Obr. I Škola Albrechta Dürrera: Tapisérie ze zámku Michelfeld
(Kolo Štěstěny, jímž otáčí Čas a lstivý Lišák)

1 PRAVDĚPODOBNOST: DEFINICE A FILOSOFICKÉ INTERPRETACE

Obr. 1.1 Hans Sebald Beham (1500–1550): Fortuna

1.1 PRAVDĚPODOBNOST VE VÝUCE: INSPIRACE V HISTORII

1.1.1 Úvod

Počet pravděpodobnosti s upotřebením na arithmetiku národo-hospodářskou, tak řečenou, nutno pokládati za svrchovaně důležitý a procvičiti žáky VII. třídy co nejdůkladněji způsobem povzbuzujícím. Jest to tím snadnější, ježto poskytuje počet pravděpodobnosti hojnosť příkladů poutavých, podobně jako náuka o rovnicích. Mělo by se přihlédnouti též aspoň z části ku pravděpodobnosti a posteriori, ač není posud do školních knih pojata. Musíme však na mysli míti velikou cenu paedagogickou počtu pravděpodobnosti vzhledem k tomu, že i k poznatkům nejistým učí nás přikládati přesné měřítko, a že při tom dovede důrazně vzbuditi v mysli žákově důležitou koncepci větší neb menší pravděpodobnosti různých poznatků, a poučiti ho o rozdílu těchto pouhých pravděpodobností od absolutně bezpečné, jisté pravdy. Počet pravděpodobnosti má obzvláštní důležitost pro každého vůbec, a její užití jest velikolepé ve vědách přírodných a duchovných. ([267], str. 8–9)

Citovaná slova Augustina Pánka z metodiky vyučování matematice z konce 19. století neztrácejí na aktuálnosti ani v dnešní době. Naopak, snad ještě více než kdy dříve je žádoucí, aby děti ze školy vycházely vyzbrojené alespoň základním pravděpodobnostním uvažováním, které jim umožní vytvořit si správnou představu o údajích, jimiž je budou zahrnovat politici, firmy provádějící průzkumy veřejného mínění, lékaři, farmaceutické firmy, biologové či provozovatelé heren, kasin a loterií. Není třeba připomínat, že pochopení základních principů teorie pravděpodobnosti je nezbytné k hlubšímu porozumění světu, k lepšímu rozhodování v denních záležitostech i ke zmírnění nejrůznějších obav.

Inspiraci pro výuku a zajímavé motivační příklady z nejrůznějších oblastí života lze nalézt v řadě publikací. Z těch, které jsou dostupné v českém jazyce, zde uveďme alespoň knihy [2], [4], [188] a [308] autorů Amira D. Aczela, Jiřího Anděla, Ellen a Michaela Kaplanových a Jeffreyho S. Rosenthala; čtenářům, kterým nevadí anglický jazyk, lze doporučit také například zajímavou knihu [119] Gerda Gigerenzera.

Cílem této kapitoly je poukázat na to, že vedle příkladů z oblasti medicíny, soudnictví, kriminalistiky či politologie lze k motivaci výuky pravděpodobnosti využít i tématu, které je hlavním předmětem této knihy, totiž interpretací pravděpodobnosti, především pravděpodobnosti subjektivní.

Ve školské matematice se pravděpodobnost obvykle zavádí pomocí tzv. *klasické definice* jako podíl počtu příznivých a všech možných výsledků (viz část 1.2.3). Přitom se předpokládá, že všech výsledků je konečný počet, žádné dva nemohou nastat současně a všechny jsou „stejně možné“. Tato definice je velmi názorná, již velmi dlouho je však předmětem oprávněné kritiky. Její hlavní potíž spočívá v tom, že předpokládá, že všechny výsledky jsou „stejně možné“, přitom se však náležitě nedefinuje, co to znamená. Možná i proto se většina úloh, s nimiž se studenti na základní i střední škole setkají, týká házení mincí či kostkou, kde je intuitivně zřejmé, které případy lze za „stejně možné“ považovat. Někdy se dojde i k tzv. *statistické definici* pravděpodobnosti, podle níž je pravděpodobnost určitého jevu určena přibližně (chceme-li se vyhnout pojmu limity) jeho relativní četností při dostatečně velkém počtu na sobě nezávislých pokusů. Konečně na vysoké škole se studenti setkají s *axiomatickou definicí* (viz části 1.2.4 a 1.3.4).

Situace z reálného života však zpravidla vůbec nepřipomínají ani hod mincí či kostkou, ani dlouhé opakování téhož pokusu za přesně stejných podmínek, realitě vzdálené se zdají i abstraktní axiomy. Většina studentů a velká část pedagogů proto pravděpodobnost nemá ve velké oblibě, považuje ji za zbytečnou a pokud to jde, raději se jí vyhne. Přitom každý z nás se den co den setkává s „pravděpodobnostními“ soudy, jako například: „touhle dobou snad na Barrandovském mostě nebude zácpa“ (je to velmi pravděpodobné, ale může dojít k nějaké nehodě), „volby určitě vyhraje ČSSD“ (voliči však mohou například pod vlivem médií na poslední chvíli změnit názor), „tato antibiotika by vás měla uzdravit“ (bakterie však mohou být náhodou rezistentní a léčba bude neúčinná), „proti Rusku nemají naši hokejisté šanci“ (stále je tu ale určitá naděje, že by ho mohli porazit), „mistři světa ve fotbale budou nejspíš z Evropy“ (není však vyloučeno, že to bude například Brazílie). Každý by jistě mohl v tomto duchu pokračovat libovolně dlouho. Ať už si to tedy uvědomujeme či nikoli, velmi často pracujeme s určitými osobními odhady pravděpodobností, i když je většinou přesně nevyčíslujeme. Nejen z filosofického, ale i z didaktického hlediska je proto zajímavá tzv. *subjektivní interpretace pravděpodobnosti*, která pravděpodobnost považuje za míru osobního přesvědčení o výskytu určitého jevu nebo o platnosti určité hypotézy.

1.1.2 Subjektivní pravděpodobnost a kurzové sázky

Jedna možnost, jak vyhodnotit subjektivní pravděpodobnost, je velmi dobře známá: stačí si uvědomit, že právě tento problém řeší bookmakeři stanovující kurzy sázek na různé sportovní, politické či společenské události. I když se snaží získat co nejvíce informací, stále se musí vyrovnat s náhodou. Ani nejlepší bookmaker například neví, jak se jednotliví sportovci vyspí, jak jim bude vyhovovat trať, zda budou mít všichni stejné povětrnostní podmínky, nebude-li mít někdo zažívací problémy atd. Podobně ten, kdo sází, tak činí na základě svých subjektivních odhadů příslušných pravděpodobností. I zarytý odpůrce teorie pravděpodobnosti přitom ví, že obvykle zveřejňované kurzy udávají, kolik sázející v případě úspěchu dostane za každou vsazenou korunu, a že čím nižší je kurz, tím vyšší je pravděpodobnost, kterou bookmaker dané události přisuzuje. Nejpravděpodobnější vítěz je podle sázkové kanceláře tedy vždy ten, jehož kurz je nejnižší – jako např. M. Sáblíková při kurzech uvedených v tab. 1.1:

Tab. 1.1 Ukázka kurzů: ZOH 2010, rychlobruslení žen, 5000 m

Celkové umístění	V	1–2	1–3
Sáblíková M.	1,17	1,04	1,01
Beckert S.	6,5	1,54	1,25
Hughes C.	11	4,3	2,1
Anschütz D.	15	5,4	2,7

Návratnost sázky

Jinou otázkou je, kterou sázkovou kancelář by měl sázející zvolit. Pro ilustraci uveďme kurzy nabízené různými sázkovými kancelářemi na zápas mezi Španělskem a Hondurasem na mistrovství světa ve fotbale v roce 2010:

Tab. 1.2 Ukázka kurzů: MS ve fotbale 2010

	Španělsko	Remíza	Honduras
Bet-at-home	1,11	8,00	15,00
Fortuna	1,12	6,70	13,00
Tipsport	1,13	8,10	15,05

V tomto případě je zřejmé, že ať už utkání skončí jakkoli, Tipsport vyplatí nejvyšší částku. Tam, kde to tak zřejmé není, popř. chceme-li rozdíly v nabídkách jednotlivých kanceláří upřesnit, můžeme jednoduše spočítat tzv. *návratnost* sázky jako podíl výhry (např. 100 Kč) a částky vsazené takovým způsobem, abychom v každém případě tuto výhru získali. Uvažujme například Fortunu. K výhře 100 Kč v případě vítězství Španělska je třeba na tento výsledek vsadit 100/1,12 Kč. Abychom tedy vyhráli 100 Kč v každém případě, museli bychom kromě toho vsadit také 100/6,70 Kč na remízu a 100/13,00 Kč na vítězství Hondurasu, tedy celkem

$$C = 100 \cdot \left(\frac{1}{1,12} + \frac{1}{6,70} + \frac{1}{13,00} \right) = 111,90 \text{ Kč}, \tag{1.1}$$

což je téměř o 12 korun více, než vyhrajeme. *Návratnost* je potom podíl

$$N = \frac{100}{C} = \frac{1}{\frac{1}{1,12} + \frac{1}{6,70} + \frac{1}{13,00}} \doteq 0,8936 = 89,36\ \%, \tag{1.2}$$

udávající, jakou část vsazené částky dostaneme zpět. Stejným způsobem můžeme postupovat i u zbývajících kanceláří; podle očekávání nabízí nejvyšší návratnost Tipsport, a to 93,07 %.

Na podobných příkladech si studenti mohou snadno uvědomit, že nemají-li lepší informace než zkušený a dobře vybavený tým sázkové kanceláře, anebo nemají-li mimořádné štěstí, sázení jim nemůže přinést dlouhodobý zisk. Význam kurzových sázek pro výuku tedy netkví jen v motivaci výuky pravděpodobnosti, ale také v příležitosti k osvětě – obzvlášť v dnešní době, kdy díky nedostatečné legislativě dochází k mohutnému nárůstu internetového sázení.

Spravedlivá sázka

Návratnost $N > 1$ (na kterou bohužel nikde nenarazíme) by znamenala, že sázející by si mohl zajistit zisk, ať už nastane jakýkoli výsledek. Návratnost $N < 1$ naopak znamená kladnou střední hodnotu zisku sázkové kanceláře (z hlediska jejích odhadů pravděpodobností). Jediná hodnota, která vypadá spravedlivě, je proto $N = 1$. V tomto případě by byl součet převrácených hodnot kurzů ve vztahu (1.2) roven jedné a tyto převrácené hodnoty by byly rovny pravděpodobnostem, které sázková kancelář přisuzuje jednotlivým možnostem.

V dalším uvažujme jako *kurz sázky* přímo hodnotu p, kterou je třeba vsadit na jev A, aby byla v případě, že tento jev nastane, vyplacena výhra 1 Kč (p tedy značí převrácenou hodnotu kurzu, který obvykle uvádějí sázkové kanceláře). Dále označme symbolem S hodnotu výhry sázejícího v případě, že nastane jev A (odpovídající sázka je tedy pS), a $P(A)$ odhad pravděpodobnosti, který sázková kancelář tomuto jevu přisuzuje. Zisk sázejícího bude v případě, že jev A nastane, roven $Z(A) = S - pS = (1-p)S$, v opačném případě $Z(\neg A) = -pS$. Podle názoru sázkové kanceláře je proto střední hodnota zisku sázejícího rovna

$$\overline{Z} = P(A)(1-p)S + (1-P(A))(-pS) = (P(A)-p)S. \qquad (1.3)$$

Pro jakékoli $p > P(A)$ je střední hodnota zisku sázejícího záporná a bookmaker může očekávat slušný výdělek. Naopak hodnota $p < P(A)$ by znamenala bookmakerovu ztrátu a obvykle se s ní nesetkáme. V případě $p = P(A)$ by nebyla zvýhodněna ani jedna strana a sázku bychom nazvali *spravedlivou.* Jak si můžeme povšimnout, udané „pravděpodobnosti“ jsou vždy více či méně nadhodnocené. Nicméně k vlastnímu stanovení kurzu bookmaker potřebuje danou pravděpodobnost nejprve odhadnout co nejpřesněji, a teprve potom ji může pozměnit, aby si zajistil určitý zisk.

Jak dosáhnout spravedlivé sázky?

Sázkové kanceláře k tomu, aby nabízely spravedlivou sázku, samozřejmě nedonutíme. Budeme-li však uvažovat například dvě sázející osoby, které se na pravidlech sázky mohou předem libovolně dohodnout, pak existuje více možností, jak spravedlivé sázky dosáhnout, a tím i zjistit skutečný odhad pravděpodobnosti toho, kdo kurz sázky navrhuje. Jednoduchý a z hlediska didaktiky matematiky velmi zajímavý způsob představil Bruno de Finetti (1906–1985) v pojednání [98] z roku 1931: stačí připustit i záporné hodnoty sázek. Bookmakerovi v takovém případě hrozí, že bude sám postaven do role sázejícího, a chce-li předejít jisté ztrátě, je nucen být upřímný a udat kurz $p = P(A)$. Finetti dále ukázal, že mají-li být přiřazení pravděpodobností *koherentní* v tom smyslu, že navrhovatel kurzu předejde zaručené výhře sázejícího, a tedy své jisté ztrátě, musejí splňovat základní axiomy teorie pravděpodobnosti (s výjimkou nekonečné aditivity).

Koherentní sázky a axiomy teorie pravděpodobnosti

O osobnosti Bruna de Finetti se ještě podrobněji zmíníme v části 1.3.3. Na tomto místě poznamenejme, že *jevem* Finetti rozuměl kategorické tvrzení, které lze ověřit, ale o němž zatím nevíme, zda je pravdivé nebo nepravdivé – například tvrzení, že nadcházející závody vyhraje účastník z Itálie, anebo že dnešní expres z Milána dorazí se zpožděním mezi 30 a 35 minutami (nikoli tvrzení obecné, týkající se například všech tratí nebo všech dnů). Pro názornost Finetti rovněž používal vyjádření, že daný jev „nastal“ či „nenastal“.

Základní myšlenka je potom následující: osoba, jejíž odhad pravděpodobnosti $p = P(A)$ pro daný jev A nás zajímá, je vyzvána, aby stanovila kurz sázky p ve výše uvedeném smyslu, tj. jako takovou hodnotu, že za sázku pS bude muset v případě, že jev A nastane, vyplatit sázejícímu částku S. Přitom je upozorněna na to, že musí přijmout jakoukoli hodnotu S, a to kladnou i zápornou. Jestliže jev A nastane, bude zisk sázejícího roven $Z(A) = (1-p)S$; v opačném případě bude $Z(\neg A) = -pS$. Finetti ukázal, že mají-li být kurzy *koherentní*, tj. mají-li navrhovatele ochránit před jistou ztrátou, je nutné, aby byly splněny následující podmínky:

(K1) Pro každý jev A je $P(A)$ jediné reálné číslo splňující $0 \leq P(A) \leq 1$.

Označme opět $P(A) = p$. Kdyby bylo $p < 0$, byl by pro libovolné $S > 0$ zisk sázejícího v každém případě kladný: $Z(A) = (1-p)S > 0$, $Z(\neg A) = -pS > 0$; stejně by to dopadlo i pro $p > 1$ a libovolné $S < 0$. Bez ohledu na to, zda jev A nastane či nikoli, by si sázející mohl zajistit kladný zisk i tehdy, kdyby byly pro jev A stanoveny dvě různé hodnoty pravděpodobnosti $p < p'$. Uvažujme například $p = 0,4$ a $p' = 0,6$. Sázející by v tomto případě mohl vsadit 40 korun v prvním kurzu a -60 korun v druhém; kdyby jev A nastal, získal by z první sázky $100 - 40 = 60$ korun a z druhé $-100 + 60 = -40$ korun, celkem by tak vydělal 20 korun. Kdyby jev A nenastal, byl by jeho zisk opět $-40 + 60 = 20$ korun. Obecně pro libovolné $p < p'$ by sázející mohl uzavřít dvě sázky na A, pS a $p'S'$, s celkovým ziskem $Z(\neg A) = -pS - p'S'$, $Z(A) = (1-p)S + (1-p')S' = -pS - p'S' + S + S'$. Pro libovolné $S > 0$ a $S' = -S$ by pak platilo: $Z(A) = Z(\neg A) = (-p + p')S > 0$, což opět odporuje požadavku koherence.

(K2) Pro jistý jev platí $P(A_J) = 1$, pro nemožný jev je $P(A_N) = 0$.

Pro jistý jev je zisk sázejícího vždy $Z = (1 - p_J)S$; pro $p_J < 1$ by stačilo zvolit libovolné $S > 0$ a zisk by byl vždy kladný. Pro nemožný jev je $Z = -p_N S$; pro $p_N > 0$ by byl pro libovolné $S < 0$ zisk sázejícího opět vždy kladný.

(K3) Pro libovolné neslučitelné jevy A, B platí: $P(A \vee B) = P(A) + P(B)$.

Označme $P(A) = p$, $P(B) = q$, $P(A \vee B) = r$. Kdyby bylo $r \neq p + q$, pak by sázející mohl vsadit pS na A, qS na B a $(1-r)S$ na $\neg A \wedge \neg B$. Jevy A, B jsou navzájem neslučitelné; vždy proto nastane právě jeden z následujících případů, pro které se zároveň snadno nalezne zisk sázejícího:

$$\begin{aligned} Z(A \wedge \neg B) &= (1-p)S - qS - (1-r)S = (r-p-q)S, \\ Z(\neg A \wedge B) &= -pS + (1-q)S - (1-r)S = (r-p-q)S, \\ Z(\neg A \wedge \neg B) &= -pS - qS + rS = (r-p-q)S. \end{aligned}$$

Pro $p+q<r$ by sázející volbou $S>0$ docílil za každé situace kladného zisku, pro $p+q>r$ by téhož docílil volbou libovolného $S<0$. Proto musí být $p+q=r$.

Poslední podmínku lze snadno zobecnit na libovolný konečný počet jevů. Přímo lze rovněž odvodit:

(K3') Pro libovolný konečný počet jevů $A_1, A_2, \ldots, A_n$, které mají tu vlastnost, že vždy nastane právě jeden z nich, platí: $P(A_1)+P(A_2)+\cdots+P(A_n)=1$.

Označme $P(A_i)=p_i$ a uvažujme sázky p_1S, p_2S, …, p_nS po řadě na jevy A_1, A_2, …, A_n. Zisk sázejícího bude vždy roven $Z=(1-p_1-p_2-\cdots-p_n)S$. Kdyby platilo $p_1+p_2+\cdots+p_n<1$, resp. $p_1+p_2+\cdots+p_n>1$, dosáhl by sázející volbou $S>0$, resp. $S<0$, bez ohledu na výsledek kladného zisku.

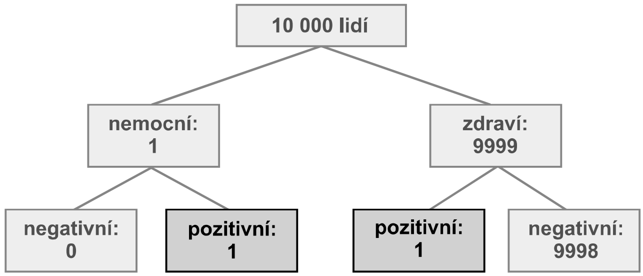
Princip sázek je tedy z didaktického hlediska zajímavý také proto, že umožňuje ukázat žákům a studentům, že základní vlastnosti pravděpodobnosti nespadly odnikud shůry, ale jednoduše plynou z požadavku, aby navrhovatel sázek předešel jisté ztrátě.

1.1.3 Četnostní pojetí pravděpodobnosti

Řadu problémů, v nichž hrají roli podmíněné pravděpodobnosti, lze až překvapivě snadno vyřešit způsobem inspirovaným četnostní interpretací (viz část 1.3.4), spočívajícím v jednoduchém porovnávání absolutních četností v určité populaci. Ilustrujme tento přístup, jehož uplatnění ve výuce prosazuje například G. Gigerenzer v knize [119], následujícím příkladem.

Před nástupem do nového zaměstnání musel David podstoupit preventivní prohlídku, jejíž součástí byl test na HIV. Podle údajů výrobce test odhalí přítomnost viru u nemocné osoby s pravděpodobností 99,90 % a s pravděpodobností 99,99 % dá negativní výsledek u osoby zdravé. Po vyhodnocení lékař Davidovi sdělil, že mu test vyšel pozitivní a že musí znovu na odběr krve, aby se výsledek ověřil. Předpokládejme, že se David z hlediska rizika nákazy považuje za průměrného Čecha a že v České republice je virem HIV infikováno přibližně 0,01 % obyvatel (tzv. *prevalence*). Jaká je po prvním testu pravděpodobnost, že je David skutečně nakažen?

Pravděpodobnost, že bude mít David pozitivní test, je-li zdráv, je velmi nízká: $P(\textit{pozitivní test} \,|\, \textit{zdravý}) = 0,01$ %. Jakmile však test pozitivní vyjde, pak pravděpodobnost $P(\textit{nemocný} \,|\, \textit{pozitivní test})$, že je skutečně infikován, není tak vysoká, jak by se možná na první pohled mohlo zdát. Její hodnotu zjistíme nejsnáze pomocí absolutních četností: uvažujme například 10 000 Čechů; podle zadání mezi nimi bude v průměru 1 infikovaný, jemuž vyjde téměř jistě pozitivní výsledek, a 9999 zdravých, z nichž průměrně jednomu vyjde test „falešně pozitivní“ – viz obr. 1.2.



Obr. 1.2

Tab. 1.3 Prevalence $0,01$ %

	HIV	zdraví	celkem
pozitivní	**1**	**1**	2
negativní	0	9998	9998
celkem	1	9999	10 000

Pozitivní výsledek tedy vyjde průměrně dvěma osobám, jedné zdravé a jedné infikované. Pravděpodobnost, že je David nakažený, vyšel-li mu pozitivní test, je proto rovna $1/2$. Stejný výsledek plyne také z tab. 1.3.

Tab. 1.4 Prevalence $0,001$ %

	HIV	zdraví	celkem
pozitivní	**1**	**10**	11
negativní	0	99 989	99 989
celkem	1	99 999	100 000

Kdyby byla pravděpodobnost nákazy například jen $0,001$ % (byl vždy velmi opatrný ve vztazích, nikdy neužíval injekčně drogy, nedostal krevní transfúzi atd.), pak by byly jeho šance, že je ve skutečnosti zdravý, ještě vyšší:

$$P(HIV \,|\, poz.) = \frac{1}{1+10} \doteq 0,09.$$

Tab. 1.5 Prevalence 1 %

	HIV	zdraví	celkem
pozitivní	**999**	**10**	1009
negativní	1	98 990	98 991
celkem	1000	99 000	100 000

Pokud by však patřil do rizikové skupiny s prevalencí přibližně 1 %, byly by jeho vyhlídky velmi nepříznivé:

$$P(HIV \,|\, poz.) = \frac{999}{999+10} \doteq 0,99.$$

Uvedené vztahy zřejmě odpovídají Bayesovu vzorci (1.28) (viz str. 49):

$$P(HIV \,|\, poz.) = \frac{P(poz. \,|\, HIV) \cdot P(HIV)}{P(poz. \,|\, HIV) \cdot P(HIV) + P(poz. \,|\, zdrav\acute{y}) \cdot P(zdrav\acute{y})}\,.$$

Naznačený způsob řešení, založený na přímém porovnávání četností, je však pro úlohy tohoto typu podstatně jednodušší a snadno pochopitelný i pro žáky základních škol.

1.1.4 Motivace pravděpodobnosti ve středoškolských učebnicích matematiky z 19. století

Vraťme se nyní k části 1.1.2. Sázky jako nástroj pro motivaci výuky pravděpodobnosti můžeme nalézt již v učebnicích matematiky z 19. století. Vděčným tématem byla zejména tzv. *janovská* nebo *malá loterie*, v níž se losovalo 5 čísel z 90 a hráči mohli uzavírat různé typy sázek, například na to, že zvolené číslo bude mezi vylosovanými, a to buď bez ohledu na pořadí (*extrato*), anebo na konkrétní pozici (*nominato*), dále mohli sázet na shodu dvou (*ambo*) nebo tří čísel (*terno*), popř. kombinaci těchto případů. Výši vsazené částky si hráči určovali sami v rámci stanovených mezí, výhra pak byla vyplácena v kurzu, který byl pro každý typ sázky pevně daný (viz tab. 1.6 a 1.7). Připomeňme, že loterie tohoto typu má kořeny v italském Janově na počátku 17. století,[1] v rakouské monarchii fungovala od roku 1752. V širších vrstvách byla tato loterie velmi oblíbená, zároveň však byla pro negativní sociální důsledky předmětem ostré kritiky. I přesto, že zisk zpravidla plynul do státního rozpočtu, byly loterie v řadě zemí postupně rušeny – v Prusku v roce 1810, v Anglii v roce 1826, ve Francii v roce 1838 a v Bavorsku v roce 1862. V českých zemích loterie fungovala do roku 1919, kdy ji nahradila tzv. *třídní loterie*.

Skutečnosti, že pojmy používané v janovské loterii byly v té době všeobecně velmi dobře známé, využívali při výkladu kombinatoriky a pravděpodobnosti mnozí autoři učebnic matematiky. Kombinace první až páté třídy bez opakování byly nazývány *extrata*, *amba*, *terna*, *kvaterna* a *kvinterna* a obvyklou otázkou bylo, kolik amb, ..., kvinteren lze sestavit z 90 čísel malé loterie.

Eduard Heis: *Sammlung von Beispielen und Aufgaben ...*

Uvedenou úlohu lze nalézt například ve sbírce *Sammlung von Beispielen und Aufgaben aus der allgemeinen Arithmetik und Algebra. Für Gymnasien, Realschulen, höhere Bürgerschulen und Gewerbschulen in systematischer Folge bearbeitet*[2] [140] německého matematika a astronoma Eduarda Heise (1806–1877),[3] která vyšla poprvé v roce 1837 a včetně překladů do cizích jazyků dosáhla více než 100 vydání; tato kniha byla velmi dlouho používána i na školách v rakouské

[1]Od roku 1576 zde byli každé dva roky losováni dva muži ze 120, kteří se pak stali novými senátory. Postupem času lidé začali sázet na jména vylosovaných a podle toho, zda uhodli jednoho nebo oba vybrané (ambo), získali určitou výhru. Později byl počet losovaných rozšířen na pět; nahrazením jmen čísly pak vznikla číselná loterie, kde bylo losováno 5 čísel ze 120; první prokazatelně povolená loterie „5 ze 120“ začala být provozována v roce 1643 a v průběhu druhé poloviny 17. století se rozšířila do dalších italských měst: Milána, Říma, Turína a Neapole. V Neapoli se pak místo 120 poprvé objevilo číslo 90, a to v souvislosti s hrou, v níž bylo losováno 5 dívek z 90, které pak dostaly svatební výbavu. V 18. století se číselné loterie jako výhodný zdroj příjmu do státní pokladny rozšířily i do dalších zemí. O rané historii loterií se lze dočíst v knize [25] německého advokáta Johanna Heinricha Bendera (1797–1859), z pozdější doby je kniha [16], editovaná Güntherem G. Bauerem; matematický rozbor a další historické poznámky lze nalézt také v pojednání [259] Augustina Pánka.

[2]*Sbírka příkladů a úloh z obecné aritmetiky a algebry. Systematicky zpracováno pro gymnázia, reálky, vyšší měšťanské školy a školy průmyslové.*

[3]Eduard Heis vyučoval do roku 1837 matematiku a přírodní vědy na reálce v Kolíně nad Rýnem, kde také vyšla citovaná sbírka úloh. V letech 1837–1852 působil na reálce v Cáchách, zbytek života potom strávil jako profesor matematiky a astronomie na univerzitě v Münsteru.

monarchii. Mezi 19 neřešenými úlohami souvisejícími s pravděpodobností zde nalezneme následující zadání:

Obvyklá číselná loterie obsahuje 90 čísel, pokaždé je vytaženo 5 z nich. Jaká je pravděpodobnost, že všechna čísla vyjdou, vsadíme-li 1, 2, 3, 4 nebo 5 čísel? Kolik procent činí zisk loterie ve Francii,[4] *jestliže se za jediné číslo (extrato), které vyjde, vyplácí 17násobek, za ambo 270násobek, za terno 5500násobek a za kvaterno 60 000násobek?* ([140], str. 311–312)

Řešení úlohy vyžaduje jen elementární základy kombinatoriky. Vsadíme-li jedno číslo, potom existuje $\binom{89}{4}$ příznivých případů – kromě našeho čísla mohou být vylosována libovolná čtyři ze zbývajících 89. Všech možných případů, tedy všech pětic čísel, je $\binom{90}{5}$. Pravděpodobnost výhry je proto rovna $p_1 = \binom{89}{4}/\binom{90}{5} = 1/18$. Podobně pravděpodobnost, že uhodneme dvě vsazená čísla, je rovna $p_2 = \binom{88}{3}/\binom{90}{5} = 2/801$. Označíme-li obecně počet vsazených čísel symbolem s, pak pravděpodobnost, že všechna vsazená čísla vyjdou, je pro $s \leq 5$ rovna $p_s = \binom{90-s}{5-s}/\binom{90}{5}$. Pravděpodobnosti výhry pro jednotlivé typy sázek jsou uvedeny v druhém sloupci tabulky 1.6.

Tab. 1.6 Francouzská číselná loterie

výsledek	pravděpodobnost	vypsaný kurz	střední hodnota výhry za 1 zl.	střední hodnota zisku loterie
extrato	1/18	17	0,944	5,6 %
ambo	1/400,5	270	0,674	32,6 %
terno	1/11 748	5 500	0,468	53,2 %
kvaterno	1/511 038	60 000	0,117	88,3 %

Hodnota výhry v případě úspěchu je při sázce 1 zlatý přímo rovna vypsanému kurzu; vynásobíme-li ji příslušnou pravděpodobností, získáme střední hodnotu výhry. Zisk provozovatele loterie je potom roven doplňku do jedné.

Dále Heis uvádí ještě jednu obecnější úlohu, na jejíž řešení se podíváme později – viz (1.5) na str. 26:

Loterie obsahuje n čísel, při každém tahu je vylosováno r z nich. Jistá osoba vsadila a čísel. Jak velká je pravděpodobnost, že všechna tato čísla vyjdou? ([140], str. 311–312)

Christian Doppler: *Arithmetik und Algebra*

Motivační úlohu týkající se číselné loterie lze nalézt také v učebnici aritmetiky a algebry [79], kterou v roce 1844 vydal Christian Doppler (1803–1853), v té době profesor pražské polytechniky.[5] Kniha byla sice určena studentům vysoké školy, její obsah však odpovídá osnovám pozdějších vyšších reálek.

[4] Připomeňme, že sbírka vyšla v tehdejším Prusku, kde byla číselná loterie již zakázaná.

[5] Christian Doppler vystudoval polytechniku a později také univerzitu ve Vídni. Po absolutoriu v roce 1829 získal na vídeňské polytechnice čtyřletou smlouvu na místo asistenta

V jedné z řešených úloh Doppler počítá pravděpodobnost výhry v rakouské číselné loterii pro různé typy sázek; pak už ale jen uvádí násobky, které jsou v jednotlivých případech vypláceny, a bez bližších podrobností poznamenává, že všechny výhry, náklady a zisky je třeba uvažovat s přihlédnutím k příslušným pravděpodobnostem.

Dodejme, že pravděpodobnost je v učebnici [79] vyložena v návaznosti na kombinatoriku a je jí věnováno 9 stran; převážně se přitom jedná o řešené úlohy. Pojem pravděpodobnosti je zde zaveden obvyklým způsobem jako podíl počtu příznivých a všech stejně možných případů. Doppler ukazuje, že součet pravděpodobností dvou navzájem opačných jevů je roven jedné, a stejný vztah pak odvozuje i pro libovolný konečný počet jevů, které mají tu vlastnost, že vždy nastane právě jeden z nich. Pravděpodobnost, že nastane několik daných navzájem nezávislých jevů současně, Doppler nazývá *složenou* (*zusammengesetzte Wahrscheinlichkeit*); pro dva jevy pak ukazuje, že složená pravděpodobnost je rovna součinu *jednoduchých* (*einfache*) pravděpodobností příslušných jevů. Je-li při výpočtu pravděpodobnosti počet všech případů n omezen na počet případů, které jsou příznivé jednomu ze dvou daných navzájem neslučitelných jevů A, B, hovoří Doppler o pravděpodobnosti *relativní* (*relative Wahrscheinlichkeit*) a ukazuje, že pro pravděpodobnost, že *nastane spíše A než B*, platí:

$$W = \frac{a}{a+b} = \frac{\frac{a}{n}}{\frac{a}{n} + \frac{b}{n}} = \frac{p}{p+q}\,, \tag{1.4}$$

kde a, resp. b, značí počet případů příznivých jevu A, resp. B, a p, q jsou *absolutní* (*absolute*) pravděpodobnosti těchto jevů (dnes bychom hovořili o podmíněné pravděpodobnosti $P(A|A \cup B)$ – viz např. str. 18).

Konečně Doppler rozlišuje pravděpodobnost *a priori*, kdy je počet příznivých a všech případů předem znám,[6] a pravděpodobnost *a posteriori*, kdy tyto počty známy nejsou a k nalezení pravděpodobnosti je nutný nějaký pokus či pozorování. V této souvislosti Doppler hovoří o experimentálním určení pravděpodobnosti jako relativní četnosti při větším počtu opakování daného pokusu a zdůrazňuje význam tohoto přístupu pro přírodní vědy. Zájemce o hlubší studium pak odkazuje na Laplaceovy spisy [208] a [209].

---

u profesora Adama Burga (1797–1882). Po uplynutí této doby se dva roky snažil nalézt odpovídající uplatnění, až mu bylo nabídnuto alespoň místo profesora na pražské stavovské reálce. V roce 1841 se stal řádným profesorem pražské polytechniky, kde absolventi stavovské reálky pokračovali ve svém vzdělávání. V roce 1847 získal místo profesora na Banské a lesnické akademii v Banské Štiavnici a byl zde také jmenován důlním radou. Po revoluci, začátkem roku 1849, se Doppler vrátil do Vídně. Krátce přednášel na polytechnice, v roce 1850 pak byl jmenován ředitelem nově zřízeného Fyzikálního institutu na vídeňské univerzitě. Zemřel v roce 1853 v Benátkách, kam odjel s podlomeným zdravím v naději na zotavení. Podrobné informace o životě a díle Ch. Dopplera poskytují publikace I. Štolla: *Život a dílo badatele Dopplera*, PMFA 38 (1993), str. 260–269; *Dopplerovský rok*, PMFA 49 (2004), str. 89–94; *Christian Doppler. Pegas pod jařmem*, Prometheus, Praha, 2003.

[6] Toto označení se liší od dnešního pojetí; tehdy však bylo používáno často a jak uvidíme, objevilo se i v dalších učebnicích z 19. století.

Po roce 1849

Nyní se zastavme u učebnic psaných v českém jazyce[7] a podívejme se na několik příkladů, které přinášejí zajímavou inspiraci i pro vyučování v dnešní době. Nejprve však připomeňme, že po tzv. Exner-Bonitzově reformě z roku 1849 se pravděpodobnost objevila v osnovách pro vyšší reálky: v závěrečném třetím ročníku byla v rámci algebry předepsána *kombinatorika s užitím na binomickou a polynomickou poučku a na základy počtu pravděpodobnosti*;[8] v osnovách pro gymnázia byla v té době uvedena jen *kombinatorika a binomická poučka*.[9] Osnovami byly do velké míry vázány oficiální učebnice matematiky. Například Šimerkova *Algebra čili počtářství obecné pro vyšší gymnasia* [Š5] tak končí kombinatorikou, první česky psanou učebnicí obsahující výklad základů pravděpodobnosti je až Smolíkova *Algebra pro střední školy* [348], určená studentům vyšších středních škol všech typů, o níž se ještě zmíníme podrobněji.

Je však třeba poznamenat, že pravděpodobnost se na gymnáziích krátce objevila ve výuce *filosofické propedeutiky*. V části 2.2.4 uvidíme, že Robert Zimmermann (1824–1898), žák Bernarda Bolzana (1781–1848) a autor první oficiální učebnice pro tento předmět,[10] pojal v prvním vydání [401] z roku 1853 část věnovanou logice do značné míry jako didakticky upravený výtah z Bolzanova spisu *Wissenschaftslehre* [B10], a to včetně odstavců, v nichž je zaveden pojem pravděpodobnosti jako nástroj pro rozšíření deduktivní logiky. V roce 1858 vyšel nezměněný dotisk učebnice, potom však Zimmermann svou knihu zásadně přepracoval; speciálně o pravděpodobnosti v matematickém slova smyslu se v novém vydání [402] z roku 1860 již nehovoří.

Richard Baltzer – Martin Pokorný: *Základové mathematiky*

Vraťme se nyní k učebnicím matematiky. Na počátku 60. let 19. století vyšla dvoudílná kniha *Die Elemente der Mathematik* ([7] a [8]) německého matematika Richarda Baltzera (1818–1887),[11] která byla záhy přeložena do několika

[7]Na středních a vysokých školách byla výuka v českém jazyce povolena v roce 1848. K výraznějšímu rozvoji českého školství začalo docházet v 60. letech 19. století, kdy také vznikly první kvalitní učebnice matematiky.

[8]Viz [404], str. 247. Při reformě byly zavedeny šestileté reálky, rozdělené do dvou stupňů; student, který absolvoval první tři ročníky nižší reálky, mohl své vzdělání zakončit čtvrtým praktickým ročníkem, anebo mohl přímo pokračovat ve studiu na tříleté vyšší reálce, která byla přípravou pro vysoké školy technického zaměření. Vedle toho však reforma pamatovala i na dosavadní nižší reálky či měšťanské školy, které byly spojeny s obecnou školou místo jejího čtvrtého ročníku; ty mohly být dvouleté nebo tříleté a studenti na nich měli absolvovat jeden nebo dva teoretické a jeden prakticky orientovaný ročník.

[9]Gymnázia byla po reformě rozšířena z šestiletých na osmiletá; kombinatorika byla uvedena v osnovách pro 7. ročník. V 8. ročníku se matematika již nevyučovala, v rámci nového předmětu *filosofická propedeutika* se zde však vedle *empirické psychologie* měla probírat také *formální logika*. Po úpravě studijních plánů z roku 1855 byla do oktávy zařazena jedna hodina matematiky, věnovaná řešení matematických problémů a celkovému opakování, a filosofická propedeutika byla rozšířena do dvou ročníků – viz [404], str. 35–38 a přílohu o úpravách z roku 1855. Podrobnosti o školských reformách a o osnovách na různých typech škol v různých dobách lze nalézt v monografii [239] J. Mikulčáka. O českých učebnicích matematiky pojednává K. Vorovka v práci [V9], z pozdější doby zde uveďme knihu [23] M. Bečvářové.

[10]Učebnice byla schválena k používání ve výuce v roce 1854; první díl [400] byl věnován psychologii a vyšel v roce 1852, druhý díl [401] byl věnován logice a vyšel o rok později.

[11]Richard Baltzer působil do roku 1868 jako středoškolský profesor na Kreuzschule v Dráž-

světových jazyků, získala si oblibu v řadě zemí a stala se inspirací pro mnohé autory středoškolských učebnic. Český překlad prvního dílu, který pořídil Martin Pokorný (1836–1900),[12] vyšel v roce 1874 pod názvem *Dra Richarda Baltzera Základové mathematiky. Díl Prvý. Prostá arithmetika, obecná arithmetika, algebra* [286]. Pokorný vycházel ze čtvrtého opraveného vydání z roku 1872; část týkající se pravděpodobnosti, která nás v tuto chvíli zajímá především, však zůstala až na několik drobností stejná jako ve vydání prvním z roku 1860.

Baltzer zařadil základy teorie pravděpodobnosti do kapitoly *Obecná arithmetika*, a to jako samostatný paragraf navazující na výklad kombinatoriky, teorie determinantů, polynomů a figurálních čísel (viz [286], str. 145–151). Pojem pravděpodobnosti je zde zaveden ve smyslu klasické definice:

Je-li v okolnostech určitých z n případů A, B, C, ... jeden tak možný jako druhý, ale může-li nastati skutečně jen jeden, buď A, buď B, nebo C, ..., mají jednotlivé ty případy stejnou (pravdě-)podobnost (probabilitas), jíž ubývá, když počtu n případů možných přibývá. Položíme-li podobnost případu A při n možných případech $= 1 : n$, jest podobnost, že z obou případů A a B nastane jeden, $= 2 : n$, atd.[13] *Vůbec jest podobnost nějakého případu poměrem počtu příznivých případů (chance), jimiž se vyhoví očekávání, k počtu případů možných. Případ jest*

nemožný, je-li jeho podobnost $= 0$;
nepodobný, je-li jeho podobnost $< \frac{1}{2}$;
nejistý, je-li jeho podobnost $= \frac{1}{2}$;
podobný, je-li jeho podobnost $> \frac{1}{2}$;
jistý, je-li jeho podobnost $= 1$. ([286], str. 145)

Po několika řešených příkladech týkajících se mj. hodů kostkou nebo číselné loterie Baltzer uvažuje libovolný konečný počet jevů E, F, $G, \ldots$, jejichž pravděpodobnosti jsou po řadě $p = m_1/n$, $q = m_2/n$, $r = m_3/n$, ... (n značí počet všech možných případů, m_i počet případů, kdy nastane daný jev) a které mají tu vlastnost, že vždy může nastat nejvýše jeden z nich. Ukazuje, že pravděpodobnost, že nastane některý z těchto případů, je součtem jednotlivých pravděpodobností,

$$\frac{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots}{n} = p + q + r + \cdots ,$$

a zavádí pojem *vzájemné* či *relativní pravděpodobnosti* případu E vzhledem k případům E, F, $G, \ldots$ ve smyslu podmíněné pravděpodobnosti jako podíl

---

ďanech, potom byl jmenován řádným profesorem matematiky na univerzitě v Gießenu, kde zůstal až do konce života.

[12] Po krátkém působení na novoměstském německém gymnáziu v Praze, kde od roku 1861 vyučoval jako suplent matematiku a český jazyk, byl Martin Pokorný v roce 1865 jmenován profesorem matematiky a fyziky na reálném gymnáziu na Malé Straně v Praze. Zde pak působil až do odchodu na odpočinek v roce 1895; v roce 1875 byl jmenován ředitelem školy. Kromě toho byl matematikem Vzájemně pojišťovací banky Slávie a dlouholetým členem a od roku 1878 až do své smrti také předsedou Jednoty českých mathematiků. Podrobnější informace o této osobnosti lze nalézt v článku A. Pánka: *O životě a činnosti Martina Pokorného*, ČPMF 30 (1901), str. 81–100.

[13] V německé verzi je v nadpisu i všude v textu použit obvyklý výraz *Wahrscheinlichkeit.*

$$\frac{m_1}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{p}{p + q + r + \cdots}.$$

Potom ukazuje, že jsou-li speciálně jevy E, F, $G, \ldots$ *protivné* či *kontrarní* (vždy nastane právě jeden z nich), je součet jejich pravděpodobností roven jedné a vzájemná pravděpodobnost jednoho z nich je shodná s jeho *prostou* pravděpodobností.

Na příkladu sázek pak zavádí pojem *naděje* jako součin hodnoty výhry a její pravděpodobnosti. Pro lepší pochopení přitom podává následující objasnění:

Mají-li případy E, F, $G, \ldots$ podobnosti p, q, $r, \ldots$ a jsou-li protivny, tak že $p + q + r + \cdots = 1$, a má-li dle úmluvy nastoupení případů E, F, $G, \ldots$ za následek, že osoby A, B, $C, \ldots$ obdrží výhru S, náležejí před rozhodnutím jednotlivým osobám částky pS, qS, $rS, \ldots$. Je-li totiž vůbec n možných případů a toliktéž osob, z nichž 1ní, 2há, 3tí, …, obdrží výhru S, jak nastane případ 1ní, 2hý, 3tí, …, pak mají všecky osoby stejné právo k S, pročež náleží před rozhodnutím každé osobě $\frac{S}{n}$. Je-li ale z n případů m takových, kde nastane E, slučuje v sobě osoba A práva m oněch osob, t. j. jí náleží před rozhodnutím $\frac{m}{n}S$, či pS. Atd. Vskutku jest $pS + qS + rS + \cdots = (p + q + r + \cdots)S = S$. [...]

Má-li výhra S [...] *uhraditi se příspěvky účastníků, musí příspěvky býti pS, qS, $rS, \ldots$, t. j. rovnati se jejich nadějím.*

Baltzer pak končí ponaučením:

Sázka a výhra hráčova mají se k sobě míti, jako podobnosti, že vyhraje neb prohraje. Loterie a herny nabízejí však obyčejně hráčům výhru, jež nedosahuje výše příslušné k sázce; počítáť se na chuť obecenstva ve výhru bez vlastní práce.

([286], str. 151)

Dodejme, že kniha [286] nebyla oficiální učebnicí, mezi profesory středních škol i učitelských ústavů se však těšila velké oblibě, a to především pro svou přesnost, jasnost, velké množství historických poznámek i celkové pojetí, poskytující nadstavbu nad povinně vyučovanými tématy – zajímavé je například zmíněné zařazení teorie determinantů.[14] Již v roce 1872, kdy Pokorný teprve začal pracovat na českém překladu, vyzdvihl kvalitu předlohy [7] František Josef Studnička (1836–1903), který v recenzi otištěné v Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky zdůraznil, že by si kniha zasloužila, aby byla základem matematického vyučování na všech středních školách, i když by to vyžadovalo změnu studijních plánů.[15] Po dokončení překladu pak kromě jiného napsal:

Poukazujíc k tomu, co o spisu tomto již l. r. bylo řečeno, odporučujeme jej opětně všem profesorům mathematiky na středních školách našich, aby si ho dopodrobna prohlédli a možná-li vůbec, podlé něho jednotlivé části neb i celou algebru přednášeti se pokusili; mámeť pevně za to, že čím dále tím více obliby v něm budou míti a že se zajisté tu i tam pokusí, aby jej co učební knihu na svůj ústav zavedli. Mimo to pak zvláště upozorňujeme na spis tento ředitelstva

[14] Druhý díl [8], který do češtiny přeložen nebyl, obsahoval mimo jiné základy hyperbolické geometrie (počínaje druhým vydáním z roku 1867).

[15] *Věstník literární*, ČPMF 1 (1872), str. 215.

pedagogických ústavů našich, jsouce přesvědčeni, že pro kandidáty učitelství není přiměřenější učební knihy nad tuto, pováží-li se zároveň, že se tu přednáší posluchačům zralejšího úsudku a vážnější snahy; má-li učitel řádně učiti, musí se mu především dostati řádných, přesných výkladů o všech věcech [...].[16]

Baltzerova kniha obsahovala vedle výkladu pouze řešené příklady, k jednotlivým paragrafům pak byly doplněny odkazy na výše zmíněnou Heisovu sbírku úloh [140].[17] Do českého jazyka tato sbírka přeložena nebyla, její německé vydání však bylo i na českých školách velmi rozšířené. Až do roku 1876, kdy vyšla *Sbírka úloh z algebry pro vyšší třídy středních škol* [149] od Františka Hromádka a Aloise Strnada, obdobná sbírka v českém jazyce chyběla, a tak byly i v české verzi ponechány původní odkazy na Heisovy úlohy v knize [140].

Josef Smolík: *Algebra pro střední školy*

V roce 1869 byla ministerstvem kultu a vyučování jako řádná středoškolská učebnice schválena *Algebra pro střední školy* [348] Josefa Smolíka (1832–1915), profesora na vyšší reálce v Pardubicích;[18] kniha vyšla tiskem v následujícím roce. Pravděpodobnosti je zde věnováno 9 stran. Výklad probíhá podobně jako v Baltzerově knize [7], úlohy jsou však pozměněny a je doplněna řada dalších řešených i neřešených příkladů. Smolík například dodává úlohu týkající se pravděpodobnosti dožití jedné nebo více osob, podrobněji také rozebírá tzv. *malou loterii*, o níž jsme hovořili dříve (viz str. 19).

V neřešených úlohách zařazených do kombinatoriky (*skladny*) se Smolík nejprve ptá, kolik amb, ..., kvinteren lze sestavit z 90 čísel malé loterie, anebo jaká je celková výše sázky hráče, který si vybere 10 čísel z 90 a vsadí na každé ambo, které z nich lze sestavit, a krejcarů či zlatých, na každé terno b, na každé kvaterno c a na každé kvinterno d krejcarů či zlatých.[19] V části věnované pravděpodobnosti pak řeší úlohu:

V malé loterii vytáhne se z 90ti čísel 5. Sadí-li kdosi 12 čísel a sice všechna extrata, amba, terna atd., které z těchto sestaviti lze, jak veliká jest podobnost, že vyhraje nejvýše 1 extrato, 1 ambo atd.?[20] ([348], str. 279)

---

[16] *Věstník literární*, ČPMF 2 (1873), str. 248.

[17] Již bylo zmíněno, že úlohy týkající se počtu pravděpodobnosti jsou v obsaženy hned v prvním vydání sbírky; ve vydání osmnáctém z roku 1867 v nich došlo jen k menším změnám a bylo přidáno několik příkladů navíc.

[18] Smolík byl profesorem matematiky a fyziky, vyučoval však také český a francouzský jazyk. Kromě matematiky a její historie se zabýval rovněž astronomií, archeologií, obecnou historií, numismatikou a popularizací přírodních věd. V Pardubicích působil do roku 1871, kdy byl jmenován profesorem na reálném gymnáziu na Malé Straně v Praze; o rok později se pak stal profesorem na Československé obchodní akademii v Praze, kde vyučoval až do roku 1893. Životu a dílu této osobnosti je věnována monografie [22] M. Bečvářové.

[19] Podle pravidel byl například hráči, který vsadil dvě čísla na ambo a tato čísla byla vylosována, vyplacen 240násobek sázky. Kdyby chtěl, aby mu byl stejný násobek vyplacen i v případě, že by vsadil tři čísla a vyšla by jen dvě z nich, musel by vsadit na všechny tři dvojice, které lze ze vsazených čísel vytvořit. Kdyby chtěl výhru i v případě, že vyjde jen jedno ze vsazených čísel, musel by navíc vsadit i tři extrata. Uvedená úloha tedy dává odpověď na otázku, jakou celkovou částku musí vsadit hráč na zvolených 10 čísel, aby v případě shody právě dvou čísel vyhrál $240a$, při shodě tří čísel $4800b$, pro čtyři $19\,200c$ a pro pět $48\,000d$.

[20] Podobnou úlohu, ale jen pro terno, řešil ve své učebnici již Baltzer. Následující zobecnění se objevuje až ve Smolíkově učebnici.

Poté Smolík uvažuje obecněji loterii, v níž se losuje k z celkových n čísel, a uvádí následující pravděpodobnosti p_i, že hráč, který vsadí s čísel, uhodne právě i z čísel vylosovaných:

$$p_1 = \frac{\binom{s}{1}\cdot\binom{n-s}{k-1}}{\binom{n}{k}}, \quad p_2 = \frac{\binom{s}{2}\cdot\binom{n-s}{k-2}}{\binom{n}{k}}, \quad p_3 = \frac{\binom{s}{3}\cdot\binom{n-s}{k-3}}{\binom{n}{k}}, \ \ldots,$$

$$p_k = \frac{\binom{s}{k}}{\binom{n}{k}}, \text{ je-li } s > k, \qquad p_s = \frac{\binom{n-s}{k-s}}{\binom{n}{k}}, \text{ je-li } s < k. \tag{1.5}$$

Později zavádí pojmy *vztažité pravděpodobnosti* a *mathematické naděje* ve smyslu Baltzerovy *vzájemné pravděpodobnosti* a *naděje*, tj. ve smyslu dnešní podmíněné pravděpodobnosti a střední hodnoty výhry. Vysvětluje, že ve spravedlivé hře by se vsazená částka měla rovnat *mathematické naději*, neboli za každý vsazený zlatý by měla být v případě úspěchu vyplacena výhra rovnající se převrácené hodnotě její pravděpodobnosti; k tomu dodává:

Tohoto pravidla se však nešetří, poněvadž se nepochybně počítá na chuť hráčů, kteří bez práce a namáhání chtějí sbohatnouti. ([348], str. 286)

Pro srovnání pak uvádí, kolik by mělo být vypláceno v malé loterii, kdyby měla výhra odpovídat naději, a kolik je vypláceno ve skutečnosti; výsledky jsou shrnuty v tabulce 1.7, v níž jsou navíc podle Pánkova článku [259] doplněny údaje o kurzu, který byl v té době používán v Itálii.

Tab. 1.7 Pravděpodobnosti a vyplácené výhry v tzv. malé loterii

výsledek	pravděpodobnost výsledku: p	spravedlivý kurz: $1/p$	kurz v Rakousku	kurz v Itálii
extrato	$1/18$	18	14	15
nominato	$1/90$	90	67	70
ambo	$1/400,5$	400,5	240	270
terno	$1/11\,748$	11 748	4800	5500
kvaterno	$1/511\,038$	511 038	19 200	75 000
kvinterno	$1/43\,949\,268$	43 949 268	48 000	1 100 000

Pravděpodobnosti v druhém sloupci (s výjimkou výše zmíněného *nominata*) odpovídají vztahu (1.5) pro p_s, kde $s = 1, 2, 3, 4, 5$. Smolík v učebnici [348] skončil u *terna*, protože sázky přímo na *kvaterno* a *kvinterno* rakouská loterie neumožňovala; při shodě čtyř, resp. pěti čísel byla vyplácena čtyři terna, resp. deset teren. Z tabulky je zároveň patrné, proč byly v rakouské monarchii zakázány sázky v zahraničních loteriích.

František Josef Studnička: *Algebra pro vyšší třídy škol středních*

Poněkud odlišný výklad lze nalézt v učebnici algebry pro vyšší třídy středních škol [357], kterou v roce 1877 vydal František Josef Studnička (1836–1903).[21] Oddíl věnovaný pravděpodobnosti začíná vymezením pojmů *nutný* a *náhodný jev*:

Pokud s jednou příčinou spojen jest jenom jeden výsledek, víme tedy na jisto, že se vyskytne, jakmile příčina se uskuteční; zjev příslušný jest nutný. Kámen z ruky puštěný klesá nutně k zemi, poněvadž jiný případ není možný. Je-li však s jednou příčinou spojeno možných výsledků více, nevíme na jisto, který z nich se vyskytne, jakmile příčina ta se uskuteční; zjev příslušný jest náhodný. [...] *Chceme-li porovnávati možnosti rozličných výsledků z jedné hlavní příčiny plynoucích, musí tyto možnosti býti úplně stejné, tedy spojené se stejným namáháním fysickým a duševním; jakmile jsou nestejné, nepodléhají žádnému porovnání číselnému a nemohou býti předmětem mathematického vyšetřování.*

Pojem *mathematické pravděpodobnosti* pak Studnička zavádí jako *míru náhodnosti stejně možných zjevů*, přičemž *za měřítko béře se tu absolutní nebo prostá jednotka, ana znamená nutnost nebo jistotu, takže pak pravděpodobnost vyjadřuje se poměrnou částí této jednotky a nemožnost konečně symbolem nulla.* Potom připomíná:

A tu rozeznává se pravděpodobnost důvodná nebo deduktivní (a priori) a návodná neb induktivní (a posteriori); v případě prvním jest počet možných zjevů již z předu určen, kdežto v druhém se odvozuje ze zkušenosti. Pravděpodobnost, že vytáhne se na první tah ze hry karet král, jest deduktivní, jelikož tu naprosto určen počet karet a králů v nich obsažených; pravděpodobnost, že z tisíce tříletých dětí přežije rok jen 970, jest induktivní, na zkušenosti založená.

([357], str. 183–184)

Vyjádření pravděpodobnosti ve tvaru podílu počtu příznivých a všech možných případů není pro Studničku definicí, ale pravidlem, které odvozuje ze své „definice“ a ze skutečnosti, že pravděpodobnost jistého jevu je rovna jedné (přitom ale například mlčky předpokládá, že platí aditivita). Základní vlastnosti pravděpodobnosti, doplněné ilustračními příklady, jsou pak vyloženy podobně jako ve starších učebnicích. Je však zajímavé, že samostatný paragraf je nakonec

[21] František Josef Studnička působil v letech 1862–1864 jako suplující profesor na německém gymnáziu v Českých Budějovicích, potom dva roky jako prozatímní honorovaný docent na polytechnice v Praze, kde byl v roce 1866 jmenován řádným profesorem matematiky. V roce 1871 odešel jako řádný profesor matematiky na pražskou univerzitu; od jejího rozdělení v roce 1882 působil na univerzitě české. Kromě zmíněné středoškolské učebnice algebry [357] je Studnička autorem prvních českých vysokoškolských učebnic, a to jak pro studenty technických škol, tak i pro kandidáty učitelství. Jejich sepisování se věnoval od svého příchodu na pražskou polytechniku a řadu jich vydal vlastním nákladem. Tyto učebnice umožnily studium matematiky v českém jazyce a byly využívány až do počátku 20. století. Podrobnosti o Studničkově pedagogickém působení, o jeho popularizačních aktivitách a celkově o jeho díle a životních osudech lze nalézt v monografii [19] M. Bečvářové.

věnován *upotřebení pravděpodobnosti při řešení úloh z počtářství národohospodářského.* Sem Studnička řadí úlohy týkající se jednak loterií (včetně rakouské číselné loterie), her v karty, kostky apod., jednak různých typů životního pojištění, kde „sázejícím“ je osoba, která uzavírá pojištění, jež jí v případě dožití určitého věku přinese daný kapitál (vyplacený jednorázově nebo ve formě důchodu), anebo kterým zajistí vyplacení jistého obnosu pozůstalým v případě úmrtí. Ve všech případech se jedná o to, že si hráč (popř. pojistitel) kupuje za relativně nízkou sázku (pojistné) naději na vysoký zisk. Přitom je opět požadováno, aby se sázka rovnala součinu výhry a její pravděpodobnosti, tj. aby se ani jedné straně nedostalo neodůvodněného zisku. Připouští se však určitá přirážka pokrývající náklady na provoz – zejména v případě pojišťoven.

Studnička zde řeší například následující úlohu: Kolik zlatých musí do pojišťovny složit třicetiletý muž, aby mu v případě, že bude naživu, bylo po 20 letech vyplaceno 1000 zlatých? Pro řešení je třeba znát jednak údaj z úmrtnostních tabulek o tom, jaká část třicetiletých lidí se dožije 50 let (tehdy to bylo 581 ze 734), jednak úrok, jímž se bude úročit vklad (Studnička uvažuje úročitel $q = 1,05$, tedy pětiprocentní úrokovou míru, a složené úročení). Při nulovém zisku pojišťovny by muselo pro vklad S platit:[22]

$$q^{20} S = \frac{581}{734} \cdot 1000,$$

odkud pro $q = 1,05$ vyjde $S = 298$ zl. 33 kr.

V jiné úloze potom Studnička řeší, kolik zlatých musí a-letý člověk složit do pojišťovny, aby po dobu n let dostával na konci každého roku v zlatých, nezemře-li dříve. Celkový vklad V_a je v tomto případě součtem

$$V_a = \left(\frac{A_{a+1}}{A_a} \cdot \frac{v}{q} + \frac{A_{a+2}}{A_a} \cdot \frac{v}{q^2} + \cdots + \frac{A_{a+n}}{A_a} \cdot \frac{v}{q^n} \right) = \frac{v}{A_a} \sum_{k=1}^{n} A_{a+k} q^{-k} ,$$

kde A_i je počet osob ve věku i, uvedených v úmrtnostní tabulce, a q je úročitel.

Úpravy učebních plánů

Zařazením úloh týkajících se pojišťování Studnička vyhověl chystané úpravě učebního plánu úplných reálek, které byly v roce 1877 rozšířeny z šestiletých na sedmileté. Podle nového plánu [405], který byl uveřejněn v roce 1879, zůstala kombinatorika v šestém ročníku a do ročníku sedmého byly zařazeny *Základy nauky o pravděpodobnosti. Řešení některých úloh z oblasti životního pojišťování.*

O pět let později vyšel upravený učební plán pro gymnázia [406], který pro septimu uvádí pouze *kombinatoriku a její upotřebení* a pak již jen *binomickou poučku.* V připojených metodických instrukcích však nalezneme zmínku, že jako upotřebení kombinatoriky může být probírán počet pravděpodobnosti, a to v omezeném rozsahu, odpovídajícím většině tehdejších elementárních učebnic. Řešení nejjednodušších problémů životního pojišťování pak mohlo být zařazeno jen tehdy, když měli žáci k dispozici potřebné tabulky. Podobně tomu bylo i po

[22] Uvědomme si, že levá strana udává, na kolik zlatých by vzrostl vklad S za 20 let, kdybychom jej místo do pojišťovny vložili do banky, kde by byl úročen 5 procenty ročně; pravá strana udává „matematickou naději“ či střední hodnotu částky vyplacené po 20 letech.

úpravě osnov z roku 1899, kdy jsou v osnovách předepsány opět pouze *základy kombinatoriky* a *binomická poučka pro celé kladné exponenty* – viz [407].

Emanuel Taftl: *Algebra. Vyšším třídám středních škol českých*

Samostatnou podkapitolu věnovanou *úlohám národohospodářským* obsahuje také učebnice algebry pro vyšší třídy středních škol [366] Emanuela Taftla (1842–1920), jejíž první vydání vyšlo v roce 1883 a bylo schváleno ministerstvem kultu a vyučování k užívání na vyšších českých středních školách.[23]

Vlastní pojem pravděpodobnosti je v Taftlově učebnici zaveden ve smyslu klasické definice. Stejně jako Studnička, také Taftl dále rozlišuje pravděpodobnost *deduktivní* a *induktivní* a podává obvyklý výklad jejích základních vlastností. Zmíněná část věnovaná *národohospodářským úlohám* je pak ještě o něco podrobnější než ve Studničkově učebnici. Taftl uvádí pravděpodobnosti výhry a zisky provozovatele malé loterie a potom už se věnuje životnímu pojištění. Začíná sérií úloh týkajících se samotných úmrtnostních tabulek, v nichž například hledá pravděpodobnost, že osoba, jíž je nyní n let, bude naživu ještě po r letech, nebo že naopak během následujících r let zemře, popř. pravděpodobnost, že po r letech bude mezi živými, resp. zesnulými, dvojice osob. Potom se zabývá pojišťováním jistin, tj. otázkou, jaké pojistné S má zaplatit osoba, jíž je nyní n let, aby jí v případě, že bude naživu ještě po r letech, byla vyplacena částka K. Konečně posledním okruhem je pojišťování důchodů, kdy jistina K není vyplacena jednorázově, ale ve formě důchodu, vypláceného vždy na konci roku, a to buď doživotně, nebo po omezenou, pevně stanovenou dobu. Každá úloha je zformulována a řešena nejprve obecně, pak vždy následuje konkrétní příklad.

František Machovec: *Algebra pro vyšší třídy škol středních*

V roce 1886 vyšla učebnice algebry Františka Machovce (1855–1892), profesora na reálce v pražském Karlíně.[24] Kniha byla vydána zvlášť pro gymnázia a zvlášť pro reálky – viz [226] a [227].[25] Část věnovaná pravděpodobnosti je však v obou vydáních shodná. Pravděpodobnost je zde opět zavedena ve smyslu

[23] Emanuel Taftl působil v letech 1868–1871 jako profesor na gymnáziu v Hradci Králové, potom odešel do Klatov, kde vyučoval na gymnáziu do roku 1893, kdy se stal školním inspektorem pro Klatovy, Domažlice a Horšův Týn. Podrobnější informace lze nalézt v článku E. Kalisty: *Ph. Dr. Emanuel Taftl*, ČPMF 50 (1921), str. 321–323.

[24] František Machovec začal svou pedagogickou kariéru jako asistent na reálce v Kutné Hoře, od školního roku 1876/77 působil jako pomocný učitel na gymnáziu v Klatovech a o dva roky později přišel na reálku v Karlíně, kde v roce 1881 získal definitivu. Ve školním roce 1885/86 mu byla udělena dovolená a mohl navštěvovat přednášky na univerzitě ve Štrasburku, kde také dokončil dále zmíněnou učebnici algebry. Ve školním roce 1891/92 suploval přednášky profesora Františka Tilšera na české technice v Praze a měl pokračovat i roce následujícím, v říjnu roku 1892 však zemřel. Více viz např. článek L. Seiferta: *K stému výročí narození prof. Frant. Machovce*, Matematika ve škole 3 (1952–53), str. 619–621.

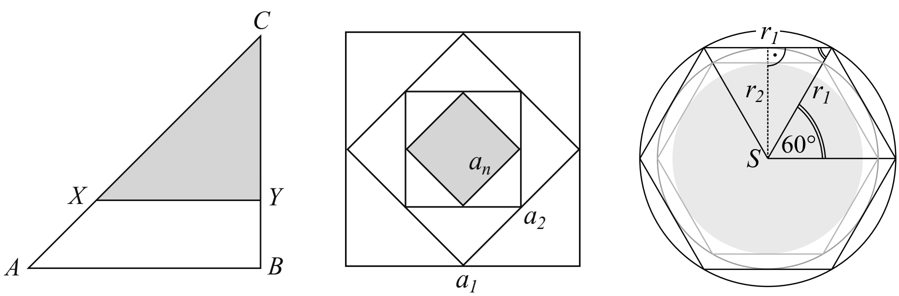
[25] Ministerstvo kultu a vyučování schválilo svým výnosem z roku 1887 až druhé vydání, které vyšlo v roce 1887, a to ještě jen vydání pro reálky. Karel Vorovka ve studii [V9] poznamenává, že tak ministerstvo učinilo až poté, co byla Machovcova kniha zásadně zkrácena z původních 423 na 298 stran. Toto zkrácení se částečně dotklo i pravděpodobnosti, kde byly mj. vypuštěny tři z deseti úloh týkajících se pojišťování.

klasické definice a kromě jejích základních vlastností jsou zde podrobně rozebrány různé hry včetně malé loterie, stejně jako úmrtnostní tabulky a problémy pojistné matematiky. Úlohám týkajícím se pojišťování přitom předchází samostatný paragraf *O sázce a výhře ve spravedlivé hře*, jehož výsledky jsou pak využity v dalším výkladu. Podobně jako autoři starších učebnic Machovec podrobně zdůvodňuje, proč *při spravedlivé hře musí býti mathematické naděje* [definované tehdy obvyklým způsobem jako součin hodnoty výhry a její pravděpodobnosti] *hrajících osob stejné*, a podobnou podmínku pak odvozuje i pro obecnější případ, kdy se uzavírá libovolný konečný počet sázek na jevy, z nichž může nastat vždy nejvýše jeden: *Při spravedlivé hře musí býti součty mathematických nadějí hrajících osob stejné.* Zmíněný *součet mathematických nadějí*, tedy dnešní střední hodnotu výhry, Machovec nazývá *pravděpodobnou výhrou.*

Následující paragraf je potom věnován úlohám souvisejícím s pojišťováním. Oproti Taftlově učebnici [366] sem Machovec zařazuje některé problémy navíc – kromě jiného případ, kdy je pojistné placeno ve formě pravidelných vkladů a po dosažení stanoveného věku je vyplacena jistina K, popř. je zahájeno vyplácení doživotního ročního důchodu. Při řešení vždy vychází z jednoduchého požadavku, aby se *nynější hodnota pravděpodobného příjmu* rovnala *nynější hodnotě pravděpodobného vydání*; používá tedy pravidlo odvozené v souvislosti se sázkami, kde je jen třeba počítat se současnými hodnotami všech výdajů a příjmů.

Machovcova učebnice je zajímavá ještě z jednoho důvodu: pravděpodobnost je zde sice definována jako podíl počtu příznivých a všech možných případů, po několika ilustračních příkladech však nalezneme poznámku: *v mnohých případech nelze vyjádřiti čísly počet případů možných a příznivých, ale lze určiti jich poměr a tudíž pravděpodobnost příslušného zjevu.* Tuto skutečnost pak Machovec dokládá třemi úlohami z oblasti geometrické pravděpodobnosti. První z nich je řešená a její znění je následující:

V trojúhelníku sestrojena jest se základnou rovnoběžka. Jaká jest pravděpodobnost, že trojúhelník, který při vrcholu vznikl, jest menší než polovina daného trojúhelníku? [Z řešení je patrné, že se mají porovnávat obsahy trojúhelníků.]



Obr. 1.3 Ilustrace k úlohám z Machovcovy učebnice algebry[26]

[26] Obrázek vlevo je překreslen podle Machovcovy učebnice [226], zbývající dva obrázky jsou přidány navíc; v knize jsou uvedena pouze samotná zadání neřešených úloh.

Při řešení Machovec volí bod X na úsečce AC tak, aby pro trojúhelník XYC, kde $XY \parallel AB$ (viz obr. 1.3 vlevo), platilo:

$$S(\triangle XYC) = \tfrac{1}{2} \cdot S(\triangle ABC). \tag{1.6}$$

Potom uvažuje takto: *Příznivé jsou patrně ty případy, v nichž vytčená rovnoběžka sestrojena jest některým bodem úsečky XC. Poněvadž dále onu rovnoběžku sestrojiti lze každým bodem úsečky AC, jest* [...] *žádaná pravděpodobnost*

$$p = |XC| : |AC|\,. \tag{1.7}$$

Jinými slovy, příznivých a všech možných případů je nyní nekonečně mnoho, proto nelze použít klasickou definici. Pravděpodobnost je však přesto možné vypočítat – jen je třeba místo počtu prvků uvažovat vhodnou míru příslušných množin. Jak jsme viděli výše, Machovec jako míru množiny všech rovnoběžek protínajících danou úsečku uvažuje délku této úsečky.[27] Z podmínky (1.6) pak už jen zbývá odvodit vztah mezi délkami úseček XC a AC. Protože

$$S(\triangle XYC) : S(\triangle ABC) = (|XC| : |AC|)^2\,, \tag{1.8}$$

dostáváme podmínku $(|XC| : |AC|)^2 = 1/2$, a tedy $p = 1/\sqrt{2}\,$.

Potom Machovec uvádí ještě dvě neřešené úlohy, jejichž řešení spočívá v porovnávání obsahů jako měr bodů ležících v dané rovinné oblasti (viz kap. 6):

1) Středy stran čtvercové desky jsou vrcholy nového čtverce, z něhož odvozen jest čtverec týmž způsobem a t. d. do nekonečna. Jaká jest pravděpodobnost, že bod na této desce vytčený jest uvnitř n^{ho} čtverce, okraj desky za 1. čtverec počítajíc?

Při řešení si stačí uvědomit, že pro obsahy čtverců platí (viz obr. 1.3 uprostřed):

$$S_1 = a_1^2,\ S_2 = a_2^2 = a_1^2/2,\ \ldots,\ S_n = a_1^2 \cdot (1/2)^{n-1}\,.$$

Hledaná pravděpodobnost je proto $p = S_n/S_1 = (1/2)^{n-1}\,$.

2) Do kruhové desky vepsán jest pravidelný šestiúhelník, do něho kružnice, do ní zase šestiúhelník atd. do nekonečna. Jaká jest pravděpodobnost, že bod na této desce vytčený jest uvnitř n^{ho} kruhu?

Z obr. 1.3 vpravo je patrné, že pro obsahy kruhů platí:

$$S_1 = \pi r_1^2,\ S_2 = \pi r_1^2 \cdot \left(\sqrt{3}/2\right)^2,\ \ldots,\ S_n = \pi r_1^2 \cdot \left(\sqrt{3}/2\right)^{2n-2}.$$

Hledaná pravděpodobnost je tedy $p = S_n/S_1 = \left(\sqrt{3}/2\right)^{2n-2}\,$.

Při řešení uvedených příkladů si tedy studenti mohli uvědomit, že pojem pravděpodobnosti je podstatně obecnější, než jak jej zavádí klasická definice,

[27] W. M. Crofton či E. Czuber uvažovali pro svazek rovnoběžek speciálně jeho šířku, což by v našem případě byla délka úsečky YC, resp. BC (viz např. [62] a [C24]); tato míra však přejde v míru uvažovanou v Machovcově řešení pouhým vynásobením konstantou (speciálně $\sin\alpha$), a pravděpodobnost jako podíl měr by proto v obou případech vyšla stejně.

a že pravděpodobnost lze mnohdy rozumně určit i tehdy, když jsou počty příznivých a všech možných případů nekonečné. K tomu ještě dodejme, že teprve v roce 1884 vydal Emanuel Czuber první monografii [C24] podávající ucelený přehled geometrické pravděpodobnosti. Do té doby existovaly jen jednotlivé články zejména francouzských a anglických autorů (podrobněji viz kap. 6).

Augustin Pánek: Přednášky a popularizační články

S výukou pravděpodobnosti v 19. století je také neodlučně spojeno jméno Augustina Pánka (1843–1908), který dlouhá léta vyučoval na různých středních školách v Praze.[28] Jako soukromý docent navíc konal od školního roku 1872/73 dvousemestrální přednášku *O počtu pravděpodobnosti a methodě nejmenších čtverců* na pražské technice, do níž zahrnul mj. geometrickou pravděpodobnost, různé filosofické otázky i historii tohoto oboru.[29]

Pánek sice nevydal žádnou středoškolskou učebnici, v Časopise pro pěstování mathematiky a fysiky však v letech 1876–1891 publikoval sérii článků, které mají výrazný popularizační charakter a zajisté mohly být s úspěchem využity ve výuce na středních školách. Základní přehled o obsahu těchto pojednání podává K. Mačák v knize [225]. Zde jen krátce poznamenejme, že čtyři z nich ([256], [257], [264] a [269]) jsou věnovány řešení rozmanitých pravděpodobnostních úloh, dalších pět ([261], [262], [265], [268] a [270]) se týká geometrické pravděpodobnosti. Převážně obecnější úvahy lze nalézt v článku [263], věnovaném Bayesově větě. Konečně v rozsáhlém pojednání *o mathematické a morální naději* [259] se Pánek podrobně zabývá pojmem matematické naděje, s nímž jsme se setkali v předcházejících odstavcích, a teorií užitku (*morální naděje*) Daniela Bernoulliho (1700–1782), včetně tzv. petrohradského paradoxu. V článku také porovnává rakouskou, italskou a již zrušenou francouzskou číselnou loterii, počítá střední hodnoty zisku, který plyne státu z této loterie pro jednotlivé typy sázek, a varuje před *žalostnými konci*, k nimž *vášnivé sázení do loterie mnohého přivedlo*.

[28] Augustin Pánek působil od roku 1867/68 jako učitel na soukromém reálném gymnáziu F. Čupra v Praze, potom vyučoval postupně na první veřejné sladovnické škole v Praze (od roku 1869), na soukromém vyšším reálném gymnáziu Dr. Ignáce Maadeho (od roku 1870), na vyšší střední škole městské na Malé Straně v Praze (od roku 1872 jako suplující, od roku 1873 jako řádný profesor), na c. k. státní střední škole na Malé Straně (od roku 1892) a konečně na nově vzniklé c. k. státní vyšší reálce v Praze III (v letech 1895 až 1904). Vedle toho byl v letech 1868 až 1872 asistentem při stolici matematiky F. J. Studničky na pražské technice, kde se v roce 1872 habilitoval. Teprve v roce 1896 zde však získal alespoň titul mimořádného profesora; profesorem řádným byl jmenován v roce 1904. Podrobné informace o Pánkově životě a díle lze nalézt v pojednání [21] M. Bečvářové.

[29] Například v sylabu z roku 1881/82 je uvedeno: *Absolutní, relativní a složitá pravděpodobnost. Geometrie pravděpodobnosti. Věta Poissonova a Bernoulliho. Objektivní a subjektivní naděje. Pravděpodobnost a posteriori. Pravidlo Bayes-ovo. – Theorie chyb. Vypočtení pravděpodobných a průměrných chyb. Normální rovnice methody nejmenších čtverců. Užití methody nejmenších čtverců k trigonometrickým měřením a pod. Dějepisný nástin počtu pravděpodobnosti a methody nejmenších čtverců.* Od roku 1887/87 byla přednáška rozdělena na dvě samostatné semestrální přednášky, od roku 1892/93 se konala jen přednáška *o počtu pravděpodobnosti*. V letech 1901/1902 až 1908/09 byla tato přednáška dvousemestrální. Dodejme, že po Pánkově smrti přednášel na technice o počtu pravděpodobnosti František Velísek (1877–1914) a po něm pak v letech 1914/15 až 1939/40 Karel Rychlík (1885–1968).