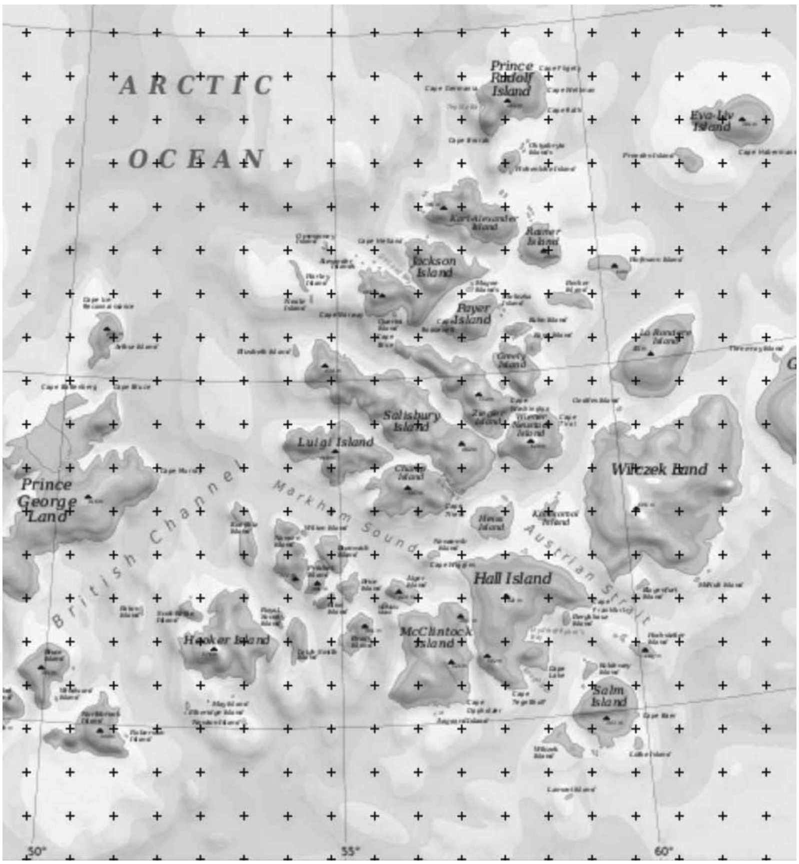
6 TEORIE GEOMETRICKÉ PRAVDĚPODOBNOSTI

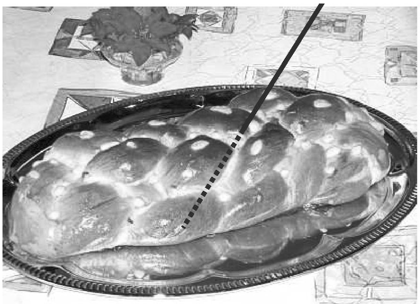


Obr. 6.1 Bodová mřížka (Země Franze Josefa – výřez)

6.1 ÚVOD

Geometrická pravděpodobnost hrála důležitou roli při zkoumání a hledání vhodné definice pojmu pravděpodobnosti, stejně jako při zavedení teorie množin a míry do teorie pravděpodobnosti. A protože geometrická pravděpodobnost musí být vždy vhodným způsobem podmíněná, představuje další motivaci úvah o axiomatizaci založené na pojmu podmíněné pravděpodobnosti. Samostatnou kapitolu v této publikaci si pak zaslouží i z toho důvodu, že má mimořádný význam pro objevování a chápání světa kolem nás, a tím i pro didaktiku a popularizaci teorie pravděpodobnosti.

Počáteční rozvoj teorie geometrické pravděpodobnosti byl – podobně jako tomu bylo u pravděpodobnosti „klasické“ – motivován snahami o pochopení náhodných her a nalezení pravidel, která by zaručovala jejich spravedlnost. Později se však ukázalo, že se jedná o neobyčejně důležitý nástroj umožňující velmi efektivně a snadno odhadnout například objem, plošný obsah či délku složitých útvarů v rovině nebo prostoru, ať už se jedná o minerály v hornině, buňky v tkáních, lidské nebo živočišné orgány a jejich patologické změny, cévní systémy nebo například řeky či různé oblasti na mapách. Odhad je přitom založen na sondách nižší dimenze (rovina řezu, lineární či bodová sonda).



Obr. 6.2 „Sonda nižší dimenze“

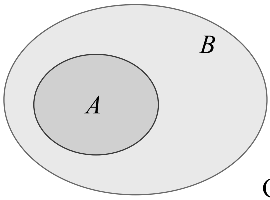
Připomeňme, že přejdeme-li od zkoumání vlastností konečných populací ke geometrickým charakteristikám (např. objem, plošný obsah, délka, tvar) trojrozměrných struktur, náhodný výběr z populace nahradíme sondou nižší dimenze a jako nástroj budeme místo teorie pravděpodobnosti využívat pravděpodobnost geometrickou, učiníme přechod od statistiky ke *stereologii.* A protože zmíněnými strukturami jsme nejen obklopeni, ale jsme jimi dokonce i tvořeni, má stereologie, a tedy i geometrická pravděpodobnost, pro náš život zcela zásadní význam. Postupně se stala neoddělitelnou součástí geologie, metalografie, biologie, medicíny, kartografie a řady dalších oborů.

Řešení úloh týkajících se geometrické pravděpodobnosti bývá poměrně složité, založené na výpočtu vícenásobných integrálů. Základní myšlenky se však dají ve zjednodušené podobě zprostředkovat i středoškolským studentům – alespoň do té míry, aby si uvědomili, k čemu je tato teorie dobrá.

Zavedení geometrické pravděpodobnosti

Geometrická pravděpodobnost byla zavedena jako rozšíření klasické definice pravděpodobnosti na situace, kdy množiny elementárních jevů jsou nespočetné a počty příznivých a všech možných „případů“ je třeba nahradit vhodnými mírami – podle situace délkami, obsahy či objemy, obecněji Lebesqueovou, popř. Hausdorffovou mírou.[1]

Intuitivně je například snadno pochopitelné, že pravděpodobnost, že náhodně zvolený bod X ležící v rovinné oblasti B o obsahu $S(B)$ (viz obr. 6.3) leží i v oblasti $A \subseteq B$ o obsahu $S(A)$, je rovna podílu obsahů uvedených oblastí:



$$P(X \uparrow A \,|\, X \uparrow B) = \frac{S(A)}{S(B)}\,. \tag{6.1}$$

Obr. 6.3 Ilustrace ke vztahu (6.1)

Na tomto jednoduchém příkladu si můžeme uvědomit, že geometrickou pravděpodobnost je vždy třeba vhodně *podmínit*. V první řadě je nutné, aby míra všech uvažovaných situací byla konečná, protože například pravděpodobnost, že náhodně zvolený bod v rovině zasáhne určitou oblast A libovolného konečného obsahu $S(A)$, ležící v této rovině, by byla rovna nule, a to bez ohledu na hodnotu $S(A)$. Dále je třeba porovnávat míry množin stejné dimenze; v opačném případě by byla pravděpodobnost opět nulová bez ohledu na konkrétní volbu A, protože obecně Lesbegueova míra v $\mathbb{R}^n$ je pro všechny množiny dimenze menší než n rovna nule. Například pravděpodobnost, že náhodně zvolený bod ležící v daném kruhu leží i na dané tětivě, by byla pro každou tětivu nulová.

Odhad obsahu rovinné oblasti

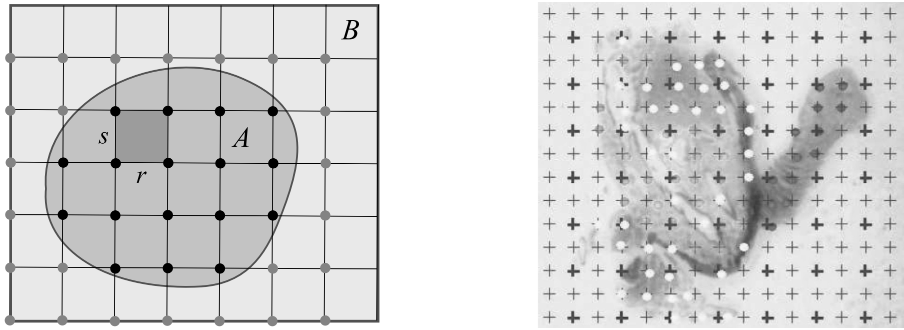
Zároveň si můžeme uvědomit, že ze vztahu (6.1) ihned plyne jednoduchá, ale velmi užitečná aplikace geometrické pravděpodobnosti, tzv. *bodová metoda*: jako oblast B uvažujme například rovinný řez tkání a jako oblast A poškozenou část komplikovaného tvaru. Odhadneme-li pravděpodobnost (6.1) tím, že na řez či jeho obraz budeme náhodně „vrhat“ body o celkovém počtu N_{celk} a spočítáme, kolik jich zasáhne oblast A (tento počet označme N_{zas}), získáme odhad obsahu poškozené části:

$$[S(A)] = \frac{N_{zas}}{N_{celk}} \cdot S(B)\,. \tag{6.2}$$

Jednodušeji můžeme na řez náhodně klást bodovou testovací mřížku znázorněnou na obr. 6.4. Budeme-li jako B uvažovat obdélník o obsahu $S(B) = rs \cdot N_{celk}$, získáme odhad

$$[S(A)] = rs \cdot N_{zas}\,. \tag{6.3}$$

[1]Základní přehled teorie geometrické pravděpodobnosti v českém jazyce poskytuje článek [321] I. Saxla. Z literatury v anglickém jazyce zde uveďme knihy [190], [194], [316] a [318]. Historii teorie geometrické pravděpodobnosti do 1. poloviny 20. století je věnován článek [166].



Obr. 6.4 Bodová testovací mřížka v rovině

Podobným způsobem můžeme odhadnout například obsah určité oblasti na mapě (vodní plocha, souostroví, zalesněná plocha apod.) či obsah určitého minerálu v hornině.[2] Na začátku části 6.2 uvidíme, že podobné úvahy lze nalézt již v rukopise Isaaca Newtona ze 17. století.

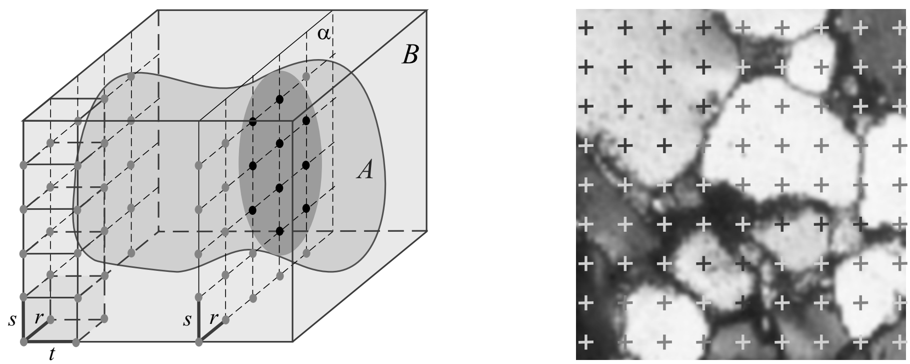
Odhad objemu

Podobně lze postupovat i v prostoru. Pravděpodobnost, že bod X, který leží v množině B, leží také v podmnožině $A \subseteq B$, je nyní rovna podílu objemů

$$P(X \uparrow A | X \uparrow B) = \frac{V(A)}{V(B)} \,. \tag{6.4}$$

Známe-li objem $V(B)$, můžeme vzorec (6.4) využít k odhadu objemu $V(A)$. K tomu stačí jako oblast B uvažovat hranol o objemu $V(B) = rst \cdot N_{celk}$, tvořený prostorovou bodovou mřížkou znázorněnou na obr. 6.5 vlevo. Objem $V(A)$ pak může být odhadnut přímo jako

$$[V(A)] = \frac{N_{zas}}{N_{celk}} \cdot V(B) = rst \cdot N_{zas} \,. \tag{6.5}$$



Obr. 6.5 Bodová testovací mřížka v prostoru a v rovinném řezu

[2]Na adrese *http://euler.fd.cvut.cz/~hyksova/pravdepodobnost* lze mj. nalézt pracovní listy použitelné ve výuce, pomocí nichž mohou studenti vyzkoušet aplikaci bodové metody v různých situacích.

Tuto metodu lze jednoduše demonstrovat na příkladu odhadu objemu vajíčka na základě zkoumání jeho řezů vytvořených kráječem: roviny řezu tvoří tzv. *systematicky náhodný* soubor rovin; rovinné bodové mřížky v jednotlivých rovinách tvoří dohromady prostorovou bodovou mřížku. Objem vajíčka pak může být odhadnut pomocí rovnice (6.5), kde hodnota N_{zas} je součtem počtu zasahujících bodů v jednotlivých rovinách. Výsledek může být porovnán s hodnotou získanou jiným způsobem, například ponořením nerozkrájeného vajíčka do vody v odměrném válci. Podobně lze také odhadnout, jakou objemovou část vajíčka tvoří žloutek.

V geologii, metalografii či biomedicíně je často třeba odhadnout objemový podíl V_V nějaké fáze ve vzorku (například podíl určitého minerálu v hornině). Je-li rozložení sledované fáze homogenní, pak by se střední hodnota podílu N_{zas}/N_{celk} neměla změnit při omezení bodů jen na některou z rovnoběžných rovin (např. na rovinu α na obr. 6.5 vlevo). Podíl A_A obsahů v řezu je tedy (v průměru) roven objemovému podílu V_V vyšetřované fáze ve vzorku, a zároveň byl určen jako podíl počtu bodů zasahujících danou fázi a všech bodů mřížky v dané rovině, což vyjadřuje jedna ze základních stereologických formulí:

$$P_P = V_V = A_A\,. \tag{6.6}$$

V případě homogenního rozložení tedy k odhadu stačí jen jeden nebo několik málo řezů. Bodová metoda je obzvlášť efektivní při zkoumání materiálů s jemnou strukturou, jako například hornin či kovů tvořených malými částicemi, nebo organických tkání. Dříve byla mřížka superponována přímo se vzorkem studovaným pod mikroskopem, popř. s jeho zvětšenou fotografií, v době počítačů stejnou práci zastane software pro zpracování obrazu.

Geometrická pravděpodobnost v geologii

Dodejme, že geologové geometrickou pravděpodobnost „objevili“ a začali využívat až téměř půl století po vydání Czuberovy knihy [C23], která byla první monografií věnovanou tomuto oboru, a ještě déle trvalo, než začala být využívána v biologii a biomedicíně. Význam geometrické pravděpodobnosti pro praktické aplikace vynikne při srovnání bodové metody se způsoby, které byly v geologii používány dříve.

Ke zjištění složení hornin se velmi dlouho využívalo různých pracných a ne zcela ideálních metod. Je-li hornina tvořena jen dvěma minerály známých hustot, lze poměr těchto minerálů určit z hustoty horniny; je však zřejmé, že tato metoda je omezená jen na málo typů hornin. Jiný způsob spočíval například v roztřídění jednotlivých minerálů ve zváženém množství rozrcené horniny pomocí kapalin o různých hustotách; tato metoda není příliš přesná a také naráží na problém s minerály blízkých hustot. Přesnější výsledky dávala chemická analýza, která je ovšem velmi náročná na čas.

Francouzský geolog a mineralog Achille Delesse (1817–1881) představil ve dvojici článků [72] a [73] z roku 1847 následující mechanickou metodu odhadu objemového podílu jednotlivých minerálů v hornině, založenou na úvaze, že v rovinném řezu horninou rovnoměrného složení jsou plošné obsahy minerálních komponent ve stejném poměru jako jejich objemy v hornině. Jinými slovy, Delesse ukázal, že pro odhad objemů není nutná kompletní trojrozměrná rekonstrukce objektů.[3] K určení plošných obsahů přitom používal jednoduše vypadající, ale poměrně pracnou metodu: papír se promastí olejem, aby byl co nejprůhlednější, položí se na rovinný řez horninou, obkreslí se hranice jednotlivých minerálů a oblasti se vybarví různými barvami pro různé minerály. Pak se papír nalepí na cínovou fólii, mozaika se rozřeže a roztřídí podle barev. Po odlepení papíru se jednotlivé skupiny zváží; plošné obsahy minerálů v řezu jsou pak ve stejném poměru jako hmotnosti odpovídajících skupin. Jak bylo zmíněno výše, ve stejném poměru jsou i objemové podíly jednotlivých minerálů. Při známých hustotách komponent pak lze snadno přejít i k hmotnostem.

Je-li hornina jemnozrnná, musí se řezy sledovat pod mikroskopem. Pak samozřejmě není možné použít přímo popsanou metodu, ale je třeba nejprve získat zvětšený obraz daného řezu. K tomu původně sloužila tzv. *camera lucida*, která spojuje obraz z mikroskopu a vedle položeného papíru a umožňuje tak zakreslit přesný obraz pozorovaného vzorku. Obraz se pak opět vybarví různými barvami pro různé minerály, rozřeže a zváží; tuto modifikaci Delesseovy metody popsal jako první Henri Clifton Sorby v článku [349]. John Joly místo řezání a vážení určoval obsahy graficky (viz [179]), Albert Johannsen navrhl měřit plochy pomocí planimetru (viz [176]). Všechny zmíněné modifikace jsou však podobně jako původní Delesseova metoda velmi náročné na čas i trpělivost.[4]

O výraznější zjednodušení se zasloužil rakouský geolog August Rosiwal (1860–1923), který v článku [309] z roku 1898 ukázal, že obsahy oblastí v rovinném řezu jsou ve stejném poměru jako součty délek průniků systému přímek, superponovaných s řezem, a příslušného minerálu. Určení objemů v trojdimenzionálním prostoru se tak redukuje na měření délek, tedy na jedinou dimenzi. Rosiwal přitom uvažoval nejen systém ekvidistantních rovnoběžek ve dvou navzájem kolmých směrech, ale také systém přímek umístěných zcela libovolně, a dokonce i systém libovolných křivek.

V roce 1933 pak ruský geolog, mineralog a petrolog Andrej Aleksandrovič Glagolev (1894–1969) publikoval článek [121], v němž popsal bodovou metodu (viz obr. 6.5 vpravo), která se tak stala jedním z důležitých nástrojů geologie.[5]

---

[3]Delesseovo původní zdůvodnění je následující: představme si, že vzorek horniny umístíme do souřadnicového systému. Objem daného minerálu v hornině lze spočítat pomocí integrálu $\int_z f_i dz$, kde f_i značí plošný obsah tohoto minerálu v řezu rovinou rovnoběžnou s rovinou xy. Je-li složení horniny rovnoměrné, vyjadřuje uvedený integrál objem válce s podstavou o obsahu f_i a výškou rovnou výšce zkoumaného vzorku. Objemy různých minerálů jsou proto ve stejném poměru jako velikosti základen f_i. Dnes bychom dodali, že Delesseovo tvrzení ihned plyne z Fubiniovy věty. Připomeňme, že metoda odhadu objemu, vycházející z obsahů v rovnoběžných rovinných řezech, bývá spojována se jménem Bonaventury Cavalieriho (1598–1647), jehož známý princip popsaný v práci [54] představoval důležitý krok na cestě k obecné definici objemu tělesa libovolného tvaru, založené na srovnávání jeho řezů nižší dimenze s řezy určitého referenčního tělesa.

[4]Podle A. A. Glagoleva bylo při počtu zrn větším než 1000 k dosažení dostatečné přesnosti (s chybou menší než 1 %) potřeba minimálně 6 až 8 hodin (viz [121], str. 8).

[5]Podrobnější informace lze nalézt například v článcích [165] a [166].