Filosofická pojetí pravděpodobnosti v pracích českých myslitelů

6.2 Počátky teorie geometrické pravděpodobnosti

In: Magdalena Hykšová (author): Filosofická pojetí pravděpodobnosti v pracích českých myslitelů. (Czech). Praha: Matfyzpress, vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, 2011. pp. 181–190.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402278

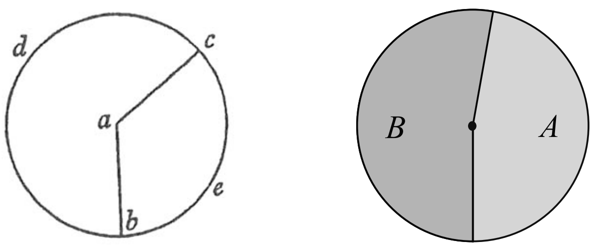
6.2 POČÁTKY TEORIE GEOMETRICKÉ PRAVDĚPODOBNOSTI

6.2.1 Anglické kořeny

První známý problém z oblasti geometrické pravděpodobnosti lze nalézt v rukopise Isaaca Newtona (1643–1727), napsaném mezi lety 1664 a 1666, ale publikovaném až v knize [251] z roku 1967. Newton si jej poznamenal při četbě Huygensova spisu *De ratiociniis in ludo aleae* [160], o němž jsme hovořili v části 1.2.1, aby poukázal na to, že poměr šancí může být iracionální. Huygens uvažoval situaci, kdy šance na výhru částky a a částky b jsou v poměru $p : q$, kde p, q jsou celá čísla, a odvodil, že hodnota očekávané výhry je

$$E = \frac{ap + bq}{p + q}. \tag{6.7}$$

Newton k tomu dodal, že stejným způsobem lze postupovat i v případě, že poměr šancí na výhru je iracionální. Uvažoval kruh v horizontální rovině, rozdělený na dvě nestejné výseče, jejichž obsahy jsou v poměru $2 : \sqrt{5}$ (viz obr. 6.6 vpravo; vlevo je zachycena ilustrace z pojednání [251]), a kuličku zanedbatelných rozměrů, padající směrem ke středu kruhu.[6]



Obr. 6.6 Ilustrace k Newtonově úloze

Označme výseče písmeny A, B; značí-li a (resp. b) hodnotu výhry v případě, že kulička při dopadu zasáhne výseč A (resp. B), pak je podle Newtona hodnota očekávané výhry neboli *naděje* rovna

$$E = \frac{2a + \sqrt{5}b}{2 + \sqrt{5}}\,. \tag{6.8}$$

[6] *If ye Proportion of chances for any stake bee irrational, the interest may bee found after ye same manner. As if ye Radij ab, ac, divide ye horizontal circle bcd in two pts abec & abed in such proportion as 2 to $\sqrt{5}$. And if a ball falling perpendicularly upon ye center a doth tumble into ye portion abec I win (a): but if ye other portion, I win b, my hopes is worth $(2a + \sqrt{5}b)/(2 + \sqrt{5})$.* ([251], str. 60)

Povšimněme si, že pro $a = 1$, $b = 0$ vztah (6.8) udává pravděpodobnost $2/(2+\sqrt{5})$, že kulička zasáhne výseč A; podobně pro $a = 0$, $b = 1$ obdržíme pravděpodobnost $\sqrt{5}/(2+\sqrt{5})$ zásahu výseče B. Jinými slovy, ve stejném poměru jako obsahy výsečí jsou i pravděpodobnosti jejich zasažení kuličkou.

Pozoruhodná je rovněž Newtonova poznámka, že pro kvádr nebo jiné nepravidelné těleso mohou být různé šance jednotlivých stěn na to, že padnou právě ony, odhadnuty experimentálně pomocí četností (řečeno v dnešní terminologii).[7] Kdybychom tuto myšlenku použili i pro kuličku vrženou na kruh $C = A \cup B$, mohli bychom vzhledem k předchozím Newtonovým úvahám například pro úseč A psát:

$$P(X \uparrow A \,|\, X \uparrow C) = \frac{S(A)}{S(C)} = \overline{\left(\frac{N_{zas}}{N_{celk}}\right)}, \tag{6.9}$$

kde N_{celk} značí celkový počet hodů kuličky zanedbatelných rozměrů (bodu X), náhodně „vržené“ na kruh C, N_{zas} značí počet zásahů výseče A a pruhem je označena střední hodnota; jinak řečeno, podíl $P_P = N_{zas}/N_{celk}$ udává jednak odhad pravděpodobnosti zasažení výseče A, jednak odhad A_A podílu jejího obsahu v obsahu celého kruhu. V Newtonových zápiscích ze 17. století tak lze kromě myšlenky nahrazení počítání jevů jejich mírou odhalit také první dvourozměrnou stereologickou formuli

$$A_A = P_P\,, \tag{6.10}$$

umožňující odhad plošného obsahu určité oblasti pomocí bodové metody, zmíněné v předchozí části.

První publikace

První publikací, v níž lze nalézt úvahy související s geometrickou pravděpodobností, bylo pojednání [135], které v roce 1693 uveřejnil Edmond Halley (1656–1742) a které je všeobecně uznáváno jako základ správné teorie pojištění důchodu. Halley odvodil vztahy pro různé anuity nejprve analyticky, potom připojil jejich geometrickou ilustraci.

O rok dříve publikoval John Arbuthnot (1667–1735) první anglicky psanou práci o teorii pravděpodobnosti [5], která obsahovala překlad Huygensova spisu [160] a některé další problémy týkající se různých náhodných her. Mezi nimi lze nalézt také jeden neřešený problém zcela odlišné povahy, který byl vyřešen teprve o půl století později s využitím geometrické pravděpodobnosti: Kolikrát je třeba hodit kvádrem s hranami a, b, c, aby alespoň jednou padla předem zvolená konkrétní stěna? Řešení nalezl až Thomas Simpson (1710–1761) v pojednání [346] z roku 1740, kde uvažoval sféru opsanou danému kvádru a dospěl k závěru, že šance, že padne konkrétní stěna, je rovna podílu obsahu části této sféry, „vyříznuté“ paprskem vycházejícím z jejího středu a pohybujícím se po obvodu dané stěny, a obsahu celé sféry. Tím problém zredukoval na nalezení obsahu části sféry a předznamenal pozdější způsob zavedení míry svazku přímek v prostoru, procházejících daným bodem.

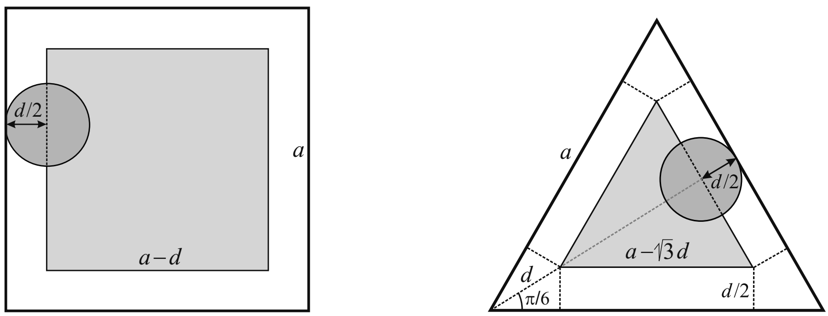
---

[7] [...] *if a die bee not a regular body but a Parallelepipedon or otherwise unequall sided, it may be found how much one cast is more easily gotten than other.* ([251], str. 61)

6.2.2 Buffonovy úlohy

Za zakladatele teorie geometrické pravděpodobnosti je všeobecně považován Georges-Louis Leclerc, později hrabě de Buffon (1707–1788),[8] který se zabýval hrou nazývanou *franc-carreau* a dnes velmi dobře známou úlohou o jehle. Bernard Le Bouvier de Fontenelle (1657–1757) podává v práci [107] zprávu o jejich první prezentaci ve francouzské akademii věd v roce 1733;[9] další zobecnění lze nalézt v Buffonově spisu [48], který vyšel v roce 1777.

Připomeňme, že ve hře franc-carreau, velmi populární u francouzského dvora, se náhodně hází mince ve tvaru kruhu na podlahu pokrytou pravidelnými dlaždicemi (Buffon ve zmíněné prezentaci z roku 1733 uvažoval dlaždice ve tvaru čtverce, v práci [48] potom také dlaždice ve tvaru rovnostranného trojúhelníku, kosočtverce či pravidelného šestiúhelníku); jeden hráč sází na to, že mince zasáhne jen jednu dlaždici, druhý sází na to, že zasažených dlaždic bude více, tj. mince dopadne na spáru. Nalezení šancí jednotlivých hráčů na výhru je založeno na stejném principu jako řešení problému popsaného Newtonem: poměr šancí je roven poměru obsahů rovinných oblastí, do nichž může dopadnout střed mince, aby tito hráči vyhráli.



Obr. 6.7 Ilustrace k řešení hry franc-carreau

Například pro minci ve tvaru kruhu o průměru d a pro dlaždice ve tvaru čtverce se stranou a se snadno odvodí, že šance na výhru jsou v poměru $(a-d)^2 : [a^2-(a-d)^2]$; pro rovnostranný trojúhelník se stranou a je poměr šancí $(a-d\sqrt{3})^2 : [a^2-(a-d\sqrt{3})^2]$ (viz ilustrační obrázek 6.7).

[8] Buffon studoval práva v Dijonu; po získání licenciátu v roce 1726 tento obor přes odpor rodiny opustil a začal se věnovat vědě. Studoval medicínu v Angers, četl Newtona, zajímal se o matematiku a biologii, cestoval po Francii a Itálii. V roce 1734 se stal členem pařížské akademie věd, o deset let později zde byl jmenován doživotním pokladníkem. V roce 1739 se stal správcem královské botanické zahrady, kterou výrazně rozšířil a zvelebil, mnoho času trávil také v rodném Montbardu. Byl členem Královské společnosti v Londýně, akademie v Dijonu a Francouzské akademie, zaměřené na francouzský jazyk. Podrobněji viz [181].

[9] Na základě této prezentace byl Buffon do akademie přijat. Dodejme, že hru franc-carreau se čtvercovými dlaždicemi popsal již Gabriel Cramer ve svém dopise Jamesi Stirlingovi, datovaném 22. února 1732 a později otištěném v knize [378] (str. 122–128). Cramer poznamenal, že pro minci kruhového tvaru není řešení složité, ale pro minci čtvercovou problém nebyl schopen vyřešit. K tomu je třeba doplnit, že Cramer si v té době již několik let dopisoval s Buffonem, který mu napsal první dopis v roce 1727 a v roce 1731 jej navštívil v Ženevě. Mohl to být tedy opět Buffon, kdo Cramera k tomuto problému a jeho řešení pro čtvercové dlaždice přivedl.

Buffon vždy hledal takový poměr délky hrany dlaždice a průměru mince, aby hra byla spravedlivá, neboli aby šance obou hráčů na výhru byly stejné. Například pro čtverec získal po úpravě $a/d = 2 + \sqrt{2}$, pro rovnostranný trojúhelník $a/d = 2\sqrt{3} + \sqrt{6}$.

Zcela jiné povahy byla dnes slavná úloha o jehle: [10] *Předpokládám, že v místnosti, jejíž podlaha je jednoduše rozdělena rovnoběžnými spárami, je do vzduchu vyhozena tyčka a že jeden z hráčů sází na to, že tyčka neprotne žádnou rovnoběžku na podlaze, a druhý naproti tomu sází, že tyčka některé z nich protne; ptáme se na šance těchto dvou hráčů. Hru je možné hrát na šachovnici s jehlou na šití nebo se špendlíkem bez hlavičky.*[11]

Uvažujme tyčku (jehlu) délky l a předpokládejme, že platí $l < d$, kde d je vzdálenost sousedních rovnoběžek. Pomocí integrálního počtu Buffon nalezl poměr šancí $\left(1 - \frac{2l}{\pi d}\right) : \left(\frac{2l}{\pi d}\right)$; tyto šance jsou si rovny, jestliže platí: $l/d = \pi/4$. Buffon se podobně jako Huygens zabýval pouze šancemi hráčů na výhru; z jeho výsledku však ihned plyne dobře známý vztah pro pravděpodobnost, že tyčka zasáhne některou spáru:

$$P = \frac{2l}{\pi d}\,. \tag{6.11}$$

Úloha o jehle zůstala poměrně dlouho bez povšimnutí. Výraznější pozornosti se jí dostalo až poté, co ji Pierre Simon de Laplace (1749–1827) představil (bez uvedení Buffonova jména) ve svém spise [208] z roku 1812, kde uvažoval jednak původní úlohu s rovnoběžkami v jednom směru, jednak její zobecnění na dva systémy rovnoběžek, tvořící obdélníkovou mřížku. Je přitom pozoruhodné, že Laplace uvedl diskusi těchto úloh poznámkou, že teorii pravděpodobnosti lze využít k určování délek křivek a obsahů ploch. Zmínil však jen jeden konkrétní příklad, a to odhad obvodu 2π jednotkového kruhu, založený na opakovaném vrhání úzkého válce na systém rovnoběžek. Bohužel, počínaje Todhunterovým spisem [372] byl tento Laplaceův výsledek citován jako využití úlohy o jehle k odhadu hodnoty π.

V následujících destiletích se pak úloha o jehle dočkala řady dalších zobecnění. Isaac Todhunter (1820–1884), který přednášel na St. John's College v Cambridge a uvedením několika příkladů týkajících se geometrické pravděpodobnosti v učebnici integrálního počtu [371] se zasloužil o popularizaci této rodící se disciplíny, uvažoval čtverec s úhopříčkou kratší než d, elipsu s hlavní osou kratší než d a tyčku, jejíž délka je násobkem vzdálenosti d (v prvním vydání z roku 1857), později také libovolnou uzavřenou křivku bez singulárních bodů, která v žádné poloze nemůže protnout více rovnoběžek (od druhého vydání z roku 1862). Todhunter také odhalil, že autorem úlohy o jehle nebyl Laplace, ale Buffon, a ve druhém vydání knihy [371] již citoval jeho spis [48].

[10] Buffon v prezentaci z roku 1733 uvádí (podobně jako Cramer), že hra franc-carreau se značně zkomplikuje, nahradí-li se kruhová mince například mincí čtvercovou (či španělskou pistolí). Protože však takový problém nebyl schopen vyřešit, uvažoval místo čtverce jen tyčku a místo čtvercové sítě jen systém rovnoběžek. V práci [48] z roku 1777 pak řešení zobecnil (ovšem nesprávně) na čtvercovou síť a uvažoval také více hráčů sázejících na různé počty zasažených spár. Podrobněji viz článek [184] A. Kalousové.

[11] [48], str. 100–101; český překlad citován podle [184], str. 165.

S odkazem na dřívější prezentaci v [107] pak Buffonovy problémy rozebral také v historickém přehledu [372] z roku 1865, kde rovněž můžeme nalézt jednoduché odvození správné hodnoty pravděpodobnosti pro případ obdélníkové mřížky; zatímco Laplace ve svém spise [208] rozdělil obdélníky na jednotlivé části a pro každou z nich „měřil" příznivé pozice jehly, Todhunter použil jediný integrál přes úhel, který svírá jehla s jedním ze systémů rovnoběžek. Gabriel Lamé (1795–1870) zařadil Buffonovu úlohu o jehle a její zobecnění na kruh, elipsu a pravidelné mnohoúhelníky do svých přednášek na Sorbonně.

Joseph-Émile Barbier

Jeden z Laméových posluchačů, J.-É. Barbier (1839–1889),[12] pak v pojednání [9] z roku 1860 publikoval obecnou větu udávající střední hodnotu počtu průsečíků libovolné křivky se systémem rovnoběžek. A co je pozoruhodné, ekvidistantní rovnoběžky nahradil libovolným systémem křivek nebo i jedinou křivkou konstantní délky připadající na jednotku obsahu. Navíc tyto výsledky rozšířil i do trojdimenzionálního prostoru a zformuloval další tři věty, vyjadřující základní stereologické formule pro odhad obsahu plochy nebo délky křivky. Barbierův příspěvek zůstal bohužel dlouho nepovšimnut a jeho skutečný význam byl oceněn teprve ve 21. století – viz články [182] a [183] A. Kalousové. Nezávisle na Barbierovi byly zmíněné formule znovu objeveny teprve v polovině 20. století. Barbierovy životní osudy a jeho výsledky v oblasti geometrické pravděpodobnosti jsou podrobně popsány v citovaných článcích [182] a [183]. Zde jen uveďme několik základních myšlenek, které lze snadno použít i ke zpestření výuky matematiky.

Bez použití integrálního počtu Barbier odvodil, že pro libovolný konvexní disk s obvodem L, který v žádné poloze nemůže protnout více rovnoběžek, je pravděpodobnost zasažení některé z přímek dána vztahem

$$P = \frac{L}{\pi d}\,. \tag{6.12}$$

Při důkazu Barbier pracoval s pojmem očekávání, tedy v duchu tehdy obvyklého přístupu ke zkoumání hazardních her (srov. část 1.2). Uvažujme konvexní mnohoúhelník, který má m shodných stran o délce c a průměr menší, než je vzdálenost rovnoběžek d; každá ze stran má zřejmě stejnou šanci na to, aby zasáhla některou rovnoběžku. Nyní si představme následující hru m hráčů: každému patří jedna strana a poté, co disk dopadne na systém rovnoběžek, dostane majitel strany, která zasáhla některou přímku, určitou výhru. Očekávaná výhra

[12] Joseph-Émile Barbier studoval na École Normale Supérieure, kde mj. poslouchal matematické přednášky Josepha Bertranda; kromě toho navštěvoval Laméovy přednášky na Sorbonně. Po absolutoriu v roce 1860 začal působit jako profesor matematiky na lyceu v Nice, později pracoval jako astronom v Observatoire de Paris. Jeho odbornou kariéru však poznamenaly stupňující se psychické problémy. V roce 1865 opustil Paříž, přerušil veškeré kontakty s kolegy i přáteli a následujících patnáct let o něm nikdo nic nevěděl. V roce 1880 ho J. Bertrand našel v ústavu v Charenton-St-Maurice a povzbudil jej k návratu k vědecké činnosti. Jako tajemník pařížské akademie věd mu pak zajistil skromnou finanční podporu a přivedl jej zpět do Paříže. Během 80. let 19. století Barbier vydal (s jedinou výjimkou v Comptes Rendus) 14 příspěvků z nejrůznějších oblastí matematiky, včetně teorie pravděpodobnosti (viz [10], [11] a [12]).

je před každým hodem pro všechny hráče stejná, označme ji například symbolem E. Jestliže si hráč koupí n stran, bude jeho očekávaná výhra rovna nE, a tedy přímo úměrná počtu stran, což se nezmění ani při jakékoli deformaci zachovávající délky stran a konvexnost mnohoúhelníku (protne-li tedy jeho hranice některou rovnoběžku, budou průsečíky vždy dva), přičemž průměr je stále menší než d. Počtu stran je pak přímo úměrná i pravděpodobnost zasažení některé rovnoběžky. Aproximace pomocí m-úhelníků konečně vede k závěru, že pravděpodobnost zasažení je stejná pro všechny konvexní rovinné útvary o stejném obvodu a o průměru menším než d. K určení konstanty úměrnosti potom stačí uvažovat nejjednodušší případ, jímž je kruh o poloměru r, kde $L = 2\pi r$, $r < d/2$. Tento kruh protne některou rovnoběžku, je-li od ní jeho střed vzdálen o méně než r. Pravděpodobnost zasažení je proto rovna

$$P = \frac{2r}{d} = \frac{2\pi r}{\pi d} = \frac{L}{\pi d}\,.$$

Jak Barbier rovněž poznamenává, tenkou tyčku délky l lze považovat za limitní případ elipsy s nulovou vedlejší poloosou a s obvodem $L = 2l$, odkud ihned plyne (6.11).

V další části svého článku Barbier hledá počet průsečíků libovolné křivky se systémem rovnoběžek. Křivku nahradí lomenou čarou o délce L, sestávající z n úseček téže délky $l < d$. Ze vztahu (6.11) plyne, že střední hodnota počtu průsečíků, $\overline{N} = nP$, je rovna[13]

$$\overline{N} = \frac{2L}{\pi d}\,. \tag{6.13}$$

Je-li $l < d$, udává rovnice (6.13) přímo pravděpodobnost (6.11).

Ve školské matematice bývá jedinou „aplikací“ Buffonovy úlohy o jehle odhad hodnoty π. I nepříliš bystrý student si však může uvědomit, že existují výrazně efektivnější a přesnější metody. Mnohem zajímavější je jiná aplikace: Často je obtížné změřit délku křivky nebo systému křivek přímo (představme si například cévní systém, vodní toky či hranice buněk v rovinném řezu); na daný vzorek však můžeme „vrhnout“ systém rovnoběžek, zjistit počet průsečíků N a využít vzorec (6.13) pro odhad neznámé délky:[14]

$$[L] = \frac{\pi d}{2} \cdot N\,. \tag{6.14}$$

Dnes bychom řekli, že systém rovnoběžek představuje testovací systém přímek s délkovou intenzitou (délkou připadající na jednotku obsahu) $L_A = 1/d$ (viz obr. 6.8 vlevo). V tomto značení lze vztah (6.14) přepsat ve tvaru:

$$[L] = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{1}{L_A} \cdot N\,. \tag{6.15}$$

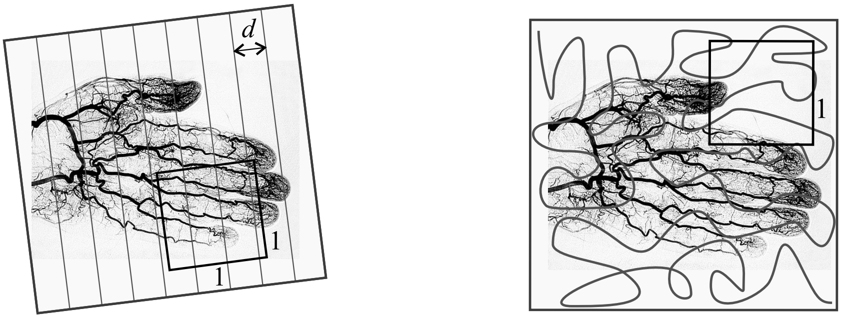
---

[13] V Barbierově článku je střední hodnota udána ve tvaru $L/\pi d$. Není jisté, zda se jedná o omyl nebo tiskovou chybu; vzorec (6.16) je však správně a plyne ze správného tvaru (6.13).

[14] Mezi pracovními listy, které jsou k dispozici na internetové adrese uvedené v pozn. 2 na str. 178, lze nalézt i testovací systémy přímek či jiných křivek, jež stačí vytisknout na slidy.

Po vydělení obou stran rovnice obsahem oblasti obsahující uvažovaný testovací systém obdržíme jeden ze základních stereologických vzorců:

$$[L_A] = \frac{\pi}{2} \cdot N_L. \tag{6.16}$$



Obr. 6.8 Testovací systémy pro odhad délky

Vztah (6.16) přitom platí i v případě, že testovací systém není tvořen rovnoběžkami, ale libovolným systémem křivek nebo jedinou křivkou konstantní délkové intenzity, což je další z originálních výsledků, k nimž dospěl J.-É. Barbier, který potom podobně zkoumal i interakce ploch a křivek v prostoru a dospěl k dalším formulím pro odhad délek a plošných obsahů – podrobněji viz citované články [182] a [183].

6.2.3 Formování základů

Kromě příspěvků [371] a [372] Isaaca Todhuntera byla od 60. let 19. století řada problémů týkajících se geometrické pravděpodobnosti, nazývané také *lokální pravděpodobnost* (*local probability*), publikována a rozvíjena v zajímavých diskusích v časopisech *Educational Times* a *Mathematical Questions*.[15] Jedním z nejslavnějších byl tzv. problém čtyř bodů [362], který v roce 1864 zformuloval James Joseph Sylvester (1814–1897):[16] Jaká je pravděpodobnost, že čtyři body, náhodně zvolené kdekoli v rovině, popř. v omezené konvexní oblasti, vytvoří tupoúhlý čtyřúhelník? Pro neomezenou oblast Sylvester[17] dospěl k hodnotě 1/4. V pátém ročníku Mathematical Questions z roku 1866 se

[15] Časopis *Educational Times* začala v roce 1847 vydávat *College of Preceptors* (doslova *Učitelská kolej*) v Londýně, která byla národním orgánem dohlížejícím na standardy vyučování a výchovy učitelů. Časopis obsahoval zvláštní sekci *Mathematical Questions*, kde byly zadávány různé problémy a následně zde byla zveřejňována řešení, která zaslali čtenáři. Tento oddíl si získal pozornost nejen učitelů a studentů, ale dokonce i významných matematiků; jeho rozsah stále narůstal, až začal být v roce 1864 vydáván samostatný časopis *Mathematical Questions with their Solutions from the Educational Times* (v dalším jen *Mathematical Questions*), který obsahoval další řešení i různé články. Podrobněji viz [128].

[16] Sylvester studoval matematiku na univerzitách v Cambridge a v Dublinu. Potom působil na univerzitě v Londýně, později ve Virginii v USA; po návratu do Anglie studoval právo a pracoval jako pojistný matematik. V letech 1855–1869 vyučoval na Royal Military Academy ve Woolwich, po penzionování působil ještě na univerzitách v Baltimore a v Oxfordu.

[17] Viz [362]; v článku [363] Sylvester připisoval tento výsledek Arthuru Cayleyovi; později však oba začali zdůvodnění použité pro neomezenou oblast považovat za chybné a přiklonili

však překvapivě sešly „důkazy“ několika dalších a zásadně rozdílných hodnot: 1/3 (J. M. Wilson, str. 81), 1/2 (G. C. de Morgan, str. 109) nebo 1/2 snížená o nějakou neurčitou hodnotu (C. M. Ingleby, str. 81–82, 108–109).[18] Následně se pak rozpoutala živá diskuse o pojmech *náhodný bod*, *náhodná přímka* a *náhodnost* jako taková, která poukázala na nutnost vybudování pevných základů teorie pravděpodobnosti a speciálně pravděpodobnosti geometrické, ovlivnila další vývoj a významně přesáhla rámec didakticky orientovaného časopisu.[19]

Například astronom Hugh Godfray (1821–1877)[20] upozornil v příspěvku [125] na to, že nesoulad pramení z odlišného pojetí pojmu *náhodný bod*, který je někdy chápán jako průsečík dvou náhodných přímek, jindy jako bod zvolený takovým způsobem, že šance zasažení určité oblasti je úměrná jejímu obsahu, apod. Nedostatečnost definice pojmu *náhodný* pak ilustroval příkladem, v němž anticipoval známý paradox zformulovaný později Josephem Bertrandem v knize [36] z roku 1889; na otázku, co znamená *náhodně zvolená tětiva v kruhu*, podal tři různé odpovědi: buď je to spojnice libovolných dvou bodů na obvodu, přičemž jsou všechny dvojice stejně pravděpodobné, nebo je to část přímky, jejíž vzdálenost od středu kruhu je menší než poloměr, přičemž jsou stejně pravděpodobné všechny takové vzdálenosti, anebo je to libovolná spojnice dvou bodů na obvodu, přičemž jsou stejně pravděpodobné všechny délky tětivy menší než průměr kruhu. Godfray píše, že se snadno ukáže, že průměrné délky takových tětiv se liší (nejdelší je v druhém případě a nejkratší v případě třetím). Potom zkoumal pravděpodobnost, že se dvě náhodně zvolené tětivy protnou, a dospěl k hodnotám 1/3, 1/2 a $(3\pi - 8)/(4\pi)$. Také připomněl článek [394] pojistného matematika Wesley Stokera Barkera Woolhouse (1809–1893), který vyšetřoval pravděpodobnosti různých počtů průsečíků pro n náhodných tětiv a obhajoval první ze zmíněných přístupů. V poznámce ke Godfrayovu článku [125] Woolhouse prohlásil, že jediné legitimní a přijatelné pojetí, odpovídající našemu chápání, je jen to první, zatímco další dvě jsou značně umělá.[21]

Diskuse pokračovala i v následujícím ročníku Mathematical Questions. Godfray se v článku [126] věnoval dalšímu rozboru pojmu *náhodná přímka* a pro tři různé přístupy odvodil tři různé pravděpodobnosti, že délka úsečky vedené náhodně z ohniska elipsy k jejímu obvodu je větší než délka hlavní poloosy. Stejně jako předtím, i nyní článek vyvolal kritiku W. S. B. Woolhouse, který zastával názor, že jediný přijatelný přístup je ten, kde šance, že úsečka bude v ohnisku svírat s hlavní poloosou daný úhel, je přímo úměrná velikosti tohoto úhlu. Za Woolhousovou kritickou poznámkou [395] následuje článek [60] jiného přispěvatele do Mathematical Questions, Williama Morgana Croftona (1826–1915),[22] který zde po-

se k názoru, že problém nemá řešení – viz Sylvesterovu poznámku k problému 1832 v Educational Times 18 (1865), str. 166, a abstrakt jeho příspěvku *On a Special Class of Questions on the Theory of Probabilities*, otištěný ve zprávě *Report of the* 35th *Meeting of the British Association for the Advancement of Science* 35 (1865), str. 8–9.

[18] Problém definitivně vyřešil až Wilhelm Blaschke (1885–1962) v práci [40] z roku 1917 – podrobnosti lze nalézt v článcích [336] a [278].

[19] Na tuto diskusi i na konkrétní příspěvky odkazuje v knize [C24] také E. Czuber.

[20] Godfray působil na cambridgeské univerzitě -- na St. John's, později na Pembroke College.

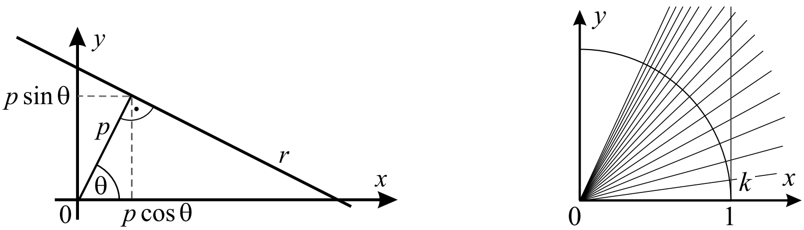
[21] Viz Mathematical Questions 6 (1866), str. 81.

[22] Crofton vystudoval matematiku na Trinity College v Dublinu, potom vyučoval v Queen

drobně obhajuje stanovisko, že jediná přijatelná definice pojmu *náhodný bod* uvažuje šance, že tento bod padne do libovolné, ale pevně zvolené oblasti, přímo úměrné obsahu této oblasti (k tomu bychom dodali, že to odpovídá Newtonovu příkladu s kruhem i pozdější definici geometrické pravděpodobnosti pro body v rovině). *Náhodnou přímku* potom definuje jako přímku reprezentovanou rovnicí

$$x \cos\theta + y \sin\theta = p, \tag{6.17}$$

kde $p \geq 0$ a $\theta \in [0, 2\pi)$ jsou náhodně zvolené konstanty, jejichž význam je patrný z obr. 6.9 vlevo. Volbu rovnice (6.17) zdůvodňuje tím, že je to jediný případ, kdy mají všechny přímky stejnou šanci být vybrány, na rozdíl např. od směrnicového tvaru $y = kx + q$, kdy stačí porovnat například osy x a y. Jak později poznamenal E. Czuber v knize [C23], kdybychom ve směrnicovém tvaru například při $q = 0$ dosazovali za k hodnoty tvořící aritmetickou posloupnost, nebyly by přímky v rovině rozmístěny rovnoměrně, ale „zhušťovaly" by se směrem k ose y (viz obr. 6.9 vpravo).



Obr. 6.9 K definici náhodné přímky

Crofton se také vrací k diskusi o náhodných tětivách v kruhu a poznamenává, že problém tkví ve výrazu *náhodně zvolit.* Znamená-li to náhodně vybrat jednu z přímek, které protínají kruh, pak dostaneme druhé pojetí. Znamená-li to zvolit jednu z přímek vedených náhodně zvoleným bodem na obvodu kružnice, pak dostaneme případ první. Crofton končí poznámkou, že diskutované záležitosti se zdají být prvními principy nové teorie, která vyžaduje mnohem podrobnější zkoumání. V tomto okamžiku tedy geometrická pravděpodobnost přestává být pouhým nástrojem pro řešení různých her a lze hovořit o počátku jejího systematického rozvoje.

V článku [62] potom Crofton problematiku rozpracoval dále a dokázal několik vět z budoucí integrální geometrie.[23] O několik let později Crofton napsal rozsáhlou závěrečnou kapitolu *On Mean Value and Probability* pro druhé vydání knihy [384] Benjamina Williamsona, které vyšlo v roce 1877. Za zmínku

College v Galway, v různých vzdělávacích istitucích provozovaných jezuity ve Francii a od roku 1864 na Royal Military Academy v anglickém Woolwich. Podrobněji viz např. [180].

[23] Jednou z nich je vzorec $\int\int(\alpha - \sin\alpha)dxdy = \frac{1}{2}L^2 - \pi A$, kde α značí úhel mezi dvěma tečnami vedenými z vnějšího bodu (x, y) ke křivce délky L, tvořící hranici konvexní oblasti o obsahu A, a integrál se počítá přes celou rovinu vně hranice. Tento a několik dalších podobných výsledků byly stručně oznámeny již v článku [61]. Dodejme, že Crofton v pojednání [62] ocenil práce Buffona a Laplace; Barbierův článek [9] však vůbec nezmínil a jen poznamenal, že geometrické pravděpodobnosti nebyla věnována opravdová pozornost, dokud se touto problematikou nezačali zabývat angličtí matematikové, například Sylvester či Woolhouse.

stojí také Croftonův příspěvek [63] v 9. vydání encyklopedie *Encyclopaedia Britannica*. Pro přímky v rovině, dané rovnicí (6.17), Crofton zavádí míru pomocí integrálu $\int\int dpd\theta$ pro vhodné meze. Potom připomíná svůj dřívější výsledek, totiž že je-li dána konvexní křivka $\mathscr{L}$ délky L, pak míra všech přímek $\mathscr{F}$ zasahujících křivku $\mathscr{L}$ je[24]

$$\int\int_{\mathscr{F}\uparrow\mathscr{L}} dpd\theta = L\,. \tag{6.18}$$

Bezprostředním důsledkem rovnice (6.18), dnes nazývané *Croftonova formule*, je jiný vztah, uvedený v pozdější Croftonově stati [63]:

$$\overline{C} = \frac{\int\int_{\mathscr{F}\uparrow\mathscr{L}} C dpd\theta}{\int\int_{\mathscr{F}\uparrow\mathscr{L}} dpd\theta} = \frac{\pi A}{L}\,, \tag{6.19}$$

kde $\overline{C}$ je střední délka tětivy konvexní oblasti o obsahu A, ohraničené křivkou $\mathscr{L}$ délky L. Důležitá je také dvojdimenzionální *Crofton-Hostinského formule* (srov. část 6.3.2) pro třetí mocninu délek tětiv:

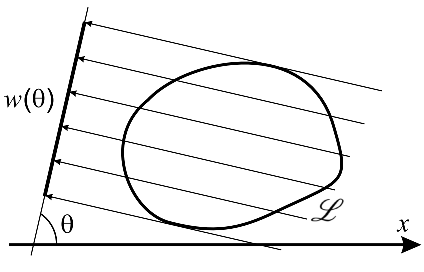
$$\int\int_{\mathscr{F}\uparrow\mathscr{L}} C^3 dpd\theta = 3A^2, \tag{6.20}$$

která umožňuje odhadnout druhou mocninu obsahu A^2 střední hodnotou $\frac{1}{3}L\overline{C^3}$.

V článku [62] Crofton ještě nevyšetřoval délky tětiv, v poznámce k rovnici (6.18) však můžeme objevit jiný důležitý stereologický výsledek, totiž Cauchy-Croftonovu formuli, díky níž lze odhadnout délku uzavřené konvexní křivky pomocí střední délky jejích ortogonálních projekcí (viz obr. 6.10):[25]

$$L = \int_0^\pi w(\theta)d\theta = \pi\overline{w}. \tag{6.21}$$

Tuto formuli (i když nikoli v kontextu geometrické pravděpodobnosti) odvodil již Augustin-Louis Cauchy v práci [52] z roku 1832 a bez důkazu ji uvedl také v kratším článku [53] z roku 1841.



Obr. 6.10 Ilustrace ke Cauchy-Croftonově formuli (6.21)

Dodejme, že Crofton řešil pouze rovinné problémy; jejich formulace však umožňuje zobecnění na vyšší dimenze. Co se týče zobecnění do trojrozměrného prostoru, Crofton jej sám nastínil v závěru článku [62]. Systematicky pak toto zobecnění provedl E. Czuber, jehož knihu [C23] Crofton označil jako *velmi zajímavou*.

[24] Crofton psal meze pouze k jednoduchým integrálům; značení $\mathscr{F}\uparrow\mathscr{L}$ bylo přidáno pro názornost.

[25] Povšimněme si, že pro kruh získáme $L = \pi d$, kde d je jeho průměr; pro čtverec o straně a vychází střední šířka $4a/\pi$.