Vojtěch Jarník
Fascimile of ”Sur la dérivée approximative unilatérale”

In: Břetislav Novák (editor): Life and work of Vojtěch Jarník. (French). Praha: Society of Czech Mathematicians and Physicists, 1999. pp. 151--160.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402257

Zvláštní otisk z Věst. Král. Čes. Spol. Nauk. Tř. II. Roč. 1934.

Sur la dérivée approximative unilatérale.

Par VOJTĚCH JARNÍK.

Présenté le 7 mars 1934.

§ 1. Résultats.

Soit $x(t)$ une fonction continue dans l'intervalle $[0,1]$.[1]) Soit $t \varepsilon [0,1)$; s'il existe un ensemble mesurable E, dont la densité droite au point t est égale à *un*[2]) tel que la limite (finie ou infinie)

$$\lim_{t' \to t} {}_E \frac{x(t') - x(t)}{t' - t}$$

existe, alors cette limite s'appelle la dérivée approximative de $x(t)$ au point t du côté droit. Plus généralement: s'il existe un ensemble mesurable E, dont la densité supérieure droite au point t est au moins égale à un nombre positif α, tel que la limite (finie ou infinie)

$$\lim_{t' \to t} {}_E \frac{x(t') - x(t)}{t' - t}$$

existe, alors cette limite s'appelle un nombre dérivé de $x(t)$ au point t du côté droit de densité α. On a des définitions analogues pour le côté gauche.

---

[1]) Notations: $[a, b] = \underset{t}{E} \, (a \leqq t \leqq b)$, $(a, b) = \underset{t}{E} \, (a < t < b)$ $[a, b) = \underset{t}{E}$ $(a \leqq t < b)$ etc. Il ne s'agit dans cette note que des nombres réels.

[2]) Notations: μE signifie la mesure de l'ensemble (linéaire et mesurable) E. La limite $\lim\limits_{h \to 0+} h^{-1} . \mu [E . (t, t + h)]$ s'appelle la densité droite de l'ensemble E au point t, dans le cas où elle existe. Plus généralement, le nombre $\limsup\limits_{h \to 0+} h^{-1} . \mu [E . (t, t + h)]$ s'appelle la densité supérieure droite de l'ensemble E au point t. Par le symbole $\lim\limits_{t' \to t} {}_E f(t')$ nous allons désigner la limite de $f(t')$ quand t' tend vers t, tout en restant contenu toujours dans l'ensemble E. Le symbole $a \varepsilon E$ signifie: „a est un élément de l'ensemble E".

Soit C l'ensemble de toutes les fonctions $x = x(t)$ d'une variable réelle t, qui sont définies et continues dans $[0,1]$, avec la définition usuelle de la distance.[3]) Alors on peut énoncer le théorème suivant:

Il existe un résiduel[4]) R tel que toute fonction $x \varepsilon R$ possède les propriétés suivantes:

1. Dans aucun point $t \varepsilon (0,1)$, la fonction $x(t)$ n'admet de dérivée approximative *finie* ni du côté droit ni du côté gauche.

2. Au contraire, il existe un ensemble parfait et non vide M (dépendant de la fonction x) tel que la fonction $x(t)$ possède une dérivée approximative (et même une dérivée ordinaire) du côté droit, égale à $+\infty$ dans chaque point $t \varepsilon M$. (On a des énoncés analogues pour les quatre combinaisons droit ou gauche, $+\infty$ ou $-\infty$.)

3. Mais, dans aucun point $t \varepsilon (0,1)$, les deux dérivées approximatives unilatérales de la fonction $x(t)$ n'existent pas *simultanément*.[5])

L'énoncé 1. est un cas particulier du théorème démontré dans ma note »Sur la dérivabilité des fonctions continues«;[6]) l'énoncé 2. a été démontré par M. S. Saks;[7]) le but de cette note est la démonstration de l'énoncé 3.; au surplus, nous allons démontrer un théorème plus précis[8]) que voici et dont l'énoncé 3. est une conséquence immédiate:

Théorème. *Soit B l'ensemble de toutes les fonctions $x \varepsilon C$ qui jouissent de la propriété suivante:*

---

[3]) La distance des deux fonctions $x \varepsilon C$, $y \varepsilon C$ est égale à $\underset{0 \leqq t \leqq 1}{\mathrm{Max}} |x(t) - y(t)|$; alors C est un espace complet.

[4]) Toutes les notions relatives, tant qu'il s'agit des ensembles de fonctions, sont à interpréter relativement à l'espace C. Un ensemble $M \subset C$ s'appelle un résiduel, si $C - M$ est un ensemble de première catégorie. C lui-même étant de seconde catégorie, un résiduel ne peut pas être vide.

[5]) C'est-à-dire: à chaque $t \varepsilon (0,1)$ on peut faire correspondre un côté (c) (droit ou gauche) tel que la dérivée approximative de la fonction $x(t)$ du côté (c) n'existe pas au point t.

[6]) A paraître dans les Publications de la Faculté des Sciences de l'Université Charles, No. 129.

[7]) On the functions of Besicovitch in the space of continuous functions, Fundamenta Mathematicae 19 (1932), p. 211—219.

[8]) Qui pourrait encore être précisé davantage.

à chaque $t \varepsilon (0,1)$ *on peut faire correspondre un côté (c)* (droit ou gauche) *tel que deux au moins des trois nombres* $-\infty$, 0, $+\infty$ *soient des nombres dérivés de* $x(t)$ *au point* t *du côté (c) de densité* ¼.

Alors B *est un résiduel.*

§ 2. Démonstration.

n étant un nombre entier $(n > 2)$, posons pour $x \varepsilon C$, $t \varepsilon [n^{-1}, 1-n^{-1}]$, $u \varepsilon (0, n^{-1}]$:

$$F_1^n(x; t, u) = \underset{h}{E}\left(\frac{x(t+h)-x(t)}{h} > n,\ 0 < h \leqq u\right);$$

$$F_2^n(x; t, u) = \underset{h}{E}\left(\frac{x(t+h)-x(t)}{h} < -n,\ 0 < h \leqq u\right);$$

$$F_3^n(x; t, u) = \underset{h}{E}\left(\left|\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\right| < \frac{1}{n},\ 0 < h \leqq u\right);$$

$$F_4^n(x; t, u) = \underset{h}{E}\left(\frac{x(t+h)-x(t)}{h} > n,\ 0 > h \geqq -u\right);$$

$$F_5^n(x; t, u) = \underset{h}{E}\left(\frac{x(t+h)-x(t)}{h} < -n,\ 0 > h \geqq -u\right);$$

$$F_6^n(x; t, u) = \underset{h}{E}\left(\left|\frac{x(t+h)-x(t)}{h}\right| < \frac{1}{n},\ 0 > h \geqq -u\right).$$

Pour $i = 1, 2, \ldots, 6$, désignons par $E_i^n(x)$ l'ensemble de toutes les valeurs $t \varepsilon [n^{-1}, 1-n^{-1}]$ qui satisfont à la condition suivante: pour chaque $u \varepsilon (0, n^{-1}]$, on a $\mu F_i^n(x; t, u) \leqq {}^1/_4 u$. Posons encore

$$G_i^n(x) = [n^{-1}, 1-n^{-1}] - E_i^n(x)$$

et

$$M^n(x) = G_1^n(x)\,G_2^n(x) + G_1^n(x)\,G_3^n(x) + G_2^n(x)\,G_3^n(x) + \\ + G_4^n(x)\,G_5^n(x) + G_4^n(x)\,G_6^n(x) + G_5^n(x)\,G_6^n(x).$$

Soit C_n l'ensemble de toutes les fonctions $x \varepsilon C$, pour lesquelles $M^n(x) = [n^{-1}, 1-n^{-1}]$; posons encore $D_n = C - C_n$, $H = \prod\limits_{n=3}^{\infty} C_n$.

Si $x \varepsilon H$ et si $t \varepsilon (0,1)$, on peut évidemment trouver deux nombres entiers i, k (où l'on a ou bien $1 \leqq i < k \leqq 3$ ou bien $4 \leqq i < k \leqq 6$) tel que l'on ait $t \varepsilon G_i^n(x)\,G_k^n(x)$ pour une infinité de valeurs de l'indice n; il s'ensuit évidemment $x \varepsilon B$; on a donc $H \subset B$ et il suffit de démontrer que H est un résiduel;

pour cela, il suffit de démontrer que les ensembles D_n sont non denses. Pour démontrer enfin cette dernière assertion, il suffit de démontrer les deux lemmes suivants:

Lemme 1er. *D_n est un ensemble fermé.*

Lemme 2ème. *K étant une sphère* (ouverte) *quelconque de l'espace C, l'ensemble $K—D_n$ n'est pas vide.*

Pour démontrer le lemme 1er, nous allons démontrer tout d'abord le lemme suivant:

Lemme 3ème. *Soient n, i deux nombres entiers, $n > 2$, $1 \leqq i \leqq 6$. Soit $x_l \varepsilon C$, $t_l \varepsilon E_i^n(x_l)$ pour $l = 1, 2, 3, \ldots$. Soit $t_l \rightarrow \tau$; soit $x_l(t) \rightarrow x(t)$ uniformément pour $0 \leqq t \leqq 1$; alors on a $\tau \varepsilon E_i^n(x)$.*

Démonstration. Il suffit de considérer le cas $i = 1$, les autres cas pouvant être traité d'une manière complètement analogue. On a $t_l \varepsilon [n^{-1}, 1 - n^{-1}]$, d'où $\tau \varepsilon [n^{-1}, 1 - n^{-1}]$. Soit maintenant $u \varepsilon (0, n^{-1}]$; on a donc $\mu F_1^n(x_l; t_l, u) \leqq {}^1/_4 u$, c'est-à-dire

$$\mu \mathop{E}_{h} \left(\frac{x_l(t_l + h) - x_l(t_l)}{h} \leqq n,\ 0 < h \leqq u \right) \geqq \frac{3}{4} u$$

pour $l = 1, 2 \ldots$ Posons[9])

$$N(u) = \limsup_{l=\infty} \mathop{E}_{h} \left(\frac{x_l(t_l + h) - x_l(t_l)}{h} \leqq n,\ 0 < h \leqq u \right);$$

donc $\mu N(u) \geqq {}^3\!/_4\, u$. Pour $h \varepsilon N(u)$, on a pour une infinité de valeurs de l la relation

$$\frac{x_l(t_l + h) - x_l(t_l)}{h} \leqq n, \text{ d' où } \frac{x(\tau + h) - x(\tau)}{h} \leqq n;$$

on a donc pour $u \varepsilon (0, n^{-1}]$:

$$N(u) \subset \mathop{E}_{h} \left(\frac{x(\tau + h) - x(\tau)}{h} \leqq n,\ 0 < h \leqq u \right),$$

$$\mu \mathop{E}_{h} \left(\frac{x(\tau + h) - x(\tau)}{h} \leqq n,\ 0 < h \leqq u \right) \geqq \mu N(u) \geqq \frac{3}{4} u,$$

d' où $\mu F_1^n(x; \tau, u) \leqq {}^1/_4 u$, donc $\tau \varepsilon E_1^n(x)$.

Démonstration du lemme 1er. Soit n un nombre entier ($n > 2$). Soit $x_l \varepsilon D_n$ pour $l = 1, 2, 3, \ldots$; soit $x_l(t) \rightarrow x(t)$ uniformément pour $0 \leqq t \leqq 1$. Il existe donc une suite $t_1, t_2, \ldots$

---

[9]) Nous posons $\limsup_{l=\infty} N_l = \prod_{k=1}^{\infty} \sum_{l=k}^{\infty} N_l$.

telle que $t_l \varepsilon [n^{-1}, 1 - n^{-1}] - M^n(x_l)$; il faut démontrer l'existence d'un nombre $\tau \varepsilon [n^{-1}, 1 - n^{-1}] - M^n(x)$. On peut supposer que la limite $\lim_{l \to x} t_l = \tau$ existe.[10]) Soient i, k $(i \neq k)$ deux nombres entiers tels que l'on ait ou bien $1 \leqq i \leqq 3$, $1 \leqq k \leqq 3$ ou bien $4 \leqq i \leqq 6$, $4 \leqq k \leqq 6$. On a donc

$$t_l \varepsilon [n^{-1}, 1 - n^{-1}] - G_i^n(x_l)\, G_k^n(x_l) \text{ pour } l = 1, 2, \ldots.$$

En choisissant la notation d'une manière convenable, on peut supposer que

$$t_l \varepsilon [n^{-1}, 1 - n^{-1}] - G_i^n(x_l) = \dot{E}_i^n(x_l)$$

pour une infinité de valeurs l. En appliquant le lemme 3ème à une suite partielle de la suite $x_1, x_2, \ldots$, on voit que

$$\tau \varepsilon E_i^n(x) = [n^{-1}, 1 - n^{-1}] - G_i^n(x) \subset [n^{-1}, 1 - n^{-1}] - G_i^n(x)\, G_k^n(x).$$

Cette relation étant vraie pour tous les couples i, k considérés, on a

$$\tau \varepsilon [n^{-1}, 1 - n^{-1}] - M^n(x).$$

Démonstration du lemme 2ème. Soit n un nombre entier, $n > 2$; soit K une sphère de l'espace C. Il existe un polynome $w(t) \varepsilon K$. Ensuite, on peut trouver deux nombres positifs p, r satisfaisant aux conditions suivantes:

1. pour $0 \leqq t < t' \leqq 1$ on a $\left| \dfrac{w(t') - w(t)}{t' - t} \right| < p$;

2. les relations $z \varepsilon C$, $\underset{0 \leqq t \leqq 1}{\mathrm{Max}} |z(t)| < r$ entraînent la relation $w + z \varepsilon K$.

Posons

(1) $$\varrho = {}^7/_{16}, \quad \eta = {}^1/_{65}, \quad \delta = {}^1/_{15},$$

d'où

(2) $$ {}^1/_4 - {}^\varrho/_2 - 2\eta > 0, \quad \frac{2}{3} \varrho (1 - 2\delta) > \frac{1}{4}.$$

Choisissons encore un nombre pair m satisfaisant aux conditions suivantes:

(3) A) ${}^4/_m < {}^1/_n$ (donc $m > 12$), $\dfrac{2}{3} m r \left(\dfrac{1}{4} - \dfrac{\varrho}{2} - 2\eta \right) > p + n$.

B) Les relations $0 \leqq t < t' \leqq 1$, $t' - t \leqq m^{-1}$

---

[10]) Dans le cas contraire, on peut se borner à une suite partielle de la suite $x_1, x_2, \ldots$.

entraînent l'inégalité

(4) $$|w(t)-w(t')|<\eta r = {}^r/_{65}.$$

Ceci fait, définissons une fonction $z = z(t)$ par les conditions suivantes:

1. pour $(s-\delta)\,m^{-1} \leqq t \leqq (s+\delta)\,m^{-1}$ (s *impair*, $1 \leqq s \leqq m-1$) soit
$$z(t) = w\left(\frac{s}{m}\right) - w(t);$$

2. pour $(s-\delta)\,m^{-1} \leqq t \leqq (s+\delta)\,m^{-1}$ (s *pair*, $2 \leqq s \leqq m-2$) soit
$$z(t) = \frac{r}{2} + w\left(\frac{s}{m}\right) - w(t);$$

3. pour $(s+\delta)\,m^{-1} \leqq t \leqq (s+1-\delta)\,m^{-1}$ (s entier, $1 \leqq s \leqq m-2$) soit $z(t)$ une fonction linéaire;

4. pour $0 \leqq t \leqq (1-\delta)\,m^{-1}$ soit $z(t) = z\left(\frac{1-\delta}{m}\right)$;

5. pour $(m-1+\delta)\,m^{-1} \leqq t \leqq 1$ soit $z(t) = z\left(\frac{m-1+\delta}{m}\right)$.

D'après (4), on a $-r < -\eta r < z(t) < {}^r/_2 + \eta r < r$, donc $w + z \,\varepsilon\, K$. Il nous reste à démontrer que $w + z \,\varepsilon\, C - D_n$, c'est-à-dire $w + z \,\varepsilon\, C_n$; donc: il nous reste à démontrer l'assertion suivante:

si $t_0 \,\varepsilon\, [n^{-1},\ 1-n^{-1}]$, *alors on a* $t_0 \,\varepsilon\, M^n(w+z)$.

Soit donc t_0 un nombre de l'intervalle $[n^{-1},\ 1-n^{-1}]$; il existe alors un nombre impair s tel que $(s-\delta)\,m^{-1} \leqq t_0 < (s+2-\delta)\,m^{-1}$; on en tire (voir (3)) $s \geqq 3$, $s+2 \leqq m-2$ d'où (m étant un nombre pair) $s+2 \leqq m-3$. Nous allons distinguer huit cas:

I. $(s-\delta)\,m^{-1} \leqq t_0 < (s+\delta)\,m^{-1}$; II. $t_0 = (s+\delta)\,m^{-1}$;
III. $(s+\delta)\,m^{-1} < t_0 \leqq (s+{}^1/_2)\,m^{-1}$;
IV. $(s+{}^1/_2)\,m^{-1} < t_0 < (s+1-\delta)\,m^{-1}$;
V. $(s+1-\delta)\,m^{-1} \leqq t_0 < (s+1+\delta)\,m^{-1}$
VI. $t_0 = (s+1+\delta)\,m^{-1}$;
VII. $(s+1+\delta)\,m^{-1} < t_0 \leqq (s+{}^3/_2)\,m^{-1}$;
VIII. $(s+{}^3/_2)\,m^{-1} < t_0 < (s+2-\delta)\,m^{-1}$.

Premier cas: $(s-\delta)m^{-1} \leqq t_0 < (s+\delta)m^{-1}$. Posons d'abord $u = (s+\delta)m^{-1} - t_0$, donc $0 < u \leqq 2\delta\, m^{-1} \leqq n^{-1}$.

Pour $0 < h \leqq u$ on a[11])

$$\frac{w(t_0+h)+z(t_0+h)-(w(t_0)+z(t_0))}{h}=0, \text{ donc}$$

$$\mu F_3(w+z;\ t_0, u)=u>\frac{1}{4}u, \text{ donc } t_0 \varepsilon G_3^n\ (w+z).$$

Posons ensuite $u=(s+1-\delta)\,m^{-1}-t_0$, d'où $0<u\leqq m^{-1}\leqq n^{-1}$. Pour $(s+{}^1/_2)\,m^{-1}\leqq t\leqq(s+1-\delta)\,m^{-1}$, on a évidemment

$$z(t)\geqq z\left((s+{}^1/_2)\,m^{-1}\right)=\frac{1}{2}\left(z\left(\frac{s+\delta}{m}\right)+z\left(\frac{s+1-\delta}{m}\right)\right)>$$

$$>\frac{1}{2}\left(-\eta r+\frac{r}{2}-\eta r\right)=r\left(\frac{1}{4}-\eta\right);$$

d'autre part $z(t_0)<\eta r$. Pour $(s+½)\,m^{-1}-t_0 \leqq h\leqq(s+1-\delta)\,m^{-1}-t_0=u$ on a donc (voir (3))

$$\frac{z(t_0+h)-z(t_0)}{h}>\frac{r}{u}\left(\frac{1}{4}-2\eta\right)\geqq m\,r\left(\frac{1}{4}-2\eta\right)>p+n,$$

d'où

$$\frac{w(t_0+h)+z(t_0+h)-(w(t_0)+z(t_0))}{h}>n;$$

on a donc $(u\leqq m^{-1},\ \delta={}^1/_{15})$

$$\mu F_1^n(w+z;\ t_0, u)\geqq({}^1/_2-\delta)\,m^{-1}>{}^1/_4\,u,$$

d'où $t_0\,\varepsilon\,G_1^n\,(w+z)$. On a donc

$$t_0\,\varepsilon\,G_1^n(w+z)\,G_3^n(w+z)\subset M^n(w+z).$$

Deuxième et troisième cas:

$(s+\delta)\,m^{-1}\leqq t_0\leqq(s+{}^1/_2)\,m^{-1}$. Posons d'abord $u=t_0-(s-1+\delta)\,m^{-1}$; donc $0<u<{}^3/_2\,m^{-1}\leqq n^{-1}$. Pour $(s-1+\delta)\,m^{-1}\leqq t \leqq(s-1+\delta)\,m^{-1}+\varrho\,(1-2\delta)\,m^{-1}$ on a

$$z(t)\geqq z\left((s-1+\delta)\,m^{-1}+\varrho\,(1-2\delta)\,m^{-1}\right)=$$

$$=(1-\varrho)\,z\left(\frac{s-1+\delta}{m}\right)+\varrho\,z\left(\frac{s-\delta}{m}\right)>(1-\varrho)\left(\frac{r}{2}-\eta r\right)-\varrho\,\eta\,r$$

$$=r\left(\frac{1}{2}-\frac{\varrho}{2}-\eta\right);$$

d'autre part, on a

[11]) Remarquons que la fonction $w(t)+z(t)=w(sm^{-1})$ est constante pour $t\,\varepsilon\,[(s-\delta)\,m^{-1}, (s+\delta)\,m^{-1}]$.

$$z(t_0) \leqq z((s+{}^1/_2)\, m^{-1}) = \frac{1}{2}\left(z\left(\frac{s+\delta}{m}\right) + z\left(\frac{s+1-\delta}{m}\right)\right)$$
$$< \frac{1}{2}\left(\frac{r}{2} + \eta r + \eta r\right) = r\left(\frac{1}{4} + \eta\right).$$

Donc, pour

$$t_0 - (s-1+\delta)\, m^{-1} - \varrho(1-2\delta)\, m^{-1} \leqq -h \leqq t_0 - (s-1+\delta)\, m^{-1} = u$$

on a (d'après (3))

$$\frac{z(t_0+h) - z(t_0)}{h} < -r\left(\frac{1}{4} - \frac{\varrho}{2} - 2\eta\right) . \frac{2m}{3} < -p-n,$$

d'où

$$\frac{w(t_0+h) + z(t_0+h) - (w(t_0) + z(t_0))}{h} < -n,$$

d'où (voir (2))

$$\mu F_5^n(w+z; t_0, u) \geqq \varrho(1-2\delta)\, m^{-1} > \varrho(1-2\delta)\, {}^2/_3 u > {}^1/_4 u,$$

c'est-à-dire $t_0 \varepsilon G_5^n(w+z)$.

Séparons maintenant le deuxième et le troisième cas. Pour $t_0 = (s+\delta) m^{-1}$ posons $u = 2\delta m^{-1}$, donc $0 < u \leqq m^{-1} \leqq \leqq n^{-1}$. Pour $0 > h \geqq -u$ on a [11])

$$\frac{w(t_0+h) + z(t_0+h) - (w(t_0) + z(t_0))}{h} = 0, \text{donc } \mu F_6^n(w+ + z; t_0, u) = u > \frac{1}{4}u,$$ donc $t_0 \varepsilon G_6^n(w+z)$. Dans le deuxième cas, on a donc $t_0 \varepsilon G_5^n(w+z)\, G_6^n(w+z) \subset M^n(w+z)$.

Pour $(s+\delta) m^{-1} < t_0 \leqq (s+½) m^{-1}$ posons $u = t_0 - (s+\delta) m^{-1}$; donc $0 < u < m^{-1} \leqq n^{-1}$. Pour $0 > h \geqq -u$ on a[12]) (voir (3))

$$\frac{z(t_0+h) - z(t_0)}{h} = \left(z\left(\frac{s+1-\delta}{m}\right) - z\left(\frac{s+\delta}{m}\right)\right) : \left(\frac{1-2\delta}{m}\right) >$$

(5) $$> \left(\frac{r}{2} - 2r\eta\right) m = r\left(\frac{1}{2} - 2\eta\right) m > n+p,$$

d'où

(6) $$\frac{w(t_0+h) + z(t_0+h) - (w(t_0) + z(t_0))}{h} > n;$$

[12]) Les relations (5), (6) sont vraies pour toutes les valeurs t_0, h, pour lesquelles on a $(s+\delta) m^{-1} \leqq t_0 \leqq (s+1-\delta) m^{-1}$, $h \neq 0$, $(s+\delta) m^{-1} \leqq t_0 + h \leqq (s+1-\delta) m^{-1}$. Nous allons utiliser cette remarque dans le quatrième cas.

donc $\mu F_4^n(w+z;\, t_0, u) = u > \frac{1}{4} u$, donc $t_0 \varepsilon G_4^n\ (w+z)$.

Dans le troisième cas, on a donc

$$t_0 \varepsilon G_4^n(w+z)\, G_5^n(w+z) \subset M^n(w+z).$$

Quatrième cas:

$$(s+{}^1\!/_2)\, m^{-1} < t_0 < (s+1-\delta)\, m^{-1}.$$

Posons d'abord $u = (s+1-\delta) m^{-1} - t_0$, donc $0 < u < m^{-1} \leqq n^{-1}$. Pour $0 < h \leqq u$, on a (d'après[12]) la relation (6), d'où

$$\mu F_1^n(w+z;\, t_0, u) = u > {}^1\!/_4 u, \text{ donc } t_0 \varepsilon G_1^n(w+z).$$

Posons ensuite $u = (s+2-\delta) m^{-1} - t_0$, donc $0 < u < {}^3\!/_2 m^{-1} \leqq n^{-1}$. Pour

$$(s+2-\delta)\, m^{-1} - \varrho\, (1-2\delta)\, m^{-1} \leqq t \leqq (s+2-\delta)\, m^{-1}$$

on a

$$z\,(t) \leqq z\left(\frac{s+2-\delta}{m} - \varrho\,\frac{1-2\delta}{m}\right) = (1-\varrho)\, z\left(\frac{s+2-\delta}{m}\right) +$$

$$+ \varrho\, z\left(\frac{s+1+\delta}{m}\right) < (1-\varrho)\,\eta\, r + \varrho\left(\frac{r}{2} + \eta\, r\right) = r\left(\frac{\varrho}{2} + \eta\right);$$

d'autre part

$$z\,(t_0) > z\,((s+{}^1\!/_2)\, m^{-1}) = \frac{1}{2}\left(z\left(\frac{s+\delta}{m}\right) + z\left(\frac{s+1-\delta}{m}\right)\right)$$

$$> \frac{1}{2}\left(-\eta\, r + \frac{1}{2} r - \eta\, r\right) = r\left(\frac{1}{4} - \eta\right).$$

Donc: pour $(s+2-\delta)\, m^{-1} - \varrho\,(1-2\delta)\, m^{-1} - t_0 \leqq h \leqq (s+2-\delta)\, m^{-1} - t_0 = u$ on a (voir (3))

$$\frac{z\,(t_0+h) - z\,(t_0)}{h} < -r\left(\frac{1}{4} - \frac{\varrho}{2} - 2\eta\right)\frac{2\,m}{3} < -p - n,$$

d'où

$$\frac{w\,(t_0+h) + z\,(t_0+h) - (w\,(t_0) + z\,(t_0))}{h} < -n.$$

On a donc (voir (2))

$$\mu F_2^n(w+z;\ t_0, u) \geqq \varrho\,(1-2\delta)\, m^{-1} > \frac{2}{3}\ \varrho\,(1-2\delta)\, u > \frac{1}{4}\, u,$$

d'où $t_0 \varepsilon G_2^n(w+z)$; on a donc

$$t_0 \varepsilon G_1^n(w+z)\, G_2^n(w+z) \subset M^n(w+z).$$

Nous avons donc démontré la relation cherchée $t_0 \varepsilon M^n(w+z)$ dans les cas I, II, III, IV. Les cas V, VI, VII, VIII peuvent être traité évidemment d'une manière complètement symétrique.

Résumé.

Sur la dérivée approximative unilatérale.

Par Vojtěch Jarník.

(Présenté le 7 mars 1934).

Soit C l'ensemble de toutes les fonctions réelles d'une variable réelle qui sont définies et continues dans l'intervalle (fermé) [0,1], avec la définition usuelle de la distance. Alors il existe un résiduel R de l'espace C tel que toute fonction $x(t) \varepsilon C$ possède les propriétés suivantes:

1. Dans aucun point $t \varepsilon (0,1)$, la fonction $x(t)$ ne possède de dérivée approximative *finie* ni du côté droit ni du côté gauche.

2. Au contraire, il existe un ensemble M parfait et non vide tel que la dérivée approximative de la fonction $x(t)$ du côté droit existe et soit égale à $+\infty$ dans chaque point $t \varepsilon M$ (on a des énoncés analogues pour les quatre combinaisons: droit ou gauche, $+\infty$ ou $-\infty$).

3. Mais, dans aucun point $t \varepsilon (0,1)$, les deux dérivées approximatives unilatérales de la fonction $x(t)$ n'existent pas *simultanément*.

Les propriétés 1. et 2. sont déjà connues; c'est la démonstration de la propriété 3. qui fait l'objet principal de la note présente.