

Filosofická pojetí pravděpodobnosti v pracích českých myslitelů

Magdalena Hykšová

2.2 Bolzanovo pojetí pojmu pravděpodobnosti

In: Magdalena Hykšová (author): Filosofická pojetí pravděpodobnosti v pracích českých myslitelů. (Czech). Praha: Matfyzpress, vydavatelství Matematicko-fyzikální fakulty Univerzity Karlovy v Praze, 2011. pp. [87]–118.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/402270>

Terms of use:

© Hykšová, Magdalena

© Matfyzpress

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>

2.2 BOLZANOVO POJETÍ POJMU PRAVDĚPODOBNOTI



2.2.1 Úvod

Výklad základů teorie pravděpodobnosti Bolzano zařadil již do svých přednášek o náboženství, které konal v letech 1805–1819 na pražské univerzitě a které v roce 1834 vyšly tiskem pod názvem *Lehrbuch der Religionswissenschaft (Učebnice náboženské vědy)* [B8]. Pravděpodobnost zde zavedl jako vlastnost soudu vyjadřující *stupeň důvěry*, s nímž jej můžeme pokládat za pravdivý; to mu umožnilo přesněji hovořit o hodnověrnosti soudů a speciálně pak o hodnověrnosti historických svědectví. Pravděpodobnost v této práci slouží – vedle argumentů teologických či morálních – především jako nástroj k obraně *Nového zákona* a důvěryhodnosti svědectví, na nichž je založen.

Druhým spisem, který je z hlediska našeho tématu mimořádně zajímavý, je spis *Wissenschaftslehre (Vědosloví)* [B10], vydaný v roce 1837, o němž jsme se zmínili v předchozí části. Zde Bolzano buduje teorii pravděpodobnosti jako rozšíření deduktivní logiky a nedílnou součást celé logické teorie. Pravděpodobnost definuje jako *vztah mezi větami* (ve smyslu výrokových forem) vyjadřující stupeň, s nímž určitá hypotéza H plyne z daných premis A, B, C, \dots , neboli *stupeň potvrzení* hypotézy H na základě evidence $E = A \wedge B \wedge C \wedge \dots$:

$$P(H|E) = \frac{m(H \wedge E)}{m(E)}, \quad (2.1)$$

kde $m(X)$ je míra množiny proměnných, pro které je věta X pravdivá. Z dnešního pohledu tedy můžeme Bernarda Bolzana plným právem označit za jednoho z prvních průkopníků tzv. *logické interpretace pravděpodobnosti*, kterou nastínil Gottfried Wilhelm Leibniz a kterou později rozvíjeli William Ernest Johnson, Johannes von Kries, John Maynard Keynes, Harrold Jeffreys, Ludwig Wittgenstein, Friedrich Waismann, Rudolf Carnap a další – viz část 1.3.2. Zároveň si můžeme povšimnout, že Bolzanova pravděpodobnost (2.1) je vždy *podmíněná* danou evidencí, a je tedy funkcí dvou argumentů, H a E .

Z matematického hlediska jsou Bolzanovy výsledky v oblasti počtu pravděpodobnosti podrobně rozebrány v článku [220] a knize [223] Karla Mačáka. My se v této kapitole zaměříme především na Bolzanovo filosofické pojetí pojmu pravděpodobnosti a na některé další souvislosti.

První zmínky o pravděpodobnosti

Na závěr této úvodní části poznamenejme, že o pravděpodobnost se Bolzano zajímal již v době studií, kdy si začal psát vědecké deníky, do nichž si zaznamenával poznámky ke studované literatuře, stejně jako své vlastní myšlenky a plány. Tyto deníky vyšly tiskem v rámci souborného stuttgartského vydání. Hned v prvním svazku [B28], v části označené *Analecta V. | 1803*, nalezneme úvahu o rozhodování o očkování proti neštovicím, kterou si Bolzano poznamenal při četbě 3. dílu knihy o výchově²² německého pedagoga a filosofa Johanna Heinricha Gottlieba Heusingera (1766–1837), který si kladl otázku, zda je z hlediska morálky dovoleno očkovat proti nebezpečné nemoci (speciálně neštovicím), *je-li jen možné (nikoli pravděpodobné), že člověk bez očkování tuto nemoc dostane*. I když zároveň předpokládal, že nemoc je pro neočkovaného mnohem nebezpečnější než pro člověka očkovaného, vyslovil se proti očkování. Očkování doporučil za stejného předpokladu jen v případech, že by bylo *pravděpodobné*, že se neočkovaný člověk chorobou nakazí.²³ Bolzano pojem pravděpodobnosti použil v matematickém smyslu a poznamenal si jednoznačnou a z dnešního pohledu přirozenou odpověď:

Je-li pravděpodobnost úmrtí při dobrovolném očkování rovna a (a je zlomek, v jehož jmenovateli je počet očkovaných a čísel udává, kolik jich přitom zemřelo); a je-li pravděpodobnost, že bez očkování přirozeně onemocní neštovicemi, rovna b ; a pravděpodobnost, že ten, nebo speciálně já, kdo přirozeně onemocní neštovicemi, na ně zemře, je rovna c ; pak je pravděpodobnost smrti, nenechám-li se očkovat, rovna $b \cdot c$. Je-li tedy $a > bc$, pak se mohu rozhodnout proti očkování, je-li $a < bc$, pak očkováním získám. ([B28], str. 32)

Pojem pravděpodobnosti nalezneme také v jedné z prvních matematických prací, *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik* [B2], kde Bolzano kromě jiného hovoří o různých druzích soudů a rozlišuje soudy *empirické* či *vjemové* (*empirische Urtheile, Wahrnehmungsurtheile*) typu „pozorují – X “ (příslušné X se pak nazývá *názorem* (*Anschauung*)), a soudy *apriorní* (*apriorische Urtheile*; srov. str. 90). Potom dodává:

Skutečně existuje ještě jeden druh soudů, tzv. zkušenostních nebo pravděpodobnostních [Erfahrungsurtheile, Wahrscheinlichkeitsurtheile], u nichž je spojení predikátů se subjektem zprostředkováno názorem. Neboť z vjemového soudu: „pozorují názory X a Y ; a to X nikdy bez Y “ [...] vyvozují pravděpodobnostní soud: „věc, která je důvodem názoru X , pravděpodobně souvisí s důvodem názoru Y stejně jako souvisí příčina se svým účinkem.“ V tomto tvaru jsou podle mého mínění všechny tzv. zkušenostní soudy. Když například řeknu: Slunce zahřívá kámen; pak to v podstatě neznámá nic jiného, než: předmět (Slunce), který je příčinou názoru X (totiž zářící sluneční disk), je také důvodem názoru Y (totiž zahřátého teplého kamene). – Ale všechny tyto soudy jsou podle své přirozenosti jen pravděpodobné. ([B2], str. 143–144)

²²Heusinger J. H. G.: *Die Familie Wertheim. T. 3-4. Eine theoretisch-praktische Anleitung zu einer regelmäßigen Erziehung der Kinder. Vorzüglich von dem sechsten bis in das vierzehnte Jahr für Eltern und Erzieher.* J. Perthes, Gotha, 1799.

²³Citováno podle 2. vydání knihy z pozn. 22, str. 195–196.

2.2.2 Pravděpodobnost v přednáškách o náboženství

V části 2.1 jsme se zmínili o sešitech, podle nichž Bolzano – nebyl-li zrovna nucen se držet předepsané Frintovy učebnice – přednášel na univerzitě v tříletém povinném kurzu náboženské vědy. V průběhu let 1805–1819 sešity prošly určitým vývojem; k většímu přepracování se pak Bolzano začal chystat v roce 1823, kvůli jiným úkolům (zejména náročné práci na *Vědoslovi*) však tento plán odložil. Než se k němu vrátil, vyšla poslední verze jeho sešitů tiskem. Stalo se tak v roce 1834 bez Bolzanova přičinění; spis byl vydán anonymně pod názvem *Lehrbuch der Religionswissenschaft (Učebnice náboženské vědy)* s podtitulem *Otisk sešitů poznámek bývalého učitele náboženské vědy na katolické univerzitě, sebraný a vydaný několika jeho žáky* – viz [B8].²⁴ Bolzano nikterak nezpochybňoval autentičnost tohoto spisu, přece jen však litoval, že zachycuje jeho myšlenky z roku 1818 a nikoli z roku 1834.

Důležitým cílem těchto přednášek bylo utvrdit posluchače v křesťanské víře a přesvědčit je o hodnověrnosti svědectví o Božím zjevení i celého *Nového zákona*. Jako nástroj pro přesnější vyjadřování i pro argumentaci přitom Bolzano používal pojem pravděpodobnosti. V tištěném spise je tento pojem podrobně studován v druhé kapitole druhého svazku, nazvané *O povaze historického poznání, obzvláště se zřetelem na zázraky*²⁵. Smysl uvedené části a motivaci pro zařazení základů teorie pravděpodobnosti do učebnice náboženství snad nejlépe vystihují Bolzanova vlastní slova:

4. *V novější době byly však činěny různé pokusy rozkolísat historickou víru, obzvláště s ohledem na zázraky, a tvrdilo se, že vyprávění o zázracích, především o takových, které se odehrály před mnoha staletími, nebyla nikdy přísně dokazatelná. Stejná tvrzení předložili např. Joh. Crayg, Dav. Hume, Bolinbroke, J. J. Rousseau, C. F. Bahrdt, Im. Kant a mnozí další.*

5. *Abychom nyní mohli čelit jejich námitkám, bude třeba předeslat něco o povaze historického poznání a o stupni jeho jistoty, především se zřetelem k zázrakům.*²⁶

Pravdy a soudy

Abychom mohli snáze hovořit o Bolzanově pojetí pravděpodobnosti a o dalších výsledcích druhého svazku spisu [B8], podívejme se v krátkosti na svazek první a uvedme některé pojmy, které jsou zde zavedené.

Celý spis začíná rozsáhlou kapitolou věnovanou pojmu náboženství; již zde Bolzano používá (zatím bez definice) pojem *stupeň pravděpodobnosti* (*Grad der*

²⁴V originále *Ein Abdruck der Vorlesungshefte eines ehemaligen Religionslehrers an einer katholischen Universität, von einigen seiner Schüler gesammelt und herausgegeben.*

²⁵*Ueber die Natur der historischen Erkenntniß, besonders in Hinsicht auf Wunder.*

²⁶4. *In neuerer Zeit hat man aber auf verschiedene Art gesucht, den historischen Glauben, besonders in Hinsicht auf Wunder, wankend zu machen, und behauptet, daß Erzählungen von Wundern, vornehmlich solchen, die sich vor vielen Jahrhunderten ereignet haben, nie strenge erweislich wären. Dergleichen Behauptungen haben z. B. Joh. Crayg, [...] vorgetragen.*

5. *Um nun ihren Einwürfen zu begegnen, wird es nothwendig seyn, Einiges über die Natur der historischen Erkenntnißart, und über den Grad ihrer Gewißheit, besonders in Hinsicht auf Wunder, vorzuschicken.*

([B8], sv. 2, § 13, str. 37–38; český překlad odstavce 4 citován podle [220], str. 49)

Wahrscheinlichkeit), když tvrdí, že stupeň pravděpodobnosti určitého závěru není nikdy větší než stupeň pravděpodobnosti nejslabší z premis. V této úvodní kapitole rovněž zavádí a studuje jeden ze základních pojmů svého spisu, totiž pojem *pravda* (*Wahrheit*):

[...] *každá věta, která něco vypovídá tak, jak to je, se nazývá pravdou, bez ohledu na to, zda si tuto větu někdo skutečně myslel či ji vyslovil, nebo nikoli. Rozlišujeme proto pravdy o sobě od pravd, které si někdo myslí nebo které někdo poznal.*²⁷

Bolzano dokazuje existenci alespoň jedné pravdy o sobě: kdybychom předpokládali, že žádná pravda neexistuje, bylo by tvrzení „žádná pravda neexistuje“ pravdivé, což by byl spor s původním předpokladem. Potom ukazuje, že pravd je dokonce nekonečně mnoho. Jeho úvaha je přitom velmi prostá: víme, že existuje alespoň jedna pravda; označme ji formulí „ A je B “. Kromě této pravdy musí existovat ještě alespoň jedna další; kdyby tomu tak nebylo, bylo by tvrzení „kromě pravdy „ A je B “ neexistuje žádná další pravda“ pravdivé a byla by to pravda odlišná od pravdy předchozí. Podobným způsobem Bolzano ukazuje, že musí existovat více než dvě pravdy, a poznamenává, že stejně by bylo možné pokračovat bez konce, takže pravd musí být nekonečně mnoho.²⁸

Jako důležitý argument proti skepticizmu Bolzano dokazuje, že lidé jsou také schopni pravdy poznat a skutečně je poznávají. Poznatek ztotožňuje se správným či pravdivým soudem²⁹ a ukazuje, že předpoklad „všechny naše soudy jsou nesprávné“ by vedl ke sporu, neboť on sám je soudem a musel by být mezi uvedené soudy započítán. Potom poznamenává, že z možnosti poznání jedné pravdy lze snadno vyvodit možnost poznání neomezeného množství pravd, a to podobným způsobem, jako tomu bylo v případě jejich existence.

V této souvislosti ještě dodejme, že Bolzano v práci [B8] rozlišuje *soudy pojmové* či *apriorní* (*Begriffsurtheile, Urtheile a priori*), které sestávají z pouhých pojmů, tj. neobsahují v sobě žádný odkaz na pocit či představu, a *soudy vjemové* (*Wahrnehmungsurtheile*), které dále dělí na *ryzí* či *bezprostřední vjemové soudy* (*reine, unmittelbare Wahrnehmungsurtheile*), jež vypovídají o momentálním vjemu – pocitu nebo představě – toho, kdo je vyslovuje, a na *soudy*

²⁷[...] *jeder Satz, der etwas so aussagt, wie es ist, eine Wahrheit genannt wird, gleichviel, ob dieser Satz von irgend Jemand wirklich erkannt und ausgesprochen werde oder nicht. Wir unterscheiden deshalb Wahrheiten an sich, von Wahrheiten, die von irgend Jemanden gedacht und erkannt werden.* ([B8], sv. 1, § 11, str. 34)

²⁸Připomeňme, že podobným způsobem Bolzano ve svých *Paradozech nekonečna* [B14] dokazoval existenci nekonečné množiny: *Nepochybně existují množiny, které jsou nekonečné, již v oblasti těch věcí, které si nečiní nárok na skutečnost, ba ani na možnost. Množina vět a pravd o sobě je nekonečná, jak se dá velice snadno nahlédnout; neboť vezmeme-li jakoukoli pravdu, na příklad větu, že vůbec existují pravdy, nebo ostatně jakoukoli jinou větu, kterou označíme A ; pak shledáme, že věta, kterou vyjadřujeme slovy „ A je pravdivé,“ je odlišná od A sama; neboť tato věta má zřejmě zcela jiný subjekt než ona první. Jejím subjektem je totiž celá věta A sama. Avšak podle téhož zákona, podle něhož z věty A vyvozujeme větu od ní odlišnou, kterou nazvu B , dá se opět z B vyvodit třetí věta C , a tak stále bez konce. Souhrn všech těchto vět, kde každá následující je k nejbližší předcházející ve vztahu právě uvedeném, vezme totiž předcházející větu za svůj subjekt a vysloví o něm, že je pravdivou větou, tento souhrn – říkám – zahrnuje množinu částí (vět), která je větší než jakákoli konečná množina.* (český překlad citován podle [B22], str. 24)

²⁹Samotný pojem *soud* (*Urtheil*) zde Bolzano používá ve stejném významu jako ve *Vědo-sloví*, kde jej podrobně popisuje – srov. str. 98 v této knize.

empirické či *zkušenostní* (*Erfahrungsurtheile*), které hovoří o příčinách vjemů. O ryzích vjemových soudech Bolzano poznamenává, že jsou jisté, protože například vyjádření „představuji si červenou barvu“ vypovídá pouze o mé představě, nikoli o tom, zda přede mnou něco červeného skutečně je nebo nikoli; soudy zkušenostní pak jsou vždy jen pravděpodobné (například „kamna mne zahřejí“). V druhém svazku Bolzano pojmové soudy označuje také jako *filosofické* (*philosophische*) a soudy vjemové jako *historické* (*historische*) v širším smyslu (viz str. 92).

Za kapitolu věnovanou pojmu náboženství Bolzano zařadil vsuvku týkající se německé filosofie a především filosofie Immanuela Kanta. Kromě jiného zde polemizuje s Kantovým vymezením analytických a syntetických soudů či s jeho míněním, že matematika je závislá na názorech času a prostoru; matematiku na rozdíl od Kanta považuje za ryze pojmovou vědu nezávislou na názoru a matematické pravdy považuje za analytické. Bolzano rovněž polemizuje s Kantovým tvrzením, že logika je již od dob Aristotela hotovou vědou, a naopak se domnívá, že je v této oblasti možné učinit mnohé důležité objevy.³⁰

Možnost a její různé druhy

Z dalších částí prvního svazku upozorníme ještě na čtvrtou kapitolu nazvanou *O možnosti a znamení zjevení* (*Über der Möglichkeit und den Kennzeichen einer Offenbarung*). Bolzano nejprve zkoumá samotný pojem možnosti. *Možným* nazývá to, jehož neexistence neplyne z žádné pojmové pravdy (ve smyslu pravdivého pojmového soudu); v opačném případě hovoří o *nemožnosti* (*Unmöglichkeit*). Možnost pak Bolzano dělí na vnitřní a vnější; *vnitřně* nebo též *logicky možné* (*innerlich* nebo *logisch möglich*) je přitom to, jehož neexistence neplyne z pojmových pravd samotných, *navenek možné* (*aeußerlich möglich*) je to, jehož existence neodporuje ani jistým dalším větám založeným na názoru. U vnější možnosti Bolzano dále rozlišuje následující pojmy: *podmíněně* nebo též *hypoteticky možné* (*bedinkt, hypothetisch möglich*) je to, jehož neexistence neplyne z žádné pojmové pravdy, ani když přidáme nějaký další empirický předpoklad (například „noc zalitá měsíčním světlem“ je za předpokladu, že je úplněk, možná a za předpokladu, že je nov, nemožná); *fyzicky možné* (*physisch möglich*) je to, co neodporuje žádnému známému přírodnímu zákonu (fyzicky možné je například to, že v určitý den prší; nemožné to, že těžké těleso nepadne, když jej nikdo nedrží); *psychologicky možné* (*psychologisch möglich*) je to, co neodporuje žádnému zákonu psychologie (psychologicky možné je například to, že někdo zapomene svůj rodný jazyk, ale nemožné, že se někdo chová způsobem, který je podle něj nesprávný, a přitom z toho nemá ani nejmenší prospěch); *problematicky možné* (*problematisch möglich*) je to, co podle našeho poznání neodporuje ničemu, co známe (problematicky možná je například vzduchoplavba), a konečně *zcela* nebo též *absolutně možné* (*vollkommen, absolut möglich*) je to, co neodporuje žádné pravdě, pojmové či vjemové, poznané či nepoznané. Poslední dva druhy možnosti Bolzano považuje za nejdůležitější.

³⁰O Bolzanově filosofii a o jeho vztahu ke Kantovi a dalším myslitelům podrobně pojednává K. Berka v předmluvě k [B25].

Pravděpodobost a její různé druhy

Jak již bylo zmíněno, Bolzano studuje pojem pravděpodobnosti v druhé kapitole druhého svazku, věnované historickému poznání neboli *historickým soudům*. Nejprve předesílá, že pojem historického soudu bude mít v dalším někdy širší, někdy užší význam. V nejširším slova smyslu je to každý soud, který není pojmový (viz str. 90); v užším smyslu je to empirický soud vypovídající o minulosti; v ještě užším smyslu soud, který vypovídá o minulosti lidstva; a konečně v nejužším smyslu pak soud, který vypovídá o minulosti lidstva na základě lidských svědectví. Viděli jsme, že v prvním svazku Bolzano zdůraznil, že empirické soudy nejsou jisté, ale jen *pravděpodobné*. Aby tedy mohl hovořit o důvěryhodnosti historických soudů v užším slova smyslu, zavádí a vyšetřuje nejprve pojem pravděpodobnosti. Činí tak v § 15 nazvaném *O pojmu pravděpodobnosti a jejích různých druzích*.³¹ Hned v úvodu poznamenává, že se nebude pouštět do objasňování tohoto pojmu, ale spokojí se s jeho pouhým pochopením. Potom zavádí pojem *stupeň pravděpodobnosti* obecně jako *stupeň důvěry, s nímž můžeme něco očekávat nebo tušit nebo předpokládat*.³²

Uvedený paragraf je součástí kapitoly o historickém poznání a v dalších částech spisu jsou jeho výsledky využity mimo jiné ke zkoumání hodnověrnosti svědectví apoštolů či důkazu Božího zjevení. Bolzano proto pojem pravděpodobnosti zpravidla spojuje s nějakým soudem, i když někdy hovoří také o pravděpodobnosti úspěchu nebo o pravděpodobnosti nějakého konkrétního jevu či události. Konkrétní definici pojmu *pravděpodobnost soudu* formuluje takto:

*Pravděpodobnost nějakého soudu je jeho vlastnost, která má nějaký stupeň čili velikost; tato velikost je měřena zlomkem. Abychom totiž stanovili, s jakým stupněm pravděpodobnosti může být předpokládáno, že mezi mnoha nikoli prokazatelně chybnými, tudíž problematicky možnými odpověďmi na nějakou otázku je odpověď A správná, musíme spočítat, kolik existuje případů $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ atd. vzhledem k odpovědi na otázku, které nejsou prokazatelně chybné a které všechny, protože pro ně mluví stejný částečný důvod, mají také stejnou pravděpodobnost. Součet těchto případů nám dává jmenovatel zlomku. Pak musíme spočítat, kolik existuje těchto případů, při kterých se objevuje odpověď A. Součet těchto případů nám dává čítec zlomku.*³³

Bolzano poznamenává, že stupeň pravděpodobnosti soudu, který je *jistý*, je roven jedné; v tomto případě také hovoří o *úplné jistotě* (*völlige Gewißheit*).

³¹ *Ueber den Begriff der Wahrscheinlichkeit und die verschiedenen Arten derselben.*

³² *Der Grad der Zuversicht, mit welchem wir etwas erwarten, oder vermuthen, oder annehmen können, ist der Grad der Wahrscheinlichkeit.* ([B8], sv. 2, § 15, str. 40)

³³ *Die Wahrscheinlichkeit eines Urtheiles ist eine derjenigen Beschaffenheiten, die einen Grad oder eine Größe haben; und zwar wird diese Größe durch einen Bruch gemessen. Um nämlich zu bestimmen, mit welchem Grade der Wahrscheinlichkeit angenommen werden kann, daß unter mehreren nicht erweislich falschen, d.h. problematisch möglichen Antworten auf eine Frage die Antwort A die richtige sey, müssen wir zählen, wie viele nicht erweislich falsche Fälle $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, u. s. f. es in Betreff der Antwort auf die Frage gibt, die alle, weil ein gleicher Theilgrund für sie spricht, auch eine gleiche Wahrscheinlichkeit haben. Die Summe dieser Fälle gibt uns den Nenner des Bruches. Dann müssen wir zählen, wie viele dieser Fälle es gibt, bei deren Annahme die Antwort A zum Vorschein kommt. Die Summe dieser Fälle gibt uns den Zähler des Bruches.* ([B8], sv. 2, § 15, str. 41; český překlad: [220], str. 49)

Jinak je pravděpodobnost vyjádřena zlomkem, který je menší než 1. Je-li stupeň pravděpodobnosti určitého tvrzení roven stupni pravděpodobnosti tvrzení opačného, a tedy $1/2$, nazývá jej *pochybností* (*Zweifelhaftigkeit*). Potom Bolzano zavádí pojem *nekonečně malé pravděpodobnosti* (*unendlich kleine Wahrscheinlichkeit*) nebo též *nekonečně velké nepravděpodobnosti* (*unendlich große Unwahrscheinlichkeit*) jako pravděpodobnost v případě, že množina všech možných případů se stejnou pravděpodobností tolikrát převyšuje počet případů, v nichž dojde k úspěchu, že [jejich poměr] vůbec nejsme schopni vyčíslit.³⁴ Případy s nekonečně malou pravděpodobností Bolzano nazývá *morálně nemožné* (*moralisch unmöglich*), protože ve většině takových případů je naší povinností chovat se jako při úplné nemožnosti. Opačná tvrzení pak nazývá *morálně jistá* či *morálně nutná* (*moralisch gewiß* nebo *moralisch nothwendig*).

Samotnou pravděpodobnost Bolzano dělí na *relativní* (*relative* nebo *beziehungsweise Wahrscheinlichkeit*) a *absolutní* (*absolute*) podle toho, zda zohledňuje jen některé vybrané okolnosti, anebo všechny okolnosti či důvody, které nám jsou známé. Relativní pravděpodobnost potom dále dělí na *vnější* (*äußere*), založenou na nějakém svědectví, a *vnitřní* (*innere*), zohledňující všechny jiné okolnosti.

V další části uvedeného paragrafu Bolzano ze své definice odvozuje základní vlastnosti pravděpodobnosti. Řečeno dnešními slovy, dokazuje větu o pravděpodobnosti doplňkového jevu, větu o násobení pravděpodobnosti pro nezávislé náhodné jevy (bez explicitní definice pojmu nezávislosti) a některé další vzorce, jejichž podrobný popis lze nalézt v článku [220] a v monografii [225]. Zde jen krátce poznamenejme, že jeden z těchto vzorců se týká spojení dvou relativních pravděpodobností (ve výše uvedeném smyslu): Bolzano ukazuje, že značí-li x pravděpodobnost určitého výsledku M , zohledňující okolnost A (např. vnitřní pravděpodobnost výsledku M – viz též str. 95) a y pravděpodobnost zohledňující okolnost B (např. pravděpodobnost plynoucí z výpovědi určitého svědka), pak pravděpodobnost zohledňující obě okolnosti současně je rovna

$$P = \frac{xy}{xy + (1-x)(1-y)}. \quad (2.2)$$

Druhý vzorec pak udává pravděpodobnost, že nastane výsledek M , jehož pravděpodobnost je x , spíše než výsledek N , jehož pravděpodobnost je y a který výsledku M odporuje:

$$P = \frac{x}{x+y}. \quad (2.3)$$

Část obsahující tyto vzorce a další vlastnosti pravděpodobnosti začíná slovy:

*Kdo má nějaké znalosti v algebře, bude také moci lehce porozumět následujícím matematickým větám, které zde chci uvést jen proto, že slouží k důkladnému vyvrácení oněch námitek, které byly vzneseny se zdáním učenosti proti možnosti historického ověření nějakého zázraku dokonce od matematiků, např. od Joh. Crayga.*³⁵

³⁴[...] die Menge der überhaupt möglichen Fälle von einer gleichen Wahrscheinlichkeit, die Anzahl der Fälle, in welchen der zu berechnende Erfolg zum Vorschein kommt, so oft übertrifft, daß wir [ihr Verhältniß] gar nicht zu berechnen vermögen. ([B8], sv. 2, § 15, str. 43)

³⁵Wer einige Kenntnisse in der Buchstaberechnung hat, wird auch noch folgende mathe-

John Craig a věrohodnost svědectví

Pro úplnost na tomto místě poznamenejme, že skotský matematik John Craig (1663–1731), s jehož názory Bolzano důrazně polemizoval, věnoval velkou část svého spisu *Theologiae christianae principia mathematica* (*Matematické základy křesťanské teologie*) [57] z roku 1699 matematickému vyšetřování pravděpodobnosti přiřazené historické události. *Pravděpodobností* přitom rozuměl *zdání shody nebo neshody dvou názorů prostřednictvím argumentů, jejichž závěr není pevný nebo tak alespoň není přijímán*,³⁶ a rozlišoval *pravděpodobnost přirozenou* (*natural probability*), založenou na vlastní zkušenosti, a *historickou* (*historical*), založenou na cizím svědectví.

Jestliže k určité události došlo před časem T ve vzdálenosti D a zprávu o ní si postupně předávalo M svědků, pak pravděpodobnost této události je podle Craiga dána vztahem

$$P = x + (M - 1)s + T^2 \cdot \frac{k}{t^2} + D^2 \cdot \frac{q}{d^2}, \quad (2.4)$$

kde x je pravděpodobnost, že svědectví prvního svědka je spolehlivé, a s , k , q jsou záporné koeficienty, vyjadřující po řadě podezření přiřazené každému z následujících svědků, podezření vyvolané časem t a podezření dané vzdáleností d . Jinými slovy, pravděpodobnost dané historické události roste se spolehlivostí primárního svědka a klesá s počtem zprostředkování svědectví, s druhou mocninou času, který od události uplynul, a s druhou mocninou vzdálenosti od místa, kde k ní došlo. Upravený vztah (2.4) potom Craig použil k odhadu času druhého příchodu Ježíše Krista. Vyšel přitom ze zmínky v Evangelii podle Lukáše (18.8): *Ale nalezne syn člověka víru na zemi, až přijde?* Z těchto slov vyvodil, že Ježíš se vrátí, až na zemi zcela zmizí víra v něj. Svědectví o Ježíši Kristu podávají Evangelia podle Matouše, Marka, Lukáše a Jana; Craig proto vyšetřoval pravděpodobnost

$$P = cz + (n - 1)f + T^2 \cdot \frac{k}{t^2}, \quad (2.5)$$

kde $c = 4$ značí počet primárních svědků (apoštolů), z pravděpodobnost přiřazenou každému z nich, n počet postupných přepisů jejich evangelií, f podezření vzniklé při každém přepisu a T^2k/t^2 podezření vzniklé během T let (k značí nárůst podezření za t let, kde jako jednotku Craig uvažuje $t = 50$). Dále uvažoval $n = T/4t$ (jeden přepis za 200 let), $z = 10x$ (spolehlivost jednoho psaného svědectví odpovídá spolehlivosti deseti svědectví ústních), $f = -x/100$ (po 100 přepisech je svědectví neakceptovatelné) a $k = -x/100$ (podezření vyvolané 50 lety při ústním tradování odpovídá podezření vyvolanému jedním přepisem). Celkem tak dostal vztah

$$P = 40x - \left(\frac{T}{4t} - 1 \right) \cdot \frac{x}{100} - \frac{T^2}{t^2} \cdot \frac{x}{100}; \quad (2.6)$$

matische Sätze leicht zu verstehen vermögen, die ich nur darum hier beifügen will, weil sie zur gründlichen Widerlegung jener Einwürfe dienen, die selbst von Mathematikern, z. B. von Joh. Crayg, gegen die Möglichkeit der historischen Beglaubigung eines Wunders mit einem Anscheine von Gelehrsamkeit vorgebracht werden sind. ([B8], sv. 2, § 15, str. 45)

³⁶ *Probability is the appearance of agreement or of disagreement of two ideas through arguments whose conclusion is not fixed, or at least is not perceived to be so.* (Citováno podle [354], str. 379)

pro rok $T = 1696$, kdy spis sepsal, Craig našel $P = 28x$ a potom spočítal, že uvedená pravděpodobnost nebude nulová před rokem 3150 (správný výpočet s jeho hodnotami dává 3156), tj. víra nezmizí do roku 3150 (3156).

Uvedené Craigovy výpočty mohou být chápány jako snaha ochránit společnost před tehdy poměrně rozšířeným názorem, že druhý příchod Krista lze očekávat každým dnem, a proto například nestojí za to začít dělat něco jiného než se jen připravovat na tuto událost. Nicméně Craigova práce byla předmětem kritiky jak ze strany teologů, tak i ze strany matematiků (včetně B. Bolzana).

Teprve v roce 1986 ukázal Stephen M. Stigler, profesor statistiky na univerzitě v Chicagu, že Craigovy výpočty byly špatně pochopeny a zásadně podceněny. V článku [354] a později v samostatné kapitole monografie [356] Stigler zdůraznil, že na konci 17. století ještě neexistovala jednotná definice pravděpodobnosti, která by ji omezovala na interval $[0, 1]$. S využitím dnešních prostředků navrhl interpretovat Craigovu „pravděpodobnost“ jako logaritmus věrohodnostního poměru:

$$P = \log \left(\frac{Pr(E|H)}{Pr(E|\neg H)} \right), \quad (2.7)$$

kde Pr je pravděpodobnost v dnešním smyslu, E značí svědectví (evidenci) v současnosti a H danou hypotézu či událost, a ukázal, že Craig intuitivně pracoval jako moderní statistik dvacátého století.

Hodnověrnost svědectví v pojetí Bernarda Bolzana

Vraťme se nyní k Bolzanovým přednáškám o náboženství [B8]. Bolzano zásadně nesouhlasí s tím, že by hodnověrnost svědectví o Božím zjevení s časem klesala, ale snaží se ukázat, že i po tisíciletích může zůstat velmi vysoká. Podrobně se této problematice věnuje hned po výkladu výše uvedených základních vlastností pravděpodobnosti; kromě nematematických argumentů přitom využívá i vzorců (2.2) a (2.3).

Stupeň hodnověrnosti (Grad der Glaubwürdigkeit) svědka Bolzano definuje jako stupeň pravděpodobnosti předpokladu, že daný svědek mluví pravdu. První vztah (2.2) potom využívá například k určení absolutní pravděpodobnosti nějaké události, je-li její vnitřní pravděpodobnost rovna x a pravděpodobnost vnější, daná určitým svědectvím, je rovna y . K tomu podotýká, že výsledná pravděpodobnost může být vysoká i tehdy, když je hodnověrnost svědka velmi malá, zato je však vysoká vnitřní pravděpodobnost, anebo když je vnitřní pravděpodobnost malá, ale hodnověrnost svědka vysoká. Konečně svědectví, jehož hodnověrnost je rovna $1/2$, výslednou pravděpodobnost neovlivní; svědectví s hodnověrností větší než $1/2$ ji zvýší a svědectví s hodnověrností menší než $1/2$ ji sníží.

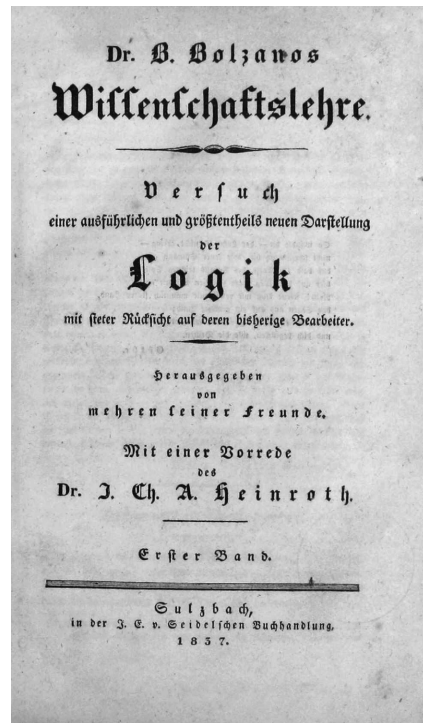
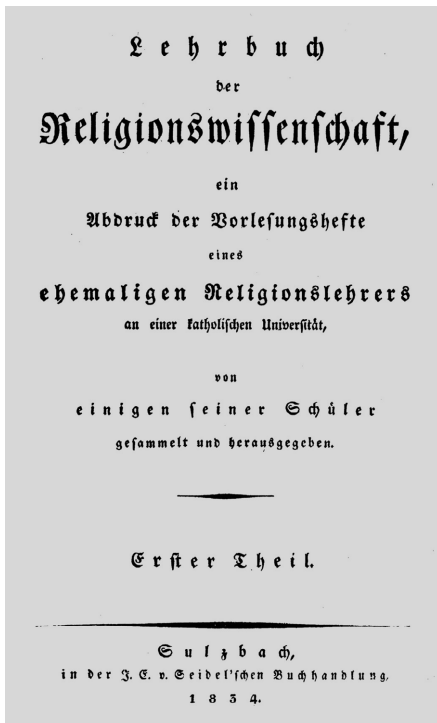
Pomocí vzorce (2.3) Bolzano ukazuje, že zázrak jako historický soud s nekonečně velkou nepravděpodobností (či nekonečně malou pravděpodobností; Bolzano ji značí n/∞) může získat morální jistotu, je-li jakýkoli jiný předpoklad, který uskutečnění zázraku odporuje, *ještě nekonečně nepravděpodobnější* (*noch unendlich unwahrscheinlicher*; tj. jeho pravděpodobnost je $n/(m\infty)$, nebo

dokonce n/∞^2). Pravděpodobnost zázraku je v takovém případě dána výrazem

$$P = \frac{x}{x+y} = \frac{\frac{n}{\infty}}{\frac{n}{\infty} + \frac{n}{m\infty}} = \frac{m}{m+1}, \quad (2.8)$$

který se pro dostatečně velké m může přiblížit libovolně blízko k jedné.³⁷

Bolzano tuto problematiku dále rozpracovává ve třetí kapitole druhého svazku, jejíž cíl je zřejmý z názvu: *Pravost, nefalšovanost a hodnověrnost knih Nového zákona*.³⁸ Zde podrobně rozebírá důvody, proč bychom autory *Nového zákona* měli považovat za hodnověrné svědky: události, které popisují, dobře znají, píší o nich srozumitelně a s vážným úmyslem, nemají dostatečné důvody ke lži (zejména by z ní neměli žádný prospěch), sami nám poskytují důkazy o své upřímnosti a pravdivosti, jejich líčení se shoduje s jinými historickými knihami, popisované učení je mravně prospěšné apod. Ve čtvrté kapitole pak Bolzano rozebírá *jednotlivé zázraky, které slouží k potvrzení křesťanství*,³⁹ a uzavírá, že křesťanství je s morální jistotou samo o sobě projevem Božího zjevení.



OBR. 2.2 TITULNÍ STRANA BOLZANOVA SPISU [B8] A [B10]

³⁷[...] *welches, wenn m sehr groß ist, der Einheit so nahe kommen kann, als man nur immer will.* ([B8], sv. 2, § 27, str. 70)

³⁸*Echtheit, Unverfälschtheit und Glaubwürdigkeit der Bücher des neuen Bundes.*

³⁹Název kapitoly zní: *Einzelne Wunder, die zur Bestätigung des Christenthumes dienen.*

2.2.3 Vědosloví: logická pravděpodobnost

Jak jsme se zmínili již v úvodu, díky spisu *Wissenschaftslehre* (Vědosloví) [B9] Bolzano patří mezi první průkopníky logické interpretace pravděpodobnosti. Zatímco v přednáškách o náboženství využíval teorii pravděpodobnosti především k obraně *Písma svatého*, ve *Vědosloví* mu slouží k rozšíření deduktivní logiky a představuje nedílnou součást jeho logické teorie.

Cíl *Vědosloví* vystihuje již samotný podtitul: *Pokus o zevrubný a převážně nový výklad logiky se stálým zřetelem k dřívějším zpracovatelům*.⁴⁰ Bolzano na tomto díle pracoval poté, co byl nucen odejít z pražské univerzity, především pak od roku 1823, kdy začal pobývat jako host u Anny a Josefa Hoffmannových v Těchobuzi na Pacovsku. Kořeny *Vědosloví* ovšem sahají až do doby Bolzanových studií, kdy si začal psát vědecké deníky, tzv. *Adversaria*, do nichž si zaznamenával poznámky ke studované literatuře, stejně jako své vlastní myšlenky a plány. Jak uvádí Eduard Winter na základě studia Bolzanovy rukopisné pozůstalosti (viz 5. kapitolu knihy [385]) a jak jsme se o tom zmínili v části 2.2.1, již v *Adversariích* z roku 1803 lze nalézt pokus vyložit na základě počtu pravděpodobnosti užitečnost očkování a pojem blaženosti; v denících z let 1805 a 1806 Bolzano hovoří o rozlišení historických a filosofických soudů, v poznámkách z let 1806–1812 se zabývá kromě jiného soudy apriorními a aposteriorními, pravdami o sobě či syntetickými větami. V *Adversariích* z let 1812–1816 lze nalézt nástin plánovaného spisu o logice s později přeškrtnutou poznámkou: *Rozhodl jsem se (v březnu 1812) vydati logiku s názvem: Pokus o novou logiku, kterému muselo by následovati úplné přebudování všech vědních oborů. Všem přátelům k zkoumání předloženo*.⁴¹ Logickým a metafyzickým otázkám se Bolzano věnoval také v práci *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik (Příspěvky k zdůvodněnějšímu výkladu matematiky)* [B2], která vyšla v roce 1810. V neposlední řadě je třeba připomenout, že v letech 1819–1820 Bolzano soukromě přednášel princí Schwarzenbergovi o logice; tyto přednášky jsou shrnuty v rukopise *Etwas über die Logik*, jehož český překlad vyšel pod názvem *O logice* [B7] v roce 1831. Zde Bolzano podává logiku jako nauku o myšlení a zdůrazňuje, že je důležitá nejen při vyučování matematiky, ale i při vyučování všech ostatních předmětů včetně náboženství.

O vydání spisu se začalo uvažovat již koncem roku 1829, pro potíže související především s Bolzanovým jménem, zákazem publikování v rakouské monarchii, kritickým postojem ke Kantovi a dalším významným německým filosofům i s mimořádně velkým rozsahem práce (celkem 2397 stran) však nakonec vyšel až v roce 1837.

Celý spis je rozdělen do šesti nestejně velkých částí: kromě *Úvodu* (*Einleitung*, § 1–16) obsahuje díly *Fundamentální nauka* (*Fundamentallehre*, § 17–45), *Elementární nauka* (*Elementarlehre*, § 46–268), *Teorie poznání* (*Erkenntnislehre*, § 269–321), *Heuristika* (*Heuristik*, § 322–391) a *Vlastní vědosloví* (*Eigene Wissenschaftslehre*, § 392–718).

⁴⁰ *Versuch einer ausführlichen und größtentheils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherige Bearbeiter.*

⁴¹ Viz [385], str. 127; v českém překladu str. 99.

Než se dostaneme k samotné pravděpodobnosti zavedené ve druhém dílu nazvaném *Elementární nauka*, připomeňme nejprve několik pojmů nezbytných pro pochopení dalšího výkladu.

Věty a pravdy

Ve *Vědosloví* [B10] se Bolzano snaží všechny používané pojmy důsledně definovat a objasnit. Jedním ze základních je pojem *vyslovené* nebo *slovy vyjádřené věty* (*ausgeschprochener* nebo *durch Worte ausgedrückter Satz*), který Bolzano zavádí v § 19 prvního dílu jako *každou řeč (sestavující většinou z několika, občas však také jen z jednoho jediného slova), jestliže se pomocí ní něco vypovídá nebo něco tvrdí, a jestliže tedy musí být vždy jedno z dvojího, buď pravdivá nebo nepravdivá v obvyklém významu těchto slov či (jak lze také říci) správná nebo nesprávná.*⁴² Jako příklady vyjádřených vět Bolzano uvádí slovní spojení *Bůh je všudypřítomný* (*Gott ist allgegenwärtig*) nebo *čtyřúhelník je kulatý* (*Ein Viereck ist rund*) s tím, že obě vyjádření něco tvrdí – v prvním případě něco pravdivého, v druhém něco nepravdivého. Vyjádřenou větou však není například slovní spojení *přítomný Bůh* nebo *kulatý čtyřúhelník*, které sice vyvolávají určité představy, nic však netvrdí nebo nevypovídají, a proto nelze hovořit o jejich pravdivosti.

Věty, které nejsou vyjádřeny slovy, ale jen si je někdo myslí, Bolzano nazývá *myslenými* (*gedachte Sätze*). Větou o sobě nebo jen větou pak rozumí *jakoukoli výpověď, že něco je nebo není, lhostejno, zda je tato výpověď pravdivá nebo nepravdivá, zda ji někdo vyjádřil nebo nevyjádřil slovy, ba dokonce i zda ji jen pomyslel nebo nemyslel v duchu.*⁴³

Speciálním případem věty o sobě je *pravda o sobě* (*Wahrheit an sich*) nebo také *objektivní pravda* (*objective Wahrheit*), již Bolzano rozumí *každou libovolnou větou, která vypovídá něco tak, jak to skutečně jest*, bez ohledu na to, zda byla tato věta někým skutečně myšlena a vyslovena, nebo ne. Jinými slovy, věta se nazývá pravdou o sobě, *jestliže předmětu, o kterém pojednává, skutečně přísluší to, co mu přisuzuje.*⁴⁴

Soudy

Některé věty pak vyjadřují *soudy* (*Urtheile*). O tomto pojmu Bolzano říká, že jej chápe ve stejném významu, v jakém je používán v běžném jazyce, a poznamenává: *Komu to nestačí, pro toho dodávám ještě toto: V pojmech, které*

⁴² *Mit dieser Benennung bezeichne ich nämlich jede (meistens aus mehren, zuweilen aber auch aus einem einzigen Worte bestehende) Rede, wenn durch sie irgend etwas ausgesagt oder behauptet wird, wenn sie mithin immer Eines von Beiden, entweder wahr oder falsch, in der gewöhnlichen Bedeutung dieser Worte, wenn sie (wie man auch sagen kann) entweder richtig oder unrichtig seyn muß.* ([B10], sv. 1, § 19, str. 76; český překlad: [B25], str. 61)

⁴³ [...] *unter einem Satze an sich verstehe ich nur irgend eine Aussage, daß etwas ist oder nicht ist; gleichviel, ob diese Aussage wahr oder falsch ist; ob sie von irgend Jemand in Worte gefaßt oder nicht gefaßt, ja auch im Geiste nur gedacht oder nicht gedacht worden.*

([B10], sv. 1, § 19, str. 77; český překlad: [B25], str. 62)

⁴⁴ *Ich verstehe also [...] unter einer Wahrheit an sich jeden beliebigen Satz, der etwas so, wie es ist, aussagt, wobei ich unbestimmt lasse, ob dieser Satz von irgend Jemand wirklich gedacht und ausgesprochen worden sey oder nicht. [...] mit anderen Worten, wenn nur dem Gegenstande, von dem er handelt, das wirklich zukommt, was er ihm beilegt.*

([B10], sv. 1, § 25, str. 112; český překlad: [B25], str. 63)

označují slova tvrdit, rozhodovat, mínit, věřit, uznat a jiná podobná, je obsažena určitá společná složka, která je v každém z nich spojena ještě s nějakým zvláštním průvodním pojmem. Vynecháme-li tyto průvodní pojmy a myslíme-li pouze to, co mají významy těchto slov společného, pak myslíme to, co nazýváme souzením.⁴⁵

Každý soud je buď správný, nebo nesprávný, tj. obsahuje větu, která je buď pravdivá, nebo nikoli. Každý soud má dále bytí, ovšem pouze v mysli určité bytosti, o níž se pak říká, že soudí; alespoň v tomto okamžiku přítom daná bytost soud považuje za správný. Bolzano dále píše:

*Souzení, kterého jsme si my lidé vědomi, je akt našeho ducha, jenž následuje po předcházejícím pouhém zkoumání představ a je na něm závislý. Na naši vůli závisí akt souzení jen zprostředkovaně, totiž jen potud, pokud máme možnost libovolně ovlivnit zkoumání představ. Každý svůj soud však uskutečňujeme s určitou, podle povahy předcházejícího zkoumání hned větší, hned menší silou, kterou nazýváme důvěrou, s níž soudíme.*⁴⁶

Každý soud, který je správný, nazývá poznatkem (*Erkenntnis*); soudy tedy představují základ jeho teorie poznání.

Představy

Z dalších pojmů zde uvedme ještě pojem *představy o sobě* (*Vorstellung an sich*) nebo jen *představy*, kterým Bolzano označuje obecně vše, co se může nalézat ve větě jako část, ale samo o sobě větu ještě netvoří. Na rozdíl od běžného jazykového užití tohoto slova je tedy Bolzanova představa o sobě abstraktním pojmem, který nemá nic společného s psychologií, což také odpovídá Bolzanově snaze o založení logiky jako objektivní vědy. Představu v běžném smyslu, jež předpokládá živou bytost jako subjekt, v němž probíhá, pro odlišení nazývá *subjektivní* nebo také *myšlenou* či *zakoušenou* (*subjektive, gedachte*). Bolzano rovněž rozlišuje představy, které jsou *složené z částí* (*aus Theilen zusammengesetzte Vorstellungen*), jako například výraz „pozemský tvor“, v němž se vyskytuje představa tvora a myšlenka, že tento tvor sídlí na Zemi, a představy *jednoduché* (*einfache Vorstellungen*), které v sobě žádné další části nezahrnují, a dále představy *jedinečné* (*Einzelvorstellungen*), které mají jen jediný předmět, a představy *obecné* či *univerzální* (*Gemeinvorstellungen, allgemeine Vorstellungen*), jež mají předměty alespoň dva (množina předmětů může být konečná i nekonečná). Představy, které jsou jednoduché a jedinečné potom

⁴⁵ *Wem dieses nicht hinreicht, dem sey noch Folgendes gesagt. In den Begriffen, welche die Worte: Behaupten, Entscheiden, Meinen, Glauben, Fürwahrhalten, und andere ähnliche bezeichnen, liegt ein gewisser gemeinschaftlicher Bestandtheil, der in jedem derselben nur noch mit einem eigenen Nebenbegriffe verbunden ist. Lassen wir nun diese Nebenbegriffe weg, und denken uns bloß, was die Bedeutungen jener Worte Gemeinschaftliches haben: so denken wir uns das, was ich Urtheilen nenne. ([B10], sv. 1, § 34, str. 154; český překlad: [B25], str. 70)*

⁴⁶ *Das Urtheilen, dessen wir Menschen uns bewußt sind, ist eine Handlung unseres Geistes, welche auf ein vorhergegangenes bloßes Betrachten von Vorstellungen folgt, und davon abhängig ist. Von unserem Willen hängt die Handlung des Urtheilens nur mittelbar, nämlich nur in sofern ab, als wir auf das Betrachten der Vorstellungen einen gewissen willkürlichen Einfluß haben. Wir vollziehen aber ein jedes unserer Urtheile mit einer, nach Beschaffenheit der vorhergegangenen Betrachtung bald größeren, bald geringeren Kraft, die ich die Zuversicht, mit der wir urtheilen, nenne. ([B10], sv. 1, § 34, str. 155; český překlad: [B25], str. 71)*

Bolzano nazývá *názory* (*Anschauungen*). Samotný pojem *předmět představy* přitom Bolzano vymezuje takto:

*Předmětem představy [...] rozumím ono něco (tu existující, tu neexistující), o kterém obvykle říkáme, že je představuje nebo že je představou o něm. Nejsnáze pochopíme, co asi je předmětem patřícím k nějaké představě, jestliže jde o předmět skutečný (existující). Tak mi jistě každý porozumí, říkám-li, že Sókrates, Platón a jiní jsou předměty, k nimž se vztahuje představa „řecký filosof“.*⁴⁷

Podobně jako v *Lehrbuch der Religionswissenschaft* [B8], i zde Bolzano rozlišuje *věty z čistých pojmů* či *pojmové věty* (*Sätze aus reinen Begriffen, Begriffssätze*), popř. *pojmové soudy* (*Begriffsurtheile*), které v sobě neobsahují žádný názor, a *věty názorové* nebo též *empirické* či *vjemové* (*Anschauungssätze, empirische Sätze, Wahrnehmungssätze*), jež obsahují jednu nebo více názorových představ, jako například věta: „Toto je květina.“

Formy

Bolzano se také podrobně zabývá skládáním představ do vět a při té příležitosti hovoří o různých *formách* vět. V § 81 upřesňuje:

*Říkám-li totiž, že představy, věty a závěry mají určitou formu, pak slovem forma rozumím určité spojení slov nebo vůbec znaků, pomocí něhož je možné vyjádřit určitý druh představ, vět nebo závěrů. Například výraz „A má b,“ kde A značí představu předmětu a b značí představu vlastnosti, nazývám obecnou formou každé věty, protože všechny věty je možné vyjádřit tímto spojením.*⁴⁸

Pravděpodobnost a platnost věty

Pojem pravděpodobnosti se ve *Vědosloví* [B10] objevuje nejprve v podobném významu jako v [B8]. V § 147 Bolzano definuje *platnost věty* (*Gültigkeit des Satzes*) jako *vztah, v němž se nachází množina pravdivých vět, které se dají z nějaké dané věty utvořit tak, že jisté představy, považované v ní za proměnné, nahrazujeme podle určitého pravidla jinými představami, k množině všech vět, které tak vzniknou. K tomu dodává: Stupeň této platnosti je možno vyjádřit zlomkem, jehož čitatel se má k jmenovateli jako první množina k druhé.*⁴⁹

⁴⁷ Ich verstehe [...] unter dem Gegenstande einer Vorstellung jenes (bald existirende, bald nicht existirende) Etwas, von dem wir zu sagen pflegen, daß sie es vorstelle, oder daß sie die Vorstellung davon sey. Am Leichtesten faßt man, was der zu einer Vorstellung gehörige Gegenstand seyn soll, wenn er ein wirklicher (existirender) Gegenstand ist. So wird mich gewiß Jeder verstehen, wenn ich sage, daß Sokrates, Plato u. A. die Gegenstände wären, auf die sich die Vorstellung: Griechischer Weltweiser, bezieht.

([B10], sv. 1, § 49, str. 219; český překlad: [B25], str. 80)

⁴⁸ *Spreche ich nämlich von Vorstellungen, Sätzen und Schlüssen, die unter dieser oder jener Form enthalten wären: so verstehe ich unter der Form eine gewisse Verbindung von Worten oder Zeichen überhaupt, durch welche eine gewisse Art von Vorstellungen, Sätzen oder Schlüssen dargestellt werden kann. So nenne ich z. B., wenn der Buchstabe A was immer für eine Gegenstandsvorstellung, und der Buchstabe b irgend eine Beschaffenheitsvorstellung bedeutet, den Ausdruck: „A hat b,“ die allgemeine Form eines jeden Satzes, weil alle Sätze unter diese Verbindung von Zeichen dargestellt werden können.* ([B10], sv. 1, § 81, str. 393)

⁴⁹ *Verhältnis, in welchem die Menge der wahren Sätze, die sich aus einem gegebenen dadurch erzeugen lassen, daß man gewisse, in ihm als veränderlich zu betrachtende Vorstel-*

Bolzano zdůrazňuje, že platnost jedné a téže věty se může lišit podle toho, které představy v ní považujeme za proměnné. Aby zmenšil velikost uvedených množin, nerozlišuje jako různé představy, které jsou vzájemně *rovnomocné* (*gleichgeltende Vorstellungen*), tj. mají naprosto stejné předměty, a dále požaduje, aby dosazením uvažovaných představ vznikla *předmětná věta* (*gegenständlicher Satz*), tj. aby existovaly předměty odpovídající představě, jež je podmětem dané věty. Tato omezení Bolzano ilustruje následujícím příkladem: představme si loterii, v níž se losují některé z kuliček označených čísly 1 až 90. Budeme-li ve větě „Kulička označená číslicí 8 se bude nacházet mezi těmi, které budou taženy v příštím tahu,“ považovat za proměnnou pouze představu „8“, kterou nebudeme nahrazovat žádnou rovnomocnou představou, a vyloučíme-li všechny představy, pro něž by představa „kulička označená číslem X “ byla bezpředmětná (v loterii by taková kulička neexistovala), smíme místo představy „8“ dosadit jen jedno z čísel od 1 do 90. Bude-li se v loterii losovat pět kuliček, bude platnost uvedené věty rovna $5/90 = 1/18$, protože mezi všemi 90 větami, které můžeme vytvořit, bude právě pět pravdivých.

Uvedeným příkladem Bolzano zároveň ilustruje, že platnost věty *vyjadřuje stupeň pravděpodobnosti, kterého daná věta za určitých okolností nabývá*.⁵⁰

Doplňme ještě jeden ilustrační příklad z dnešní doby. Uvažujme větu (A): „Občan České republiky Pavel Mráz žije v Praze“ a za proměnnou považujme představu ‚Pavel Mráz‘. Získáme tak výrokovou formu „Občan České republiky X žije v Praze.“ Dosadíme-li za X například představu ‚kruh‘ nebo ‚kocour Modročko‘, vznikne věta, která je bezpředmětná. Věta předmětná pak vznikne právě tehdy, když za X dosadíme představu označující kteréhokoli občana České republiky. Budeme-li všechny rovnomocné představy označující různým způsobem téhož občana považovat za jednu představu, pak podle statistiky k určitému okamžiku získáme celkem 10 532 770 různých předmětných vět, z nichž 1 257 158 bude pravdivých. Platnost věty A je proto rovna podílu $1\,257\,158/10\,532\,770 = 0,12$.

Slučitelnost, odvoditelnost, ekvivalence

V dalších paragrafech se Bolzano zabývá vztahy mezi dvěma nebo více větami, v nichž jsou některé představy považovány za proměnné, a kromě jiného definuje následující pojmy.

Věty A, B, C, D, \dots se nazývají *slučitelné* (*verträglich*) *vzhledem k představám* i, j, \dots , jestliže existují představy, které po dosazení za i, j, \dots činí všechny tyto věty pravdivými. V opačném případě se dané věty nazývají *neslučitelné* (*unverträglich*) *vzhledem k* i, j, \dots .

Věty M, N, O, \dots se nazývají *odvoditelné* (*ableitbar*) *z vět* A, B, C, D, \dots *vzhledem k představám* i, j, \dots , jestliže každý soubor představ, jež po dosazení za i, j, \dots činí všechny věty A, B, C, D, \dots pravdivými, činí pravdivými

lungen nach einer gewissen Regel mit andern vertauschet, zur Menge aller stehet, die so zum Vorscheine kommen [...] Der Grad dieser Gültigkeit wird sich durch einen Bruch darstellen lassen, dessen Zähler sich zu dem Nenner, wie die erste Menge zur letzten verhält.

([B10], sv. 2, § 147, str. 81; český překlad: [B25], str. 192)

⁵⁰ *Dieses Verhältnis nämlich bestimmt den Grad der Wahrscheinlichkeit, den der gegebene Satz unter gewissen Umständen annimmt.* (tamtéž)

i všechny věty M, N, O, \dots (srov. str. 59). Věty A, B, C, D, \dots se pak nazývají *premisami* a věty M, N, O, \dots *závěry*. Platí-li vzhledem k týmž představám i, j, \dots vztah odvoditelnosti mezi větami A, B, C, D, \dots a M, N, O, \dots oboustranně, nazývají se obě množiny vět *ekvivalentní vzhledem k i, j, \dots* .

Pravděpodobnost jako logický vztah mezi větami

K pravděpodobnosti se Bolzano vrací v § 161 nazvaném *Vztah poměrné platnosti neboli pravděpodobnosti věty se zřetelem k jiným větám*.⁵¹ V úvodu píše:

Všimáme-li si vztahů, které mohou existovat mezi několika větami, brzy objevíme neobyčejně zajímavý vztah, který je tak podobný vztahu platnosti, že nám jej zcela mimovolně připomíná. Považujeme-li totiž v nějaké větě A nebo také v několika větách A, B, C, D, \dots jisté představy i, j, \dots za proměnné a jsou-li ve druhém případě věty A, B, C, D, \dots vzhledem k těmto představám slučitelné [tj. existují představy, které po dosažení za představy i, j, \dots činí všechny uvedené věty pravdivými], bude často mimořádně důležité poznat poměr, v jakém se nachází množina případů, v nichž se stávají věty A, B, C, D, \dots všechny pravdivými, k množině případů, v nichž se stává kromě nich pravdivou ještě nějaká jiná věta M . Neboť považujeme-li věty A, B, C, D, \dots za pravdivé, pak nás poučuje právě poznatý poměr [...] zda máme považovat za pravdivou také větu M , nebo nikoliv. Činí-li totiž druhá množina více než polovinu první, pak můžeme pouze kvůli pravdivosti vět A, B, C, D, \dots považovat za pravdivou i větu M ; a není-li tomu tak, nikoliv. Dovolím si proto nazvat tento vztah mezi udanými množinami poměrnou platností věty M vzhledem k větám A, B, C, D, \dots nebo pravděpodobností, které se větě M dostává z předpokladů A, B, C, D, \dots .⁵²

K tomu dodává:

Pravděpodobností [...] nazývám tento vztah, protože se mi zdá, že podle stále běžnějšího jazykového úzu si pod pravděpodobností nepředstavujeme nic jiného než právě zmíněný vztah mezi danými větami, aniž bychom předpokládali, že by si tyto věty nějaká myslící bytost skutečně musela představovat a věřit jim.⁵³

⁵¹ *Verhältniß der vergleichungsweisen Gültigkeit oder der Wahrscheinlichkeit eines Satzes in Hinsicht auf andere Sätze.*

⁵² *Achten wir auch die Verhältnisse, die zwischen mehren Sätzen obwalten können: so bietet sich alsbald ein äußerst merkwürdiges dar, welches mit jenem der Gültigkeit eine so große Aehnlichkeit hat, daß es ganz unwillkürlich daran erinnert. Betrachten wir nämlich in einem einzelnen Satze A oder auch in den mehren A, B, C, D, \dots gewisse Vorstellungen i, j, \dots als veränderlich, und sind im letzteren Falle die Sätze A, B, C, D, \dots hinsichtlich dieser Vorstellungen in dem Verhältnisse einer Verträglichkeit: so wird es öfters ungemein wichtig, das Verhältniß zu erfahren, in welchem die Menge der Fälle, darin die Sätze A, B, C, D, \dots alle wahr werden, zur Menge derjenigen Fälle stehet, in welchen neben ihnen auch noch ein anderer Satz M wahr wird. Denn wenn wir die Sätze A, B, C, D, \dots für wahr halten: so lehrt uns das eben genannte Verhältniß [...] ob wir auch M für wahr annehmen sollen oder nicht. Wenn nämlich die letztere Menge mehr als die Hälfte der erstern beträgt: so können wir bloß wegen der Wahrheit der Sätze A, B, C, D, \dots auch den Satz M für wahr halten; und wenn dies nicht ist, nicht. Ich erlaube mir also dieses Verhältniß zwischen den angegebenen Mengen die vergleichungsweise Gültigkeit des Satzes M hinsichtlich auf die Sätze A, B, C, D, \dots oder die Wahrscheinlichkeit, welche dem Satze M aus den Voraussetzungen A, B, C, D, \dots erwächst, zu nennen. ([B10], sv. 2, § 161, str. 171–172; čes. překlad: [B25], str. 241–242)*

⁵³ *Wahrscheinlichkeit aber nenne ich dieses Verhältniß, weil es mir dünkt, dass wir, nach*

Bolzano poznamenává, že lze-li pravděpodobnost vůbec určit, je vyjádřena zlomkem, jehož jmenovatel a číselník jsou ve stejném poměru jako výše uvedené množiny. Symbolicky můžeme Bolzanovu pravděpodobnost věty M za předpokladu $E = A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge \dots$ zapsat jako zlomek

$$P(M|E) = \frac{m(M \wedge (A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge \dots))}{m(A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge \dots)} = \frac{m(M \wedge E)}{m(E)}, \quad (2.9)$$

kde $m(X)$ je „míra“ množiny proměnných, kdy je věta X pravdivá. Ještě jinak řečeno: Bolzanova pravděpodobnost vyjadřuje stupeň potvrzení hypotézy M na základě evidence $E = A \wedge B \wedge C \wedge D \wedge \dots$. Povšimněme si také, že Bolzano pravděpodobnost zavádí jako *pravděpodobnost podmíněnou*.

Vlastnosti Bolzanovy pravděpodobnosti

V dalších odstavcích uvedeného § 161 Bolzano odvozuje základní vlastnosti pravděpodobnosti, které můžeme s využitím výše uvedeného značení zapsat následujícím způsobem. Uvažujme libovolné věty A, B, C, \dots , v nichž jsou za proměnné považovány představy i, j, \dots , a předpokládejme, že dané věty jsou vzhledem k i, j, \dots slučitelné. Vzhledem k těmto představám potom pro libovolnou větu M platí:

- i) Je-li věta M odvoditelná z vět A, B, C, \dots , pak platí:

$$P(M|A \wedge B \wedge C \wedge \dots) = 1.$$

Věta M se v tomto případě nazývá *jistá* vzhledem k A, B, C, \dots .

- ii) Je-li věta M s větami A, B, C, \dots neslučitelná, pak platí:

$$P(M|A \wedge B \wedge C \wedge \dots) = 0.$$

- iii) Obecně platí: $0 \leq P(M|A \wedge B \wedge C \wedge \dots) \leq 1$.

- iv) Jsou-li věty A, B, C, \dots ekvivalentní s větami A', B', C', \dots , pak platí:

$$P(M|A \wedge B \wedge C \wedge \dots) = P(M|A' \wedge B' \wedge C' \wedge \dots).$$

- v) Je-li věta M ekvivalentní s větou M' , pak platí:

$$P(M|A \wedge B \wedge C \wedge \dots) = P(M'|A \wedge B \wedge C \wedge \dots).$$

- vi) Pro pravděpodobnost negace věty M platí:

$$P(\neg M|A \wedge B \wedge C \wedge \dots) = 1 - P(M|A \wedge B \wedge C \wedge \dots).$$

einem je länger je allgemeiner werdenden Sprachgebrauche, unter der Wahrscheinlichkeit wirklich nichts Anderes, als ein solches Verhältniß zwischen gegebenen Sätzen verstehen, ohne vorauszusetzen, daß diese Sätze eben von einem denkenden Wesen vorgestellt und geglaubt werden müßten. ([B10], sv. 2, § 161, str. 172; český překlad: [B25], str. 242)

vii) Je-li věta R odvoditelná z věty M , pak platí:⁵⁴

$$P(R|A \wedge B \wedge C \wedge \dots) \geq P(M|A \wedge B \wedge C \wedge \dots).$$

Bolzano poznamenává, že jsou-li věty M, A, B, C, \dots , vzhledem k daným představám slučitelné, jsou množiny uvažované v definici pravděpodobnosti vždy nekonečné (představa, která činí všechny uvedené věty pravdivými, může být nahrazena přinejmenším libovolnou rovnomocnou představou), a jejich poměr proto musí být stanoven – je-li to možné – nepřímo, na základě jiného zkoumání, jež popisuje takto:

[...] *zkusme, zda by nebylo možno vymyslet jistý počet vět k, k', k'', \dots , které mají za daných předpokladů A, B, C, D, \dots tentýž stupeň pravděpodobnosti, a jsou nadto tak uzpůsobeny, že každý soubor představ, který na místě proměnných i, j, \dots všechny věty A, B, C, D, \dots činí pravdivými, učiní pravdivou také jednu, ale vždy jen jednu z vět k, k', k'', \dots [...] Kdyby se nám to podařilo, směli bychom říci, že jsme celou nekonečnou množinu případů, v nichž se stávají pravdivými předpoklady A, B, C, D, \dots , rozložili pomocí případů, v nichž se stávají pravdivými věty k, k', k'', \dots , ve stejný počet vzájemně rovných dílů. [...] Kdyby se dále stalo, že by se věta M , jejíž pravděpodobnost máme určit, nacházela k právě nalezeným větám k, k', k'', \dots v takovém vztahu, že by žádná z nich neponechávala její pravdivost nerozhodnutou, že bychom tedy mohli z každé z nich odvodit buď větu M , nebo větu $\text{Neg. } M$, pak by stačilo jen ještě spočítat, jak velký je vůbec počet vět k, k', k'', \dots a kolik z nich činí větu M pravdivou, abychom okamžitě poznali, jak se má množina případů, v nichž se stávají předpoklady A, B, C, D, \dots pravdivými, k množině případů, v nichž se kromě nich stává pravdivou také věta M . Je-li celkový počet vět k, k', k'', \dots roven k a je-li počet těch, z nichž je odvoditelná také věta M , roven m , pak je jasné, že celou nekonečnou množinu případů, v nichž se stávají pravdivými předpoklady A, B, C, D, \dots , lze rozložit na k stejných dílů a že na nekonečnou množinu případů, v nichž se stává kromě nich pravdivou také věta M , připadá m těchto dílů. Hledaný stupeň pravděpodobnosti věty M by tedy byl roven m/k .*⁵⁵

⁵⁴Skutečnost, že nerovnost může být při jednostranné odvoditelnosti ostrá, Bolzano ilustruje následujícím příkladem. Uvažujme urnu, v níž je 40 kuliček s modro-žlutými pruhy, 40 kuliček s červeno-zelenými pruhy a 20 kuliček jednobarevných. Pravděpodobnost věty R , že bude vyňata pruhovaná kulička, je větší než pravděpodobnost věty M , že se objeví kulička s modro-žlutými pruhy, považujeme-li za proměnné představy ‚modrý‘, ‚žlutý‘, ‚červený‘, ‚zelený‘ a ‚jednobarevný‘.

⁵⁵[...] *so laßt uns zuvörderst versuchen, ob wir nicht eine gewisse Anzahl von Sätzen k, k', k'', \dots , ausdenken können, welche bei den gegebenen Voraussetzungen A, B, C, D, \dots alle denselben Grad der Wahrscheinlichkeit haben, und überdieß so beschaffen sind, daß jeder Inbegriff von Vorstellungen, der an der Stelle der i, j, \dots die sämtlichen A, B, C, \dots wahr macht, auch Einen und immer nur Einen der Sätze k, k', k'', \dots wahr macht. [...] Wäre uns dieses gelungen: so dürften wir sagen, daß wir die ganze unendliche Menge der Fälle, in denen die Voraussetzungen A, B, C, \dots wahr werden, in eben so viele einander gleiche Theile zerlegt haben. [...] Wenn es nun ferner sich trüfe, daß der Satz M , dessen Wahrscheinlichkeit wir bestimmen sollen, zu den so eben gefundenen Sätzen k, k', k'', \dots in einem solchen Verhältnisse stände, daß keine von ihnen seine Wahrheit unentschieden ließe, daß wir vielmehr aus einem jeden von ihnen entweder M oder $\text{Neg. } M$ ableiten könnten: so brauchen wir nur noch zu zählen, wie groß die Anzahl der Sätze k, k', k'', \dots überhaupt*

Přitom se Bolzano odvolává na poznámku, že *aniž známe stupeň pravděpodobnosti vět k, k', k'', \dots , můžeme poznat, že mají vzhledem k týmž předpokladům A, B, C, D, \dots stejnou pravděpodobnost. To bude totiž případ, kdy se uvedené věty nacházejí k daným větám A, B, C, D, \dots všechny v jednom a témž vztahu, takže mezi nimi není žádný jiný rozdíl, než který vyplývá z jistých představ považovaných v nich za proměnné, jejichž výměnou se jedna věta mění v druhou.*⁵⁶

Popsaným způsobem se Bolzano snažil vyhnout kruhové explikaci obsažené v Laplaceově definici pravděpodobnosti, již v poznámce k tomuto paragrafu kritizoval. Celý postup objasnil na následujícím příkladu. Uvažujme větu A : „Cajus vyňal z urny, v níž se nachází 90 černých a 10 bílých kuliček, jednu kuličku.“ Máme určit, jak velká je za tohoto předpokladu pravděpodobnost, že „Cajus vyňal černou kuličku“ (věta M), mají-li být za proměnné považovány pouze představy ‚Cajus‘, ‚kulička‘, ‚černý‘ a ‚bílý‘. Abychom pro další úvahy jednotlivé kuličky rozlišili, očíslovme je od 1 do 100. Nyní můžeme vytvořit následujících 100 vět:

- k_1 : „Cajus vyňal kuličku č. 1.“
 k_2 : „Cajus vyňal kuličku č. 2.“

 k_{100} : „Cajus vyňal kuličku č. 100.“

Právě zavedené představy ‚č. 1‘, ‚č. 2‘, \dots , ‚č. 100‘ můžeme rovněž přidat k proměnným, protože v zadaných větách A a M se vůbec nevyskytují, a proto nemohou měnit jejich vzájemný poměr. Každá z vět k_1, k_2, \dots, k_{100} se stává pravdivou, když na místo čísla, které se v ní vyskytuje, dosadíme číslo té kuličky, která byla skutečně vyňata; jejich vztah k danému předpokladu A je tudíž stejný, a všechny tedy mají vzhledem k A stejnou pravděpodobnost. Každý soubor představ, který po dosazení na místo proměnných učiní větu A pravdivou, pak učiní kromě ní pravdivou také právě jednu z vět k_1, k_2, \dots, k_{100} . Každá z těchto vět proto zastupuje jednu setinu celé množiny případů, v nichž je předpoklad A pravdivý. Protože v urně je 90 černých kuliček, bude

sey, und wie viele derselben M wahr machen, um alsbald zu erfahren, wie sich die Menge der Fälle, in denen die Voraussetzungen A, B, C, \dots wahr werden, zur Menge der Fälle, in denen neben denselben auch noch M wahr wird, verhalte. Ist die Gesamtzahl der Sätze $k, k', k'', \dots = k$; und ist die Anzahl derer, aus denen auch M ableitbar ist, $= m$: so ist klar, daß sich die ganze unendliche Menge der Fälle, in welchen die Voraussetzungen A, B, C, \dots wahr werden, in k gleiche Theile zerlegen lasse, und daß auf die unendliche Menge der Fälle, in welchen neben ihnen auch M wahr wird, an dieser Theile kommen. Der gesuchte Grad der Wahrscheinlichkeit des Satzes M wäre also $= m/k$.

([B10], sv. 2, § 161, str. 175–176; český překlad: [B25], str. 245)

⁵⁶ *Um eine allgemeine Weise, wie dieß geschehen könne, zu begreifen, müssen wir erst bemerken, daß es auch, ohne noch den bestimmten Grad der Wahrscheinlichkeit zweier oder mehrerer Sätze k, k', k'' , \dots zu wissen, möglich sey, wenigstens das zu erkennen, daß diese Sätze hinsichtlich auf die Voraussetzungen A, B, C, D, \dots alle von einer gleichen Wahrscheinlichkeit sind. Dieß nämlich wird der Fall seyn, wenn die genannten Sätze zu den gegebenen A, B, C, D, \dots alle in einem und eben demselben Verhältnisse stehen; dergestalt, daß sich kein anderer Unterschied zwischen ihnen befindet, als der aus gewissen, in ihnen als veränderlich angenommenen Vorstellungen hervorgeht, durch deren Umtausch sich der eine in den andern verwandelt.* ([B10], sv. 2, § 161, str. 174; český překlad: [B25], str. 244)

věta M pravdivá při pravdivosti devadesáti ze sta vět k_1, k_2, \dots, k_{100} , a její pravděpodobnost je proto $P(M|A) = 90/100 = 9/10$.

Pravděpodobnost určitá a neurčitá

Bolzano podotýká, že je třeba rozlišovat *pravděpodobnost určitou* (*bestimmte Wahrscheinlichkeit*), kterou je možné stanovit, a *pravděpodobnost neurčitou* (*unbestimmte Wahrscheinlichkeit*), u níž to možné není; jako příklad uvádí situaci, kdy nám někdo řekne, že počet bílých a černých kuliček v urně je různý, neudá však, kterých je víc a v jakém jsou vzájemném poměru. Kdybychom nyní chtěli určit například pravděpodobnost věty „Cajus vyňal černou kuličku“, pak pouze na základě uvedených údajů to není možné.

Další vlastnosti pravděpodobnosti

V uvedeném § 161 Bolzano dále odvozuje vztah pro pravděpodobnost konjunkce logicky nezávislých vět M, N, \dots , který bychom mohli zapsat ve tvaru:

$$P((M \wedge N \wedge \dots)|(A \wedge B \wedge C \wedge \dots) \wedge (D \wedge E \wedge F \wedge \dots) \wedge \dots) = \quad (2.10)$$

$$= P(M|A \wedge B \wedge C \wedge \dots) \cdot P(N|D \wedge E \wedge F \wedge \dots) \cdot \dots,$$

kde se všechny pravděpodobnosti vztahují k týmž proměnným i, j, \dots a pravděpodobnosti na pravé straně jsou známé. Podmínku, kterou bychom dnes nazvali logickou nezávislostí, Bolzano neuvádí přímo, lze ji však vyčíst z předpokladů, za kterých uvedený vztah odvozuje. Důkaz provádí pro dvě věty M a N s tím, že jej lze snadno zobecnit na větší (ale konečný) počet vět. Od vět A, B, C, \dots a D, E, F, \dots požaduje, aby byly vzhledem k představám i, j, \dots slučitelné; dále uvažuje k (resp. l) vět K_1, K_2, \dots, K_k (resp. L_1, L_2, \dots, L_l) se stejnou pravděpodobností,⁵⁷ které mají tu vlastnost, že každý soubor představ i, j, \dots , které učiní pravdivými všechny věty A, B, C, \dots (resp. D, E, F, \dots), učiní pravdivou také právě jednu z vět K_1, K_2, \dots, K_k (resp. L_1, L_2, \dots, L_l). Obě množiny předpokladů přitom mají být nezávislé: Bolzano požaduje, aby všechny věty tvaru „ K_r a L_s jsou pravdivé,“ kde $r = 1, 2, \dots, k$ a $s = 1, 2, \dots, l$, měly stejnou pravděpodobnost vzhledem k předpokladům $A, B, C, \dots, D, E, F, \dots$ a představám i, j, \dots a aby pro každý soubor představ i, j, \dots , které činí pravdivými všechny věty $A, B, C, \dots, D, E, F, \dots$, byla pravdivá právě jedna z nich. Je-li nyní počet vět K_r , z nichž je odvoditelná věta M , roven m a počet vět L_s , z nichž je odvoditelná věta N , roven n ,⁵⁸ pak pravděpodobnost tvrzení, že věty M a N jsou obě pravdivé, vzhledem k předpokladům $A, B, C, \dots, D, E, F, \dots$ a představám i, j, \dots , je rovna

$$\frac{m \cdot n}{k \cdot l} = \frac{m}{k} \cdot \frac{n}{l},$$

tedy součinu pravděpodobností vět M a N , jak uvádí vzorec (2.10).

Za stejných podmínek Bolzano například dokazuje: je-li věta R odvoditelná z vět M, N, \dots vzhledem k i, j, \dots , potom vzhledem k týmž představám platí:

⁵⁷Značení je zde drobně upraveno, Bolzano psal K, K', \dots a L, L', \dots ; srov. str. 104.

⁵⁸Uvědomme si, že pravdivost věty M nemá žádný vliv na to, je-li pravdivá také věta N , a naopak.

$$\begin{aligned}
 P(R|A \wedge B \wedge C \wedge \dots \wedge D \wedge E \wedge F \wedge \dots) &\geq & (2.11) \\
 &\geq P(M|A \wedge B \wedge C \wedge \dots) \cdot P(N|D \wedge E \wedge F \wedge \dots) \cdot \dots
 \end{aligned}$$

Je-li známa pravděpodobnost věty R vzhledem k větám M, N, \dots a představám i, j, \dots , pak vzhledem k těmto představám platí:

$$\begin{aligned}
 P(R|A \wedge B \wedge C \wedge \dots \wedge D \wedge E \wedge F \wedge \dots) &\geq & (2.12) \\
 &\geq P(R|M \wedge N \wedge \dots) \cdot P(M|A \wedge B \wedge C \wedge \dots) \cdot P(N|D \wedge E \wedge F \wedge \dots) \cdot \dots
 \end{aligned}$$

Pravděpodobnost tvrzení, že mezi několika větami M, N, \dots je nějaká pravdivá, je vzhledem k předpokladům $A, B, C, \dots, D, E, F, \dots$ a představám i, j, \dots rovna

$$\begin{aligned}
 P((M \vee N \vee \dots)|A \wedge B \wedge C \wedge \dots \wedge D \wedge E \wedge F \wedge \dots) &= & (2.13) \\
 &= 1 - (1 - P(M|A \wedge B \wedge C \wedge \dots)) \cdot (1 - P(N|D \wedge E \wedge F \wedge \dots)) \cdot \dots
 \end{aligned}$$

Další vlastnosti potom odpovídají vztahům (2.2) a (2.3).

Teorie poznání

V prvních dvou dílech *Vědosloví* se Bolzano snažil o výstavbu objektivní logické teorie zbavené jakéhokoli psychologického podtextu. Jeho věty, pravdy či představy o sobě, pravděpodobnost jako logický vztah mezi větami o sobě a další pojmy jsou zcela nezávislé na jakékoli myslící bytosti. Oproti tomu třetí díl spisu, nazvaný *Teorie poznání*, podává psychologicky zaměřený výklad o poznávacích schopnostech lidí; zkoumá možnost člověka poznávat pravdu, vznik omylu apod. a lze jej považovat za subjektivní paralelu k objektivnímu pojetí *Elementární nauky*. Dříve zavedené obecné pojmy Bolzano zužuje s ohledem na skutečný proces myšlení. Místo věty o sobě nyní zkoumá *větu myšlenou* či *vyshlovenou*, místo pravdy o sobě *pravdu poznanou* či *poznatek*, místo představy o sobě uvažuje *představu subjektivní* či *myšlenou* (srov. str. 98–99). Důležitou roli nyní hrají soudy; Bolzano opět rozlišuje soudy pojmové a soudy zkušenostní a zdůrazňuje, že u zkušenostních soudů lze *dokonalé jistoty* (*vollkommene Gewißheit*) dosáhnout jen v případě soudů bezprostředních, jako například že nyní vidím zelenou barvu.

Bolzano se zde podrobně zabývá tím, jak v lidské mysli probíhá proces poznávání pravdy, jak se člověk rozhoduje, zda nějakou větu o sobě uzná za pravdivou či nikoli, jak vyjádřit stupeň důvěry v nějaký soud či míru jeho spolehlivosti a jak dochází k objevování nových pravd. Teorii poznání Bolzano považoval za nesmírně důležitou, důsledně ji však rozlišoval od vlastní logické teorie.

Epistemologická pravděpodobnost

V souladu se zaměřením dílu *Teorie poznání* Bolzano specifikuje i pojem pravděpodobnosti a jistoty s ohledem na myslící bytosti. Zatímco v § 161 pravděpodobnost zavedl jako vztah mezi větami, který nezávisí na tom, zda jsou samy o sobě pravdivé nebo nepravdivé, či zda je za pravdivé nebo nepravdivé někdo považuje, v § 317 tímto pojmem rozumí vlastnost spojenou s určitou

myslíci bytostí, která navíc věty, k nimž se pravděpodobnost vztahuje, považuje za pravdivé, tj. jsou to její soudy:

*Říkáme-li tedy, že věta M má pro určitou bytost pravděpodobnost, a to s ohledem na předpoklady A, B, C, D, ... a na představy i, j, ..., musí tato bytost považovat věty A, B, C, D, ... za pravdivé a věta M musí být k větám A, B, C, D, ... s ohledem na představy i, j, ... ve vztahu pravděpodobnosti, vyloženém v § 161. Aby však bytost považovala samotnou větu M za pravdivou, to se podle tohoto výkladu ještě nepožaduje a také se zdá, že jazykové užití to nevyžaduje.*⁵⁹

Podle úrovně znalosti uvažované bytosti Bolzano rozlišuje *pravděpodobnost* *poznanou* (*erkannte Wahrscheinlichkeit*) a *nepoznanou* (*unerkannte Wahrscheinlichkeit*). Jsou-li dále věty A, B, C, ..., které daná bytost považuje za pravdivé, všechny skutečně pravdivé, pak Bolzano hovoří o *objektivní* či *skutečné pravděpodobnosti* (*objective, wirkliche Wahrscheinlichkeit*) pro tuto bytost; je-li některá z nich nepravdivá, pak příslušnou pravděpodobnost nazývá *subjektivní* či *domnělou* (*subjective, vermeintliche Wahrscheinlichkeit*). Konečně pravděpodobnost, která větě M přísluší pouze ve vztahu k části celého souboru vět, jež myslící bytost považuje za pravdivé, Bolzano nazývá *relativní* nebo *vztažnou pravděpodobností* (*relative, beziehungsweise Wahrscheinlichkeit*), zatímco pravděpodobnost, která téže větě přísluší vzhledem ke všem relevantním větám, jež daná bytost považuje za pravdivé, nazývá *absolutní* či *úplnou* (*absolute, vollständige Wahrscheinlichkeit*) pro tuto bytost.

Danou větu Bolzano dále nazývá *morálně* či *dostatečně jistou* (*sittlich, moralisch gewiß*), popř. jen *jistou* nebo *věrohodnou* (*glaubwürdig*), je-li její *absolutní pravděpodobnost* [...] *pro určitou bytost tak velká a rozhodují-li při tom takové okolnosti, že by bylo bláhové, ba dokonce nepřipustné brát ještě v úvahu možnost opaku a chtít podle toho jednat.* [...] *Tak např. nazývám větu, že se strop tohoto sálu dnes nezřítí, věrohodnou, má-li toto zřícení – ačkoliv to zrovna nepovažuji za nemožné – přesto tak nízký stupeň absolutní pravděpodobnosti, že by bylo bláhové brát na to ohled ve svém jednání, a tedy např. opustit sál. Neboť nebezpečí, že přijdu k úrazu, jemuž bych se snažil tímto způsobem uniknout, není větší než jakékoliv nebezpečí, do něhož bych se dostal právě v důsledku toho, kdybych např. hodlal raději strávit noc pod širým nebem.*⁶⁰

⁵⁹ *Sagen wir also, daß ein Satz M Wahrscheinlichkeit für ein bestimmtes Wesen habe, und dieß zwar hinsichtlich auf die Voraussetzungen A, B, C, D, ... und auf die Vorstellungen i, j, ...: so müssen die Sätze A, B, C, D, ... von diesem Wesen für wahr gehalten werden, und der Satz M muß zu den A, B, C, D, ... hinsichtlich auf die Vorstellungen i, j, ... in dem § 161 erklärten Verhältnisse der Wahrscheinlichkeit stehen. Daß aber das Wesen den Satz M selbst für wahr halte, wird dieser Erklärung zufolge noch nicht gefordert; und auch der Sprachgebrauch scheint es nicht zu verlangen.*

([B10], sv. 3, § 317, str. 266; český překlad: [B25], str. 352)

⁶⁰ *Wenn die Wahrscheinlichkeit eines Satzes für ein bestimmtes Wesen so groß ist, und solche Umstände dabei obwalten, daß es thöricht, ja wohl gar unerlaubt wäre, die Möglichkeit des Gegenheils noch zu beachten, und darnach handeln zu wollen [...] So nenne ich es z. B. einen glaubwürdigen Satz, daß die Decke dieses Saales heute nicht einstürzen werde, wenn dieser Einsturz, ob ich ihn gleich nicht unmöglich finde, doch einen so niedrigen Grad absoluter Wahrscheinlichkeit hat, daß es thöricht wäre, in meinen Handlungen Rücksicht darauf zu nehmen, und also z. B. den Saal zu verlassen; weil die Gefahr, zu verunglücken, der ich auf diese Art zu entfliehen gedächte, nicht größer ist, als eine jede, in die ich eben*

Stejně jako ve zmíněném § 161, i zde je pravděpodobnost v dnešním slova smyslu *podmíněná*. Vždy se jedná o vztah dané věty M k určité množině jiných vět A, B, C, \dots , nazývaných předpoklady. Hovoří-li se o pravděpodobnosti věty M samotné bez upřesnění předpokladů, pak se jedná jen o zjednodušení vyjadřování v případě Bolzanovy absolutní pravděpodobnosti; množina vět A, B, C, \dots je stále v pozadí a obsahuje všechny věty, které daná bytost považuje za pravdivé a které mohou hledanou pravděpodobnost ovlivnit.

Dodejme, že v poznámce na konci tohoto paragrafu Bolzano vyslovuje ne-souhlas s rozdělením pravděpodobnosti na *reálnou* (*reale Wahrscheinlichkeit*), týkající se skutečných předmětů, a *logickou* (*logische Wahrscheinlichkeit*), která je vztažena na soudy, přičemž vyčíslit má být možné jen první z nich. Tvrdí, že pravděpodobnost je vlastnost, která přísně vzato přísluší pouze větám o sobě; hovoří-li se přitom o pravděpodobnosti nějaké události, myslí se tím pravděpodobnost věty, která o této události vypovídá.

Pravděpodobnost a důvěra

Na rozdíl od *Učebnice náboženské vědy* [B8], kde hovořil o *pravděpodobnosti soudu* (viz str. 92), ve *Vědosloví* [B10] Bolzano zdůrazňuje, že je třeba rozlišovat *pravděpodobnost* jako vlastnost vět o sobě (byť někdy vztaženou k určité myslící bytosti jako v § 317) a *důvěru* jako vlastnost vyslovených soudů (srov. str. 99). Podobně zdůrazňuje rozdíl mezi pojmem *jisté věty* ve smyslu § 161, tj. věty, která je odvoditelná z daných předpokladů bez ohledu na to, zda jsou tyto předpoklady pravdivé či nikoli, zda je někdo za pravdivé považuje, anebo zda si je vůbec někdo představuje, a pojmem *jistého soudu*, tj. soudu, který vzniká *způsobem souzení, u něhož nehrozí vůbec žádná nebezpečí omylu*.⁶¹

Stupeň důvěry, s nímž určitá bytost vynáší soud M na základě předpokladů A, B, C, \dots , které jsou pro ni zcela jisté, Bolzano vyjadřuje jako rozdíl pravděpodobnosti věty M a pravděpodobnosti její negace vzhledem k uvedeným předpokladům, tj.

$$P(M|A \wedge B \wedge C \wedge \dots) - (1 - P(M|A \wedge B \wedge C \wedge \dots)), \quad (2.14)$$

neboli

$$2 \cdot P(M|A \wedge B \wedge C \wedge \dots) - 1. \quad (2.15)$$

Je-li pravděpodobnost věty M vzhledem k daným předpokladům rovna $1/2$, pak uvažovaná bytost soud M nevynáší, protože jinak by musela vynést i jeho negaci, jejíž pravděpodobnost je stejná; v tomto případě také vzorec (2.15) dává nulový stupeň důvěry. Je-li pravděpodobnost věty M vzhledem k uvedeným předpokladům větší než jedna polovina, pak soud M vyneseno je, a to s tím větší důvěrou, čím větší je rozdíl (2.14), a tedy také (2.15). Nejvyšší hodnoty stupeň důvěry nabývá zřejmě pro $P(M|A \wedge B \wedge C \wedge \dots) = 1$; pak Bolzano říká, že soud M daná bytost vynáší s *dokonalou důvěrou* (*vollendete Zuversicht*).

durch dieß Bestreben, wenn ich z. B. lieber die Nacht unter freiem Himmel zubringen wollte, geriethe. ([B10], sv. 3, § 317, str. 268; český překlad: [B25], str. 354)

⁶¹ *Urtheile nun, die nach einer Art zu urtheilen entstehen, bei welcher gar keine Gefahr eines Irrthums Statt hat, pflegen wir eben deshalb gewiß oder sicher zu nennen.*

([B10], sv. 3, § 317, str. 263; český překlad: [B25], str. 350)

2.2.4 Vliv Vědosloví na vývoj filosofie a logiky

Jak bylo zmíněno na konci úvodní části, podstatná část Bolzanových matematických prací zůstala na dlouhá desetiletí ukrytá v rukopisech a mnohé bez nadsázky převratné myšlenky tak neměly možnost vývoj této vědy ovlivnit. *Vědosloví* patří v tomto směru k výjimkám; i když bezprostřední reakce nebyly právě příznivé,⁶² řada Bolzanových myšlenek přece jen našla pokračovatele a svou roli v dalším vývoji sehrála, a to nejen v oblasti filosofie, ale také v logice a logické interpretaci pravděpodobnosti.

Pražské ohlasy

První výraznější ohlasy na Bolzanovo logické dílo se objevily v Praze, a to v souvislosti s diskusí Leibnizovy filosofie. Franz Exner (1802–1853)⁶³ se o *Vědosloví* zmiňuje ve studii *Über Leibnitz'ens Universal-Wissenschaft* [90] z roku 1843. V 50. letech 19. století Bolzanovy zásluhy o oživení Leibnizových myšlenek vysoce ocenil František Bolemír Květ (1825–1864)⁶⁴ v monografii o Leibnizové logice [202], kde také poukázal na některé spojitosti mezi Leibnizem a Bolzanem. Josef Durdík (1837–1902)⁶⁵ později Bolzana označil za *Leibnize na české půdě* – viz pojednání [83] z roku 1881, str. 9.

Robert Zimmermann

Robert Zimmermann (1824–1898),⁶⁶ který byl dlouhá léta řádným profesorem filosofie na univerzitě ve Vídni, sice nenaplnil Bolzanovy naděje, že dokončí

⁶²Výtky do velké míry pramenily z nepochopení; Bolzanovi bylo vyčítáno, že si neváží psychologie a naopak přeceňuje logiku, v níž podle kritiků hledal něco více, než co se jí obvykle rozumí, a že nedocenil význam Kanta a Hegela. Situaci nezměnily ani anonymní autorecenze, ani obranný spis *Dr. Bolzano und seine Gegner (Dr. Bolzano a jeho odpůrci)* [B11]. Podrobněji viz Berkovu předmluvu k českému vydání [B25].

⁶³Franz Exner studoval filosofii a později také práva na vídeňské univerzitě, v roce 1822/23 studoval v Pavii. V roce 1827 začal na vídeňské univerzitě suplovat přednášky z filosofie a po roce i z pedagogiky. Od roku 1831 působil jako řádný profesor filosofie na univerzitě v Praze; v letech 1845–47 pracoval ve Vídni jako člen dvorské studijní komise, jež chystala školskou reformu. V roce 1847 se vrátil do Prahy, o rok později byl znovu povolán do Vídně, nyní do funkce ministerského rady na nově vytvořeném ministerstvu veřejného vyučování. Spolu s H. Bonitzem vypracoval *Entwurf der Organisation der Gymnasien und Realschulen in Österreich* [404], který se stal základem pro rozvoj středního školství v celé habsburské monarchii; tento návrh byl provizorně schválen v roce 1849, definitivně pak v roce 1854. Ve čtyřicátých letech Exner rovněž aktivně působil v KČSN: jejím členem byl od roku 1841, v roce 1844 se stal jejím stálým sekretářem; připomeňme, že od roku 1841 působil jako sekretář matematické a filosofické sekce této společnosti B. Bolzano. Exner zemřel 21. června 1853 v Padově.

⁶⁴František Bolemír Květ studoval v letech 1840–1844 filosofii a český jazyk na pražské univerzitě, doktorát získal v roce 1852 na univerzitě v Giessen a v roce 1858 pak na univerzitě v Praze. Působil nejprve jako vychovatel v rodinách Mírbachů a Lobkoviců, potom vyučoval na staroměstském gymnáziu. V roce 1862 se stal lektorem češtiny na nově zřízené katedře slovanských jazyků varšavské univerzity, o dva roky později byl jmenován mimořádným profesorem slovanské filologie, záhy nato však zemřel na zápal plic.

⁶⁵Josef Durdík studoval na pražské univerzitě přírodní vědy, matematiku a filosofii, potom působil jako středoškolský učitel matematiky, fyziky a později také filosofie v Praze a Litomyšli. V roce 1869 se habilitoval na pražské univerzitě a jako soukromý docent zde začal přednášet dějiny novověké filosofie a přípravu k estetice. V roce 1874 byl na téže univerzitě jmenován mimořádným profesorem filosofie, v roce 1880 se pak stal profesorem řádným.

⁶⁶Srov. pozn. 13 na str. 85.

a vydá jeho matematické rukopisy (srov. část 2.1),⁶⁷ přece jen se však zasloužil alespoň o šíření jeho filosofických a logických myšlenek, i když na doporučení samotného Bolzana většinou bez explicitního odkazu k jeho jménu – v tomto smyslu je jednou z výjimek článek *Ueber den wissenschaftlichen Charakter und die philosophische Bedeutung Bernhard Bolzano's* [399] z roku 1849.

Připomeňme, že v letech 1848–1849 začala v habsburské monarchii reforma školského systému, jejímiž hlavními tvůrci byli Franz Exner (1802–1853), profesor filosofie na pražské univerzitě a přítel Bernarda Bolzana (navzdory ryze akademickým sporům v některých filosofických otázkách), a Hermann Bonitz (1814–1888), profesor klasické filologie na univerzitě ve Vídni.⁶⁸ Výsledkem reformy, na níž se vedle Exnera podíleli i další Bolzanovi příznivci včetně Zimmermannova otce (viz str. 85; srov. též str. 22), bylo připojení dvou ročníků filosofického studia k šestiletým gymnáziím, z nichž tak vznikla gymnázia osmiletá, rozdělená do dvou stupňů a zakončená maturitní zkouškou, a zavedení šestiletých reálků. V posledních ročnících gymnázií byla jako povinný předmět zavedena *filosofická propedeutika*, kde se měla vyučovat psychologie a logika; s tím také vyvstala potřeba sepsání odpovídající učebnice. A zde se střetly zájmy Roberta Zimmermanna, žáka Bernarda Bolzana, a Johanna Heinricha Löwa (1808–1892),⁶⁹ žáka filosofa a teologa Antona Günthera, jenž Bolzanovu novému pojetí logiky důrazně oponoval.

Löwe v roce 1849 publikoval pojednání *Ueber den Begriff der Logik und ihre Stellung zu anderen philosophischen Disciplinen* [214], koncipované jako úvod k obsáhlejšímu spisu o logice, který se chystal vydat; zde také představil svá doporučení týkající se výuky filosofické propedeutiky. Ve školním roce 1849/50 začal tento předmět vyučovat na salcburském gymnáziu, jehož poslední dva ročníky po reformě nahradily dřívější lyceum. Sepsáním učebnice pro tento předmět však byl patrně zásluhou Thuna, Exnera a svého otce pověřen právě Robert Zimmermann. Jak upozornil E. Winter v knize [388], druhý díl Zimmermannovy učebnice *Philosophische Propaedeutik* [401], zaměřený na *formální logiku*, byl v podstatě didakticky upraveným výtahem z Bolzanova *Vědosloví*, čímž řadu důležitých myšlenek tohoto spisu zpřístupnil široké veřejnosti – včetně partií o pravděpodobnosti.⁷⁰ Dodnes zůstává otázkou, nako-

⁶⁷Bolzano sám ke konci života začal pochybovat o tom, že bude Zimmermann schopen jeho přání uskutečnit. V dopise Feslovi se zmínil, že má sice velký talent, ale málo pile a vytrvalosti. Viz [388], str. 16.

⁶⁸Hermann Bonitz studoval filosofii, teologii a filologii v Lipsku a Berlíně, potom působil jako středoškolský učitel v Drážďanech, Berlíně a ve Štětíně. V roce 1849 byl zásluhou F. Exnera povolán do Vídně na místo univerzitního profesora klasické filologie. Zde zůstal až do roku 1867, kdy se stal ředitelem gymnázia *zum grauen Kloster* v Berlíně a současně ředitelem pedagogického semináře s právem přednášet na berlínské univerzitě. Od roku 1875 působil jako rada pruského ministerstva školství. Zemřel v Berlíně 25. července 1888.

⁶⁹Johann Heinrich Löwe se narodil 12. prosince 1808 v Praze. Studoval ve Vídni, kde se prostřednictvím svého strýce J. E. Veitha (viz pozn. 5 na str. 80) dostal do okruhu lidí kolem A. Günthera a stal se jeho stoupencem. V roce 1839 jej arcibiskup kníže Friedrich Schwarzenberg povolal na filosoficko-teologické lyceum do Salcburku, kde působil nejprve jako suplent, od roku 1840 jako profesor filosofie. Se Schwarzenbergem, který se mezitím stal kardinálem, jej od té doby pojilo hluboké přátelství. V roce 1852 jej následoval do Prahy, kde až do roku 1890 působil jako univerzitní profesor filosofie. Löwe zemřel v Praze 15. ledna 1892.

⁷⁰Bolzanovo jméno v knize figurovalo jen v jedné okrajové poznámce. Je však třeba zdů-

lik to bylo cílené úsilí, či dokonce tajný plán Zimmermanna staršího, Thuna a Exnera v zájmu rozšíření Bolzanových myšlenek, a nakolik to byl spíše časový tlak při sepisování učebnice, co Zimmermanna vedlo k tomu, že sáhl po výtazích z Bolzanova *Vědosloví*, dříve připravených Příhonským a Zeithammerem, a přizpůsobil je pro účely výuky. Rozhodující je, že Bolzanovy myšlenky byly prostřednictvím oficiální učebnice srozumitelně zprostředkovány gymnaziálním studentům rakouské monarchie. V roce 1858 vyšel nezměněný dotisk uvedené učebnice, další vydání [402] z roku 1860 však již bylo výrazně přepracováno; i zde zůstává otevřené, co bylo hlavním důvodem – zda to byl posudek z roku 1855, v němž Löwe odhalil nápadnou shodu učebnice se spisem Bernarda Bolzana, jehož práce byly na indexu zakázaných děl, a nařkl Zimmermanna z plagiátorství, anebo spíše skutečnost, že se Zimmermann postupně odklonil od Bolzana k herbartismu. Posudek nakonec zůstal bez následků, protože Löwe zanedlouho upadl v nemilost na oficiálních místech kvůli tomu, že se nepřestal hlásit ke svému učiteli A. Güntherovi, jenž se mezitím rovněž dostal na index. Podle Winterova názoru byl Zimmermann přesto nucen učebnici přepracovat, aby závislost na Bolzanovi nebyla tak zřejmá. Naproti tomu Ch. Landerer vyslovil v článku [206] domněnku, že druhé vydání dokumentuje změnu v Zimmermannových názorech i v novém základním zaměření pojmů. V každém případě však přepracování postihlo také pravděpodobnost, která se už v učebnici nevykytuje (s výjimkou významu používaného v běžném jazyce). Nicméně první vydání bylo i v šedesátých letech stále užíváno a navíc i přes výrazné úpravy se Zimmermann z Bolzanova vlivu zcela nevymanil.

Ludwig Wittgenstein

Bolzanovský badatel J. Šebestík upozornil na to, že výklad pojmů vyplývání a pravděpodobnosti, podaný ve Wittgensteinově *Traktátu* [390], působí jako zjednodušený výklad Bolzanových metod, a ukázal, že nejvěrohodnějším zdůvodněním nápadné shody *Traktátu* s Bolzanovým *Vědoslovím* je právě studium Zimmermannovy učebnice filosofické propedeutiky [401].⁷¹ Výraznou stopu Bernarda Bolzana tak lze odhalit i v počátcích analytické filosofie.

O Wittgensteinově pojetí pravděpodobnosti jsme podrobně hovořili v části 1.3.2 (viz str. 62), čtenář je tak sám může porovnat s pojetím Bolzanovým. Na tomto místě ještě ocitujme začátek odstavce 3.315, kde Wittgenstein píše o *proměnných* a o *formách vět* – i zde si můžeme povšimnout značné podobnosti s Bolzanovými úvahami (viz str. 100 a 102).

Změníme-li nějakou složku věty v proměnnou, pak zde bude třída vět, jež budou soubornými hodnotami takto vzniklé proměnné věty. Tato třída obecně závisí ještě na tom, co (dle libovolné dohody) míníme částmi této věty. I když ale změníme v proměnné všechny znaky, jejichž význam je určen libovolně, stále

raznit, že Bolzano sám si nepřál, aby se k němu Zimmermann hlásil, protože věděl, že by si tím mohl způsobit potíže. Okolnosti vzniku Zimmermannovy učebnice a jejich dalších osudů jsou podrobně popsány v zajímavé předmluvě ke knize [388], kde jsou přetištěny shodné či velmi podobné pasáže z Bolzanovy a Zimmermannovy práce.

⁷¹Viz dodatek k článku [127] L. Goldsteina, str. 442–445, a 1. díl knihy [96] J. Fialy, str. 30–31.

zde taková třída bude. Ta pak už ale nebude záviset na žádné dohodě, nýbrž jen na povaze věty. Bude odpovídat logické formě – logickému praobrazu.⁷²

Franz Brentano a jeho žáci

Bolzanova *Vědosloví* si velmi cenil Franz Brentano (1838–1917),⁷³ který podobně jako Zimmermann vyučoval na vídeňské univerzitě, kde mj. konal přednáškový cyklus *Die elementare Logik und die in ihr nötigen Reformen* (zimní semestr 1884/85), v němž pojednával také o Bolzanových *Paradoxech nekonečna* [B14]. Mezi jeho žáky a přátele patřili například Anton Marty (1847–1914), Carl Stumpf (1848–1936), Alexius Meinong (1853–1920), Alois Höfler (1853–1922), Benno Kerry (1858–1889), Edmund Husserl (1859–1938), Kazimierz Twardowski (1866–1938) a v neposlední řadě Tomáš Garrigue Masaryk (1850–1937). Brentanův zájem se sice týkal především Bolzanovy filosofie logického realismu a již podstatně méně vlastní teorie vědy, i tak je ale důležité, že svým žákům zprostředkoval poznání řady Bolzanových myšlenek a přivedl je ke studiu jeho spisů. Někteří z nich pak měli k Bolzanovi ještě blíže než jejich učitel – Brentano si později posteskl, že jeho nejnadanější žáci, Kerry, Twardowski, Husserl a Meinong, odmítli jeho filosofii ve prospěch filosofie Bolzanovy.⁷⁴

Brentano se zpočátku věnoval především psychologii (v roce 1874 vydal spis *Psychologie vom empirischen Standpunkte* [43] a v zimním semestru 1874/75 konal na univerzitě stejnojmennou přednášku), později, v roce 1886, se sám označil za metafyzika; na tuto vědu však kladl přísné požadavky, jako například nutnost držet se *pravidel tvoření hypotéz, počtu pravděpodobnosti, který respektuje zkušenostní data, aby bylo možné vytvořit co možná nejvyváženější předpoklady vypovídající o příčinách a pravidelnostech.*⁷⁵

Benno Kerry

První ze zmíněných žáků, Benno Kerry,⁷⁶ se v poslední části série článků *Ueber Anschauung und ihre psychische Verarbeitung* [192] podrobně věnoval Bolzanovu *Vědosloví*, zejména pojmu *subjektivní představa, představa o sobě*

⁷²Český překlad citován podle [392], str. 21.

⁷³Franz Brentano studoval na univerzitách v Mnichově, Würzburgu a Berlíně, v roce 1862 získal doktorát filosofie v Tübingen. Potom začal studovat teologii a v roce 1864 byl vysvěcen na kněze, i nadále se však věnoval filosofii a psychologii a pokračoval v akademické kariéře na univerzitě ve Würzburgu, kde se v roce 1866 habilitoval a začal zde vyučovat jako soukromý docent. Mezi jeho studenty patřili kromě jiných také C. Stumpf a A. Marty. Kvůli nesouhlasu s dogmaty katolické církve zanedlouho složil kněžský úřad a později i vystoupil z církve. V roce 1874 byl jmenován řádným profesorem filosofie na univerzitě ve Vídni, o šest let později se však vzdal svého úřadu i rakouského občanství a odešel do Saska, aby se mohl oženit s Iduou Lieben. Na vídeňskou univerzitu se záhy vrátil, profesuru však již nezískal a působil jen jako soukromý docent. Po smrti své ženy odešel do Florencie, kde se v roce 1897 oženil s Emilií Rueprechtovou. V roce 1903 oslepl, s pomocí své ženy však i nadále publikoval. Po vypuknutí první světové války odešel do Švýcarska, kde 17. března 1917 zemřel.

⁷⁴Viz [201], str. 58.

⁷⁵[44], str. VIII; český překlad citován podle článku [360] J. Svobody, str. 530.

⁷⁶Benno Kerry studoval na univerzitách ve Štrasburku a ve Vídni. V roce 1885 se na základě spisu *Grundzüge einer Theorie der mathematischen und nicht-mathematischen Grenzbe-griffe* habilitoval na univerzitě ve Štrasburku a stal se zde soukromým docentem a zároveň asistentem Wilhelma Windelbanda. Zemřel v nedožitých 31 letech.

a *předmět*, a významně tak přispěl k tomu, že Bolzanovy myšlenky začaly být předmětem intenzivnějšího studia.

Kazimierz Twardowski

Jedním z myslitelů, jejichž pozornost k Bolzanovu *Vědosloví* upoutalo zmíněné Kerryovo pojednání, byl Brentanův žák, polský filosof a logik Kazimierz Twardowski (1866–1938),⁷⁷ který je považován za zakladatele polské analytické filosofie a tzv. Lvovsko-varšavské školy. Mezi jeho studenty patřili logikové Jan Łukasiewicz, Stanisław Leśniewski a Tadeusz Czeżowski, historik filosofie Władysław Tatarkiewicz, fenomenolog a estetik Roman Ingarden, či například filosofové Tadeusz Kotarbiński a Kazimierz Ajdukiewicz, kteří měli blízko k Vídeňskému kroužku. Je však třeba dodat, že Twardowski se klonil spíše k Brentanově filosofii a Bolzanův přínos výrazněji ocenil teprve v práci [377], která vyšla až 16 let po jeho příchodu do Lvova.

Jan Łukasiewicz

Blíže k Bolzanovým původním myšlenkám měl Twardowského žák, logik a filosof Jan Łukasiewicz (1878–1956),⁷⁸ který svému učiteli vyslovil dík za to, že jej upozornil mj. na Bolzanovo pojetí *platnosti věty* (viz [219], str. 58), zároveň jej však kritizoval pro přílišný psychologismus a nedostatečné ocenění Bernarda Bolzana. Ve svých pamětech poznamenal:

*Twardowski si vysoce cenil spisů jiného kněze [vedle Brentana], který žil v první polovině 19. století, Bernarda Bolzana. Bolzano byl profesorem náboženské vědy na univerzitě v Praze a byl vynikajícím matematikem a logikem. Jeho práce v oblasti filosofie mají nesrovnatelně vyšší úroveň než filosofické tlachání Kanta nebo Hegela. Kdyby si Twardowski všiml rozdílu mezi vědeckou metodou používanou Bolzanem a zmateným a mnohdy povrchním tlacháním německých filosofů, mohl založit nový směr vědecké filosofie, který by převyšoval Vídeňský kroužek. Twardowski byl místo toho [...] fascinován [Brentanovými] pozdními filosofickými spisy a nakažen psychologismem.*⁷⁹

V roce 1913 Łukasiewicz vydal knihu *Die logische Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung* [219]. Základním pojmem jeho teorie je *neurčitě tvrzení* (*unbestimmte Aussage*), tedy tvrzení obsahující jednu volnou proměnnou, jejíž hodnoty náležejí do dané konečné neprázdné množiny individuí, přičemž po dosažení vždy vznikne výrok, který je buď pravdivý, nebo nepravdivý

⁷⁷Kazimierz Twardowski studoval filosofii, ale také historii, matematiku, fyziku a fyziologii na univerzitě ve Vídni, kde v roce 1891 získal doktorát. V roce 1893 se na téže univerzitě habilitoval a začal zde přednášet jako soukromý docent. V roce 1895 byl jmenován profesorem na univerzitě ve Lvově, kde přednášel o logice, psychologii, etice a dějinách filosofie. Zmínku o tom, že jej na Bolzanovo *Vědosloví* upozornil citovaný Kerryův článek [192], lze nalézt v habilitační práci [376], která vyšla tiskem v roce 1894.

⁷⁸Jan Łukasiewicz studoval matematiku a filosofii na univerzitě ve Lvově, kde jako první z Twardowského žáků získal v roce 1902 doktorát. Po několika letech strávených v Berlíně a Lovani se vrátil do Lvova, kde se v roce 1906 habilitoval a zanedlouho se stal mimořádným profesorem logiky a filosofie. V roce 1915 odešel do Varšavy, kde spolu s Leśniewským založil logickou školu, k níž později patřil také A. Tarski. Po druhé světové válce Łukasiewicz odešel do Dublinu, kde zůstal až do konce života.

⁷⁹Citováno podle článku [37] Arianny Betti, str. 61.

(například „ x leží na řece Visle“, kde x značí haličské univerzitní město, tj. $x \in \{Lvov, Krakov\}$). Lukasiewicz pak definuje *pravdivostní hodnotu neurčitěho tvrzení* jako poměr počtu hodnot proměnné, po jejichž dosazení tvrzení přechází v pravdivý soud, a celkového počtu hodnot proměnné (v uvedeném příkladu by byl tento poměr roven $1/2$), a odvozuje řadu vět týkajících se vlastností tohoto pojmu. K relaci vyplývání Lukasiewicz uvádí, že mezi dvěma neurčitými tvrzeními A, B platí *vztah implikace* nebo *vztah mezi příčinou a následkem*, jestliže pro každou dvojici hodnot proměnných vyskytujících se v těchto tvrzeních je buď příčina A nepravdivá, nebo důsledek B pravdivý, anebo A, B obsahují tutéž proměnnou x a platí, že všechny hodnoty, které činí tvrzení A pravdivým, činí pravdivým také tvrzení B .

V další části se Lukasiewicz věnuje vlastnímu pojmu *pravděpodobnost*, který chápe jako vlastnost neurčitých tvrzení; *stupeň pravděpodobnosti* neurčitěho tvrzení pak ztotožňuje s jeho pravdivostní hodnotou. Konečně třetí část knihy, označená jako *Historisch-kritische Bemerkungen*, obsahuje poznámky týkající se historického vývoje používaných pojmů. Lukasiewicz se zde podrobně zabývá také Bolzanovým pojmem platnosti a poukazuje na rozdíly oproti pojetí, které podal on sám. Za hlavní nedostatek přitom považuje skutečnost, že Bolzano neznal pojem *neurčitá věta* a *logická proměnná*. Jak však upozornil W. Kühne v pojednání [200], Lukasiewiczovu neurčitou větu lze považovat za speciální případ Bolzanovy *formy věty* (viz str. 100).

V každém případě se ale Lukasiewicz zasloužil o další šíření Bolzanových myšlenek. Pod jeho vlivem například Kazimierz Ajdukiewicz (1890–1963)⁸⁰ citoval v práci [3] z roku 1913 partie *Vědosloví*, kde Bolzano zavádí pojem *odvoditelnost*. Zdá se tedy, že i tyto Bolzanovy výsledky byly v polských logických kruzích známé; z tohoto pohledu se jeví nepravděpodobné, že by je neznal Stanisław Leśniewski (1886–1939),⁸¹ s nímž Lukasiewicz po první světové válce založil logickou školu ve Varšavě, a jeho jediný doktorand Alfred Tarski (1901–1983),⁸² který se k této skupině, jež v meziválečném období představovala nejvýznamnější centrum matematické logiky, zanedlouho přidal. Připomeňme, že

⁸⁰Kazimierz Ajdukiewicz studoval filosofii, matematiku a fyziku na univerzitě ve Lvově, kde promoval v roce 1912, potom pokračoval ve studiu v Göttingen, kde v té době přednášel D. Hilbert a E. Husserl. První světovou válku prožil na frontě. V roce 1921 se habilitoval na univerzitě ve Varšavě a oženil se s dcerou svého dřívějšího učitele, Marií Twardowskou. Do roku 1925 přednášel jako docent na univerzitě ve Lvově, další tři roky přednášel ve Varšavě. V roce 1928 získal na lvovské univerzitě profesuru filosofie, po druhé světové válce odešel do Poznaně, kde byl v letech 1948 až 1952 rektorem; od roku 1955 působil ve Varšavě.

⁸¹Stanisław Leśniewski studoval na univerzitách v Lipsku, Heidelbergu, Curychu a Mnichově, v roce 1910 přišel za Twardowským do Lvova, kde o dva roky později obhájil disertační práci. Po první světové válce se habilitoval na univerzitě ve Varšavě. V roce 1919 zde byl jmenován mimořádným profesorem základů matematiky a začal přednášet o různých logických a matematických tématech.

⁸²Alfred Tarski studoval v letech 1918 až 1924 matematiku a filosofii na univerzitě ve Varšavě; mezi jeho učitele patřili J. Lukasiewicz, S. Leśniewski, T. Kotarbiński a W. Sierpiński. Doktorát získal v roce 1924 pod vedením Leśniewského. Potom působil jako středoškolský učitel matematiky, od roku 1926 navíc přednášel jako soukromý docent na varšavské univerzitě. V roce 1939 emigroval do USA; krátce působil na Harvardově univerzitě, City College v New Yorku a Institute for Advanced Studies v Princetonu. Po válce zakotvil na univerzitě v Berkeley, kde založil významnou logickou školu a kde působil až do konce života.

Tarski v roce 1936 vydal slavný článek [368], v němž podal definici logického vyplývání, založenou na pojmu modelu.⁸³ V následujícím roce upozornil v pojednání [342] na podobnost s Bolzanovou definicí vyplývání Heinrich Scholz. Tarski se o této poznámce zmínil v anglickém vydání svého článku (viz [369], str. 417), nijak ji však nekomentoval – a tedy ani nezpochybnil.⁸⁴

Edmund Husserl

Obzvlášť důležité pro šíření Bolzanových myšlenek bylo ocenění, jehož se Bolzanovu spisu *Vědosloví* dostalo od významného německého filosofa a matematika Edmunda Husserla (1859–1938), který okruh Brentanových žáků rozšířil po studiu v Lipsku a Berlíně.⁸⁵ V prvním díle svého stěžejního spisu *Logische Untersuchungen (Logická zkoumání)* [158] z roku 1900, v němž položil základy fenomenologie, Husserl píše:

Zatímco se Lange⁸⁶ tak horlivě zasazoval o myšlenku čistě formální logiky, neměl ani ponětí, že byla již dávno v relativně velké míře uskutečněna. Nemám samozřejmě na mysli ony četné výklady formální logiky, které vznikaly zejména ve školách Kantových a Herbartových a které jen velmi málo odpoví-

⁸³Pro libovolnou třídu výroků \mathcal{L} Tarski uvažoval třídu výrokových funkcí \mathcal{L}' , která vznikne po nahrazení všech mimologických konstant ve výrocích z třídy \mathcal{L} příslušnými proměnnými (o nichž se předpokládá, že v uvažovaném jazyce existují; stejné konstanty se nahradí stejnými proměnnými, různé různými). Modelem třídy výroků \mathcal{L} Tarski rozumí libovolnou posloupnost předmětů, která splňuje každou výrokovou funkci třídy \mathcal{L}' (pojmy *pravdivost* a *splňování* se podrobně zabýval mj. v knize [367]). Model třídy sestávající z jediného výroku pak nazývá modelem výroku. Pojem *vyplývání* Tarski definuje slovy:

Řekneme, že výrok X logicky vyplývá z třídy výroků \mathcal{K} tehdy a jen tehdy, když každý model třídy \mathcal{K} je zároveň modelem výroku X . ([368], str. 64)

⁸⁴Srovnáním Bolzanova a Tarského pojetí se podrobně zabývá M. Vlasáková v knize [382]. O historických souvislostech a roli K. Ajdukiewicze jako možného prostředníka mezi Bolzanem a Tarskim pojednává T. Batóg ve stati [15], otázkou vlivu Bolzana na Leśniewského a Tarského se zabývá A. Betti v článku [37].

⁸⁵Edmund Husserl se narodil 8. dubna 1859 v Prostějově v rodině židovského obchodníka; po maturitě na německém gymnáziu v Olomouci studoval matematiku, fyziku a filosofii v Lipsku (od podzimu roku 1876, kdy sem na roční studijní pobyt zavítal i T. G. Masaryk), později v Berlíně (od roku 1878) a ve Vídni (od roku 1881). K jeho učitelům patřil německý filosof, psycholog a fyziolog Wilhelm Maximilian Wundt (1832–1920), tehdy profesor na univerzitě v Lipsku, a profesori berlínské univerzity Karl Weierstrass (1815–1897) a Leopold Kronecker (1823–1891). Na vídeňské univerzitě Husserl promoval v roce 1882 prací o variačním počtu u Kroneckerova žáka Lea Koenigsbergera (1837–1921). Ve Vídni se pravidelně scházel s T. G. Masarykem a snad i pod jeho vlivem pokračoval ve studiu filosofie u F. Brentana (tuto otázku podrobně rozebírá K. Schuhmann v pojednání [344]). V roce 1886 odešel za Brentanovým bývalým studentem C. Stumpfem do Halle, kde se o rok později habilitoval a kde následujících 14 let působil jako soukromý docent. V roce 1901 získal profesuru v Göttingen, o 15 let později ve Freiburgu, kde 27. dubna 1938 zemřel. Ke konci života čelil značné šikaně kvůli svému židovskému původu; v roce 1937, kdy byl donucen se vystěhovat ze svého bytu, se pražský filosofický kroužek *Cercle philosophique de Prague pour les recherches sur l'entendement humain*, jehož tajemníkem byl filosof Jan Patočka (1907–1977), zasloužil o záchranu Husserlovy filosofické tvorby, o níž se dalo předpokládat, že se stane pro nacisty nežádoucí. Díky obětavé pomoci belgického františkána a filosofa Hermana Leo Van Bredy (1911–1974) se podařilo dovézt více než 40 000 stran stenografických textů a poznámek do Lovaně, kde byl v letech 1938–1939 založen Husserlův archiv.

⁸⁶V předcházejícím odstavci Husserl hovoří o spisu [207] německého filosofa a sociologa Friedricha Alberta Langea (1828–1875), vydaného posmrtně v roce 1877.

daly nárokům, jež vznášely. Mám však na mysli *Vědosloví* (*Wissenschaftslehre*) Bernharda Bolzana z roku 1837, dílo, které [...] zanechává daleko za sebou všechno, co světová literatura nabízí jako systematické projekty logiky. Bolzano sice výslovně nevyložil a nedoporučil samostatné vymezení čisté logiky v našem smyslu; ale *de facto* ji v obou prvních svazcích svého díla, totiž jako základ teorie vědy v jeho pojetí, vyložil tak čistě, vědecky exaktně a opatřil ji tolika původními, vědecky zajištěnými a v každém případě plodnými myšlenkami, že proto bude muset být považován za jednoho z největších logiků všech dob. [...] Jeho myšlenkám je vlastní matematická prostota a věcnost, ale také matematická srozumitelnost a preciznost. Teprve když se člověk blíže věnuje smyslu a účelu těchto myšlenek v celku disciplíny, odhalí, jak velká duševní práce a jak velký duševní výkon je skryt ve věcných učeních a formálních výkladech. Filozofovi vyrostlému v předsudcích, myšlenkových a vyjadřovacích zvyklostech idealistických škol – a všichni jsme tak zcela ještě neodrostli jejich účinkům – se podobný vědecký způsob velmi snadno jeví jako povrchnost bez idejí či také jako těžkopádnost a puntičkářství. Ale právě na Bolzanově díle se musí vystavět logika jako věda, z něj se musí naučit, čeho právě má zapotřebí: matematické přesnosti v rozlišeních, matematické exaktnosti v teoriích. Získá pak také jiné stanovisko pro hodnocení „matematizujících“ teorií logiky, ačkoli Bolzano sám je ještě netušil. Každopádně se budoucímu autorovi dějin logiky již nebude smět vloudit omyl jinak tak pečlivého Überwega, který klade dílo formátu *Vědosloví* na jednu rovinu s – *Logik für Frauenzimmer* (*Logikou pro děvečky*) P. F. Kniggeové.⁸⁷

Jakkoli je Bolzanova práce jednoduchá, může být (úplně ve smyslu tohoto veskrze poctivého myslitele samotného) jen stěží přijímána jako definitivní a konečná. Abych zde zmínil jen jeden bod: zvláště citlivé jsou nedostatky ve vztahu k teorii poznání. Chybí (nebo jsou zcela nedostatečné) zkoumání, která by se týkala ve vlastním smyslu filosofického objasnění logických myšlenkových výkonů a tím filosofického zhodnocení logické disciplíny samotné.

O souvislosti svého vlastního díla s *Vědoslovím* pak Husserl píše:

*Srovnání mých předkládaných logických zkoumání s Bolzanovým dílem povede ke zjištění, že se v žádném případě nejedná o pouhé komentáře či kriticky vylepšující výklady Bolzanových myšlenek, ačkoli má zkoumání na druhé straně získala od Bolzana – a kromě toho od Lotze – rozhodující podněty.*⁸⁸

Podrobný rozbor vlivu *Vědosloví* na vývoj filosofie a logiky by si zasloužil samostatnou publikaci a jen samotný výčet jmen osobností, u nichž lze tento vliv postřehnout, by byl ještě velmi dlouhý. Vedle Brentanových žáků zmíněných na str. 113 by sem patřil například německý matematik Alwin Korselt (1864–1947), který na *Vědosloví* opakovaně upozorňoval Gottloba Fregeho,⁸⁹ maďarský filosof, matematik a fyzik Menyhért Palágyi (1859–1924), ruský filosof Vladimir Sergejevič Solovjev (1853–1900) a mnoho dalších.

⁸⁷Husserl v poznámce pod čarou dodává: *O obou totiž Überweg nedokáže říci nic víc než jejich název. Jednou bude ostatně takové zpracování dějin logiky, které se, tak jako Überwegovo, orientuje podle „velkých filosofů“, také považováno jako podivná anomálie.*

⁸⁸[158], str. 225–227; český překlad citován podle [159], str. 200–201.

⁸⁹Podrobnosti lze nalézt v článku [359] G. Sundholma.

2.2.5 Bolzanův vliv na vývoj logické pravděpodobnosti

Bolzanova teorie pravděpodobnosti z dnešního pohledu odpovídá logické interpretaci, o níž jsme hovořili v části 1.3.2. O Bolzanově vlivu na Jana Lukasiwicze a možném vlivu na Ludwiga Wittgensteina jsme se zmínili v části 2.2.4. Zde ještě dodejme, že v předmluvě ke stuttgartskému vydání *Vědosloví* z roku 1987 porovnal Jan Berg teorie vytvořené Bolzanem, Wittgensteinem a Carnapem a poukázal na to, že Bolzano byl prvním filosofem, který zavedl pojem induktivní pravděpodobnosti.

Bolzano a Vídeňský kroužek

Je ovšem třeba zdůraznit, že Bolzanův příspěvek k logické interpretaci pravděpodobnosti byl představitelům tohoto směru znám již mnohem dříve. Ve dnech 15. až 17. září 1929 se v Praze konala konference *Erste Tagung für Erkenntnislehre der exakten Wissenschaften (První konference o epistemologii exaktních věd)*, která je dnes známá především díky tomu, že zde Hans Hahn přečetl programové prohlášení *Wissenschaftliche Weltauffassung – der Wiener Kreis (Vědecké pojetí světa – Vídeňský kroužek)*.⁹⁰ Kromě toho na konferenci zazněla řada zajímavých přednášek věnovaných základům matematiky a logiky i obecně základům vědy. Z našeho pohledu je důležitá především skutečnost, že se zde sešly myšlenky mj. Bolzana, Keynesa, Wittgensteina a Waismanna a také že se zde sešli nejvýznamnější představitelé logické pravděpodobnosti z „pokeynesovské“ doby, kdy se těžiště přesunulo z Cambridge do Vídně; kromě Waismanna byli mezi účastníky také Rudolf Carnap a Hans Reichenbach, kteří v následujícím roce založili časopis *Erkenntnis*, jehož první číslo bylo zároveň sborníkem pražské konference. Přinejmenším od této doby lze jen těžko říci, že by další práce zmíněných osobností byly nezávislé na Bernardu Bolzanovi.

Ze všech přednášek věnovaných teorii pravděpodobnosti zde připomeňme příspěvek jednoho z členů Vídeňského kroužku, Friedricha Waismanna, který citoval Bolzana spolu s Leibnizem jako zastávce názoru, že pravděpodobnost představuje součást logiky. Ve své přednášce si kladl za cíl podat logické objasnění pojmu pravděpodobnosti a odpovědět na otázku, co pravděpodobnost znamená a jaký je smysl pravděpodobnostních výroků. O Waismannově příspěvku, který byl pod názvem *Logische Analyse des Wahrscheinlichkeitsbegriffs* [383] v následujícím roce publikován, jsme hovořili v části 1.3.1 (viz str. 63). Viděli jsme, že Waismann považoval pravděpodobnost za míru logické blízkosti dvou výroků a hlásil se zejména k myšlenkám Ludwiga Wittgensteina. Rovněž jsme se zmínili o tom, že v následné diskusi Walter Dubislav poukázal na to, že podobné myšlenky lze nalézt již v Bolzanově *Vědosloví* [B10], a zdůraznil, že Bolzanovo pojetí je obecnější než pojetí Waismannovo.

Také Moriz Schlick (1882–1936), fyzik, filosof a zakladatel Vídeňského kroužku, se hlásil k Bolzanovu pojetí pravděpodobnosti. V pojednání *Die Kausalität in der gegenwärtigen Physik* [339] poznamenal, že *jediný použitelný způsob definice pravděpodobnosti je založen na logických prostorech [logische Spielräume] (Bolzano, von Kries, Wittgenstein, Waismann [...])* ([340], str. 73)

⁹⁰Český překlad tohoto prohlášení lze nalézt v knize [96] J. Fialy.