 + \dots$ je absolutně konvergentní. Zbývá ještě dokázat, že její součet je $s \cdot t$. Ježto je $c_1 + c_2 + \dots$ absolutně konvergentní, je jedno, jak ji přerovnám; srovnejme ji "podle čtverců":

$$\begin{array}{lll} a_1b_1, & a_1b_2, & a_1b_3, \dots \\ a_2b_1, & a_2b_2, & a_2b_3, \dots \\ a_3b_1, & a_3b_2, & a_3b_3, \dots \\ \vdots & & \end{array},$$

takže posloupnost $c_1, c_2, c_3, \dots$ je

$$a_1b_1, a_1b_2, a_2b_2, a_2b_1, a_1b_3, a_2b_3, a_3b_3, a_3b_2, a_3b_1, \dots$$

Označme

$$c_1 + c_2 + \dots + c_n = v_n, \quad \sum_{m=1}^{\infty} c_m = v.$$

Sestrojme součet v_{n^2} prvních n^2 členů řady $c_1 + c_2 + \dots$ To je zřejmě součet všech členů a_jb_k, kde $j \leqq n$, $k \leqq n$, tj.

(31) $$v_{n^2} = \sum_{j=1}^{n} a_j \sum_{k=1}^{n} b_k = s_n \cdot t_n,$$

kde

$$s_n = a_1 + \dots + a_n, \qquad t_n = b_1 + \dots + b_n.$$

Je $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = v$ a tedy také (vybraná posloupnost) $\lim\limits_{n\to\infty} v_{n^2} = v$, takže z (31) plyne hledaná rovnost $v = s \cdot t$.

Poznámka 17. Jsou-li řady $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n = s$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n = t$ absolutně konvergentní, je každá řada, sestrojená z členů a_jb_k v jakémkoliv pořadí, absolutně konvergentní a má součet $s \cdot t$. Jak víme, je možno v konvergentní řadě "přidat závorky", aniž se součet řady změní (viz pozn. 3). Vezměme dva příklady. Nechť jsou dány dvě řady

$\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, kde a_n, b_n jsou daná čísla, x hraje roli proměnné (to jsou tzv. mocninné řady, o nichž budeme brzo jednat soustavně). Jsou-li tyto dvě řady absolutně konvergentní (se součty s, t) pro nějakou hodnotu x, je řada, vytvořená z členů $a_jb_kx^{j+k}$ také absolutně konvergentní a má součet $s \cdot t$. Dám-li zde dohromady všechny členy s týmž mocnitelem $n = j + k$, dostanu řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n,$$

kde $$c_n = a_0b_n + a_1b_{n-1} + \dots + a_nb_0 = \sum_{j+k=n} a_j b_k$$

(v posledním součtu se sčítá přes všechny uspořádané dvojice celých nezáporných čísel j, k, pro něž je $j+k=n$). Tím jsme dostali součin $s \cdot t$ dvou mocninných řad opět vyjádřen mocninnou řadou $c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots$

Druhý příklad se týká tzv. Dirichletových řad, tj. řad tvaru $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$, kde a_n jsou daná čísla, x hraje roli (reálné) proměnné. Jsou-li řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x} = s \, , \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n^x} = t$$
pro jisté x absolutně konvergentní, je také řada sestrojená ze všech čísel $\frac{a_j b_k}{j^x k^x}$ absolutně konvergentní a má součet $s \cdot t$. Dám-li v této řadě dohromady všechny členy s touž hodnotou čísla $j \cdot k$, dostanu "součinovou řadu" opět ve tvaru Dirichletovy řady
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{n^x} \, , \quad \text{kde} \quad d_n = \sum_{j \cdot k = n} a_j \cdot b_k \, ;$$
v posledním součtu se sčítá přes všechny uspořádané dvojice přirozených čísel j, k, pro něž je $j \cdot k = n$. Dokažte např., že pro $x > 1$ je
$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \right)^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{n^x} \, ,$$
kde d_n je počet kladných dělitelů čísla n.

<u>Poznámka 18.</u> Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} a_n = s$ absolutně konvergentní řada, a je-li $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = S$, je $|s| \leq S$, tj. $\left| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Důkaz: Je $\left| \sum_{k=1}^{n} a_k \right| \leq \sum_{k=1}^{n} |a_k|$, a nyní provedeme limitní přechod $n \to \infty$.

<u>Poznámka 19.</u> Řekněme si závěrem, jak souvisí řada

(32) $\qquad a_1 + a_2 + a_3 + \ldots \qquad (a_n = b_n + i c_n \, ; \; b_n, \, c_n$ reálné)

s reálnými řadami

(33) $\qquad b_1 + b_2 + b_3 + \ldots \, ,$
$\qquad\qquad c_1 + c_2 + c_3 + \ldots \, .$

Řada (32) konverguje tehdy a jen tehdy, konvergují-li obě řady (33); mají-li řady (33) součty b, c, má (32) součet $b + ic$.

Důkaz plyne z věty 20 a z toho, že součet řady je limita jejích částečných součtů.

Ještě větu o absolutní konvergenci: Řada (32) je absolutně konvergentní tehdy a jen tehdy, jsou-li obě řady (33) absolutně konvergentní.

Důkaz. Vyjdeme z nerovností

$$\max(|b_n|, |c_n|) \leq |b_n + ic_n| \leq |b_n| + |c_n|$$

a z toho, že řada s nezápornými členy je konvergentní tehdy a jen tehdy, je-li posloupnost částečných součtů shora omezená (věta 27). Čtenář si důkaz doplní sám.

§ 3. Stejnoměrná konvergence posloupností.

Zopakujeme si definici limity posloupnosti, omezujíce se na vlastní limity: Číslo a se nazývá limitou posloupnosti $a_1, a_2, a_3, \ldots$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje reálné (možno též říci přirozené) číslo n_0 tak, že pro všechna přirozená $n \geq n_0$ je $|a_n - a| \leq \varepsilon$ (bude se nám lépe hodit $\leq$ než $<$).

Zapíšeme to symbolicky

(1) $$\forall_{\varepsilon > 0} \; \exists_{n_0 \in \mathcal{N}} \; \forall_{n \in \mathcal{N}} \; (n \geq n_0 \Rightarrow |a_n - a| \leq \varepsilon)$$

($\mathcal{N}$ značí množinu všech přirozených čísel; obor ε je množina všech kladných čísel). Uvědomte si, že číslo n_0 můžeme stanovit teprve, když je dáno ε. Např. posloupnost $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots$ ($a_n = \frac{1}{n}$) má limitu 0. Je-li $\varepsilon = \frac{1}{10}$, lze volit $n_0 = 10$, protože pro $n \geq n_0$ je vskutku $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$; mohli bychom ovšem za n_0 volit jakékoliv číslo větší než 10. Je-li však $\varepsilon = 10^{-6}$, musíme volit n_0 alespoň 10^6, jestliže pro všechna[1] $n \geq n_0$ má být $\frac{1}{n} \leq \varepsilon$.

Budiž nyní dána nějaká posloupnost funkcí (reálných nebo komplexních) $f_1, f_2, f_3, \ldots$, definovaných v nějaké množině $M \neq \emptyset$ (prvky množiny M mohou být objekty jakéhokoliv druhu). Prostě: pro každé přirozené n je každému prvku $x \in M$ přiřazeno určité číslo, jež značíme $f_n(x)$. Pro každý prvek x množiny M dostáváme tedy jistou posloupnost čísel $f_1(x), f_2(x), \ldots$ Může se stát, že tato posloupnost má vlastní limitu, ať si za x zvolíme jakýkoliv prvek množiny M; potom říkáme, že posloupnost funkcí $f_1, f_2, \ldots$ je konvergentní v množině M. To tedy znamená, že pro každé $x \in M$ posloupnost čísel $f_1(x), f_2(x), \ldots$ má vlastní limitu; tato limita ovšem je funkcí v oboru M, označme ji třeba f; říkáme potom také, že posloupnost $f_1, f_2, \ldots$ konverguje v M k funkci f; to tedy znamená, že pro každé $x \in M$ je $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$. Zapišme to v symbolech

---

[1] Vynechávám často slova "přirozená", "celá" atd., když se ze souvislosti rozumějí sama sebou.

(2) $$\forall_{x\in M} \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\right).$$

Vypíšeme-li vnitřek podle vzorce (1), lze napsat (2) takto:

(3) $$\forall_{x\in M}\ \forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathcal{N}}\ \forall_{n\in\mathcal{N}} (n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon).$$ [2)]

Tedy: ke každému $x\in M$ a ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 takové, že pro všechna $n \geq n_0$ je $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$. Číslo n_0 lze tedy stanovit teprve tehdy, když je dáno ε a x. To je pochopitelné: pro různá x můžeme dostat různé posloupnosti čísel $f_1(x)$, $f_2(x)$, ... , a některá z těchto posloupností může konvergovat "rychleji" a jiná "pomaleji" (tj. při daném $\varepsilon > 0$ vyžaduje větší hodnotu n_0). Důležitý je případ, kdy n_0 lze volit tak, že závisí jen na ε, a nikoliv na x. To znamená tedy:

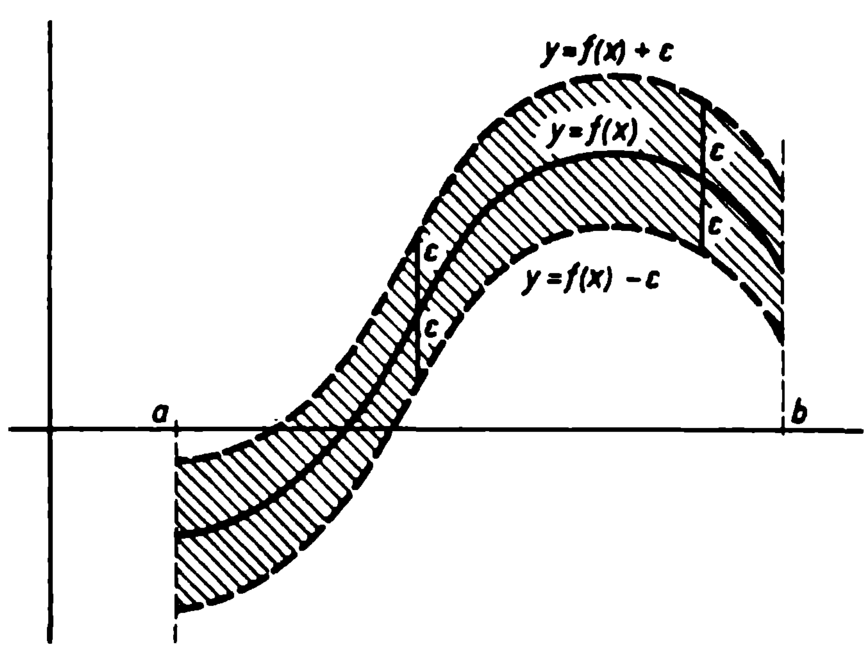
(S) : Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje přirozené n_0 tak, že nerovnost $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ platí pro všechna $n \geq n_0$ a všechna $x\in M$.

<u>Definice:</u> Platí-li (S), říkáme, že posloupnost funkcí $f_1, f_2, \ldots$ konverguje <u>stejnoměrně</u> v M, a to k funkci f. Napišme ještě (S) pomocí symbolů:

(4) $$\forall_{\varepsilon>0}\ \exists_{n_0\in\mathcal{N}}\ \forall_{x\in M}\ \forall_{n\in\mathcal{N}} (n \geq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon).$$

Srovnáte-li (3) s (4), vidíte, že rozdíl pojmů "konvergence v M" a "stejnoměrná konvergence v M" je pouze v tom, že se vymění kvantifikátory $\exists_{n_0\in\mathcal{N}}$, $\forall_{x\in M}$. Ovšem je to rozdíl velmi podstatný, jak za chvíli uvidíme.

Podívejme se, jak lze přiblížit názoru pojem stejnoměrné konvergence. Mějme nějakou funkci jedné proměnné v intervalu J o krajních bodech a, b a načrtněme její graf. Budiž v J dána nějaká posloupnost funkcí $f_1, f_2, \ldots$ a budiž $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ stejnoměrně v M. Co to znamená? Zvolme libovolné $\varepsilon > 0$ a sestrojme okolo grafu funkce f pás o výšce 2ε, jak je naznačeno na obr. 22. Potom existuje n_0 tak, že pro každé $n \geq n_0$ je $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ pro <u>všechna</u> $x\in J$, tj. <u>celý</u> graf každé funk-



Obr. 22.

2) Místo $\forall_{x\in M}\ \forall_{\varepsilon>0}$ lze psát ovšem $\forall_{\varepsilon>0}\ \forall_{x\in M}$.

ce f_n (pokud $n \geqq n_0$) leží v tom šrafovaném pásu.

Příklad 1. Nechť $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$.

Tvrdím, že je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ v $(-\infty, +\infty)$, tj. že tato rovnice platí pro každé reálné x. Lze totiž psát

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \, \frac{x}{\frac{1}{n^2} + x^2} \; ;$$

první činitel má limitu 0, druhý má limitu $\frac{1}{x}$, pokud $x \neq 0$. Pro všechna $x \neq 0$ je tedy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$, a pro $x = 0$ tato rovnice platí také, ježto $f_n(0) = 0$ pro všechna n. Ptejme se, zda tato konvergence je stejnoměrná v $(-\infty, +\infty)$. Kdyby tomu tak bylo, musilo by ke každému $\varepsilon > 0$ existovat n_0 tak, že by pro všechna $n \geqq n_0$ a všechna reálná x bylo $|f_n(x) - 0| = |f_n(x)| \leqq \varepsilon$. Ale funkce f_n nabývá v bodě $\frac{1}{n}$ hodnoty $\frac{1}{2}$. Zvolím-li tedy $\varepsilon < \frac{1}{2}$ (např. $\varepsilon = \frac{1}{3}$), nabývá každá funkce f_n někde hodnoty $\frac{1}{2} > \varepsilon$, takže vůbec pro žádnou z funkcí f_n není $|f_n(x)| \leqq \varepsilon$ pro <u>všechna</u> x. Tedy konvergence <u>není</u> stejnoměrná v $(-\infty, +\infty)$.

Uvidíme za chvíli, proč je pojem stejnoměrné konvergence důležitý. Prozatím si odvodíme jedno kriterium, podle kterého leckdy pohodlně poznáme, zda posloupnost $f_1, f_2, \dots$ je stejnoměrně konvergentní v M. Přečtěme ještě jednou definici stejnoměrné konvergence posloupnosti $f_1, f_2, \dots$ k funkci f v množině M. Ta je obsažena ve výroku (S), který uspořádejme trochu jinak: Vezmu-li jakékoliv $\varepsilon > 0$, potom existuje přirozené n_0 tak, že pro každé přirozené $n \geqq n_0$ platí tento výrok:

(S_1) $\qquad |f_n(x) - f(x)| \leqq \varepsilon$ pro všechna $x \in M$.

Ale výrok (S_1) znamená totéž jako

(S_1) $\qquad \sup\limits_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| \leqq \varepsilon$.

(Vskutku, je-li supremum funkce $|f_n(x) - f(x)|$ nejvýše rovno ε, jsou všechny hodnoty té funkce nejvýše rovny ε; naopak, jsou-li všechny hodnoty té funkce $\leqq \varepsilon$, je ε jejím horním odhadem, a tedy supremum jakožto nejmenší horní odhad je také $\leqq \varepsilon$). Označme

$$\sigma_n = \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| \; ;$$

potom (S_1) lze psát

(S_1) $\qquad \sigma_n \leqq \varepsilon$.

Tedy výrok, že je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ stejnoměrně v M, znamená totéž jako tento výrok: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje přirozené n_0 tak, že pro všechna přirozená $n \geqq n_0$ je $\sigma_n \leqq \varepsilon$ (neboli $|\sigma_n| \leqq \varepsilon$, protože zřejmě $\sigma_n \geqq 0$). To však znamená právě tolik jako že

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0 .$$

Tedy máme tuto větu:

<u>Věta 38.</u> Vztah "$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ stejnoměrně v M" platí tehdy a jen tehdy, je-li $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$. Přitom

$$\sigma_n = \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)| .$$

Ježto supremum funkce dovedeme často z jejího průběhu vypočítat nebo aspoň odhadnout, dává tato věta často vhodný prostředek pro zjištění, zda posloupnost je či není stejnoměrně konvergentní v určité množině. Vezměme opět příklad $f_n(x) = \dfrac{nx}{1 + n^2x^2}$, takže pro každé reálné x je

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 .$$

Už jsme zjistili, že tato konvergence není stejnoměrná v $(-\infty, +\infty)$. Podle věty 38 to zjistíme snáze: Funkce f_n nabývá v bodě $\frac{1}{n}$ hodnoty $\frac{1}{2}$; tedy $\sigma_n = \sup_{x\in(-\infty,+\infty)} |f_n(x) - 0| \geqq \frac{1}{2}$ pro každé n, tedy <u>není</u> $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$, konvergence <u>není</u> stejnoměrná v $(-\infty, +\infty)$.

Vezměme nějaké ("libovolně malé") číslo $a > 0$ a ptejme se, zda konvergence je stejnoměrná aspoň v intervalu $(0, a)$. Bod $\frac{1}{n}$ (ve kterém je $f_n(x) = \frac{1}{2}$) leží v $(0, a)$, jakmile $\frac{1}{n} < a$, tj. $n > \frac{1}{a}$. Pro všechna $n > \frac{1}{a}$ je tedy opět $\sigma_n \geqq \frac{1}{2}$, tedy není $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$, konvergence <u>není</u> stejnoměrná v $(0, a)$. Ježto ten "nebezpečný" bod $\frac{1}{n}$ je pro velká n blízko nuly, zkusme ještě, zda je konvergence stejnoměrná v množině všech čísel x, pro něž $|x| \geqq a$, tj. v množině $(-\infty, -a\rangle \cup \langle a, +\infty)$; zde je a opět libovolně předepsané kladné číslo. Ježto v této množině nemůže být x příliš blízko nuly, převládne ve jmenovateli $1 + n^2x^2$ asi člen n^2x^2 pro velká n nad jedničkou; zkusme tedy pro $|x| \geqq a$ tento odhad:

$$|f_n(x) - 0| = \left|\frac{nx}{1 + n^2x^2}\right| \leqq \left|\frac{nx}{n^2x^2}\right| = \frac{1}{n|x|} \leqq \frac{1}{na} .$$

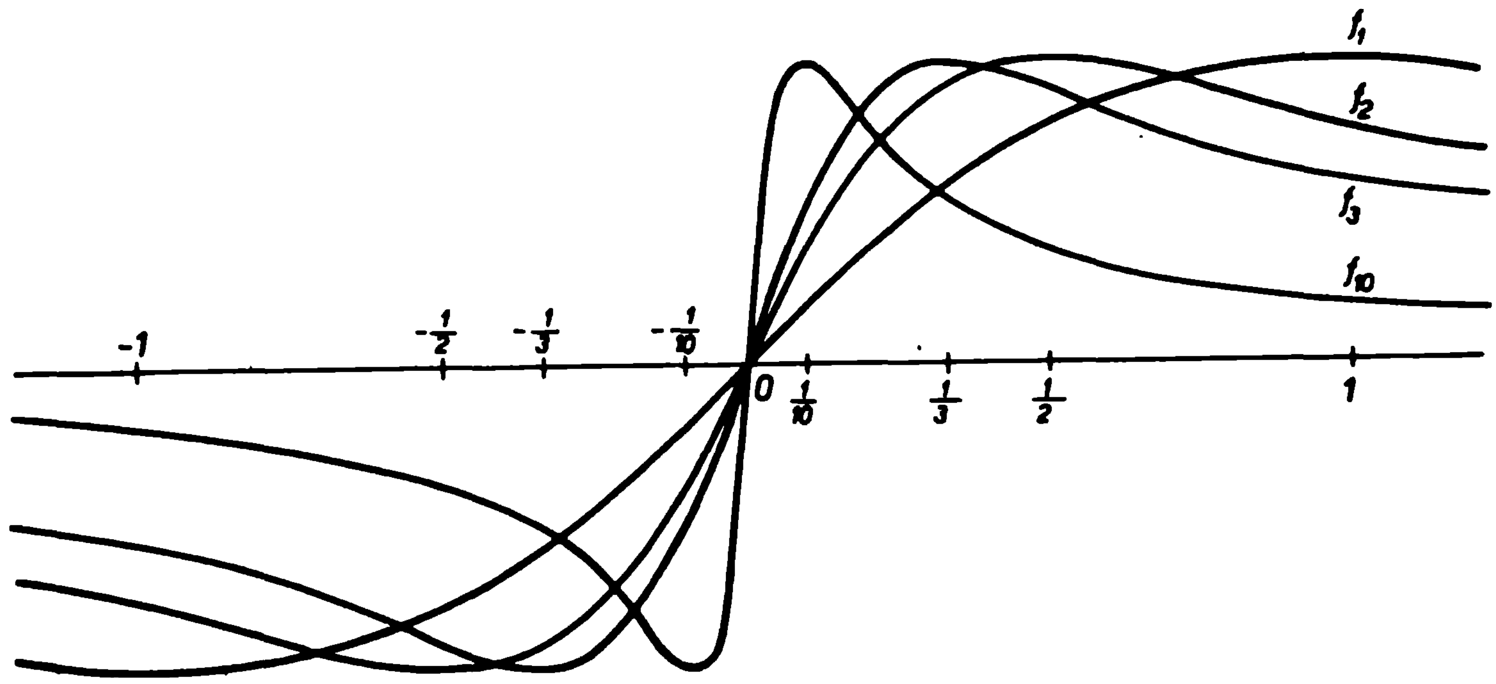
Tedy $0 \leqq \sigma_n \leqq \frac{1}{na}$, $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0$, tedy je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ stejnoměrně v $(-\infty, -a\rangle \cup \langle a, +\infty)$. Zároveň vidíte: vyslovíte-li tvrzení, že je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ stejnoměrně, musíte říci, v <u>které</u> množině.

Je dobře si uvědomit aspoň na nějakém jednoduchém případě, jak se projevuje "nestejnoměrnost" konvergence. Vezměme opět náš příklad

$$f_n(x) = \frac{nx}{1+n^2x^2}\,,\ \lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0 \quad \text{pro všechna reálná } x\ . \quad \text{Jest}$$

$$f_1(x) = \frac{x}{1+x^2}\,,\quad f_n(x) = f_1(nx)\ .$$

Načrtněme graf funkce f_1 [3]; graf funkce f_n dostanu tak, že graf funkce f_1 "stlačím" n-kráte směrem k počátku (z obr. 23 vidíte, co tím míním).



Obr. 23.

Z obrázku snad získáte jakousi představu o tom, jak to přijde, že $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ pro všechna x, ačkoliv supremum funkce $|f_n|$ nemá pro $n \to \infty$ limitu 0; a také vidíte, proč konvergence není stejnoměrná např. v žádném intervalu $(0, a)$ $(a > 0)$, ale je stejnoměrná v každém intervalu $(a, +\infty)$ $(a > 0)$.

<u>Poznámka 1.</u> Jestliže

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \tag{5}$$

stejnoměrně v množině M, a jestliže $\emptyset \neq N \subset M$, potom (5) platí také stejnoměrně v množině N. Důkaz plyne okamžitě z definice: jestliže pro nějaké n platí

---

[3] Snadno zjistíte, že největší a nejmenší hodnota funkce f_1 je $f_1(1) = \frac{1}{2}$, $f_1(-1) = -\frac{1}{2}$.

(6) $|f_n(x) - f(x)| \leqq \varepsilon$

pro všechna $x \in M$, platí to speciálně pro všechna $x \in N$.

Poznámka 2. Platí-li (5) stejnoměrně v množině M_1 i v množině M_2, platí (5) také stejnoměrně i v množině $M_1 \cup M_2$. Důkaz: Budiž $\varepsilon > 0$; potom existuje n_1 tak, že pro všechna $n \geqq n_1$ platí (6) pro všechna $x \in M$; zadruhé existuje n_2 tak, že pro všechna $n \geqq n_2$ platí (6) pro všechna $x \in M_2$.

Zvolme $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Pro každé $n \geqq n_0$ platí potom (6) pro všechna $x \in M_1$ i pro všechna $x \in M_2$, tedy pro všechna $x \in M_1 \cup M_2$; důkaz je hotov. Indukcí se tato věta okamžitě rozšíří na sjednocení konečného počtu množin $M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_k$. Pro sjednocení nekonečného počtu množin obdobná věta neplatí.

Poznámka 3. Stejnoměrnou konvergenci posloupnosti komplexních funkcí lze převést obvyklým způsobem na stejnoměrnou konvergenci jejich reálných a imaginárních částí. Buďte

$$f_n = \varphi_n + i\psi_n \quad (n = 1, 2, \ldots), \quad f = \varphi + i\psi$$

funkce, definované v nějaké množině M; φ_n, ψ_n, φ, ψ buďte reálné funkce. Potom je $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ stejnoměrně v M tehdy a jen tehdy, je-li

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x), \quad \lim_{n \to \infty} \psi_n(x) = \psi(x),$$

obojí stejnoměrně v M. Důkaz si čtenář doplní sám.

Pro stejnoměrnou konvergenci máme opět podmínku typu Bolzanovy-Cauchyovy podmínky:

Věta 39. Posloupnost funkcí $f_1, f_2, \ldots$ konverguje stejnoměrně v $M \neq \emptyset$ tehdy a jen tehdy, je-li splněna tato podmínka:

(B.C.) Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje přirozené n_0 tak, že pro všechna přirozená p a pro všechna $x \in M$ je $|f_{n_0+p}(x) - f_{n_0}(x)| \leqq \varepsilon$.

Pro nás bude pohodlnější tento tvar podmínky (zřejmě ekvivalentní):

(B.C.)' Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje přirozené n_0 tak, že pro všechna přirozená $n \geqq n_0$, $m \geqq n_0$ a pro všechna $x \in M$ je $|f_n(x) - f_m(x)| \leqq \varepsilon$.

Důkaz věty 39. 1) Nechť $\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$ stejnoměrně v M. Budiž $\varepsilon > 0$. Potom existuje n_0 tak, že pro všechna $n \geqq n_0$ a pro všechna $x \in M$ je $|f_n(x) - f(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{2}$.

Je-li tedy $n \geqq n_0$, $m \geqq n_0$, je pro všechna $x \in M$

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqq |f_n(x) - f(x)| + |f(x) - f_m(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

a (B.C.)$'$ je splněna.

2) Nechť je (B.C.)$'$ splněna. Dokážeme napřed, že posloupnost $f_1(x), f_2(x), \ldots$ je konvergentní pro každé $x \in M$ (prozatím bez stejnoměrnosti). Zvolme tedy $x_0 \in M$. Podle (B.C.)$'$ existuje ke každému $\varepsilon > 0$ číslo n_0 tak, že pro $n \geqq n_0$, $m \geqq n_0$ je $|f_n(x) - f_m(x)| \leqq \varepsilon$ pro všechna $x \in M$, tedy též pro naše zvolené x_0. To znamená, že posloupnost čísel $f_1(x_0), f_2(x_0), \ldots$ splňuje obvyklou podmínku Bolzanovu - Cauchyovu a je tedy konvergentní. (Viz větu 21^b.)

Tedy: pro každé $x \in M$ je posloupnost čísel $f_1(x), f_2(x), \ldots$ konvergentní. Její limitu (jež může záviset na volbě čísla x) označme $f(x)$. Tvrdím nyní, že tato konvergence je stejnoměrná v M. Budiž tedy $\varepsilon > 0$. Mám zjistit, že existuje n_0 tak, že

(7) $$|f_n(x) - f(x)| \leqq \varepsilon$$

pro všechna $n \geqq n_0$ a všechna $x \in M$. Podle (B.C.)$'$ existuje n_0 tak, že pro všechna $n \geqq n_0$, $m \geqq n_0$ a pro všechna $x \in M$ je

(8) $$|f_n(x) - f_m(x)| \leqq \varepsilon .$$

Dokáži, že toto n_0 vyhovuje našemu požadavku. Zvolme tedy libovolné $n \geqq n_0$ a libovolné $x \in M$ (ty teď budou pevné) a dokážeme, že platí (7) - tím bude důkaz hotov. Ježto je $n \geqq n_0$, platí (8) pro všechna $m \geqq n_0$. Zřejmě je [4]

$$\lim_{m \to \infty} |f_n(x) - f_m(x)| = |f_n(x) - f(x)| .$$

Ježto nerovnost (8) platí pro všechna $m \geqq n_0$, je také

$$\lim_{m \to \infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leqq \varepsilon , \quad \text{tj. } |f_n(x) - f(x)| \leqq \varepsilon \quad ;$$

důkaz je hotov.

Význam věty 39 je opět v tom, že nám dovoluje často rozhodnout o stejnoměrné konvergenci, aniž bychom znali limitní funkci $\lim_{n \to \infty} f_n(x)$.

Poznámka 4. Pojem "stejnoměrné konvergence v množině M" (symbolický zápis viz v (4)) je nutno si dobře promyslit a přísně jej odlišovat od pojmu "konvergence v množině M" (symbolický zápis viz v (3)). Pojem "konvergence posloupnosti $f_1, f_2, \ldots$ v množině M" znamená totéž jako "konvergence posloupnosti čísel $f_1(x), f_2(x), \ldots$ pro každé $x \in M$" (říká se také:

[4] Podle věty o limitě rozdílu a o limitě absolutní hodnoty.

v každém bodě množiny M). Naproti tomu výrok "stejnoměrná konvergence posloupnosti $f_1, f_2, \ldots$ v množině M" se týká množiny M vcelku a nelze jej nahradit nějakým výrokem o konvergenci ve všech (jednotlivých) bodech množiny M.

Poznámka 5. Existuje však jeden případ, kdy pojmy "konvergence v M" a "stejnoměrná konvergence v M" splývají. To nastává tehdy, když M je konečná množina.

Důkaz: Nechť posloupnost funkcí $f_1, f_2, \ldots$ konverguje v množině M, mající konečný počet prvků $x_1, x_2, \ldots, x_p$, k funkci f; tj. pro každé k ($k = 1, 2, \ldots, p$) je $\lim_{n\to\infty} f_n(x_k) = f(x_k)$. Budiž $\varepsilon > 0$. Potom existují přirozená čísla $n_1, \ldots, n_p$ tak, že pro všechna $n \geq n_1$ je $|f_n(x_1) - f(x_1)| \leq \varepsilon$,
pro všechna $n \geq n_2$ je $|f_n(x_2) - f(x_2)| \leq \varepsilon$, ...
pro všechna $n \geq n_p$ je $|f_n(x_p) - f(x_p)| \leq \varepsilon$.

Zvolme $n_0 = \max(n_1, n_2, \ldots, n_p)$; potom pro všechna $n \geq n_0$ a pro všechna $x \in M$ (tj. pro $x = x_1, x = x_2, \ldots, x = x_p$) je $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$; tedy je konvergence stejnoměrná v M (speciálně platí tato věta, když M je "jednobodová množina", tj. má jen jeden prvek).

Poznámka 6. Nechť funkce $f_1, f_2, \ldots$ jsou konstantní v množině M, a nechť pro jisté $c \in M$ existuje vlastní $\lim_{n\to\infty} f_n(c) = A$. Potom je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = A$ stejnoměrně v M.

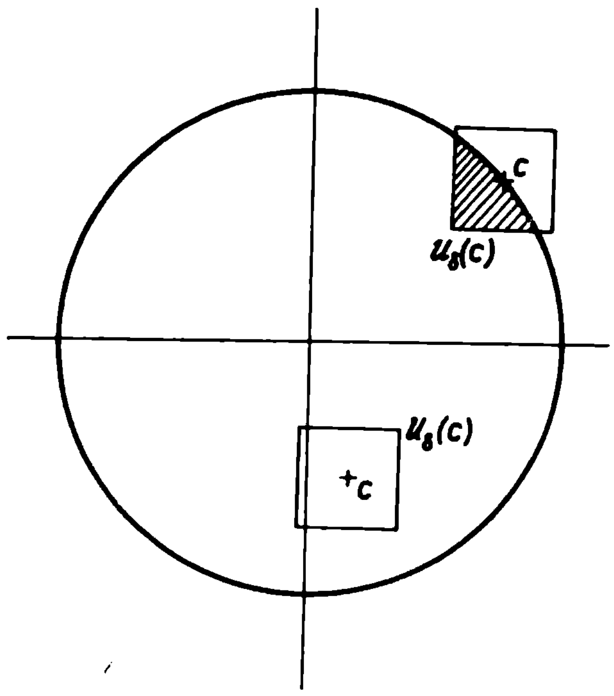
Důkaz: nerovnost $|f_n(c) - A| \leq \varepsilon$ znamená totéž jako $|f_n(x) - A| \leq \varepsilon$ pro všechna $x \in M$. Tato samozřejmá poznámka nám dovoluje z každé věty o posloupnostech funkcí, stejnoměrně konvergentních v M, odvodit jako důsledek příslušnou větu o konvergentních posloupnostech s konstantními členy (podobně tomu bude v § 5 u řad).

§ 4. Věty o stejnoměrně konvergentních posloupnostech.

Úvahy, které jsme dosud o stejnoměrné konvergenci v množině M prováděli, platí pro jakoukoliv množinu M (s prvky jakéhokoliv druhu). Nyní se obrátíme speciálně k případům, kdy M je nějaká množina bodů v E_r. Ale napřed musíme trochu zobecnit pojem spojitosti. Budiž f nějaká funkce (reálná nebo komplexní) r reálných proměnných, budiž $c \in E_r$. Říkáme, že f je spojitá v bodě c, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že je

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon \quad \text{pro všechna} \quad x \in \mathcal{U}_\delta(c) .$$

Představme si, že chceme vyšetřovat funkci $f(x_1, x_2)$ dvou proměnných v uzavřeném kruhu $K: x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ (nevšímajíce si funkce v bodech mimo tento kruh). Potom se naše definice spojitosti hodí k vyšetřování vlastností funkce ve vnitřních bodech kruhu, ale nehodí se, když bod c leží na hranici té množiny, tj. na kružnici $x_1^2 + x_2^2 = 1$. Potom totiž každé okolí $\mathcal{U}_\delta(c)$ zasahuje <u>mimo</u> naši množinu K (viz obr. 24) a bude asi vhodné požadovat splnění nerovnosti $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ jen pro ta $x \in \mathcal{U}_\delta(c)$, jež leží v K, tj. pro $x \in \mathcal{U}_\delta(c) \cap K$. Definujme tedy obecně:



Obr. 24.

<u>Definice.</u> Buďiž $M \subset E_n$, $c \in M$; buďiž f funkce (obecně komplexní) n reálných proměnných. Budeme říkat, že f je <u>spojitá v bodě c vzhledem k M</u>, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že je

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in \mathcal{U}_\delta(c) \cap M .$$

Jestliže ovšem bod c je vnitřním bodem množiny M, znamená "spojitost v bodě c vzhledem k M" totéž jako náš starý pojem "spojitost v bodě c", protože pro dostatečně malá δ leží každý bod okolí $\mathcal{U}_\delta(c)$ v množině M. Důležitý je tento nový pojem jen tehdy, leží-li c na hranici množiny M. Je-li např. f funkce jedné proměnné, znamená náš známý pojem "f je spojitá v bodě c zprava" totéž jako "f je spojitá v bodě c vzhledem k intervalu $\langle c, +\infty)$" (nebo $\langle c, c+1)$ nebo $\langle c, c+10^{-6}\rangle$ atd., ježto spojitost je lokální vlastnost). Podobně spojitost v bodě c zleva znamená totéž jako spojitost v bodě c vzhledem k intervalu $(-\infty, c\rangle$.

<u>Definice.</u> Jestliže funkce f je spojitá v každém bodě množiny M vzhledem k množině M, budeme krátce říkat, že f <u>je spojitá v M</u>.

Jestliže f je funkce jedné proměnné a M je interval (uzavřený, polouzavřený nebo otevřený), je zřejmě náš nový pojem "funkce spojitá v množině M" ve shodě s pojmem zavedeným v 1.ročníku "funkce spojitá v intervalu M".

V matematické analyse se velmi často vyskytuje tento případ: Máme posloupnost funkcí $f_1, f_2, \ldots$, která v nějaké množině $M \subset E_n$ konverguje k funkci f, tj.

$$\lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{pro každé } x \in M .$$

Známe některé vlastnosti funkcí f_n a máme studovat vlastnosti limitní funkce f. Např. nechť f_n jsou funkce jedné proměnné a nechť je známo, že jsou spojité v množině M. Zdalipak také limitní funkce f je spojitá v M? Následující příklad ukazuje, že tomu tak nemusí být.

Budiž $f_n(x) = \dfrac{1}{1+nx^2}$ pro všechna reálná x. Je-li $x \neq 0$, je $|f_n(x)| \leq \dfrac{1}{nx^2}$, tedy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Pro $x = 0$ je však $f_n(0) = 1$ pro všechna n, tedy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 1$. Tedy je pro všechna reálná x

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x),$$

kde $f(x) = 0$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 1$. Funkce f_n jsou zřejmě spojité v $(-\infty, +\infty)$, ale funkce f nikoliv - není spojitá v bodě 0.

Tedy pouhá konvergence nám nestačí; následující věta ukazuje, že stejnoměrná konvergence stačí:

Věta 40. Budiž $M \subset E_k$. Buďte $f_1, f_2, \ldots$ (komplexní) funkce, spojité v M. Budiž

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) \quad \text{stejnoměrně v } M.$$

Potom také funkce f je spojitá v M.

Důkaz. Vezměme libovolný bod $c \in M$; máme dokázat, že f je spojitá v bodě c vzhledem k M. Budiž tedy $\varepsilon > 0$; máme dokázat, že existuje $\delta > 0$ tak, že je

(1) $$|f(x) - f(c)| \leq \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in U_\delta(c) \cap M.$$

Využijeme napřed stejnoměrné konvergence: k našemu ε existuje přirozené n_0 tak, že pro všechna $n \geq n_0$ je $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ pro všechna $x \in M$. My využijeme jen toho, že

(2) $$|f_{n_0}(x) - f(x)| \leq \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in M.$$

Číslo n_0 je nyní pevné. Protože o funkci f_{n_0} víme, že je spojitá v M (tedy speciálně spojitá v bodě c vzhledem k M), snažíme se odhadnout rozdíl $f(x) - f(c)$ pomocí $f_{n_0}(x) - f_{n_0}(c)$, přičemž pro přechod od f k f_{n_0} užijeme nerovnosti (2); pišme tedy

$$f(x) - f(c) = (f(x) - f_{n_0}(x)) + (f_{n_0}(x) - f_{n_0}(c)) + (f_{n_0}(c) - f(c))$$

a tedy

$$|f(x) - f(c)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(c)| + |f_{n_0}(c) - f(c)|;$$

a tedy podle nerovnosti (2) (která ovšem speciálně platí pro $x = c$)

(3) $|f(x) - f(c)| \leqq |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(c)| + 2\varepsilon$ pro všechna $x \in M$.

Ale funkce f_{n_0} je spojitá v bodě c vzhledem k M ; existuje tedy $\delta > 0$ tak, že je $|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(c)| \leqq \varepsilon$ pro všechna $x \in \mathcal{U}_\delta(c) \cap M$.

Dosadíme-li odtud do (3), dostaneme, že platí $|f(x) - f(c)| \leqq 3\varepsilon$ pro všechna $x \in \mathcal{U}_\delta(c) \cap M$. Tím jsme dokázali (1) - sice s číslem 3ε místo ε, ale to ovšem nevadí (stačilo by vyjít z čísla $\frac{1}{3}\varepsilon$ místo ε , a dostali bychom $|f(x) - f(c)| \leqq \varepsilon$ - čtenář, chce-li, může to provést sám).

Poznámka 1. Pozorný čtenář možná zjistil, že jsme dokázali větu o něco obsažnější: Nechť $M \subset E_k$, nechť $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(n)$ stejnoměrně v M ; nechť $c \in M$. Potom platí: Jsou-li f_n spojité v bodě c vzhledem k M , je také f spojitá v bodě c vzhledem k M .

Vedle spojitosti nás ovšem zajímá také derivace a primitivní funkce. To je trochu složitější, a napřed si dokážeme jednu pomocnou větu, která je sama o sobě důležitá. Přitom se v dalším omezím na případ, že jde o funkce jedné proměnné a že množina M je otevřený interval - ač by bylo možno postupovat obecněji.

(Moore - Osgoodova věta)

Věta 41. Nechť posloupnost komplexních funkcí jedné proměnné $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ konverguje stejnoměrně v (a, b) $(-\infty < a < b \leqq +\infty)$,

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x) \qquad \text{pro } x \in (a, b) .$$

Nechť pro každé přirozené n existuje vlastní limita

$$\lim_{x \to a+} \varphi_n(x) = c_n .$$

Potom existuje vlastní limita

$$\lim_{n \to \infty} c_n = c \qquad \text{a je } \lim_{x \to a+} \varphi(x) = c .$$

Takto vypadá věta trochu nepřehledně, ale její smysl se osvětlí, napíšeme-li ji trochu jinak: Napíšeme c ve dvou tvarech:

$$c = \lim_{n \to \infty} c_n = \lim_{n \to \infty} \left(\lim_{x \to a+} \varphi_n(x) \right) ,$$

$$c = \lim_{x \to a+} \varphi(x) = \lim_{x \to a+} \left(\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) \right) .$$

Předpoklad je, že existují obě vnitřní limity, a že jedna z nich (a to limita posloupnosti $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \dots$) je stejnoměrná v nějakém intervalu (a, b) . Tedy můžeme větu 41 vyslovit také takto:

Věta 41. Rovnost

$$\lim_{n\to\infty}\left(\lim_{x\to a+}\varphi_n(x)\right) = \lim_{x\to a+}\left(\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)\right),$$

kde vnější limity jsou vlastní, platí, jestliže jsou splněny tyto podmínky:

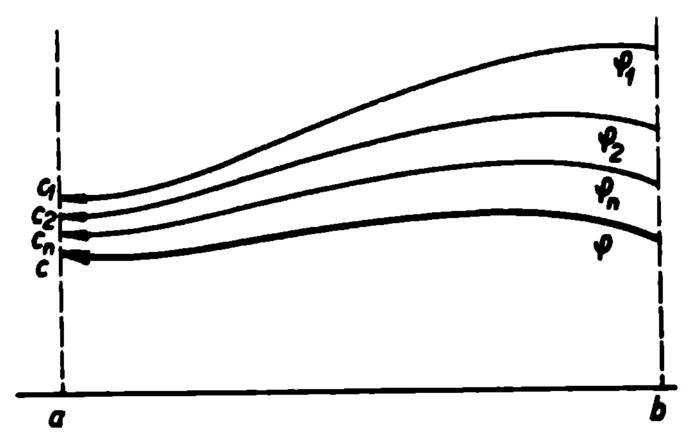
1) Vnitřní limity existují a jsou vlastní ($\lim_{x\to a+}\varphi_n(x)$ pro každé n, $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x)$ pro každé $x \in (a, b)$, kde b je jisté číslo větší než a).

2) posloupnost $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ konverguje stejnoměrně v (a, b).

Jde tedy prostě o to, že za jistých podmínek lze zaměnit pořadí limit.

Zde je to ještě trochu nesymetrické: výraz $\varphi_n(x)$ závisí na dvou proměnných n, x, kde n je "celočíselná", x "spojitě proměnná" (jistě rozumíte, co tím myslím). Obdobná věta by platila též, kdyby obě proměnné byly celočíselné nebo obě spojitě proměnné. Značně obecný případ je probrán v DII, věta 174 II.

Důkaz věty 41 provedeme podle prvního znění (bude přehlednější). Načrtněme to (obr. 25). Předpokládáme, že existují vlastní limity $\lim_{x\to a+}\varphi_n(x) = c_n$, a že $\lim_{n\to\infty}\varphi_n(x) = \varphi(x)$ stejnoměrně v (a, b). Napřed dokážeme, že existuje vlastní $\lim_{n\to\infty} c_n$. Buďiž $\varepsilon > 0$; podle věty 39 ((B.C.) - podmínka pro stejnoměrnou konvergenci) existuje n_0 tak, že pro všechna přirozená p a pro všechna $x \in (a, b)$ je $|\varphi_{n_0+p}(x) - \varphi_{n_0}(x)| \leqq \varepsilon$.



Obr. 25.

Tedy je též $\lim_{x\to a+}|\varphi_{n_0+p}(x) - \varphi_{n_0}(x)| \leqq \varepsilon$, pokud limita existuje. Ale podle věty o limitě rozdílu a o limitě absolutní hodnoty tato limita existuje a je rovna $|c_{n_0+p} - c_{n_0}|$. Tedy pro všechna přirozená p je $|c_{n_0+p} - c_{n_0}| \leqq \varepsilon$, tj. podle podmínky (B.C.) (věta 21[b]) existuje vlastní limita $\lim c_n = c$. Máme ještě dokázat, že také

$$\lim_{x\to a+}\varphi(x) = c. \tag{4}$$

Zase to budu dělat přechodem přes φ_n s použitím toho, že

$$\lim_{x\to a+}\varphi_n(x) = c_n. \tag{5}$$

Pro každé $x \in (a, b)$ máme

(6) $|\varphi(x) - c| \leq |\varphi(x) - \varphi_n(x)| + |\varphi_n(x) - c_n| + |c_n - c|$.

Budiž $\varepsilon > 0$ (ježto mám zde tři členy, začnu hned pracovat s $\frac{\varepsilon}{3}$). Ježto $\lim_{n \to \infty} c_n = c$, existuje přirozené n_1 tak, že pro všechna $n \geq n_1$ je $|c_n - c| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Ježto φ_n konverguje stejnoměrně k φ v (a, b) , existuje přirozené n_2 tak, že pro všechna $n \geq n_2$ a všechna $x \in (a, b)$ je $|\varphi_n(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Položme $n_0 = \max(n_1, n_2)$. Potom je

$$|\varphi_{n_0}(x) - \varphi(x)| \leq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{pro všechna } x \in (a, b) ,$$

$|c_{n_0} - c| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Tedy je podle (6)

(7) $|\varphi(x) - c| \leq |\varphi_{n_0}(x) - c_{n_0}| + \frac{2}{3}\varepsilon$ pro všechna $x \in (a, b)$.

Ježto podle (5) je $\lim_{x \to a+} \varphi_{n_0}(x) = c_{n_0}$, existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in (a, a+\delta)$ je $|\varphi_{n_0}(x) - c_{n_0}| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Volme hned $\delta < b - a$. Potom podle (7) je

(8) $|\varphi(x) - c| \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{2}{3}\varepsilon = \varepsilon$ pro všechna $x \in (a, a+\delta)$.

Tedy: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna $x \in (a, a+\delta)$ platí (8). To však znamená, že platí (4), což jsme měli dokázat.

Poznámka. Vynecháme-li předpoklad o stejnoměrnosti, dostaneme nesprávnou větu, jak ukazuje tento příklad: Položme

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{1 + nx^2} , \quad a = 0 , \quad b = 1 .$$

Zřejmě $\lim_{x \to 0+} \varphi_n(x) = c_n = 1$,

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \varphi(x) = 0 \quad \text{pro všechna } x \in (0, 1)$$

(ovšem není to stejnoměrné v $(0, 1)$).

Tedy je $\lim_{x \to 0+} \varphi(x) = 0$, ale $\lim_{n \to \infty} c_n = 1 \neq 0$.

Teď dokážeme velmi důležitou větu o derivování limitní funkce:

Věta 42. Buďte dány komplexní funkce $f_1, f_2, \ldots$ v intervalu (a, b) (omezeném nebo neomezeném). Nechť platí toto:

1) Funkce $f_1, f_2, \ldots$ mají všude v (a, b) vlastní derivaci $f_1', f_2', \ldots$

2) Posloupnost $f_1, f_2, \ldots$ je konvergentní aspoň v jednom bodě c intervalu (a, b) .

3) Posloupnost $f_1', f_2', \dots$ je <u>stejnoměrně</u> konvergentní v (a, b).

Potom platí:

I. Posloupnost $f_1, f_2, \dots$ je konvergentní v (a, b) a to <u>stejnoměrně</u> v každém omezeném intervalu $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$ [1]. Označme $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$.

II. Funkce f má v (a, b) vlastní derivaci

$$f'(x) = \lim_{n \to \infty} f_n'(x) \text{ .}^{2)}$$

Pamatujte si velmi dobře předpoklady, snadno se popletou.

<u>Důkaz</u> stačí provést pro reálné a pro imaginární části funkcí f_n, f, tj. pro reálné funkce. Předpokládejme tedy (bez újmy obecnosti), že funkce f_n jsou reálné. Podle předpokladu existuje vlastní $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(c)$. Dokážeme napřed tvrzení I.

Buďiž (α, β) omezený interval, obsažený v (a, b). Není-li bod c obsažen v (α, β), sestrojím omezený interval (α', β') tak, že $a \leq \alpha' \leq \alpha < \beta \leq \beta' \leq b$ a že $\alpha' < c < \beta'$; to je zřejmě možno. Dokáži-li stejnoměrnou konvergenci posloupnosti $f_1, f_2, \dots$ v (α', β'), bude tím dokázána i stejnoměrná konvergence v (α, β). Dokážeme, že posloupnost $f_1, f_2, \dots$ splňuje v (α', β') podmínku (B.C.)$'$ pro stejnoměrnou konvergenci (viz větu 39). Užiji-li věty o přírůstku funkce na funkci $f_n - f_m$, mám pro všechna $x \in (\alpha', \beta')$

$f_n(x) - f_m(x) = f_n(c) - f_m(c) + (x - c)\,(f_n'(\xi) - f_m'(\xi))$, kde $\xi \in (\alpha', \beta')$, tedy (pro všechna $x \in (\alpha', \beta')$)

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(c) - f_m(c)| + (\beta' - \alpha')\,|f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| \text{ .} \tag{9}$$

Buďiž $\varepsilon > 0$. Ježto existuje vlastní $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(c)$, existuje n_1 tak, že pro $n \geq n_1$, $m \geq n_1$ je $|f_n(c) - f_m(c)| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ježto posloupnost $f_1', f_2', \dots$ je stejnoměrně konvergentní v (α', β'), existuje n_2 tak, že pro $n \geq n_2$, $m \geq n_2$ a pro všechna $\xi \in (\alpha', \beta')$ je

$$|f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| \leq \frac{\varepsilon}{2(\beta' - \alpha')} \text{ .}$$

Položme $n_0 = \mathrm{Max}(n_1, n_2)$. Podle (9) platí pro všechna $n \geq n_0$, $m \geq n_0$ a pro všechna $x \in (\alpha', \beta')$ nerovnost

---

1) Je-li tedy (a, b) omezený interval, je konvergence stejnoměrná v <u>celém</u> (a, b).

2) Zase je to věta o záměnnosti dvou operací: derivace limity rovná se limitě derivace.

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2} + (\beta' - \alpha') \frac{\varepsilon}{2(\beta' - \alpha')} = \varepsilon ,$$

takže posloupnost $f_1, f_2, \ldots$ je stejnoměrně konvergentní v (α', β') (a tedy i v (α, β)).

Ježto (α, β) byl libovolný omezený interval obsažený v (a, b), lze jej volit tak, aby obsahoval libovolný předem daný bod intervalu (a, b). Tedy vskutku pro každé x intervalu (a, b) existuje vlastní limita $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Tvrzení I je dokázáno. Mám ještě dokázat, že v libovolném bodě $x_0 \in (a, b)$ existuje vlastní derivace $f'(x_0)$ a rovná se $\lim_{n\to\infty} f_n'(x_0)$. Stačí to provést pro derivaci zprava. Budeme patrně vyšetřovat (při daném x_0) funkce

(10) $$\varphi_n(h) = \frac{f_n(x_0 + h) - f_n(x_0)}{h} \quad \text{pro } 0 < h < b - x_0 .$$ [3]

Především existují vlastní limity

(11) $$\lim_{h\to 0+} \varphi_n(h) = f_n'(x_0) .$$

Za druhé existuje (při každém $h \in (0, b - x_0)$)

(12) $$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(h) = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} .$$

Dokážeme-li, že konvergence v (12) je stejnoměrná v $(0, b - x_0)$, můžeme užít věty 41: Existují tyto vlastní limity a rovnají se sobě:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\lim_{h\to 0+} \varphi_n(h) \right) = \lim_{h\to 0+} \left(\lim_{n\to\infty} \varphi_n(h) \right) ,$$

neboli (podle (11) a (12))

(13) $$\lim_{n\to\infty} f_n'(x_0) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f_+'(x_0) .$$

Tím bude důkaz proveden pro derivaci zprava (zleva je analogický). Abychom dokázali stejnoměrnost konvergence (12), stačí, dokážeme-li, že pro posloupnost funkcí $\varphi_n(h)$ je splněna podmínka (B.C.)' pro stejnoměrnou konvergenci. Vyšetřujeme tedy (pro $0 < h < b - x_0$) rozdíl

$$\varphi_n(h) - \varphi_m(h) = \frac{1}{h} \left[(f_n(x_0 + h) - f_m(x_0 + h)) - (f_n(x_0) - f_m(x_0)) \right] .$$

Užijeme na funkci $f_n(x) - f_m(x)$ věty o přírůstku funkce; dostaneme

(14) $$\varphi_n(h) - \varphi_m(h) = f_n'(\xi) - f_m'(\xi) ,$$

---

[3] Pro $b = +\infty$ míním $h > 0$.

kde ξ je jistý bod intervalu $(x_0, x_0 + h)$, který tedy leží v (a, b). Ale posloupnost $f_1', f_2', f_3', \dots$ je podle předpokladu stejnoměrně konvergentní v (a, b). Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje tedy n_0 tak, že pro všechna přirozená $n \geqq n_0$, $m \geqq n_0$ a pro všechna $\xi \in (a, b)$ je $|f_n'(\xi) - f_m'(\xi)| \leqq \varepsilon$ a tedy podle (14) je $|\varphi_n(h) - \varphi_m(h)| \leqq \varepsilon$ pro všechna $h \in (0, b - x_0)$ a pro všechna přirozená $n \geqq n_0$, $m \geqq n_0$. Tím je dokázána stejnoměrnost konvergence posloupnosti $\varphi_1(h), \varphi_2(h), \dots$ v $(0, b - x_0)$ a tedy i žádaná rovnost (13).

Z věty 42 plyne snadno věta o primitivní funkci k limitní funkci:

<u>Věta 42^a.</u> Nechť $f_1, f_2, \dots$ jsou funkce v intervalu (a, b) (omezeném nebo neomezeném), které mají tyto vlastnosti:

1) Posloupnost $f_1, f_2, \dots$ je stejnoměrně konvergentní v (a, b).

2) Každá funkce f_n má v (a, b) primitivní funkci F_n; volme tyto primitivní funkce tak, aby posloupnost $F_1(x), F_2(x), \dots$ byla konvergentní aspoň v jednom bodě intervalu (a, b) [4]. Potom platí:

I. Posloupnost $F_1, F_2, \dots$ je konvergentní v (a, b) a to stejnoměrně v každém omezeném intervalu $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$.

II. Označím-li $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, je F primitivní funkce k f v intervalu (a, b).

<u>Důkaz.</u> Je $F_n'(x) = f_n(x)$ pro všechna $x \in (a, b)$. Tedy mohu na posloupnost $F_1, F_2, \dots$ užít věty 42 a dostanu okamžitě větu 42^a.

Vidíte, že věta 42^a není vlastně nic jiného než věta 42, vyslovená jinými slovy.

Věta 42 nám říká, kdy je možno zaměnit pořádek operace "limita posloupnosti" a operace "derivace", tj. za jakých předpokladů lze tvrdit, že

$$\frac{d}{dx}\left(\lim_{n\to\infty} f_n(x)\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{df_n(x)}{dx} .$$

Věta 42^a nám obdobně říká, kdy je možno zaměnit pořadí operací "limita posloupnosti" a "primitivní funkce". Mohli bychom analogicky psát

$$\int \lim_{n\to\infty} f_n(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int f_n(x)\, dx ,$$

ale raději to tak nepíšme - je tam nekonečně mnoho "integračních konstant" a kdybychom je volili nevhodně, nemusela by limita vpravo vůbec existovat.

---

[4] Toho lze vždy dosáhnout, např. takto: zvolíme bod $c \in (a, b)$ a primitivní funkce (které jsou určeny až na aditivní konstantu) zvolíme tak, aby bylo $F_n(c) = 0$ pro všechna přirozená n.

Odvoďme ještě jednu jednoduchou větu pro určité integrály:

Věta 43. Buďte $f_1, f_2, \ldots$ funkce spojité v $\langle a, b\rangle$. Budiž $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ stejnoměrně v $\langle a, b\rangle$. Potom

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim \int_a^b f_n(x)\,dx .$$

Důkaz. Ježto integrál komplexní funkce $f = g + ih$ se definuje vzorcem $\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx + i\int_a^b h(x)\,dx$, můžeme se omezit na reálné funkce f_n. Ježto také f je spojitá v $\langle a, b\rangle$ podle věty 40, existují všechny napsané integrály. Budiž $\varepsilon > 0$. Existuje n_0 tak, že pro všechna $n \geqq n_0$ a všechna $x \in \langle a, b\rangle$ je $|f_n(x) - f(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{b-a}$. Pro všechna $n \geqq n_0$ je tedy

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f_n(x)\,dx\right| = \left|\int_a^b (f(x) - f_n(x))\,dx\right| \leqq \int_a^b |f(x) - f_n(x)|\,dx \leqq$$

$$\leqq \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}\,dx = \varepsilon ,$$

čímž je věta dokázána.

§ 5. Stejnoměrně konvergentní řady.

Budiž nyní dána nějaká posloupnost funkcí $v_1, v_2, \ldots$ (reálných nebo komplexních), definovaných v nějaké množině $M \neq \emptyset$ (prvky množiny M mohou být objekty jakéhokoliv druhu).

Vyšetřujeme řadu

(1) $$v_1(x) + v_2(x) + \ldots .$$

Její n-tý částečný součet označme s_n; tedy

(2) $$s_n(x) = v_1(x) + \ldots + v_n(x) .$$

Říkáme, že řada (1) je konvergentní v M, jestliže je konvergentní pro každé $x \in M$; její součet označme s, takže

(3) $$v_1(x) + v_2(x) + \ldots = \sum_{k=1}^{\infty} v_k(x) = s(x)$$

pro každé $x \in M$. To znamená, jak víme, totéž jako výrok, že posloupnost $s_1, s_2, \ldots$ konverguje k funkci s v množině M, tj.

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x) \quad \text{pro všechna } x \in M.$$

Definice: Jestliže posloupnost $s_1, s_2, \dots$ konverguje stejnoměrně v M (k funkci s), říkáme, že řada (1) konverguje stejnoměrně v M; její součet jest ovšem $s(x)$.

Poznámka 1. Vzhledem k tomu, že stejnoměrná konvergence řady znamená totéž jako stejnoměrná konvergence posloupnosti částečných součtů, můžeme řadu výsledků z § 3 přenést z posloupností na řady. Uveďme výslovně některé z nich (důkazy plynou okamžitě z příslušných vět o posloupnostech).

I. Jestliže řada konverguje stejnoměrně v M a je-li $\emptyset \neq N \subset M$, potom konverguje také stejnoměrně v N (viz § 3, pozn. 1).

II. Jestliže řada konverguje stejnoměrně v M_1 a také stejnoměrně v M_2, potom konverguje stejnoměrně v $M_1 \cup M_2$; obdobně pro konečný počet množin $M_1, M_2, \dots, M_k$ (viz § 3, pozn. 2).

III. Řada konverguje stejnoměrně v M tehdy a jen tehdy, jestliže řada reálných částí i řada imaginárních částí konvergují stejnoměrně v M (viz § 3, pozn. 3).

IV. Řada (1) konverguje stejnoměrně v množině $M \neq \emptyset$ tehdy a jen tehdy, je-li splněna podmínka (Bolzano-Cauchy):

(B.C.) Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje přirozené n_0 tak, že pro všechna přirozená p a pro všechna $x \in M$ je

$$|v_{n_0+1}(x) + v_{n_0+2}(x) + \dots + v_{n_0+p}(x)| \leqq \varepsilon .$$

Ekvivalentní je tato podmínka:

(B.C.)' Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje přirozené n_0 tak, že pro všechna přirozená n, m, vyhovující podmínce $n > m \geqq n_0$, a pro všechna $x \in M$ je $|v_{m+1}(x) + v_{m+2}(x) + \dots + v_n(x)| \leqq \varepsilon$ (viz větu 39).

V. Jsou-li funkce $v_1, v_2, \dots$ konstantní v množině M, a je-li pro některé $c \in M$ řada (1) konvergentní:

$$v_1(c) + v_2(c) + v_3(c) + \dots = S ,$$

je řada (1) konvergentní stejnoměrně v M a má tam všude týž součet S (viz pozn. 6 v § 3).

VI. Jestliže množina $M \neq \emptyset$ má jen konečný počet prvků, a jestliže řada (1) konverguje v M, potom konverguje stejnoměrně v M (viz pozn. 5. v § 3).

Důležitý bude pro nás tento pojem:

Definice: Buďte

(4) $\quad v_1(x) + v_2(x) + v_3(x) + \dots$

(5) $\quad w_1(x) + w_2(x) + w_3(x) + \dots$

dvě řady, jejichž členy jsou funkce, definované v množině $M \neq \emptyset$. Jestliže pro všechna přirozená n a pro všechna $x \in M$ je

$$(6) \qquad |u_n(x)| \leq v_n(x)$$

říkáme, že řada (5) je v množině M majorantní k řadě (4).

(Weierstrassova věta)

__Věta 44.__ Nechť řada (5) je v M majorantní k řadě (4). Nechť (5) je stejnoměrně konvergentní v M. Potom také řada

$$(7) \qquad |u_1(x)| + |u_2(x)| + \ldots$$

a rovněž řada (4) jsou stejnoměrně konvergentní v M.

__Důkaz__ plyne ihned z definice; neboť z nerovnosti

$$(8) \qquad v_{n_0+1}(x) + \ldots + v_{n_0+p}(x) \leq \varepsilon$$

plyne

$$(9) \qquad |u_{n_0+1}(x)| + \ldots + |u_{n_0+p}(x)| \leq \varepsilon ,$$

a z (9) plyne

$$(10) \qquad |u_{n_0+1}(x) + \ldots + u_{n_0+p}(x)| \leq \varepsilon .$$

__Poznámka 2.__ Odtud plyne také: Je-li (7) stejnoměrně konvergentní v M, je (4) stejnoměrně konvergentní v M. Zvláště jednoduchý je případ, kdy majorantní řada (5) má konstantní členy. Použijeme-li bodu V. z pozn. 1 (nebo přímo definice), dostáváme tuto větu (Weierstrass):

__Věta 45.__ Nechť $a_1 + a_2 + \ldots$ je konvergentní řada čísel; nechť pro všechna přirozená n a pro všechna $x \in M$ $(M \neq \emptyset)$ je $|u_n(x)| \leq a_n$. Potom řady

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots \quad , \quad |u_1(x)| + |u_2(x)| + \ldots$$

jsou stejnoměrně konvergentní v M.

__Příklad 1.__ Ježto řada $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots$ je konvergentní (viz § 2, příkl. 6), je řada

$$\frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\cos nx}{n^2} + \ldots$$

stejnoměrně konvergentní v $(-\infty, +\infty)$.

Je vidět, že věty 45 (a rovněž věty 44) lze s úspěchem použít jen tehdy, když řada (4) je absolutně konvergentní. Odvodíme nyní větu 46, která někdy umožňuje zjistit konvergenci také u řad, jež nejsou absolutně konvergentní. K tomu potřebujeme jednu identitu (jde o tzv. Abelovu parciální sumaci).

Buďte $a_1, a_2, \dots, a_p$; $b_1, b_2, \dots, b_p$ čísla, a označme

$$\sum_{j=1}^{k} a_j = \sigma_k \qquad \text{(ovšem } \sigma_0 = 0 \text{). Potom je}$$

$$\sum_{k=1}^{p} a_k b_k = \sum_{k=1}^{p} (\sigma_k - \sigma_{k-1}) b_k = \sum_{k=1}^{p} \sigma_k b_k - \sum_{k=1}^{p} \sigma_{k-1} b_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{p} \sigma_k b_k - \sum_{k=0}^{p-1} \sigma_k b_{k+1} \; ;$$

tedy celkem

$$\sum_{k=1}^{p} a_k b_k = \sum_{k=1}^{p-1} \sigma_k (b_k - b_{k+1}) + \sigma_p b_p. \tag{11}$$

<u>Věta 46.</u> Nechť $a_k(x)$ (komplexní), $b_k(x)$ ($k = 1, 2, \dots$) jsou definovány pro všechna $x \in M$ ($M \neq \emptyset$) ; nechť

$$b_1(x) \geq b_2(x) \geq b_3(x) \geq \dots, \; b_k(x) \geq 0 \qquad (k = 1, 2, \dots)$$

pro všechna $x \in M$. Nechť platí buďto

I: Existuje $C > 0$ tak, že pro všechna $x \in M$ a všechna přirozená k je $\left| \sum_{j=1}^{k} a_j(x) \right| \leq C$ a nechť

$$\lim_{k \to \infty} b_k(x) = 0 \quad \text{stejnoměrně v } M,$$

nebo

II: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x)$ konverguje stejnoměrně v M a existuje $C > 0$ tak, že pro všechna $x \in M$ je $b_1(x) \leq C$.

Potom řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k(x) \, b_k(x) \tag{12}$$

je stejnoměrně konvergentní v M .

<u>Důkaz.</u> Dokážeme, že (12) splňuje podmínku (B.C.). Jest

$$\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p} a_k(x) \, b_k(x) = \sum_{k=1}^{p} a_{n_0+k}(x) \, b_{n_0+k}(x) \; ;$$

položíme-li $\sigma_k(x) = a_{n_0+1}(x) + \dots + a_{n_0+k}(x)$, dostaneme podle (11)

$$\sum_{k=n_0+1}^{n_0+p} a_k(x) \, b_k(x) = \sum_{k=1}^{p-1} \sigma_k(x) \left(b_{n_0+k}(x) - b_{n_0+k+1}(x) \right) + \sigma_p(x) \, b_{n_0+p}(x)$$

Vezmeme nyní vlevo absolutní hodnotu, vpravo součet absolutních hodnot; ježto

$$b_{n_0+k}(x) - b_{n_0+k+1}(x) \geqq 0 \quad , \quad b_{n_0+p}(x) \geqq 0 \; ,$$

dostaneme

(13) $$\left| \sum_{k=n_0+1}^{n_0+p} a_k(x)\, b_k(x) \right| \leqq$$

$$\leqq \sum_{k=1}^{p-1} |\sigma_k(x)|\, (b_{n_0+k}(x) - b_{n_0+k+1}(x)) + |\sigma_p(x)|\, b_{n_0+p}(x) \; .$$

Případ I. Je zřejmě $|\sigma_k(x)| \leqq 2C$, takže z (13) vychází (jestliže místo každého $|\sigma_k(x)|$ píši $2C$)

(14) $$\left| \sum_{k=n_0+1}^{n_0+p} a_k(x)\, b_k(x) \right| \leqq 2C\, b_{n_0+1}(x) \; .$$

Budiž $\varepsilon > 0$; následkem stejnoměrné konvergence existuje n_0 tak, že $|b_{n_0+1}(x)| < \frac{\varepsilon}{2C}$ pro všechna $x \in M$. Tedy podle (14): pro všechna $x \in M$ a všechna přirozená p je

$$\left| \sum_{k=n_0+1}^{n_0+p} a_k(x)\, b_k(x) \right| < 2C \cdot \frac{\varepsilon}{2C} = \varepsilon \; ,$$

takže (12) je stejnoměrně konvergentní v M.

Případ II. Budiž $\varepsilon > 0$; existuje přirozené n_0 tak, že pro všechna přirozená k a pro všechna $x \in M$ je $|\sigma_k(x)| \leqq \frac{\varepsilon}{C}$. Podle (13) vychází jako dříve pro všechna $x \in M$ a všechna přirozená p

$$\left| \sum_{k=n_0+1}^{n_0+p} a_k(x)\, b_k(x) \right| \leqq \frac{\varepsilon}{C}\, b_{n_0+1}(x) \leqq \frac{\varepsilon}{C}\, b_1(x) \leqq \frac{\varepsilon}{C} \cdot C = \varepsilon \; ,$$

takže (12) je opět stejnoměrně konvergentní v M .

Větu 46 by bylo možno poněkud zobecnit, ale nebudeme to provádět, abychom nedostali příliš nepřehledné výsledky.

<u>Příklad 2.</u> Vyšetřujeme řadu

(15) $$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k}$$

pro reálná x . Řada není absolutně konvergentní pro žádné reálné x , neboť $|e^{ikx}| = |\cos kx + i \sin kx| = \sqrt{\cos^2 kx + \sin^2 kx} = 1$, takže řada absolutních hodnot je divergentní (harmonická) řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$.

Položme ve větě 46 $a_k(x) = e^{ikx}$, $b_k(x) = \frac{1}{k}$. Je $\lim_{k\to\infty} b_k(x) = 0$, a to stejnoměrně v $(-\infty, +\infty)$, protože $b_k(x)$ jsou konstantní (viz začátek § 5). Vezmeme tedy případ I; máme vyšetřit součty

$$\sum_{j=1}^{k} a_j(x) = \sum_{j=1}^{k} e^{ijx}. \tag{16}$$

To je konečná geometrická řada o kvocientu e^{ix}, a její součet je

$e^{ix}\dfrac{e^{ikx}-1}{e^{ix}-1}$, pokud $e^{ix} = \cos x + i\sin x \neq 1$, tj. pokud x není tvaru $2m\pi$ (m celé). Ježto

$$e^{ix}-1 = e^{\frac{1}{2}ix}(e^{\frac{1}{2}ix} - e^{-\frac{1}{2}ix}) = e^{\frac{1}{2}ix}\, 2i\sin\frac{x}{2},$$

je součet (16) roven

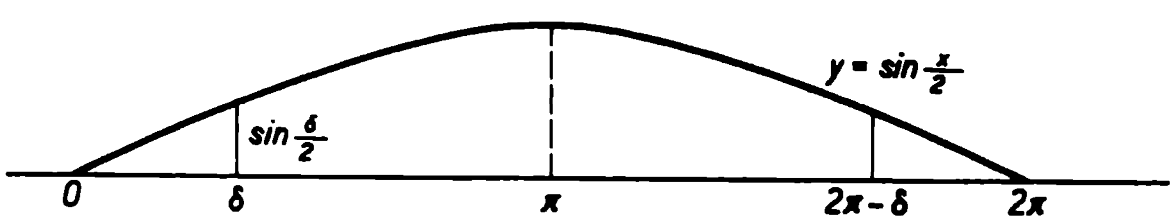
$$e^{\frac{1}{2}ix}\,\frac{e^{ikx}-1}{2i\sin\frac{x}{2}}.$$ Ježto pro reálné y je $|e^{iy}| = 1$, je

$$\left|\sum_{j=1}^{k} a_j(x)\right| \leq \frac{2}{2\,|\sin\frac{x}{2}|} = \frac{1}{|\sin\frac{x}{2}|}, \tag{17}$$

pokud x není tvaru $2m\pi$ (m celé).

Ježto všechny funkce $e^{ikx} = \cos kx + i\sin kx$ mají periodu 2π, stačí vyšetřovat řadu (15) v intervalu $\langle 0, 2\pi\rangle$. Pro $x = 0$ a $x = 2\pi$ je $e^{ikx} = 1$, a tedy řada (15) je divergentní řada $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}$. Vyšetřujme tedy interval $(0, 2\pi)$. Je-li $0 < x < 2\pi$, je $0 < \frac{x}{2} < \pi$. Zvolme libovolné δ $(0 < \delta < \pi)$. Potom pro $\delta \leq x \leq 2\pi - \delta$ je $\sin\frac{x}{2} \geq \sin\frac{\delta}{2}$ (obr. 26) a tedy podle (17)

$$\left|\sum_{j=1}^{k} a_j(x)\right| \leq \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}.$$



Obr. 26.

Tedy můžeme užít věty 46, I s hodnotou $C = \dfrac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}$. Dostáváme: zvolíme-li libovolné $\delta \in (0, \pi)$, je řada (15) stejnoměrně konvergentní v $\langle\delta, 2\pi - \delta\rangle$; ježto δ mohu volit libovolně blízko nule, je řada (15) konvergentní v $(0, 2\pi)$[1])

---

[1]) Nemohu ovšem už tvrdit, že je stejnoměrně konvergentní v $(0, 2\pi)$; dá se dokázat, že není stejnoměrně konvergentní v $(0, 2\pi)$.

(neboť je-li x dané číslo, $0 < x < 2\pi$, mohu volit $\delta > 0$ tak, že $\delta \leqq x \leqq 2\pi - \delta$). Následkem periodičnosti můžeme tedy vyslovit tento výsledek:

Řada (15) je divergentní (má součet $+\infty$) ve všech bodech $x = 2m\pi$ (m celé). Pro ostatní reálná x je konvergentní. Vezmu-li libovolné $\delta \in (0, \pi)$, je řada stejnoměrně konvergentní v množině, kterou dostanu, když z E_1 vynechám všechny intervaly

$$(2m\pi - \delta\ ,\ 2m\pi + \delta) \qquad (m \text{ celé}).$$

Jak jsme poznamenali, není řada (15) absolutně konvergentní pro žádné reálné x.

<u>Poznámka 3</u> (důležitá). Konvergentní řadu čísel můžeme pojímat jako řadu funkcí konstantních v nějaké množině M, která je ovšem podle poznámky 1 bodu V. stejnoměrně konvergentní v M. Můžeme tedy věty 46 použít také na řady s konstantními členy a dostáváme tuto větu: Buďte dána komplexní čísla $a_1, a_2, \ldots$ a nezáporná čísla $b_1, b_2, b_3, \ldots$ taková, že $b_1 \geqq b_2 \geqq b_3 \geqq \ldots$, $b_n \geqq 0$. Nechť platí buďto

I. Existuje $C > 0$ tak, že pro všechna přirozená k je

$$\left|\sum_{j=1}^{k} a_j\right| \leqq C \quad \text{a nechť} \quad \lim_{n\to\infty} b_n = 0 \ ;$$

nebo

II. $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ je konvergentní řada [2]. Potom řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ je konvergentní.

Z této věty plyne např. okamžitě Leibnizovo kriterium (věta 35): Nechť $b_1 \geqq b_2 \geqq b_3 \geqq \ldots$, $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ (takže jistě $b_n \geqq 0$).

Potom řada $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots$ je konvergentní. Důkaz: Položím-li $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $a_3 = 1$, $a_4 = -1$, ..., dostaneme $\sum_{j=1}^{k} a_j = 0$ nebo 1, a podle I. je $b_1 - b_2 + b_3 - b_4 + \ldots$ konvergentní.

Všimněme si ještě trochu podrobněji případu II s tohoto hlediska: Je dána konvergentní řada (s komplexními členy)

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \tag{18}$$

a posloupnost (s komplexními členy)

---

[2] Ježto b_1 je konstantní, odpadá podmínka $b_1(x) \leqq C$.

(19) $\qquad b_1, b_2, \dots$

Ptáme se, co se dá říci o konvergenci řady

(20) $$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n .$$

Platí předně: <u>Je-li</u> (18) <u>absolutně konvergentní a</u> (19) <u>omezená, je</u> (20) <u>absolutně konvergentní</u>. <u>Důkaz.</u> Řada

$$\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

je konvergentní, takže její částečné součty jsou omezené:

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k| \leqq A \ ;$$

dále je $|b_n| \leqq B$ pro všechna n, tedy

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqq AB$$; tedy je (20) absolutně konvergentní.

Je-li však (18) neabsolutně konvergentní, existuje omezená posloupnost (19) tak, že (20) diverguje.

<u>Důkaz.</u> Volme b_n takto: je-li $a_n = 0$, budiž $b_n = 1$; je-li $a_n \neq 0$, budiž $b_n = \frac{|a_n|}{a_n}$. Tedy je (19) omezená, neboť $|b_n| = 1$, ale řada (20) je totožná s divergentní řadou $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$. Je-li tedy (18) jen neabsolutně konvergentní, je nutno klást na (19) ještě další podmínky, má-li být zaručena konvergence řady (20). Platí tato věta: <u>Je-li</u> (18) <u>konvergentní a</u> (19) <u>omezená a monotonní</u> (tedy jsou b_n reálná, jinak by nebylo možno mluvit o monotonii), <u>je</u> (20) <u>konvergentní</u>.

<u>Důkaz.</u> Bez újmy obecnosti budiž (19) nerostoucí (jinak bychom všechno násobili číslem -1). Ježto je (19) také omezená, existuje vlastní $\lim_{n\to\infty} b_n = b$. Posloupnost čísel $c_n = b_n - b$ je nerostoucí, $\lim_{n\to\infty} c_n = 0$. Podle II je tedy $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$ konvergentní. Také $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b$ je ovšem konvergentní, a tedy je konvergentní i řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(c_n + b)$, tj. řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$.

<u>Poznámka 4.</u> (důležitá). Buďte $v_1, v_2, v_3, \dots$ funkce (komplexní), definované v neprázdné množině $M \subset E_k$. Položme $s_n(x) = v_1(x) + v_2(x) + \dots + v_n(x)$. Ježto stejnoměrná konvergence řady $v_1(x) + v_2(x) + \dots$ v M znamená totéž jako stejnoměrná konvergence posloupnosti $s_1(x), s_2(x), \dots$ v M, můžeme věty 40, 42, 42[a], 43 přenést okamžitě na řady:

I. Jsou-li funkce $v_1, v_2, \ldots$ spojité v množině $M \subset E_k$ a je-li řada $v_1(x) + v_2(x) + \ldots = s(x)$ stejnoměrně konvergentní v M, je též funkce s spojitá v M.

II. Nechť funkce $v_1, v_2, \ldots$ (komplexní funkce jedné reálné proměnné) mají tyto vlastnosti:

1. Funkce $v_1, v_2, \ldots$ mají v (a, b) vlastní derivace $v_1', v_2', \ldots$

2. Řada

(21) $$v_1(x) + v_2(x) + \ldots$$

je konvergentní aspoň v jednom bodě intervalu (a, b).

3. Řada

(22) $$v_1'(x) + v_2'(x) + \ldots$$

je stejnoměrně konvergentní v (a, b).

Potom platí:

a) Řada (21) je konvergentní v (a, b) a to stejnoměrně v každém omezeném intervalu $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$.

b) Označím-li $s(x)$ součet řady (21), má funkce s v (a, b) vlastní derivaci
$$s'(x) = v_1'(x) + v_2'(x) + \ldots$$

(Říká se, že řadu (21) lze derivovat "člen po členu").

III. Nechť funkce $v_1, v_2, \ldots$ (komplexní funkce jedné reálné proměnné) mají tyto vlastnosti:

1. Řada $v_1(x) + v_2(x) + \ldots = s(x)$
je stejnoměrně konvergentní v (a, b).

2. Každá funkce v_n má v (a, b) primitivní funkci V_n. Tyto primitivní funkce zvolme tak, aby řada

(23) $$V_1(x) + V_2(x) + \ldots$$

byla konvergentní aspoň v jednom bodě intervalu (a, b) (to je možno).

Potom platí:

a) Řada (23) je konvergentní v (a, b), a to stejnoměrně v každém omezeném intervalu $(\alpha, \beta) \subset (a, b)$.

b) Součet řady (23) je v (a, b) primitivní funkcí k funkci s.

IV. Nechť $v_1, v_2, \ldots$ (komplexní funkce jedné reálné proměnné) jsou spojité v $\langle a, b \rangle$ a nechť

$$\sum_{n=1}^{\infty} v_n(x) = s(x) \quad \text{stejnoměrně v} \quad \langle a, b \rangle .$$

Potom

$$\int_a^b s(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b v_n(x)\,dx .$$

Důkaz těchto čtyř vět dostaneme okamžitě z vět 40, 42, 42[a], 43, uvědomíte-li si ještě toto: Ze spojitosti funkcí $v_1, v_2, \ldots$ plyne spojitost funkcí $s_1, s_2, \ldots, s_n = v_1 + \ldots + v_n$; z existence vlastních derivací $v_1', v_2', \ldots$ plyne $s_n' = v_1' + \ldots + v_n'$; jsou-li $V_1, \ldots, V_n$ primitivní funkce k $v_1, \ldots, v_n$, je $V_1 + \ldots + V_n$ primitivní funkcí k s_n ; a konečně

$$\int_a^b s_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \int_a^b v_k(x)\,dx .$$

Věty I, II, III, IV jsou stejně důležité (ač jsem je nečísloval) jako příslušné věty o posloupnostech.

§ 6. Mocninné řady.

Buďte dána komplexní čísla $a_0, a_1, a_2, \ldots$ a komplexní číslo x_0. Budeme vyšetřovat řadu

$$(1) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n \quad \text{tj.} \quad a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \ldots$$

Přitom x bude "komplexní proměnná" - přesněji řečeno, budeme studovat, jak závisí vlastnosti řady (1) na hodnotě komplexního čísla x.

Řada tvaru (1) se nazývá mocninná řada o středu x_0 ; čísla $a_0, a_1, \ldots$ se nazývají její koeficienty.[1] Položíme-li $x - x_0 = Z$ (v Gaussově rovině to znamená posunutí), vidíme, že se můžeme omezit na vyšetřování mocninných řad o středu 0 , tj. řad

$$(2) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{tj.} \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots$$

Bude nás především zajímat, jak vypadá obor konvergence řady (2), tj. pro která x je řada (2) konvergentní, pro která x je divergentní. Uvidíte, že tento obor je poměrně jednoduchý. Odvodíme napřed dvě jednoduché věty.

Věta 47. Je-li řada (2) konvergentní pro nějakou hodnotu $x_1 \neq 0$, je absolutně konvergentní pro každou hodnotu x , pro kterou $|x| < |x_1|$.

Poznámka. Množina těch x , pro něž $|x| < |x_1|$, je vnitřek kruhu o středu v počátku a o poloměru $|x_1|$.

---

[1] a_0 se nazývá také "prostý člen" řady (1).

Důkaz věty 47. Ježto řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ konverguje, má posloupnost čísel $a_n x_1^n$ limitu 0 (podle věty 22) a tedy je omezená: $|a_n x_1^n| < C$. Tedy

(3) $$|a_n x^n| = |a_n x_1^n| \cdot \left|\frac{x}{x_1}\right|^n \leqq C \left|\frac{x}{x_1}\right|^n.$$

Zvolme nějaké x takové, že $|x| < |x_1|$. Potom číslo $q = \left|\frac{x}{x_1}\right|$ je v intervalu $0 \leqq q < 1$, takže řada $\sum_{n=0}^{\infty} C\left|\frac{x}{x_1}\right|^n$ je konvergentní geometrická řada. Podle (3) a podle věty 29 konverguje tedy též řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$.

Věta 48. Je-li řada (2) absolutně konvergentní pro nějakou hodnotu $x_1 \neq 0$, jsou řady

(4) $$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|, \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

stejnoměrně konvergentní v kruhu $|x| \leqq |x_1|$.

Důkaz: Pro každé $|x| \leqq |x_1|$ je $|a_n x^n| \leqq |a_n x_1^n|$. Konvergentní řada s konstantními členy $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x_1^n|$ je tedy v kruhu $|x| \leqq |x_1|$ majorantní řadou k řadě (2). Věta 48 nyní plyne z věty 45.

Vyšetřujeme nyní obor konvergence řady

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

Pro $x = 0$ je ovšem tato řada konvergentní a má součet a_0. Jsou možné tyto případy:

1. Řada (2) konverguje jen pro $x = 0$. Příklad: Řada $\sum_{n=0}^{\infty} n^n x^n$. Zde je $\sqrt[n]{|n^n x^n|} = n|x|$; limita tohoto výrazu pro $n \to \infty$ je $+\infty$, jestliže $x \neq 0$. Z odmocninového kriteria (věta 31) plyne divergence.

2. Řada (2) konverguje pro všechna komplexní x. Podle věty 47 je potom řada (2) dokonce absolutně konvergentní pro všechna x.

Příklad: Řada $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$. Zde je $\sqrt[n]{\left|\frac{x^n}{n^n}\right|} = \frac{|x|}{n}$ a tento výraz má pro $n \to +\infty$ limitu 0, ať je x jakékoliv.

3. Zbývá tento případ: Existuje $x_1 \neq 0$, pro které řada (2) konverguje a existuje x_2, pro které řada (2) diverguje (je ovšem též $x_2 \neq 0$). Sestrojme množinu M absolutních hodnot všech čísel x, pro něž řada (2) konverguje. Tj.: číslo a patří do M tehdy a jen tehdy, je-li $a = |x|$ pro některé x, pro které řada (2) konverguje. Množina M se skládá jen z nezáporných čísel. Patří do ní kladné číslo $|x_1|$. Tvrdím, že do M nepatří žádné číslo větší než $|x_2|$.

Důkaz: Nechť číslo $a > |x_2|$ je prvkem M; z toho odvodíme spor. Vztah $a \in M$ znamená, že existuje x_3 tak, že $|x_3| = a$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_3^n$ konverguje. Ježto $|x_2| < a$, konvergovala by podle věty 47 též řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_2^n$ (dokonce absolutně), ale to není pravda. Množina M tedy obsahuje číslo $|x_1| > 0$, ale neobsahuje žádné číslo větší než $|x_2|$, tedy je neprázdná, shora omezená a má tedy supremum: $\sup M = R$. Jest ovšem $R \geq |x_1|$, tedy $R > 0$. Je-li $|x| > R$, není $|x| \in M$, tedy řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ diverguje (kdyby totiž konvergovala, bylo by $|x| \in M$).

Tvrdím nyní: Je-li $|x| < R$, je řada (2) absolutně konvergentní.

Důkaz: Ježto $R = \sup M$, $|x| < R$, existuje $a \in M$ tak, že $a > |x|$. Ježto $a \in M$, existuje x_4 tak, že $a = |x_4|$ a řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_4^n$ konverguje. Ale $|x| < |x_4|$; podle věty 47 je tedy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ absolutně konvergentní.

V případě 3. (to byl případ, kdy řada pro některé $x \neq 0$ konverguje a pro některé $x \neq 0$ diverguje) jsme tedy dostali jisté kladné číslo R, které má tuto vlastnost:

(V) Je-li $|x| < R$, je řada (2) absolutně konvergentní, je-li $|x| > R$, je řada (2) divergentní.

Kruhu $|x| < R$ se říká <u>kruh konvergence</u>; kružnici o rovnici $|x| = R$ se říká <u>konvergenční kružnice</u> řady (2), číslu R se říká <u>poloměr konvergence</u> řady (2). Řada je konvergentní - a to dokonce absolutně - v kruhu konvergence, tj. uvnitř konvergenční kružnice, diverguje vně této kružnice. V bodech konvergenční kružnice nastává někdy konvergence, někdy divergence - podle toho, o kterou řadu a o který bod kružnice $|x| = R$ jde. Abychom také krajní případy 1. (řada konverguje jen pro $x = 0$) a 2. (řada konverguje pro všechna x) sem mohli zahrnout, definujeme $R = 0$ v případě 1, $R = +\infty$ v případě 2; zřejmě je vlastnost (V) splněna i v těchto případech. Shrňme:

<u>Věta 49.</u> Ke každé mocninné řadě

$$(2) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

existuje číslo R $(0 \leq R \leq +\infty)$ zvané <u>poloměr konvergence</u> řady (2), které má tuto vlastnost: Je-li $|x| < R$, je řada (2) absolutně konvergentní; je-li $|x| > R$, je (2) divergentní.

<u>Poznámka 1.</u>

Že je číslo R řadou (2) jednoznačně určeno, je jasné. Jde-li o řadu (1) (se středem x_0), můžeme položit $Z = x - x_0$, a jde o konvergenci řady

$\sum_{n=0}^{\infty} a_n Z_n$. Podle věty 49 existuje číslo R ($0 \leq R \leq +\infty$) tak, že řada $\sum a_n Z^n$ konverguje absolutně pro $|Z| < R$, diverguje pro $|Z| > R$. Tedy řada (1) konverguje absolutně pro $|x - x_0| < R$, diverguje pro $|x - x_0| > R$. Také zde se číslu R říká poloměr konvergence řady (1). V případě $0 < R < +\infty$ je "konvergenční kružnicí" kružnice o rovnici $|x - x_0| = R$, mající poloměr R a střed x_0. V dalším už nebudu většinou taková jednoduchá přenesení vět z řad (2) (o středu 0) na řady (1) s libovolným středem x_0 provádět.

Věta 50. Nechť řada (2) má kladný poloměr konvergence R ($0 < R \leq +\infty$). Budiž $0 < \rho < R$. Potom řada (2) i řada $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ jsou stejnoměrně konvergentní v kruhu $|x| \leq \rho$ [2].

Důkaz. Poněvadž $|\rho| = \rho < R$, je řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$ absolutně konvergentní podle věty 49, a tvrzení plyne z věty 48.

Poznámka 2. Věta 50 nám dává příležitost varovat před omylem, častým u začátečníků. Mějme mocninnou řadu (2) s poloměrem konvergence $R > 0$. Volme rostoucí posloupnost kladných čísel $\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \ldots$ tak, že $\lim_{n\to\infty} \rho_n = R$. Potom kruh $|x| < R$ je sjednocením kruhů $|x| < \rho_n$, v každém kruhu $|x| < \rho_n$ je řada (2) stejnoměrně konvergentní, a přesto nemusí být stejnoměrně konvergentní v kruhu $|x| < R$. Ukažme to na příkladu geometrické řady $1 + x + x^2 + \ldots$, která má poloměr konvergence 1 a součet $s(x) = \frac{1}{1-x}$ pro $|x| < 1$; rozdíl čísel $s(x)$ a $s_n(x) = 1 + x + \ldots + x^{n-1}$ je $r_n(x) = \frac{x^n}{1-x}$. Kdyby řada byla stejnoměrně konvergentní v kruhu $|x| < 1$, musilo by ke každému $\varepsilon > 0$ existovat n_0 tak, že pro všechna $n \geq n_0$ a všechna $|x| < 1$ by bylo $|r_n(x)| \leq \varepsilon$. Ale to není možné, neboť pro každé n je např. $\lim_{x\to 1-} r_n(x) = +\infty$, takže žádná funkce r_n není omezená na intervalu $(-1, 1)$ a tedy ani v kruhu $|x| < 1$.

Je-li $R > 0$, definuje součet řady (2) v oboru $|x| < R$ jistou funkci $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. Je to funkce komplexní proměnné. Zajímají nás vlastnosti funkce f, např. otázka, zda součet řady $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ je roven derivaci funkce f.

Ovšem pojem derivace jsme zavedli pouze pro funkce (reálné nebo komplexní) reálné proměnné - pojem derivace pro funkce komplexní proměnné poznáte až v přednášce o analytických funkcích. Ale přesto vyšetříme, jak je to s konvergencí řady $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$; bude nám to užitečné. Kdo se však chce již nyní

---

[2] U řad se středem x_0 by bylo třeba psát $|x - x_0| \leq \rho$.

dověděl, jak to je s derivací funkce komplexní proměnné, nechť si po větě 52 přečte § 5 v Dodatku, kde je věta 52 zobecněna na komplexní x.

Věta 51. Řada

(2) $$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

má týž poloměr konvergence jako řada

(5) $$\sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Důkaz. Budiž R poloměr konvergence řady (2). Číslo R můžeme také charakterisovat takto: řada (2) je pro $|x| < R$ absolutně konvergentní, pro $|x| > R$ není absolutně konvergentní (neboť je dokonce divergentní).

Budiž napřed $|x| > R$. Řada $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^n|$ je tedy divergentní; násobím-li všechny členy číslem $\frac{1}{|x|}$, dostanu, že $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n x^{n-1}|$ je divergentní; ježto $|n a_n x^{n-1}| \geqq |a_n x^{n-1}|$, je také $\sum_{n=1}^{\infty} |n a_n x^{n-1}|$ divergentní, tj. (5) není absolutně konvergentní pro $|x| > R$.

Budiž za druhé $|x| < R$. Lze tedy volit číslo ρ tak, že $|x| < \rho < R$. Řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \rho^n$ je tedy konvergentní (dokonce absolutně), tedy je $\lim_{n\to\infty} a_n \rho^n = 0$, $\lim_{n\to\infty} a_n \rho^{n-1} = \frac{1}{\rho} . \lim_{n\to\infty} a_n \rho^n = 0$, takže posloupnost čísel $a_n \rho^{n-1}$ je konvergentní a tedy omezená: $|a_n \rho^{n-1}| < C$ pro $n = 1, 2, 3, \ldots$

Dále je

(6) $$|n a_n x^{n-1}| = n |a_n \rho^{n-1}| \left(\frac{|x|}{\rho}\right)^{n-1} \leqq n C \left(\frac{|x|}{\rho}\right)^{n-1}.$$

Řada $\sum_{n=1}^{\infty} n C \left(\frac{|x|}{\rho}\right)^{n-1}$ s nezápornými členy je však konvergentní podle podílového kriteria (vyloučíme-li totiž triviální případ $x = 0$, je podíl dvou po sobě následujících členů $\frac{n+1}{n} . \frac{|x|}{\rho}$, což má pro $n \to \infty$ limitu $\frac{|x|}{\rho} < 1$).

Podle (6) je tedy řada (5) absolutně konvergentní pro $|x| < R$. Tedy řada (5) je absolutně konvergentní pro $|x| < R$, ale není absolutně konvergentní pro $|x| > R$. Tedy je číslo R (tj. poloměr konvergence řady (2)) také poloměrem konvergence řady (5).

Vezmeme nyní řadu $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ s kladným poloměrem konvergence R ($0 < R \leqq +\infty$) a budeme vyšetřovat její součet

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{7}$$

pro reálná x intervalu $(-R, R)$ (po případě i pro $x = R$ nebo $x = -R$, jestliže řada je pro tyto hodnoty konvergentní[3]).

Věta 52. Nechť řada (2) má poloměr konvergence R ($0 < R \leq +\infty$); potom funkce (7) (komplexní funkce reálné proměnné) má v $(-R, R)$ derivaci

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \tag{8}$$

Důkaz. Vezměme pevný bod x_0 ($-R < x_0 < R$); máme zjistit, že funkce f má v bodě x_0 derivaci a vypočítat ji. Zvolme číslo ρ tak, že $-R < -\rho < x_0 < \rho < R$ (to je možno). Ježto podle věty 51 má řada v (8) též poloměr konvergence R, je řada v (8) podle věty 50 stejnoměrně konvergentní v kruhu $|x| \leq \rho$, a tedy tím spíše v otevřeném intervalu $-\rho < x < \rho$. Řada v (7) je konvergentní v intervalu $(-R, R)$, tedy též v $(-\rho, \rho)$, a derivace členu $a_n x^n$ je $n a_n x^{n-1}$ pro $n \geq 1$; derivace členu a_0 je nula. Podle věty II v pozn. 4 § 5 má tedy funkce f pro $-\rho < x < \rho$ derivaci, danou vzorcem (8); ten tedy platí speciálně i pro naši hodnotu x_0.

Poznámka 3. Smysl věty 52 je tento: v intervalu $(-R, R)$ lze derivovat řadu v (7) "člen po členu" a řada, kterou takto dostaneme, má za součet derivaci funkce f. Ježto řada v (8) má opět poloměr konvergence R, můžeme na ni opět použít věty 52, a dostaneme

$$f''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2},$$

odtud

$$f'''(x) = \sum_{n=3}^{\infty} n(n-1)(n-2) a_n x^{n-3}$$

atd., všechno pro $x \in (-R, R)$.

Podobně bychom mohli sestrojit mocninnou řadu pro funkci primitivní k f, užívajíce věty III z § 5, pozn. 4. Ale můžeme to také provést přímo z věty 52. Sestrojme řadu

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}; \tag{9}$$

ježto derivováním členu $\frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ dostanu $a_n x^n$, mohu užít věty 51 a vidím, že řady (7), (9) mají týž poloměr konvergence R. Podle věty 52 je pak funkce f ze vzorce (7) derivací funkce, rovné součtu řady (9); tj. funkce

---

[3] Úmyslně (aby to bylo nápadnější) užívám v tomto paragrafu písmena x u těch vět, kde jde o reálné hodnoty proměnné.

$$\mathcal{F}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} \tag{10}$$

je v $(-R, R)$ primitivní funkcí k funkci f (integrování mocninné řady člen po členu). Řada v (10) nemá "prostý člen"; nejobecnější primitivní funkci k f v $(-R, R)$ ovšem dostanu, přidám-li libovolný "prostý člen", tj. konstantu.

Nechť má řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ kladný konečný poloměr konvergence R; její součet $f(x)$ je potom definován pro všechna $|x| < R$ a dále ještě v těch bodech kružnice $|x| = R$, ve kterých je řada konvergentní. Vyšetřujeme opět funkci

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \tag{7}$$

pro reálná x. V intervalu $(-R, R)$ má f podle věty 52 derivaci (vlastní) a je tam tedy spojitá. Vyšetříme ještě, jak se funkce f chová např. v intervalu $(-R, R\rangle$, jestliže je řada (7) konvergentní také pro $x = R$.

Věta 53 (Abel). Nechť řada v (7) má kladný konečný poloměr konvergence R. Potom platí:

I. Je-li řada v (7) konvergentní pro $x = R$, je stejnoměrně konvergentní v intervalu $\langle 0, R\rangle$ a tedy funkce f je spojitá v intervalu $(-R, R\rangle$ [4].

II. Je-li řada v (7) konvergentní pro $x = -R$, je stejnoměrně konvergentní v $\langle -R, 0\rangle$ a tedy funkce f je spojitá v $\langle -R, R)$.

Poznámka 4. II plyne snadno z I, užiji-li substituce $-x = y$.

Důkaz věty 53. Podle poznámky právě učiněné stačí dokázat, že z konvergence řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \tag{11}$$

plyne stejnoměrná konvergence řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{v intervalu} \quad \langle 0, R\rangle . \tag{12}$$

K důkazu užijeme věty 46. Řadu (12) pišme ve tvaru

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n \cdot \left(\frac{x}{R}\right)^n \tag{13}$$

---

4) Spojitost v $(-R, R)$ plyne např. z existence derivace (věta 52), spojitost v $\langle 0, R\rangle$ plyne ze stejnoměrné konvergence (věta 40).

a ve větě 46, II píšme $a_n R^n$ místo $a_n(x)$, $\left(\frac{x}{R}\right)^n$ místo $f_n(x)$ [5].
V intervalu $0 \leq x \leq R$ je

$$1 = \left(\frac{x}{R}\right)^0 \geq \left(\frac{x}{R}\right)^1 \geq \left(\frac{x}{R}\right)^2 \geq \ldots \geq 0$$

a dále řada $\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n$ je konvergentní řada s konstantními členy, tedy je stejnoměrně konvergentní v intervalu $0 \leq x \leq R$. Podle věty 46, II je tedy řada (13) (tj. řada (12)) stejnoměrně konvergentní v $\langle 0, R\rangle$. Důkaz je hotov.

__Poznámka 5.__ Spojením obou tvrzení věty 53 dostáváme ovšem toto: Je-li řada (7) konvergentní pro $x = R$ i pro $x = -R$, je stejnoměrně konvergentní v $\langle -R, R\rangle$ a funkce f je spojitá v $\langle -R, R\rangle$.

S důležitými řadami mocninnými jsme se setkali už v 1.ročníku, když jsme rozvíjeli některé funkce v Maclaurinovu řadu; přirozeně jsme si všímali tehdy jen reálných x. Dostali jsme rozvoje

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} ,$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} ,$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} .$$

Dokázali jsme tehdy, že tyto vzorce platí pro všechna reálná x, takže mocninné řady vpravo mají nutně poloměr konvergence $+\infty$ a jsou tedy absolutně konvergentní i pro všechna __komplexní__ x. Dále jsme dokázali

$$\lg(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad \text{pro} \quad -1 < x \leq 1 ,$$

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \binom{m}{2}x^2 + \ldots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n \quad \text{pro} \quad -1 < x < 1 .$$

Tyto řady (tzv. logaritmická a binomická) mají poloměr konvergence 1, jak se snadno přesvědčíte podílovým kriteriem; výjimku tvoří binomická řada pro hodnoty $m = 0, 1, 2, \ldots$, která má poloměr konvergence $+\infty$. V tomto případě je totiž $\binom{m}{n} = 0$ pro $n > m$, a vzorec se redukuje na tzv. __binomickou formuli__

$$(1+x)^m = \sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} x^n \quad (m \text{ celé nezáporné}) ,$$

která platí dokonce pro všechna __komplexní__ x.

---

[5] Začínáme s indexem 0, ve větě 46 se začínalo s indexem 1, ale to ovšem nevadí.

1014-4527

Vyhnuli jsme se v 1.ročníku funkcím $\operatorname{arctg} x$, $\arcsin x$, protože se nám výpočet postupných derivací (kterých je zapotřebí k odvození Taylorovy řady) zdál obtížný. Teď můžeme tuto mezeru vyplnit.

Příklad 1. Derivace funkce $\operatorname{arctg} x$ je $\dfrac{1}{1+x^2}$. Pro $-1 < x < 1$ je

$$(14) \qquad \frac{1}{1+x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \dots$$

(součet geometrické řady o kvocientu $-x^2$). Řada vpravo má poloměr konvergence 1 (neboť pro $x = 1$ je řada $1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ už divergentní). Ježto podle věty 52 (vlastně podle pozn. 3) můžeme integrovat člen po členu, je pro $-1 < x < 1$

$$(15) \qquad x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \int \frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x + C$$

(C je konstanta). Ježto pro $x = 0$ je součet řady vlevo roven nule a též $\operatorname{arctg} 0 = 0$, je $C = 0$.

Podle věty 51 má řada (15) stejný poloměr konvergence R jako řada (14), tedy $R = 1$. Jak je to pro $x = 1$, $x = -1$? Pro $x = 1$ dostáváme z (15) řadu $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$, jež je konvergentní podle Leibnizova kriteria (věta 35); pro $x = -1$ se pouze všechny členy poslední řady násobí -1 . Tedy řada (15) je konvergentní v $\langle -1, 1 \rangle$. Podle věty 53 (vlastně podle poznámky 5) je řada v (15) stejnoměrně konvergentní v $\langle -1, 1 \rangle$ a její součet je funkce spojitá v $\langle -1, 1 \rangle$. Pro $-1 < x < 1$ máme již

$$(16) \qquad x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots = \operatorname{arctg} x \; ;$$

ježto součet řady (16) je funkce spojitá v bodě 1 zleva (a obdobně v bodě -1 zprava), je

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \lim_{x \to 1-} \operatorname{arctg} x = \operatorname{arctg} 1$$

(neboť $\operatorname{arctg} x$ je také spojitá v $\langle -1, 1 \rangle$, dokonce v $(-\infty, +\infty)$). Tedy rovnice (16) platí i pro $x = 1$ a obdobně pro $x = -1$. Tedy celkem:

<u>Rovnice (16) platí v intervalu $\langle -1, 1 \rangle$; pro $|x| > 1$ je řada v (16) divergentní.</u>

Poznamenejme, že jsme si dosud neodvodili žádný postup k numerickému počítání čísla π . Z (16) plyne pro $x = 1$ tato pěkná formule:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

K numerickému výpočtu se tato řada nehodí (konverguje příliš pomalu). Trochu rychleji konvergentní řadu dostaneme pro $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ (potom $\operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{6}$):

$$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{1}{5}\cdot\frac{1}{3^2} - \frac{1}{7}\cdot\frac{1}{3^3} + \frac{1}{9}\cdot\frac{1}{3^4} - \ldots\right).$$

Existují však daleko výhodnější vzorce pro počítání čísla π, viz třeba D I, kap. XII, § 5.

Příklad 2. Odvoďme obdobně rozvoj funkce $\arcsin x$. Jest $(\arcsin x)' = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Pro $-1 < t < 1$ dává binomická řada

$$(1+t)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{-\frac{1}{2}}{n} t^n, \text{ a tedy pro } t = -x^2$$

(17) $$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} x^{2n}.$$

Snadno vypočtete

$$(-1)^n \binom{-\frac{1}{2}}{n} = \frac{1.3.5\ldots(2n-1)}{2.4.6\ldots(2n)}.$$

Dosaďme do (17) a integrujeme podle pozn. 3 člen po členu; dostáváme pro $-1 < x < 1$

(18) $$\arcsin x = \frac{x}{1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{x^3}{3} + \frac{1.3}{2.4}\,\frac{x^5}{5} + \frac{1.3.5}{2.4.6}\,\frac{x^7}{7} + \ldots$$

(Obě strany se mohou lišit jen o konstantu,ale tato konstanta je 0, ježto pro $x = 0$ se obě strany rovnají nule.) Řada vpravo je pro $|x| > 1$ divergentní (užijte podílového kriteria). Dokažme, že řada v (18) je konvergentní i pro $x = 1$. Označme $s_n(x)$ součet prvních n členů řady v (18). Omezme se na hodnoty $0 < x \leqq 1$. Členové řady jsou kladná čísla, takže řada (18) je pro $x = 1$ konvergentní, jestliže posloupnost čísel $s_n(1)$ je shora omezená (viz větu 27). Ježto řada má pro $0 < x < 1$ kladné členy, je (podle pozn. 9 v § 2) $s_n(x)$ menší než součet celé řady (18), tj. pro $0 < x < 1$ a pro každé přirozené n je

(19) $$s_n(x) < \arcsin x < \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}.$$

Ale $s_n(x)$ je při pevném n polynom, tedy funkce spojitá, takže podle (19) je

$$s_n(1) = \lim_{x \to 1-} s_n(x) \leqq \frac{\pi}{2}.$$

Tedy vskutku posloupnost čísel $s_n(1)$ je shora omezená, a tedy řada (18) konverguje i pro $x = 1$; změním-li u x znaménko, násobí se každý člen řady (18) číslem -1, tedy řada (18) konverguje i pro $x = -1$. Podle pozn. 5 je tedy součet řady (18) funkce spojitá v $\langle -1, 1 \rangle$. Ježto v tomto intervalu je také funkce $\arcsin x$ spojitá, je

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\cdot\frac{1}{7}+\ldots =$$

$$= \lim_{x\to 1-}\arcsin x = \arcsin 1 ,$$

takže rovnice (18) platí i pro $x=1$, a tedy (změním všude znaménko) též pro $x=-1$.

Tedy celkem:

<u>Rovnice (18) platí pro $-1 \leq x \leq 1$. Pro $|x|>1$ je řada divergentní.</u>

<u>Příklad 3.</u> Zjistili jsme, že řada $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$ je absolutně konvergentní pro všechna komplexní x a víme, že pro <u>reálná</u> x je její součet roven e^x.

V kap. I jsme zavedli pro okamžitou potřebu (totiž pro řešení lineárních diferenciálních rovnic s konstantními koeficienty) e^x pro libovolná <u>komplexní</u> x. Způsob, jakým jsme tam e^x zavedli, byl trochu umělý. Zapomeňme na chvíli tehdejší definici a definujme e^x pro komplexní x jiným, přirozenějším způsobem.[6)]

Víme, že pro reálná x je

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}. \tag{20}$$

Definujme nyní: pro všechna <u>komplexní</u> x budiž dáno e^x vzorcem (20). Dokažme nyní rovnici

$$e^{x_1}e^{x_2} = e^{x_1+x_2} \tag{21}$$

pro libovolná komplexní x_1, x_2.

Je

$$e^{x_1} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{x_1^k}{k!}, \qquad e^{x_2} = \sum_{p=0}^{\infty}\frac{x_2^p}{p!}$$

a obě řady jsou absolutně konvergentní. Podle věty 37 se tedy $e^{x_1}\cdot e^{x_2}$ dostane jako součet absolutně konvergentní řady, kterou dostaneme tak, že vezmeme všechny součiny $\frac{x_1^k x_2^p}{k!\,p!}$ a vytvoříme z nich (v jakémkoliv pořádku) nekonečnou řadu. Podle posn. 3 v § 2 můžeme ještě v této řadě dát vždy několik členů dohromady (uzávorkovat

---

6) Dodatečně ovšem dokážeme, že obě definice jsou ekvivalentní, že jsou ve shodě.

je). Uděláme to tak, že dáme vždy dohromady všechny členy s týmž součtem $k+p=n$ (tj. $p=n-k$)[7]. Při daném n to bude tedy součet

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x_1^k x_2^{n-k}}{k!\,(n-k)!} = \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x_1^k x_2^{n-k} = \frac{(x_1+x_2)^n}{n!}$$ (binomická poučka).

Tedy

$$e^{x_1} \cdot e^{x_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x_1+x_2)^n}{n!},$$

ale pravá strana je podle definice (20) rovna $e^{x_1+x_2}$, čímž je (21) dokázáno.

Pro ryze imaginární x, tj. pro $x = iy$, y reálné, je podle (20)

$$e^{iy} = 1 + \frac{iy}{1!} - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - \frac{iy^7}{7!} + \ldots = \tag{22}$$

$$= \cos y + i \sin y \;[8]\,.$$

Je-li nyní x libovolné číslo, $x = x + iy$ (x, y reálná), je podle (21), (22)

$$e^{x} = e^{x+iy} = e^{x} \cdot e^{iy} = e^{x}(\cos y + i \sin y)\,.$$

Ale to byla právě definice, kterou jsme podali v kap. I. Tedy vskutku naše nová definice je ve shodě s definicí z kap. I, tj. obě definice dávají pro každé komplexní x touž hodnotu e^{x}.

§ 7. Ortogonální systémy a Fourierovy řady

Mocninné řady jsou velmi mocnou pomůckou k studiu funkcí. Viděli jsme např. v 1.ročníku, že rozvoj

$$e^{x} = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$$

---

7) Tj. ve schematu, nakresleném v § 2 před větou 37, dám vždy dohromady členy z téže "úhlopříčky".

8) Je totiž (přidávám nulové členy, abych to měl pěkně pod sebou):

$$\cos y = 1 + 0 - \frac{y^2}{2!} + 0 + \frac{y^4}{4!} + 0 - \frac{y^6}{6!} + 0 + \ldots,$$

$$i \sin y = 0 + \frac{iy}{1!} + 0 - \frac{iy^3}{3!} + 0 + \frac{iy^5}{5!} + 0 - \frac{iy^7}{7!} + \ldots,$$ takže vskutku

$$\cos y + i \sin y = 1 + \frac{iy}{1!} - \frac{y^2}{2!} - \frac{iy^3}{3!} + \frac{y^4}{4!} + \frac{iy^5}{5!} - \frac{y^6}{6!} - \frac{iy^7}{7!} + \ldots$$

může sloužit k pohodlnému výpočtu hodnot funkce e^x; totéž platí pro rozvoj funkcí $\sin x$, $\cos x$, $\lg(1+x)$, $(1+x)^n$, $\operatorname{arctg} x$ atd. Snad ještě větší je jejich význam teoretický, jak poznáte v přednášce o analytických funkcích (kde se - zhruba řečeno - vyšetřují právě funkce komplexní proměnné, které se v okolí každého bodu svého definičního oboru dají rozvinout v mocninnou řadu). V nauce o funkcích reálné proměnné je použitelnost mocninných řad značně omezena. Jestliže funkce f se v intervalu $(-R, R)$ dá rozvinout v mocninnou řadu, tj. jestliže je

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad \text{pro všechna } x \in (-R, R),$$

potom podle věty 52 a pozn. 3 v § 6 má funkce f nutně derivace všech řádů v $(-R, R)$ - a tato nutná podmínka ještě zdaleka není postačující. Mimoto u mnohých mocninných řad je jejich konvergence v bodě x velmi pomalá, jestliže $|x|$ je blízko poloměru konvergence, což může působit obtíže v numerických aplikacích i v teoretických úvahách. Proto hledáme ještě jiné způsoby rozvoje funkcí v nekonečné řady; k nejdůležitějším patří Fourierovy řady, ke kterým se nyní obrátíme.

Definice. Budiž $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ posloupnost komplexních funkcí spojitých v intervalu $\langle a, b\rangle$; nechť žádná z funkcí φ_n není identicky rovna nule v $\langle a, b\rangle$. Posloupnost se nazývá ortogonální v $\langle a, b\rangle$, jestliže pro každou dvojici přirozených čísel m, n $(m \neq n)$ je

$$(1) \qquad \int_a^b \varphi_n(x)\,\overline{\varphi}_m(x)\,dx = 0 .$$

(Přitom $\overline{f}$ značí funkci komplexně sdruženou k f, tj. je-li $f(x) = g(x) + ih(x)$ (g, h reálné), je $\overline{f}(x) = g(x) - ih(x)$.)

Pro $m = n$ je ovšem

$$(2) \qquad \int_a^b \varphi_n(x)\,\overline{\varphi}_n(x)\,dx = \int_a^b |\varphi_n(x)|^2\,dx > 0 ,$$

neboť integrand je funkce spojitá a nezáporná v $\langle a, b\rangle$, která není identicky rovna nule (viz např. J I, kap. II, § 5 pozn. 2). Posloupnost ortogonální v $\langle a, b\rangle$ se nazývá ortonormální v $\langle a, b\rangle$, jestliže

$$(3) \qquad \int_a^b |\varphi_n(x)|^2\,dx = 1 .$$

Z ortogonální posloupnosti $\varphi_1, \varphi_2, \dots$ snadno vytvoříme ortonormální posloupnost takto: Položím

$$c_n = \int_a^b |\varphi_n(x)|^2\,dx ;$$

c_n je tedy kladné číslo. Okamžitě se přesvědčíte, že funkce

$$\frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{c_1}}, \ \frac{\varphi_2(x)}{\sqrt{c_2}}, \ \frac{\varphi_3(x)}{\sqrt{c_3}}, \ \dots$$ tvoří posloupnost ortonormáln

Jestliže funkce φ_n jsou reálné, můžeme (1), (2) psát ve tvaru

$$(1^a)\qquad \int_a^b \varphi_n(x)\varphi_m(x)\,dx = 0 \quad \text{pro } n \neq m,$$

$$(2^a)\qquad \int_a^b \varphi_n^2(x)\,dx > 0.$$

Pro nás budou nejdůležitější následující dva ortogonální systémy. Budiž a libovolné reálné číslo, p libovolné kladné číslo. Potom funkce

$$(4)\qquad 1,\ \cos\frac{2k\pi x}{p},\ \sin\frac{2k\pi x}{p} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

tvoří reálný ortogonální systém [1] v $\langle a, a+p\rangle$. Rovněž funkce

$$(5)\qquad e^{\frac{2k\pi i}{p}x} \qquad (k = 0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \ldots)$$

tvoří ortogonální systém v $\langle a, a+p\rangle$.

Dokážeme to třeba pro systém (5). Je-li y reálné, je $e^{iy} = \cos y + i\sin y$, takže komplexně sdružené číslo je $\cos y - i\sin y = e^{-iy}$. Máme tedy vyšetřit integrál

$$J_{k,m} = \int_a^{a+p} e^{\frac{2k\pi i}{p}x}\cdot e^{-\frac{2m\pi i}{p}x}\,dx = \int_a^{a+p} e^{\frac{2\pi i(k-m)}{p}x}\,dx.$$

Je-li $m \neq k$, dostáváme

$$J_{k,m} = \frac{p}{2\pi i(k-m)}\left(e^{2\pi i(k-m)\frac{a+p}{p}} - e^{2\pi i(k-m)\frac{a}{p}}\right).$$

Ze závorky vytknu $e^{2\pi i(k-m)\frac{a}{p}}$; zbude v ní $e^{2\pi i(k-m)} - 1 = 0$ (neboť $e^{2n\pi i} = 1$ pro celé n). Tedy $J_{k,m} = 0$ pro $k \neq m$, systém (5) je ortogonální. Dále je

$$J_{k,k} = \int_a^{a+p} e^{\frac{2\pi i(k-k)x}{p}}\,dx = \int_a^{a+p} dx = p,$$

takže systém funkcí

$$(6)\qquad \frac{1}{\sqrt{p}}\,e^{\frac{2k\pi i}{p}x} \qquad (k = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots)$$

je ortonormální v $\langle a, a+p\rangle$.

---

[1] Funkce (4) nejsou ještě srovnány v posloupnost, ale dovedli byste je tak srovnat. Definice ortogonality nezávisí na tom, přerovnáte-li nějak posloupnost (1). Proto budeme v dalším říkat raději "ortogonální systém".

Zjistěte sami, že systém (4) je ortogonální v $\langle a, a+p\rangle$ a že

(7) $$\int_a^{a+p} 1^2\,dx = p, \quad \int_a^{a+p} \cos^2 \frac{2k\pi x}{p}\,dx = \int_a^{a+p} \sin^2 \frac{2k\pi x}{p}\,dx = \frac{p}{2}$$
$(k = 1, 2, \ldots)$,

takže systém funkcí

(8) $$\frac{1}{\sqrt{p}}, \quad \sqrt{\frac{2}{p}}\cos\frac{2k\pi x}{p}, \quad \sqrt{\frac{2}{p}}\sin\frac{2k\pi x}{p} \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

je ortonormální v $\langle a, a+p\rangle$.

Oba systémy (4), (5) spolu úzce souvisí v důsledku rovností
$e^{iy} = \cos y + i\sin y$, $e^{-iy} = \cos y - i\sin y$ (pro reálné y).

Vezměme opět libovolný systém $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ spojitých funkcí, ortogonální v $\langle a, b\rangle$. Bude nás zajímat, které funkce f lze vyjádřit řadou tvaru $a_1\varphi_1(x) + a_2\varphi_2(x) + \ldots$, kde $a_1, a_2, \ldots$ jsou konstanty, a jak se ty konstanty určí. První věta má jen orientační charakter:

<u>Věta 54.</u> Nechť $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ je systém spojitých funkcí, ortogonální v $\langle a, b\rangle$. Buďte $a_1, a_2, \ldots$ komplexní čísla, a nechť řada

(9) $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x) = f(x)$$

je stejnoměrně konvergentní v $\langle a, b\rangle$. Potom je

(10) $$a_n\int_a^b |\varphi_n(x)|^2\,dx = \int_a^b f(x)\,\overline{\varphi_n}(x)\,dx.$$

<u>Důkaz.</u> Zvolme určité přirozené n; z (9) plyne

(11) $$\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)\overline{\varphi_n}(x) = f(x)\overline{\varphi_n}(x).$$

Ježto funkce $\overline{\varphi_n}$ je spojitá a tedy omezená v $\langle a, b\rangle$, je řada v (11) opět stejnoměrně konvergentní v $\langle a, b\rangle$ (to je zřejmé). Lze tedy podle věty IV z pozn. 4, § 5 integrovat od a do b člen po členu. Z podmínek (1) plyne, že vlevo budou všechny integrály až na člen s $k = n$ rovny nule, takže vskutku vychází

$$a_n\int_a^b \varphi_n(x)\overline{\varphi_n}(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,\overline{\varphi_n}(x)\,dx.$$

Věta 54 má pouze prozatímní charakter: <u>jestliže</u> se funkce f dá "rozvinout" ve stejnoměrně konvergentní řadu tvaru (9), jsou "koeficienty" a_n nutně dány rovnicí (10). Nás však právě zajímá otázka, <u>které</u> funkce lze v takovou řadu rozvinout. Přirozeně nás budou podle věty 54 zajímat hlavně řady, jejichž koeficienty jsou dány vzorcem (10).

Definice 10. Buďte $\varphi_1, \varphi_2, \dots$, funkce spojité v $\langle a, b\rangle$, které tvoří ortogonální systém v $\langle a, b\rangle$. Budiž f funkce spojitá v $\langle a, b\rangle$. Potom čísla a_n, definovaná vzorcem (10), nazýváme Fourierovými koeficienty funkce f, a řadu $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x)$ nazýváme Fourierovou řadou funkce f (vzhledem k intervalu $\langle a, b\rangle$ a vzhledem k ortogonálnímu systému $\varphi_1, \varphi_2, \dots$); budeme to vyjadřovat symbolem

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) .$$

Poznámka 1. Dosud nevíme ovšem, zda tato řada je konvergentní a zda má součet $f(x)$; to teprve musíme vyšetřit. Předpoklad o spojitosti funkce f (a částečně i předpoklad o spojitosti funkcí $\varphi_1, \varphi_2, \dots$) není příliš vhodný; nakonci uvedu aspoň jeden obecnější případ (ale bez důkazu). Plně uspokojivá teorie Fourierových řad se dá vybudovat teprve na základě Lebesgueovy teorie integrálu.

Poznámka 2. Ze vzorce (10) je ihned vidět: je-li

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} a_k \varphi_k(x) , \quad g(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} b_k \varphi_k(x) ,$$

a je-li c nějaké číslo, je

$$f(x) + g(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k)\, \varphi_k(x) , \quad c f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c a_k \varphi_k(x) .$$

Příklad 1. Pro tzv. "trigonometrický systém" (4) vypadá Fourierova řada funkce f takto:

$$\frac{1}{2}a_0 + a_1 \cos\frac{2\pi x}{p} + b_1 \sin\frac{2\pi x}{p} + a_2 \cos\frac{4\pi x}{p} + b_2 \sin\frac{4\pi x}{p} + \dots + \tag{12}$$
$$+ a_k \cos\frac{2k\pi x}{p} + b_k \sin\frac{2k\pi x}{p} + \dots ,$$ [2)]

kde

$$a_k = \frac{2}{p}\int_a^{a+p} f(x) \cos\frac{2k\pi x}{p}\, dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$
$$b_k = \frac{2}{p}\int_a^{a+p} f(x) \sin\frac{2k\pi x}{p}\, dx \quad (k = 1, 2, 3, \dots) \tag{13}$$

Obyčejně se místo (12) píše řada

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos\frac{2k\pi x}{p} + b_k \sin\frac{2k\pi x}{p}\right) ; \tag{12a}$$

také my to tak budeme psát. Ježto řada (12^a) vzniká z (12) "uzávorkováním", musíme se přesvědčit, zda se chování obou řad nějak neliší. Označím-li částečné součty řady (12^a) $s_n(x)$, má řada (12) částečné součty $s_n(x)$ a $s_n(x) + a_n \cos \frac{2n\pi x}{p}$. Dokážeme, že $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = 0$ (viz (18)). Z toho zřejmě plyne, že řady (12), (12^a) se chovají stejně, pokud se týče konvergence, stejnoměrné konvergence, absolutní konvergence a hodnoty součtu.

Fourier vyšetřoval právě trigonometrický systém (4); řadám (12) budu říkat trigonometrické Fourierovy řady.

Vypočtěme

$$\int_a^b |f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x)|^2 dx, \tag{14}$$

kde a_k jsou Fourierovy koeficienty funkce f. Integrand je

$$(f(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k(x))\,(\bar{f}(x) - \sum_{p=1}^{n} \bar{a}_p \bar{\varphi}_p(x)) =$$

$$= |f(x)|^2 - \sum_{p=1}^{n} \bar{a}_p f(x) \bar{\varphi}_p(x) - \sum_{k=1}^{n} a_k \bar{f}(x) \varphi_k(x) +$$

$$+ \sum_{k=1}^{n} \sum_{p=1}^{n} a_k \bar{a}_p \varphi_k(x) \bar{\varphi}_p(x).$$

Integruji-li od a do b, vypadne řada členů následkem podmínek ortogonality a dostanu, že integrál (14) se rovná (položím-li $\int_a^b |\varphi_k(x)|^2 dx = c_k > 0$)

$$\int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{p=1}^{n} \bar{a}_p \cdot a_p c_p - \sum_{k=1}^{n} a_k \cdot \bar{a}_k c_k + \sum_{k=1}^{n} a_k \bar{a}_k c_k =$$

$$= \int_a^b |f(x)|^2 dx - \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 c_k.$$

Ješto integrál (14) je nezáporný, je

$$\sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 c_k \leqq \int_a^b |f(x)|^2 dx. \tag{15}$$

To však znamená, že řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 c_k$$

s nezápornými členy je konvergentní a má součet nejvýše rovný integrálu v (15):

---

2) Psává se $\frac{1}{2} a_0$, aby také pro $k = 0$ vyšel v (13) koeficient $\frac{2}{p}$.

Věta 55. Buďte $a_1, a_2, \ldots$ Fourierovy koeficienty funkce f, spojité v $\langle a, b\rangle$ (vzhledem k intervalu $\langle a, b\rangle$ a vzhledem k ortogonálnímu systému $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$).

Položme $c_k = \int_a^b |\varphi_k(x)|^2 dx$. Potom je

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|^2 c_k \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx. \tag{16}$$

Poznámka 3. Speciálně pro trigonometrický systém (4) je

$$\frac{1}{4}|a_0|^2 p + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2)\frac{p}{2} \leq \int_a^{a+p} |f(x)|^2 dx. \tag{16a}$$

Budeme v dalším potřebovat pouze fakt, že při trigonometrické Fourierově řadě spojité funkce je řada

$$\sum_{k=1}^{\infty} (|a_k|^2 + |b_k|^2) \tag{17}$$

konvergentní. Odtud zřejmě

$$\lim_{k\to\infty} a_k = \lim_{k\to\infty} b_k = 0. \tag{18}$$

Nerovnost (16) se nazývá Besselova nerovnost. Dá se dokázat, že pro trigonometrický systém platí v (16^a) dokonce znamení rovnosti (tzv. Parsevalova rovnost - ale tu nebudeme dokazovat).

Nyní se budeme až do konce zabývat jen trigonometrickým systémem (4) a trigonometrickými Fourierovými řadami (12) s koeficienty (13) (budeme je psát ve tvaru (12^a)).

Funkce

$$1, \cos\frac{2k\pi x}{p}, \sin\frac{2k\pi x}{p} \quad (k = 1, 2, \ldots) \tag{4}$$

jsou reálné. Je-li $f = g + ih$ (g, h reálné funkce), má-li g Fourierovy koeficienty a_k, b_k, a má-li h Fourierovy koeficienty a_k', b_k', jsou a_k, b_k, a_k', b_k' reálná a f má podle pozn. 2 Four. koeficienty $a_k + ia_k'$, $b_k + ib_k'$. Stačí proto, budeme-li studovat Fourierovy řady reálných funkcí f; příslušné věty pro komplexní funkce se odtud ihned dostanou běžným způsobem. Dále budu stále vyšetřovat pouze trigonometrický systém (4). Funkce (4) mají všechny periodu p; proto bude asi výhodné studovat funkce f, spojité v $(-\infty, +\infty)$, které mají periodu p (tj. $f(x+p) = f(x)$ pro všechna x, a tedy i $f(x+kp) = f(x)$ pro všechna celá k).

Budiž f funkce spojitá v $(-\infty, +\infty)$ s periodou p. Tvrdím, že pro libovolná reálná čísla a, b je

$$\int_a^{a+p} f(x)\,dx = \int_b^{b+p} f(x)\,dx\,.$$

Důkaz:

$$\int_b^{b+p} f(x)\,dx = \int_b^{a} f(x)\,dx + \int_a^{a+p} f(x)\,dx + \int_{a+p}^{b+p} f(x)\,dx\,.$$

Zavedu do posledního integrálu $x = p + y$ a dostanu (ježto $f(y+p) = f(y)$)

$$\int_{a+p}^{b+p} f(x)\,dx = \int_a^b f(y+p)\,dy = \int_a^b f(y)\,dy = -\int_b^a f(x)\,dx\,.$$

Důkaz je proveden.

Jinými slovy: Má-li f periodu p, je integrál funkce f přes interval délky p nezávislý na poloze tohoto intervalu. Odtud je také vidět, že Fourierovy koeficienty funkce f, jež má periodu p, nezávisí na volbě čísla a ve vzorcích (13).

Poznámka 4. Připomeňme pojem funkce sudé: $f(-x) = f(x)$ a liché: $f(-x) = -f(x)$. Součin dvou funkcí sudých nebo dvou funkcí lichých je funkce sudá, součin sudé a liché funkce je funkce lichá. Pro sudou funkci f máme

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_a^0 f(-y)\,dy = -\int_a^0 f(y)\,dy = \int_0^a f(x)\,dx\,,$$

pro lichou funkci

$$\int_{-a}^{0} f(x)\,dx = -\int_a^0 f(-y)\,dy = \int_a^0 f(y)\,dy = -\int_0^a f(x)\,dx\,;$$

tedy pro sudou funkci je

$$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx\,,$$

pro lichou funkci f je

$\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, pokud příslušné integrály existují. Nechť f je spojitá v $(-\infty, +\infty)$ a má periodu p; potom můžeme v (13) volit $a = -\frac{p}{2}$, takže se integruje od $-\frac{p}{2}$ do $\frac{p}{2}$. Odtud je vidět: Je-li f sudá, je $b_k = 0$, dostáváme tzv. řadu kosinusovou; je-li f lichá, je $a_k = 0$, dostáváme řadu sinusovou. Mimoto lze u sudé funkce psát při a_k místo $\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}}$ integrál $2\int_0^{\frac{p}{2}}$; podobně u liché funkce.

Poznámka 5. Budiž opět f spojitá v $(-\infty, +\infty)$ s periodou p. Abychom si v důkazech ušetřili psaní ve funkcích

$$\cos \frac{2k\pi x}{p}, \quad \sin \frac{2k\pi x}{p}, \quad \text{položme}$$

$$g(y) = f\left(\frac{py}{2\pi}\right), \quad \text{neboli} \quad f(x) = g\left(\frac{2\pi x}{p}\right).$$

Funkce g má periodu 2π:

$$g(y+2\pi) = f\left(\frac{p(y+2\pi)}{2\pi}\right) = f\left(\frac{py}{2\pi}+p\right) = f\left(\frac{py}{2\pi}\right) = g(y).$$

Nechť

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2k\pi x}{p} + b_k \sin \frac{2k\pi x}{p}\right),$$

$$g(y) \sim \frac{1}{2}a_0' + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k' \cos kx + b_k' \sin kx),$$

kde např. (substituce $y = \frac{2\pi x}{p}$)

$$a_k' = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y) \cos ky \, dy = \frac{2}{p}\int_{-\frac{p}{2}}^{\frac{p}{2}} g\left(\frac{2\pi x}{p}\right) \cos \frac{2k\pi x}{p} \, dx;$$

ale $g\left(\frac{2\pi x}{p}\right) = f(x)$, tedy $a_k' = a_k$ a podobně $b_k' = b_k$. Je tedy velmi lehké přejít od funkce $f(x)$ s periodou p k funkci $f\left(\frac{px}{2\pi}\right)$ s periodou 2π a naopak. Proto budeme věty uvádět pro funkce s obecnou periodou p, ale důkazy provádět jen pro funkce s periodou 2π a pro ortogonální systém

(19) $\quad 1, \cos kx, \sin kx \quad (k = 1, 2, \dots);$

čistě formální přechod k obecné periodě p si čtenář provede sám.

Fourierova řada spojité funkce f s periodou 2π je potom

$$f(x) \sim \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

(20)
$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x) \cos kx \, dx \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} f(x) \sin kx \, dx$$

(a je libovolné reálné číslo).

Částečné součty této řady jsou tzv. <u>trigonometrické polynomy</u> (s periodou 2π) ; tak se říká funkcím tvaru

$$A_0 + \sum_{k=1}^{n} (A_k \cos kx + B_k \sin kx),$$

kde A_k, B_k jsou konstanty. [3] Je-li aspoň jedno z čísel A_n, B_n různé od nuly, mluvíme o trigonometrickém polynomu stupně n. Dokažme (abychom nemusili přerušovat důkaz hlavních dvou vět): Je-li n přirozené číslo, je $\cos^n x$ trigonometrický polynom stupně n (a to bez sinusových členů).

Důkaz indukcí: pro $n = 1$ je to zřejmé. Nechť pro jisté přirozené n je

$$\cos^n x = \sum_{k=0}^{n} A_k \cos kx \,, \quad \text{kde } A_n \neq 0 \tag{21}$$

(pro $n = 1$ to platí); potom je

$$\cos^{n+1} x = \sum_{k=0}^{n} A_k \cos kx \,.\, \cos x \;;$$

zde je

$$\cos kx \cos x = \frac{1}{2} \cos (k+1) x + \frac{1}{2} \cos (k-1) x$$

pro $k > 0$, takže dostaneme

$$\cos^{n+1} x = \sum_{k=0}^{n+1} B_k \cos kx. \qquad \left(B_{n+1} = \frac{1}{2} A_n \neq 0\right).$$

Dále dokážeme: Je-li n přirozené, β reálné, je $\cos^n (x - \beta)$ trigonomický polynom n-tého stupně.

Důkaz: Podle (21) je

$$\cos^n (x - \beta) = \sum_{k=0}^{n} A_k \cos k(x - \beta) = \tag{21a}$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \left(A_k \cos k\beta \cos kx + A_k \sin k\beta \sin kx \right)$$

($A_n \neq 0$, takže aspoň jedno z čísel $A_n \cos n\beta$, $A_n \sin n\beta$ je různé od nuly).

Věta 56. Budiž f spojitá v $(-\infty, +\infty)$ a periodická s periodou $p > 0$. Nechť všechny Fourierovy koeficienty

$$a_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \cos \frac{2k\pi x}{p}\, dx \quad (k = 0, 1, 2, \ldots)$$

$$b_k = \frac{2}{p} \int_0^p f(x) \sin \frac{2k\pi x}{p}\, dx \quad (k = 1, 2, \ldots)$$

jsou rovny nule. Potom $f(x) = 0$ pro všechna reálná x.

Důsledek. Jestliže f, g jsou dvě funkce spojité v $(-\infty, +\infty)$ s periodou $p > 0$, které mají stejné Fourierovy koeficienty, potom je

---

[3] Kdybychom psali $\frac{2k\pi x}{p}$ místo kx, dostali bychom trigonometrické polynomy s periodou p.

$f(x) = g(x)$ pro všechna reálná x (neboť funkce $f - g$ má všechny Fourierovy koeficienty rovny nule).

<u>Důkaz věty 56.</u> Abychom zjednodušili psaní, předpokládejme $p = 2\pi$. Tedy je

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\,dx = 0 \qquad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx\,dx = 0 \qquad (k = 1, 2, \dots).$$

Je-li tedy $T(x)$ libovolný trigonometrický polynom, je

$$(22) \qquad \int_0^{2\pi} f(x)\, T(x)\,dx = 0 \quad ^{4)}$$

Bez újmy obecnosti předpokládejme, že f je reálná (jinak bychom rozložili na reálnou a imaginární část).

Předpokládejme dále, že funkce f není identicky rovna nule; z toho odvodíme spor s rovnicí (22).

Existuje tedy β tak, že $f(\beta) \neq 0$; bez újmy obecnosti budiž

$$f(\beta) = \gamma > 0$$

(kdyby bylo $f(\beta) < 0$, uvažovali bychom funkci $-f$). Pro libovolné přirozené m sestrojme funkci

$$(23) \qquad T_m(x) = \left(1 + \cos(x - \beta)\right)^m .$$

To je součet členů tvaru $c_n \cos^n (x - \beta)$ $(n = 0, 1, \dots, m)$, tedy je to trigonometrický polynom (viz (21^a)). Položme

$$(24) \qquad J_m = \int_{\beta-\pi}^{\beta+\pi} f(x)\, T_m(x)\,dx ;$$

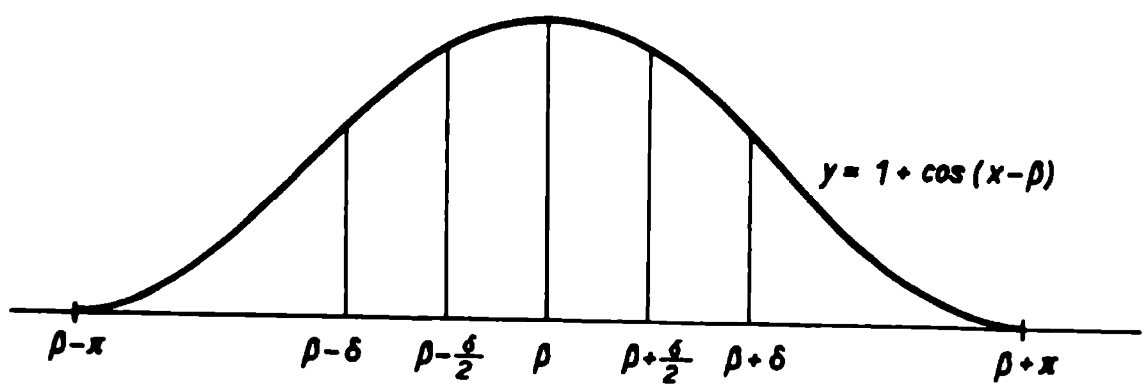
dokážeme, že
pro dostatečně velká m je $J_m > 0$; tím bude nalezen hledaný spor s rovnicí (22).

Ježto $f(\beta) = \gamma > 0$, plyne ze spojitosti funkce f, že existuje $\delta > 0$ tak, že

$$f(x) \geqq \frac{\gamma}{2} \quad \text{pro všechna } x \in \langle \beta - \delta, \beta + \delta \rangle .$$

---

4) Přechod k obecné periodě je snadný, viz pozn. 5. Místo $(0, 2\pi)$ lze vzít libovolný integrační interval $(a, a + 2\pi)$.



Obr. 27.

Přitom volme $\delta < \pi$ (pro orientaci dále viz obr. 27).

Funkce f je spojitá a tedy omezená v $\langle 0, 2\pi \rangle$:

$$|f(x)| \leq M .$$

V intervalu $\langle \beta - \pi , \beta - \delta \rangle$ i v intervalu $\langle \beta + \delta , \beta + \pi \rangle$ je $\cos (x - \beta) \leq \cos \delta$, tedy

$$1 + \cos (x - \beta) \leq 1 + \cos \delta .$$

V intervalu $\langle \beta - \frac{\delta}{2} , \beta + \frac{\delta}{2} \rangle$ je $\cos (x - \beta) \geq \cos \frac{\delta}{2}$, tedy

$$1 + \cos (x - \beta) \geq 1 + \cos \frac{\delta}{2} ;$$

a konečně všude je

$$1 + \cos (x - \beta) \geq 0 .$$

Uvažme ještě, že $\cos \frac{\delta}{2} > \cos \delta$, takže číslo $q = \dfrac{1 + \cos \delta}{1 + \cos \frac{\delta}{2}}$ je menší než 1 a ovšem nezáporné.

Čísla β , γ , δ , M jsou teď již dána; přirozené číslo m můžeme volit libovolně. Abychom odhadli J_m , rozdělme integrační interval na několik částí (integrand je stále $f(x) \, (1 + \cos (x - \beta))^m$):

$$\left| \int_{\beta - \pi}^{\beta - \delta} \right| + \left| \int_{\beta + \delta}^{\beta + \pi} \right| \leq M . (1 + \cos \delta)^m . 2\pi ,$$

$$\int_{\beta - \delta}^{\beta - \frac{\delta}{2}} + \int_{\beta + \frac{\delta}{2}}^{\beta + \delta} \geq 0 \qquad \text{(ježto tam je } f(x) > 0 \text{)} ,$$

$$\int_{\beta - \frac{\delta}{2}}^{\beta + \frac{\delta}{2}} \geq \delta . \frac{\gamma}{2} . (1 + \cos \frac{\delta}{2})^m .$$

Takže celkem

$$J_m \geq \frac{\delta\gamma}{2} (1 + \cos \frac{\delta}{2})^m + 0 - 2\pi M (1 + \cos \delta)^m =$$

(25)

$$= (1 + \cos \frac{\delta}{2})^m \left(\frac{\delta\gamma}{2} - 2\pi M q^m \right) .$$

Je však $\lim_{m\to\infty} q^m = 0$; existuje tedy přirozené m_0 tak, že pro $m \geq m_0$ je $q^m < \frac{\delta\gamma}{2} \cdot \frac{1}{2\pi M}$, takže podle (25) je $J_m > 0$ pro $m \geq m_0$; to je hledaný spor s rovnicí (22).

Uvědomte si základní ideu důkazu: Předpokládáme, že všechny Fourierovy koeficienty funkce f jsou rovny nule, ale že funkce v některém bodě β je různá od nuly, např. kladná. Z toho se snažíme odvodit spor. Stačí sestrojit trigonometrický polynom T tak, že

(26) $$\int_{\beta-\pi}^{\beta+\pi} f(x)\, T(x)\, dx > 0 \quad .$$

Myšlenka je nyní tato: Snažím se nalézt nezáporný trigonometrický polynom tak, aby v bodě β měl velmi ostré kladné maximum, takže příspěvek k integrálu (26) od "malého" intervalu $\langle \beta - \delta, \beta + \delta \rangle$, v němž $f(x)$ je kladné, převáží nad příspěvkem (možná záporným) od zbývajících intervalů $\langle \beta - \pi , \beta - \delta \rangle$, $\langle \beta + \delta , \beta + \pi \rangle$. Abychom takové T našli, vezmeme funkci $1 + \cos(x - \beta)$, která je stále nezáporná, v bodě β je rovna 2 a všude jinde v intervalu $\langle \beta - \pi , \beta + \pi \rangle$ je menší než 2 . Má tedy skutečně maximum v bodě $x = \beta$. Ale toto maximum není popřípadě dostatečně ostré. Proto umocním tuto funkci na "velký" mocnitel m , čímž se maximum stane "velmi ostrým".

<u>Věta 57.</u> Budiž f funkce s periodou p , která má v intervalu $(-\infty, +\infty)$ spojitou derivaci. Potom Fourierova řada funkce f (pro systém (4)) je stejnoměrně a absolutně konvergentní v $(-\infty, +\infty)$ a její součet je pro každé reálné x roven $f(x)$.

<u>Důkaz</u> stačí provést zase pro funkce (třeba komplexní) s periodou 2π . Fourierova řada funkce f je

(27) $$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) ,$$

kde

(28) $$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx\, dx , \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx\, dx .$$

Derivace f' je podle předpokladu spojitá a má ovšem periodu 2π . Tedy má jakousi Fourierovu řadu

(29) $$\frac{A_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (A_k \cos kx + B_k \sin kx) ,$$

kde

(30) $$\begin{cases} A_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f'(x) \cos kx\, dx , \\ B_k = \dfrac{1}{\pi} \displaystyle\int_0^{2\pi} f'(x) \sin kx\, dx . \end{cases}$$

Podle poznámky 3 k větě 55 je

(31) $$\sum_{k=1}^{\infty} (|A_k|^2 + |B_k|^2)$$

konvergentní. Avšak integrací per partes dostáváme (s využitím periodičnosti) pro $k \geq 1$

$$A_k = \left[\frac{1}{\pi} f(x) \cos kx\right]_0^{2\pi} + \frac{k}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx \, dx = 0 + k b_k ,$$

a podobně

$$B_k = - k a_k .$$

Tedy je řada

(32) $$\sum_{k=1}^{\infty} (k^2 |a_k|^2 + k^2 |b_k|^2)$$

konvergentní. Ale $(|\alpha| - |\beta|)^2 \geq 0$ pro všechna komplexní α, β, tedy $2|\alpha\beta| \leq |\alpha|^2 + |\beta|^2$, takže

$$|a_k| = \frac{1}{k} (k|a_k|) \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + k^2 |a_k|^2\right)$$

a podobně

$$|b_k| \leq \frac{1}{2} \left(\frac{1}{k^2} + k^2 |b_k|^2\right) .$$

Z konvergence řady $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ a z konvergence řady (32) plyne tedy konvergence řady

$$\frac{1}{2} |a_0| + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) ,$$

což je řada s konstantními členy majorantní k řadě (27) v $(-\infty, +\infty)$. Podle věty 45 je tedy v intervalu $(-\infty, +\infty)$ řada (27) stejnoměrně i absolutně konvergentní a její součet je ovšem funkce s periodou 2π - označme ji g - která je podle věty 40 spojitá v $(-\infty, +\infty)$; tedy

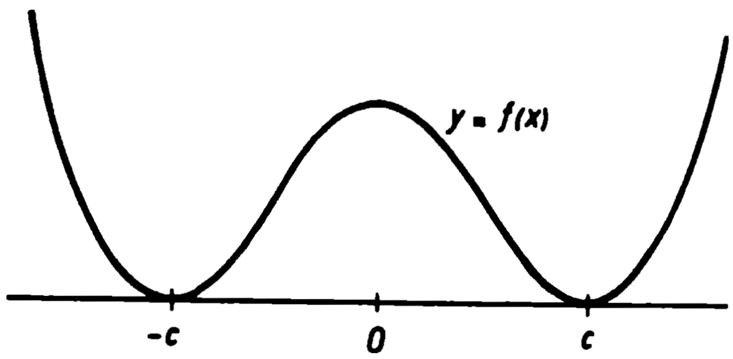
$$g(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) .$$

Podle věty 54 jsou tedy čísla $\frac{1}{2} a_0$, a_k, b_k Fourierovy koeficienty funkce g, ale současně jsou to Fourierovy koeficienty funkce f. Tedy podle důsledku věty 56 je g totožná s f, tj. je

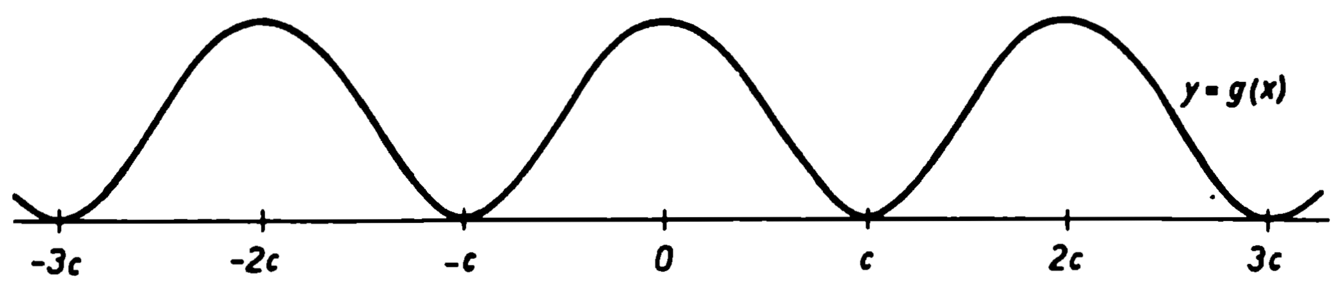
$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

a řada vpravo (tj. Fourierova řada funkce f) je stejnoměrně i absolutně konvergentní v $(-\infty, +\infty)$. Věta 57 je dokázána.

<u>Příklad 2.</u> Budiž $c > 0$, $f(x) = (x^2 - c^2)^2$. Chceme tuto funkci rozvinout ve Fourierovu řadu v intervalu $\langle -c, c \rangle$. Funkce f má v bodech $\pm c$ hodnotu i derivaci rovnou nule: $f(\pm c) = f'(\pm c) = 0$. Její průběh je naznačen na obr. 28. Není ovšem periodická; sestrojíme proto funkci g, která v intervalu $\langle -c, c)$ splývá s funkcí f a má periodu $2c$; její průběh je naznačen na obr. 29.



Obr. 28.



Obr. 29.

Zřejmě je $f(x) = g(x)$ dokonce v <u>uzavřeném</u> intervalu $\langle -c, c \rangle$. Funkce g má zřejmě spojitou derivaci v $(-\infty, +\infty)$ [5]. Tedy Fourierova řada funkce g konverguje stejnoměrně v $(-\infty, +\infty)$, a její součet je roven funkci g v $(-\infty, +\infty)$, tedy se rovná funkci f v $\langle -c, +c \rangle$. Ježto g je sudá funkce, je její Fourierova řada <u>kosinusová</u>, tj. scházejí členy se $\sin \frac{2k\pi x}{2c}$; tedy je

$$(x^2 - c^2)^2 = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi x}{c} \qquad \text{pro } x \in \langle -c, c \rangle ,$$

kde

$$a_k = \frac{1}{c} \int_{-c}^{c} (x^2 - c^2)^2 \cos \frac{k\pi x}{c} \, dx$$

---

5) Jakási pochybnost by mohla vzniknout v bodě $-c$ a v bodech, které se od něho liší o násobek periody $2c$. Ale v bodě $-c$ máme zřejmě $g'_+(-c) = f'_+(-c) = 0$, $g'_-(-c) = g'_-(c) = f'_-(c) = 0$ (periodicita!), takže existuje $g'(-c) = 0$. Dále je pro $x \in \langle -c, 0 \rangle$ $g'(x) = f'(x)$, tedy je g' spojitá v $\langle -c, 0 \rangle$ a pro $x \in \langle -2c, -c \rangle$ je $g'(x) = g'(x + 2c) = f'(x + 2c)$, tedy je g' spojitá v $\langle -2c, -c \rangle$. Tedy je g' spojitá v bodě $-c$ a tedy (periodičnost!) i v bodech $-c + 2kc$ (k celé).

(lze též psát $\frac{2}{c}\int_0^c$). Vypočtěte a_k; dostanete

$$(x^2 - c^2)^2 = \frac{8}{15} c^4 + \frac{48 c^4}{\pi^4} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^4} \cos \frac{k\pi x}{c}$$

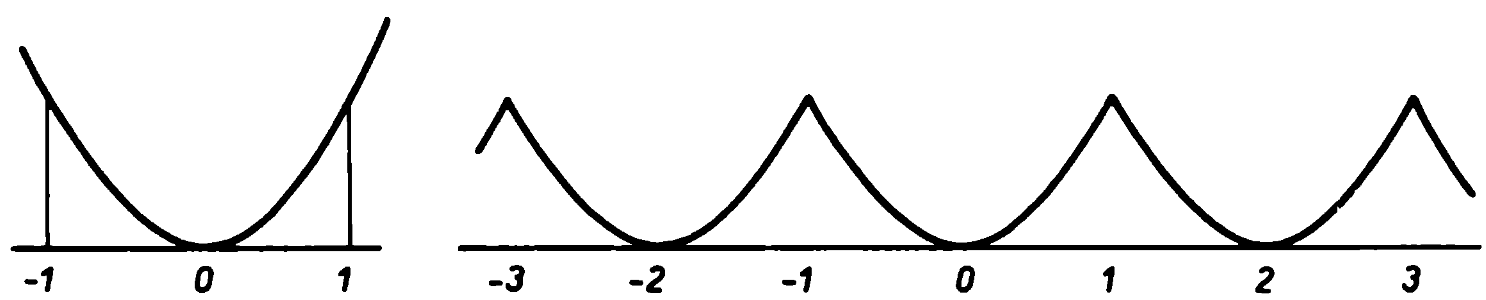
pro $x \in \langle -c, c\rangle$. Součet řady vpravo je funkce s periodou $2c$. Je-li tedy např. $3c \leq x < 5c$, má řada vpravo součet

$$g(x) = g(x - 4c) = f(x - 4c) = ((x - 4c)^2 - c^2)^2$$

(neboť $-c \leq x - 4c < c$) .

<u>Příklad 3.</u> Kdybychom chtěli rozvinout podle naší věty 57 např. funkci $f(x) = x^2$ v intervalu $\langle -1, 1\rangle$, narazili bychom na tuto obtíž. Sestrojme opět funkci g tak, aby měla periodu 2 a aby bylo $g(x) = f(x)$ pro $-1 \leq x < 1$. Z grafu (obr. 30) je bezprostředně vidět (a snadno lze ověřit počtem), že g je spojitá v $(-\infty, +\infty)$, ale

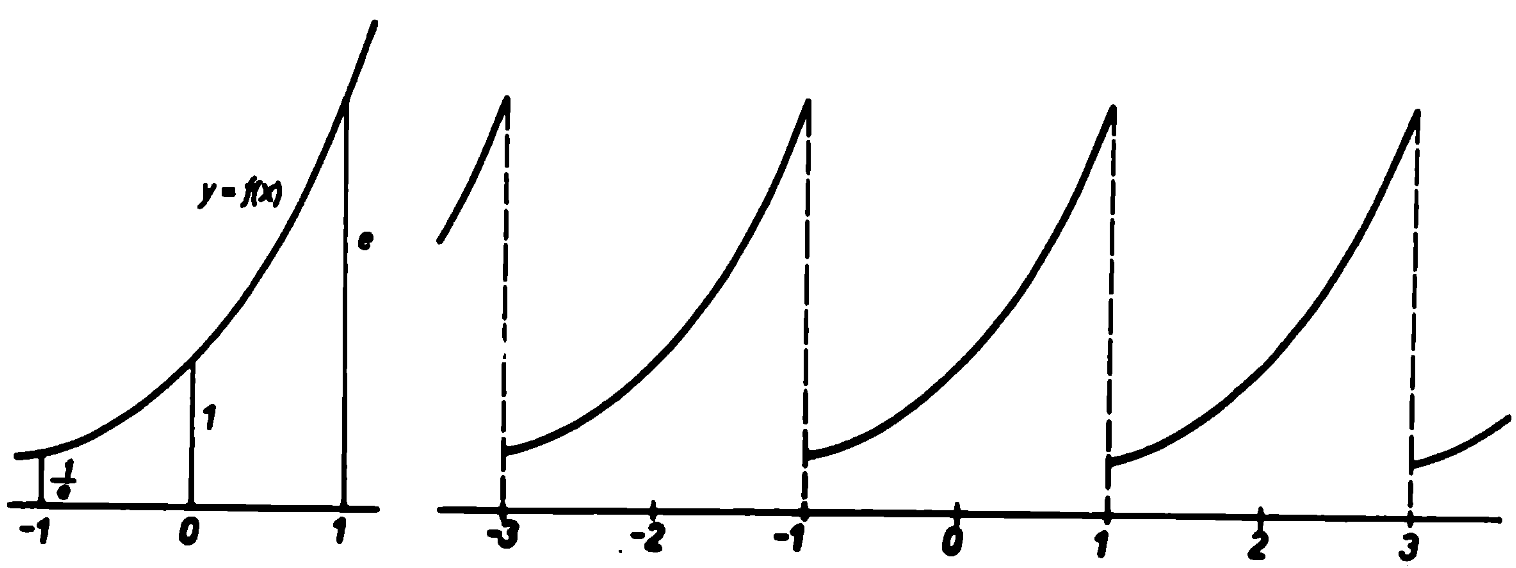
$$g'_+(-1) = f'_+(-1) = -2 , \quad g'_-(-1) = g'_-(1) = f'_-(1) = 2 ,$$



Obr. 30

takže funkce g' není spojitá v $(-\infty, +\infty)$ (v bodech $2k+1$, kde k je celé číslo, g' vůbec neexistuje). Naší věty 57 tedy zde nelze užít.

<u>Příklad 4.</u> Pokusme se rozvinout funkci $f(x) = e^x$ v intervalu $\langle -1, 1\rangle$ ve Fourierovu řadu. Sestrojme funkci g podobně jako dříve (obr. 31).



Obr. 31

Zde funkce g není spojitá v bodech $x = 2k+1$ (k celé); v takovém bodě má g limitu zleva e , limitu zprava $\frac{1}{e}$. Opět se nedá užít věty 57.

Předpoklady věty 57 jsou tedy příliš omezující. Na štěstí platí věty obecnější, z nichž nejjednodušší (Dirichletovu) uvedu (bez důkazu).

Věta 58. Funkce f s periodou $p > 0$ budiž definována a omezená v $(-\infty, +\infty)$. Nechť lze zvolit čísla

$$c_0 < c_1 < c_2 < \ldots < c_m = c_0 + p \quad \text{tak, že}$$

v každém intervalu (c_{j-1}, c_j) je f spojitá[6] a monotonní[7]. Potom Fourierova řada funkce f

$$\frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2k\pi x}{p} + b_k \sin \frac{2k\pi x}{p}\right) \tag{53}$$

má tyto vlastnosti:[8]

1. Je konvergentní pro všechna reálná x .

2. Její součet v každém bodě x je roven

$$\frac{1}{2}\left(\lim_{t \to x-} f(t) + \lim_{t \to x+} f(t)\right) ;$$

je-li tedy f spojitá v bodě x , je součet řady (53) v bodě x roven $f(x)$.

3. Je-li f spojitá v některém intervalu (A , B), je řada (53) stejnoměrně konvergentní v každém intervalu $\langle \alpha, \beta \rangle$, kde $A < \alpha < \beta < B$.

Podle této věty můžeme dopočítat příklady 3 a 4. Proveďte to! Dostanete tyto výsledky: Fourierova řada funkce $g(x)$ z příkladu 3 je

$$\frac{1}{3} + \frac{4}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2} \cos k\pi x .$$

Tato řada je stejnoměrně konvergentní např. v $\langle -1, 1 \rangle$ a tedy (následkem periodičnosti) v intervalu $(-\infty, +\infty)$; její součet je $g(x)$; pro $-1 \leq x \leq 1$ má tedy součet x^2 . Fourierova řada funkce $g(x)$ z příkladu 4 je

$$\left(e - \frac{1}{e}\right) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k (\cos k\pi x - k\pi \sin k\pi x)}{1 + k^2\pi^2}\right) .$$

---

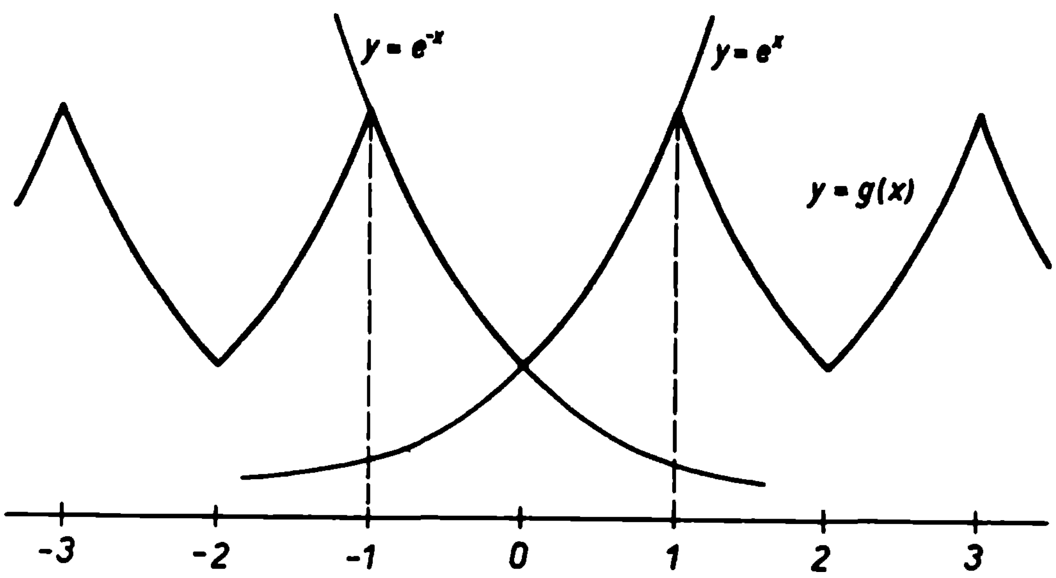
6) Tento předpoklad lze vynechat.

7) Body c_0 , c_1 , ..., c_m tvoří rozdělení intervalu $\langle c_0 , c_0 + p \rangle$ o délce rovné periodě; je skoro zřejmé, že splnění předpokladu nezávisí na tom, jak volím c_0 .

8) a_k , b_k jsou ovšem opět definovány vzorci (13).

Její součet v intervalu $(-1, 1)$ je e^x, pro $x = -1$ a pro $x = 1$ má součet $\frac{1}{2}(e + \frac{1}{e})$. Řada je stejnoměrně konvergentní v každém intervalu tvaru $\langle -1+\delta, 1-\delta \rangle$ $(0 < \delta < 1)$. Nemůže však být konvergentní v žádném intervalu $\langle 1-\delta, 1+\delta \rangle$ $(\delta > 0)$, ježto její součet není spojitý v bodě 1. Součet řady je periodická funkce s periodou 2.

Příklad 5. Rozviňme funkci $f(x) = e^x$ v kosinusovou řadu v intervalu $(0, 1)$. Víme, že Fourierova řada sudé funkce je kosinusová řada. Sestrojme tedy funkci $g(x)$ tak, že pro $0 \leqq x \leqq 1$ je $g(x) = f(x) = e^x$, pro $-1 < x < 0$ je $g(x) = g(-x) = f(-x) = e^{-x}$ (viz obr. 32) a dále definujme g tak, aby měla periodu 2. Je vidět, že g je spojitá v $(-\infty, +\infty)$. Fourierova řada funkce g má tedy v každém bodě x součet $g(x)$. Konvergence je stejnoměrná např. v $\langle -1, 1 \rangle$ a tedy (následkem periodičnosti) v $(-\infty, +\infty)$. Pro $0 \leqq x \leqq 1$ je její součet e^x, pro $-1 \leqq x \leqq 0$ je její součet e^{-x}. Propočtěte tuto řadu; dostanete:



Obr. 32.

$$e - 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k e - 1}{1 + k^2\pi^2} \cos k\pi x .$$

Příklad 6. Rozviňte $f(x) = e^x$ v sinusovou řadu v intervalu $(0, 1)$. Funkci g s periodou 2 budu nyní konstruovat tak, aby byla lichá (viz obr. 33). Zvolím $g(x) = f(x) = e^x$ pro $0 < x < 1$; pro $-1 < x < 0$ zvolím $g(x) = -g(-x) = -f(-x) = -e^{-x}$, $g(0) = -g(0)$, tedy $g(0) = 0$. Zvolím-li ještě $g(1) = 0$, má Fourierova řada funkce g v každém bodě x součet $g(x)$. Řada je stejnoměrně konvergentní v každém intervalu tvaru $(m + \delta, m + 1 - \delta)$ $(0 < \delta < \frac{1}{2}$, m celé). Dostanete tuto řadu:

$$-2\pi \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{1 + k^2\pi^2} \left((-1)^k e - 1\right) \sin \pi k x .$$

V intervalu $(0, 1)$ má řada součet e^x, pro $x = 0$ a pro $x = 1$ má součet 0.

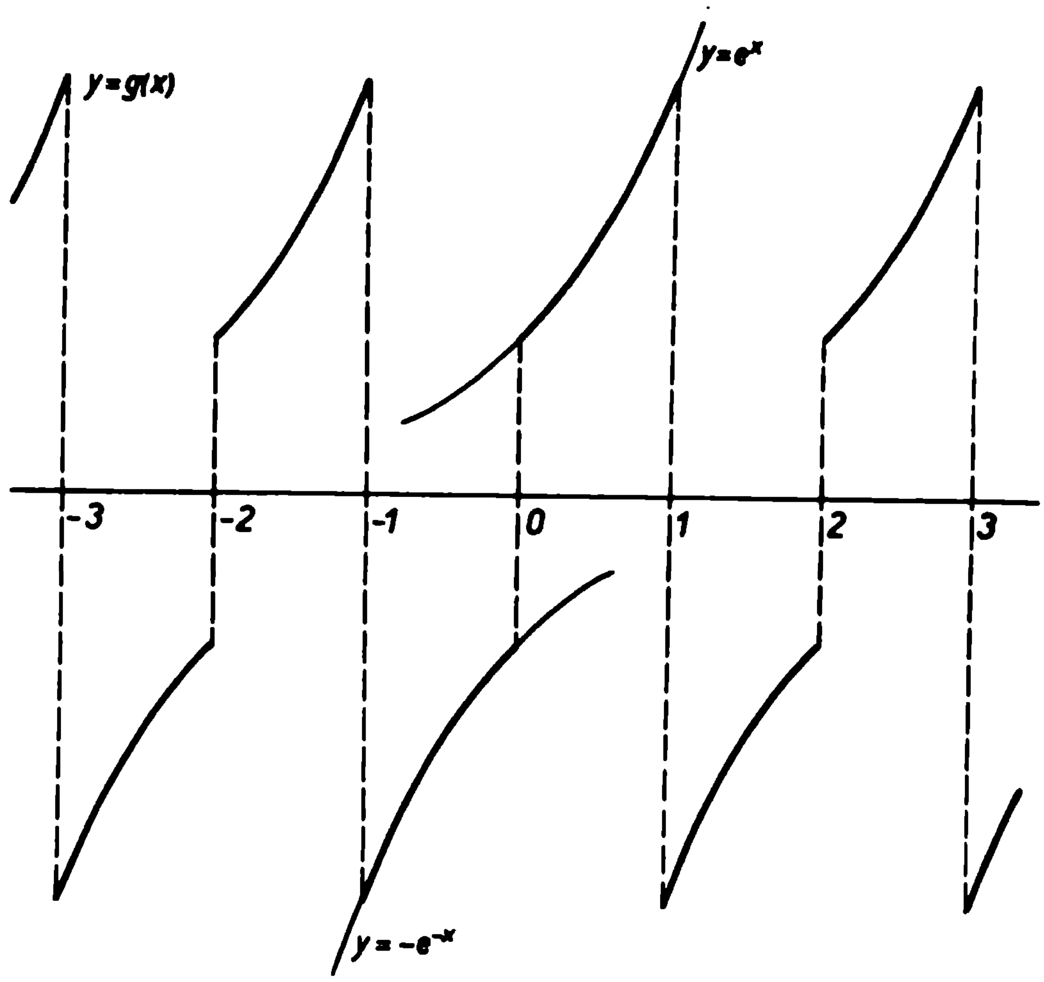
Poznámka 6. Trigonometrické Fourierovy řady

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{2k\pi x}{p} + b_k \sin \frac{2k\pi x}{p}\right)$$

slouží k rozvíjení periodických funkcí o periodě p. Takové periodické funkce slouží k vystižení periodických jevů v přírodě, které jsou velmi časté a důležité (mechanické a tedy i akustické, elektromagnetické a tedy i optické kmity, periodické pohyby planet atd.). Obecný člen

$$a_k \cos \frac{2k\pi x}{p} + b_k \sin \frac{2k\pi x}{p}$$

slouží k popisu nejjednodušších kmitů, totiž k popisu tzv. harmonických kmitů s periodou $\frac{p}{k}$, čili s kmitočtem $\frac{k}{p}$. Tyto kmitočty jsou tedy u jednotlivých členů Fourierovy řady (kromě konstantního členu) rovny násobkům základního kmitočtu $\frac{1}{p}$. Podaří-li se nám tedy nějakou periodickou funkci rozvinout v trigonometrickou Fourierovu řadu, rozložili jsme tím příslušný "kmit" v harmonické kmity o kmitočtech $\frac{1}{p}, \frac{2}{p}, \frac{3}{p}, \ldots$ V akustice jim odpovídají harmonické tóny k základnímu tónu o kmitočtu $\frac{1}{p}$.



Obr. 33.

Poznámka 7. Probrané příklady by mohly vést k domněnce, že snad každou periodickou funkci lze rozvinout, aspoň v bodech, kde je spojitá, v trigonometrickou Fourierovu řadu. Není tomu tak; lze např. sestrojit periodickou funkci spojitou v $(-\infty, +\infty)$, jejíž trigonometrická Fourierova řada je divergentní ve všech racionálních bodech. Jak může vypadat množina bodů divergence spojitých periodických funkcí, není dosud dostatečně známo.