Moji učitelé geometrie

III. Ladislav Seifert (1883–1959)

In: Zbyněk Nádeník (author); Jindřich Bečvář (author): Moji učitelé geometrie. (Czech). Praha: Matfyzpress, 2011. pp. 109–222.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402172

III. LADISLAV SEIFERT[1]

(1883–1959)

Osnova

A. Ladislav Seifert na Masarykově univerzitě

Když jsem se v říjnu 1945 zapisoval na přírodovědeckou fakultu v Brně ke studiu matematiky a deskriptivní geometrie, jméno Ladislav Seifert mi nebylo neznámé. Na prostějovské reálce jsem se učil z učebnic deskriptivy, které napsali Ladislav Seifert – jako sedmadvacetiletý profesor reálky v Plzni – a Josef Pithardt, profesor reálky v Praze; učebnice vydala Jednota v letech 1910 až 1911, dočkaly se 4. vydání a používaly se až do poloviny minulého století. Dobře si pamatuji, že ke studiu Pithardtových-Seifertových učebnic jsem nepotřeboval žádný výklad, byly velmi přístupné a srozumitelné. Rovněž jsem znal Seifertovu brožurku *Imaginární elementy v geometrii* (Praha, 1941).

Po Seifertově úmrtí 6. února 1956 napsal profesor brněnské stavební fakulty Jiří Klapka (1900–1976) nekrolog *Prof. Dr. Ladislav Seifert zemřel.*[2] Připojil též seznam Seifertových prací, které rozdělil do tří tematických skupin (str. 372):

1. Čáry a plochy 3. až 5. stupně trojrozměrného a čtyřrozměrného prostoru.
2. Soustavy rotačních ploch 2. stupně, vyhovující daným podmínkám a plochy kruhové.
3. Deskriptivní geometrie čar, ploch, přímkových kongruencí a osnov speciálních.

---

[1] Článek vznikl podstatným přepracováním a rozšířením mé přednášky proslovené v semináři docenta Jindřicha Bečváře na Matematicko-fyzikální fakultě UK v říjnu 2003. Tenkrát jsem mluvil převážně o Seifertových vědeckých publikacích v časopisech, naopak v tomto článku o takových pracích nepíši vůbec.

[2] Časopis pro pěstování matematiky 81(1956), 370–376.

Zmíním se jen o nejvýznamnějších Seifertových životních datech, v podrobnostech odkazuji na Klapkovu vzpomínku. L. Seifert se narodil 19. dubna 1883 v Sušici; otec byl učitelem, později ředitelem měšťanské školy. Promoval v červenci 1914, habilitoval se roku 1920 na české univerzitě a technice v Praze. Ve studijním roce 1907/08 pobýval na univerzitách ve Strasburku a v Göttingách. V červenci 1921 byl jmenován řádným profesorem nově založené brněnské univerzity. V letech 1926/27 a 1937/38 byl děkanem její přírodovědecké fakulty a rektorem v roce 1947/48.

Na všechny Seifertovy přednášky jsem chodil velmi rád. Nepatřily k nenáročným, a tak nás na nich býval jen zlomek z těch, kdo studovali matematiku. Nevylučuji, že už tenkrát se projevoval jakýsi studentský odklon od geometrie. Na tabuli psal L. Seifert drobně, téměř krasopisně; rýsoval způsobem, který jsem nestačil obdivovat. Měl však zvyk, jenž znesnadňoval zapsání a porozumění jeho výkladům – jakmile zaplnil třeba jen kousek tabule, hned jej smazal. Rozhodně to nebyl projev nejistoty, doma jsem si Seifertovy výpočty a úvahy přepočítával a nikdy jsem tehdy nepřišel na prohřešek. Zvláště to platí o úlohách, které řešil v semináři ke II. státní zkoušce. Až když jsem své zápisy z něj pročítal nyní po více než 60 letech, dovolím si jisté připomínky.

Jako examinátor měl L. Seifert poněkud přísnější pověst (sám bych nemohl říci, že jsem to pocítil). A tak se stalo, že u první státní zkoušky v únoru 1947 (vykonal jsem ji v jeden den z matematiky i deskriptivy; L. Seifert byl vskutku trošku náročnější, ale jistě zdaleka ne nepříjemný examinátor) bylo nás u L. Seiferta jen několik jednotlivců, ale u profesora Otakara Borůvky (1899–1995) bylo několik desítek kandidátů. Rád stvrzuji, že L. Seifert byl při mých zkouškách velmi přátelský, a tak uklidňoval. Kdyby někdo nezúčastněný jej pozoroval, asi by řekl, že šlo o přátelské rozhovory zkušeného učitele v podzimu svého působení se studentíkem, který teprve začíná.

Po přestupu v říjnu 1947 na přírodovědeckou fakultu v Praze jsem s L. Seifertem už nikdy nemluvil. Někdy před polovinou 50. let při krátkém pobytu v Brně jsem ho zahlédl, jak odpočívá na lavičce v parčíku na Petrově. Váhal jsem, zda ho mám oslovit. Obával jsem se, že bych ho vyrušil, a tak jsem to neudělal. Ale dodnes ho v duchu vidím při jeho siestě pod chrámem sv. Petra.

* * *

Zůstaly mi tři *Seznamy přednášek na Masarykově univerzitě v Brně* ze semestrů zimního 1945/46, zimního 1946/47 a letního 1946/47. L. Seifert v nich ohlašoval tyto přednášky (číslice I či II označují vhodnost pro I. či II. státní zkoušku, pak následuje hodinová dotace přednášky případně cvičení):

Zimní semestr 1945/46:

1. Centrální promítání (perspektiva). I, 2 + 2
2. Vybrané statě z deskriptivní geometrie. II, 2 + 2
3. Projektivní geometrie. II, 3 + 0
4. Seminární cvičení. 2

Zimní semestr 1946/47:

1. Úvod do deskriptivní geometrie. Pravoúhlé promítání. I, 2 + 2
2. Teorie geometrického osvětlení. II, 2 + 2
3. Algebraické křivky. II, 3 + 0
4. Úvahy z elementární geometrie. 1 hod.
5. Seminární cvičení. II, 2 hod.

Letní semestr 1946/47:

1. Úvod do deskriptivní geometrie. Pravoúhlé promítání. I, 2 + 2
2. Cyklografie. II, 2 + 2
3. Vybrané stati z geometrie algebraické. II, 3 + 0
4. Seminární cvičení. II, 2 hod.

V indexu mám zapsány se Seifertovými podpisy tyto přednášky:

Zimní semestr 1945/46:

1. Centrální promítání. 2 + 2

Letní semestr 1945/46:

1. Promítání centrální a šikmé. 2 + 2
2. Vybrané statě z deskriptivní geometrie. 2 + 2

Zimní semestr 1946/47:

Všechny přednášky 1. až 5. podle hořejšího seznamu.

Letní semestr 1946/47:

Přednášky 2. až 4. podle hořejšího seznamu.

Doplním tyto údaje dvěma poznámkami.

Ve studiu učitelství matematiky na středních školách bylo třeba k I. státní zkoušce předložit vysvědčení z dvousemestrové přednášky o deskriptivní geometrii. Požadavek jsem splnil tak, že jsem u L. Seiferta vykonal tyto zkoušky: v únoru 1946 (po 1. semestru) z centrálního promítání a v červnu 1946 z deskriptivní geometrie; z obou zkoušek mám zachována vysvědčení.

Pokud se pamatuji, L. Seifert ve studijním roce 1945/46 nekonal pro nemoc všechny ohlášené přednášky. Rovněž si vzpomínám, že přednášku o projektivní geometrii v zimním semestru 1945/46 převzal profesor teoretické fyziky Bohuslav Hostinský (1884–1951).[3] Při jeho přednáškách jsem si opakoval, co jsem

[3] Viz posmrtnou vzpomínku Jiří Beránek: *Bohuslav Hostinský*, Československý časopis pro fysiku 1(1951), 90–95.

už znal z učebnice *Projektivní geometrie I* (Praha, 1944) Václava Hlavatého (1894–1969).[4]

Může překvapit, že teoretický fyzik B. Hostinský přednášel o projektivní geometrii. Ale on vyšel z geometrie. Jeho kniha *Diferenciální geometrie křivek a ploch* (Praha, 1915) se dočkala dalších dvou vydání (1942, 1950). Ačkoliv je o víc než 20 let starší než V. Hlavatého *Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet* (Praha, 1937; německý překlad 1939), velmi si všímá „geometrie ve velkém", kterou V. Hlavatý zcela nechal stranou. Zajímavá a výmluvná je Hostinského recenze knihy Wilhelm Blaschke (1885–1962): *Kreis und Kugel* (Leipzig, 1916; reprint 1949, 2. vyd. 1956, ruský překlad: Moskva, 1967).[5] Geometrii věnoval B. Hostinský též knížku *O mnohoúhelnících a mnohostěnech* (Praha, 1947). Byl mezinárodně známým odborníkem v počtu pravděpodobnosti; s geometrií jej spojil ve dvou knížkách *Geometrické pravděpodobnosti* (Praha, 1926) a *Počet pravděpodobnosti I* (Praha, 1950)[6] a v práci *Sur les probabilités géométriques.*[7]

B. Seifertův seminář (1946–1947)

Zachovaly se mi dva sešity velikosti A5 s úlohami, které L. Seifert probíral ve svém semináři ze zimního a letního semestru 1946/47. V prvním sešitu ze zimního semestru jsem zápis ze semináře přepisoval a doplňoval podrobnějšími výpočty, poznámkami a náčrty, druhý sešit obsahuje jen přímé rychlé zápisy Seifertových výkladů, k nimž jen příležitostně jsem něco doplnil či přikreslil obrázky. První sešit ze zimního semestru má 50 hustě popsaných stran, z druhého sešitu patří zimnímu semestru ještě 45 stránek, letnímu jen 30. Zřejmě jsem – patrně též pod dojmem v únoru 1947 vykonaných I. státních zkoušek z matematiky a deskriptivní geometrie a zamýšleného přestupu do Prahy – sledoval výhradně Seifertův výklad a zápisem jsem se nezdržoval. Čeština je v obou sešitech poněkud archaická, ale nepřizpůsobil jsem ji současné. Tím bych byl setřel charakter Seifertovy mluvy, na který jsem byl ostatně zvyklý ze studia matematické literatury.

Uvedu názvy Seifertových témat. V zimním semestru je očísluji 1–18, v letním I–XVI. K některým připojím své současné komentáře, jsou vždy označeny dvojitou postranní čarou. Ke konci této části B přepíši úplný Seifertův výklad první úlohy 1 i poslední XVI a doplním jej svými poznámkami, které jsou rovněž označeny dvojitou postranní čarou. Z toho bude zřejmé, že L. Seifert nešetřil zrovna náročností.

---

[4] Viz František Nožička: *Profesor Václav Hlavatý, český matematik světového jména*, Časopis pro pěstování matematiky 94(1969), 374–380, a Oldřich Kowalski: *Věnováno Václavu Hlavatému*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 38(1993), 65–81.

[5] Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 47(1918), 43–44.

[6] Viz 3. kapitola *Geometrické pravděpodobnosti*, strany 62–105.

[7] Spisy přírodovědecké fakulty Masarykovy university č. 50, Brno, 1925.

Seminární cvičení ze zimního semestru 1946/47

1. *Jest vyšetřiti geometrické místo bodů, z nichž se jeví elipsa nebo hyperbola v konstantním úhlu* α.

Podrobně píši o úloze v závěru této části B.

2. *Co je geometrickým místem pólů os Reyeova osového komplexu, jež jsou incidentní s danou přímkou?*

Následuje studium několika vlastností tohoto přímkového komplexu.

Theodor Reye (1838–1919)[8] patřil ke generaci matematiků, která přivedla projektivní geometrii k jejímu vrcholu. Reyeovým komplexem se rozumí 3-parametrový systém přímek, které v kolineaci 3-rozměrného prostoru spojují odpovídající si body (duálně: jsou průsečnicemi korespondujících rovin). V této kolineaci jsou samodružné body vrcholy tetraedru, jehož stěny každá přímka komplexu protíná ve čtveřici bodů konstantního dvojpoměru – odtud též název tetraedrální komplex.

Osový komplex kvadratické plochy je zvláštní metrický případ tetraedrálního. Je tvořen těmi dvojicemi sdružených polár (přímek),[9] které jsou na sebe kolmé (i když se neprotínají). Vrcholy základního tetraedru jsou střed plochy a póly jejích hlavních rovin – tedy nevlastní body os.

3. *Jest vyšetřiti křivku*

$$x = \frac{t^3 - 1}{t(t+2)}, \qquad y = \frac{t^2}{t+2}.$$

4. *Jest narýsovati křivku*

$$(x^2 - 1)(x + 2) = (y^2 - 1)(y - 2).$$

5.1. *Jest vyšetřiti křivku*

$$x = \frac{t^3 + 1}{t}, \qquad y = \frac{t^2 + 2t - 1}{t}.$$

5.2. *Jest dokázati tyto vlastnosti křivky* $x^3 = x^2 + y^2$:

a) *Existují 3 jednomocné systémy kuželoseček, které mají ve dvou bodech s křivkou dotyk 2. řádu. Pro každý systém přímka spojující body dotyku jde inflexním bodem křivky. A naopak. Každá přímka jdoucí inflexním bodem* [dané]

---

[8] Posmrtné vzpomínky na něho otiskli Friedrich Schur v Mathematische Annalen (1921), 165–167, a Heinrich Timerding v Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung 31(1922), 185–203, se seznamem prací, kterému vévodí rozsáhlé dílo *Die Geometrie der Lage* (Hannover I. 1866, II. 1868; od 3. vydání ve třech svazcích; 5. vyd. I. 1909, 4. vyd. II. 1907 a III. 1910; francouzský překlad: Paříž, 1881–1882, italský překlad: Benátky, 1884, anglický překlad: Londýn, 1898).

[9] Viz Bohumil Bydžovský: *Úvod do analytické geometrie* (Praha, 1923, str. 298–299).

křivky řeže ji ještě ve dvou bodech, jimiž lze proložiti kuželosečku, jež má v těch bodech s křivkou dotyk 2. řádu.

b) *Existuje 6 kuželoseček (3 pravé, 3 zvrhlé), jež mají s* [danou] *křivkou dotyk 5. řádu.*

c) *Bodem A* [dané] *křivky jde 5 kuželoseček, jež mají v bodech B_i ($i = 1, 2, \dots, 5$) s křivkou dotyk 4. řádu. 6 bodů A, B_i leží na kuželosečce.*

5.3 *Jest dokázati tyto vlastnosti přímé strofoidy*

$$(x^2 + y^2)(ax + by) - xy = 0 :$$

a) *Její parametrické vyjádření je*

$$x = \frac{t}{(a + bt)(1 + t^2)}, \qquad y = \frac{t^2}{(a + bt)(1 + t^2)}.$$

b) *Podmínka, aby 3 body křivky ležely v přímce, je $t_1t_2t_3 = -a/b$.*

c) *Podmínka, aby 4 body křivky ležely na kružnici, je $t_1t_2t_3t_4 = a^2b^2$.*

d) *Bodem křivky jdou 3 kružnice, jež křivku oskulují v bodech B_1, B_2, B_3. Onen bod a body B_1, B_2, B_3 leží na kružnici.*

Strofoidu lze geometricky vytvořit různými způsoby, asi nejjednodušeji takto (viz obr. 1): Zvolíme přímku p a mimo ni bod O; patu kolmice z bodu O na přímku p označíme P. Bodem O vedeme libovolnou přímku q a označíme Q její průsečík s přímkou p. Pak na přímce q určíme body Q_1, Q_2 tak, že $\overline{QQ_1} = \overline{QQ_2} = \overline{QP}$. Body Q_1, Q_2 vytvářejí strofoidu. Rovnoběžka s přímkou p ve vzdálenosti OP od ní (a neprocházející bodem O) je asyptota strofoidy. – Obsáhlé poučení o strofoidě a o literatuře k ní poskytují:

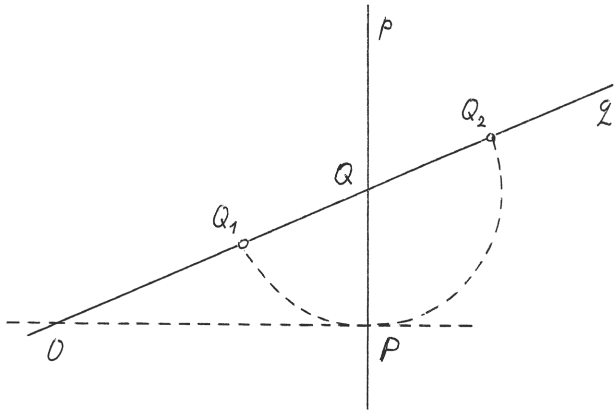
a) Gino Loria (1862–1954): *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven I* (Lipsko-Berlín, 1910, odd. II. kap. 3, str. 32 a násl., a kap. 8, str. 52 a násl., a kap. 9, str. 59 a násl.).

b) Gomes Teixeira (1850–1932): *Traité des courbes spéciales et remarquables planes et gauches I* (Coïmbre, 1908, kap. I, odd. 3, str. 30–45). Podle G. Teixeiry je nejstarší známá zmínka o strofoidě v dopisu, který Verdus adresoval roku 1645 Evangelistu Torricellimu (1608–1647).

c) Ve francouzské literatuře se termín *strophoïde* používá zřídka, křivka se řadí mezi *cubiques circulaires unicursales* (tj. kubické křivky s bodem uzlovým nebo vratu). Viz H. Brocard-T. Lemoyne: *Courbes géométriques remarquables III* (Paříž, 1970, str. 100–110).[10]

d) Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften III-2-1, Gustav Kohn (1859–1921): *Ebene Kurven dritter und vierter Ordnung*, str. 513 a násl.

[10] Na str. 110 autoři citují Václava Jeřábka (1845–1931) a Karla Zahradníka (1848–1916).



Obr. 1

6.1 *Jest dokázati tyto vlastnosti prostorové křivky*

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3 :$$

a) *Spojnice bodů křivky v involutorní korespondenci vytvářejí jednodílný hyperboloid.*

b) *Průsečnice oskulačních rovin bodů křivky v involutorní korespondenci vytvářejí jednodílný hyperboloid.*

c) *Podmínka, aby 5, resp. 6 bodů t_i křivky bylo na kouli, je*

$$\sum_1^5 t_1 t_2 - \Big(\sum_1^5 t_1\Big)^2 = 1 \quad \textit{resp.} \quad \sum_1^6 t_1 t_2 = 1, \quad \sum_1^6 t_1 = 0.$$

d) *Rovnice tritangenciální koule je*

$$x^2 + y^2 + z^2 - \lambda x - \frac{3}{4} y - 2\lambda z + \lambda^2 = 0.$$

e) *Geometrické místo středů tritangenciálních koulí je přímka*

$$2y - z = 0, y - 3/8 = 0.$$

f) *Geometrické místo kružnic jdoucích body dotyku tritangenciálních koulí a obálka tritangenciálních koulí je rotační jednodílný hyperboloid*

$$3x^2 + 4y^2 - 4xz - 3y = 0.$$

g) *Existují dvě kulové plochy, jež mají s křivkou dotyk 4. řádu.*

Prostorové křivky 3. stupně rozdělil Franz Seydewitz (1807–1852) v článku *Lineäre Konstruktion einer Curve doppelter Krümmung*[11] na čtyři typy podle jejich nevlastních bodů – viz též Otto Staude (1857–1928) v knize *Analytische Geometrie der kubischen Kegelschnitte* (Leipzig, Berlin, 1913)[12], str. 9: jeden reálný a dva imaginární body: kubická elipsa; tři reálné body: kubická hyperbola; dva splývající a jeden další reálný bod: kubická hyperbolická parabola; tři splývající body: kubická parabola.

Kdybychom do rovnic křivky z úlohy zavedli homogenní parametry i souřadnice, ihned bychom viděli, že se jedná o kubickou parabolu. Říká se jí též normální křivka 3-rozměrného prostoru.

V české literatuře o prostorové kubice pojednává Bohumil Bydžovský v knize *Úvod do algebraické geometrie* (Praha, 1948, kap. XIX, str. 584 a násl.). Pro normální křivku n-rozměrného prostoru viz Jan Vojtěch: *Geometrie projektivní* (Praha, 1932, odd. 129, str. 685 a násl.) s množstvím literárních údajů.

6.2 *Jest nalézti geometrické místo ohnisek kuželoseček vepsaných nebo opsaných rovnoběžníku.*

7. *Vyšetřiti geometrické místo ohnisek kuželoseček Chaslesova svazku.*

Michel Chasles (1793–1880). Jeho dodnes citované dílo je *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie.*[13]

Chaslesovým svazkem se rozumí jednoparametrový systém kuželoseček, které se dotýkají daných dvou přímek v jejich daných dvou bodech. O jeho vlastnostech jedná Václav Hlavatý v knize *Projektivní geometrie I: Útvary jednoparametrické.*[14]

8.1 *Jest napsati rovnici elipsy dotýkající se souřadnicových os, jsou-li dány její osy* a, b.

8.2 *Jest vyšetřiti čáru, kterou opíší ohniska pevné elipsy (poloos* a, b*), pohybující se tak, že se stále dotýká souřadnicových os.*

8.3 *Jest vyšetřiti řezy bitangenciálních rovin Steinerovy římské plochy.*

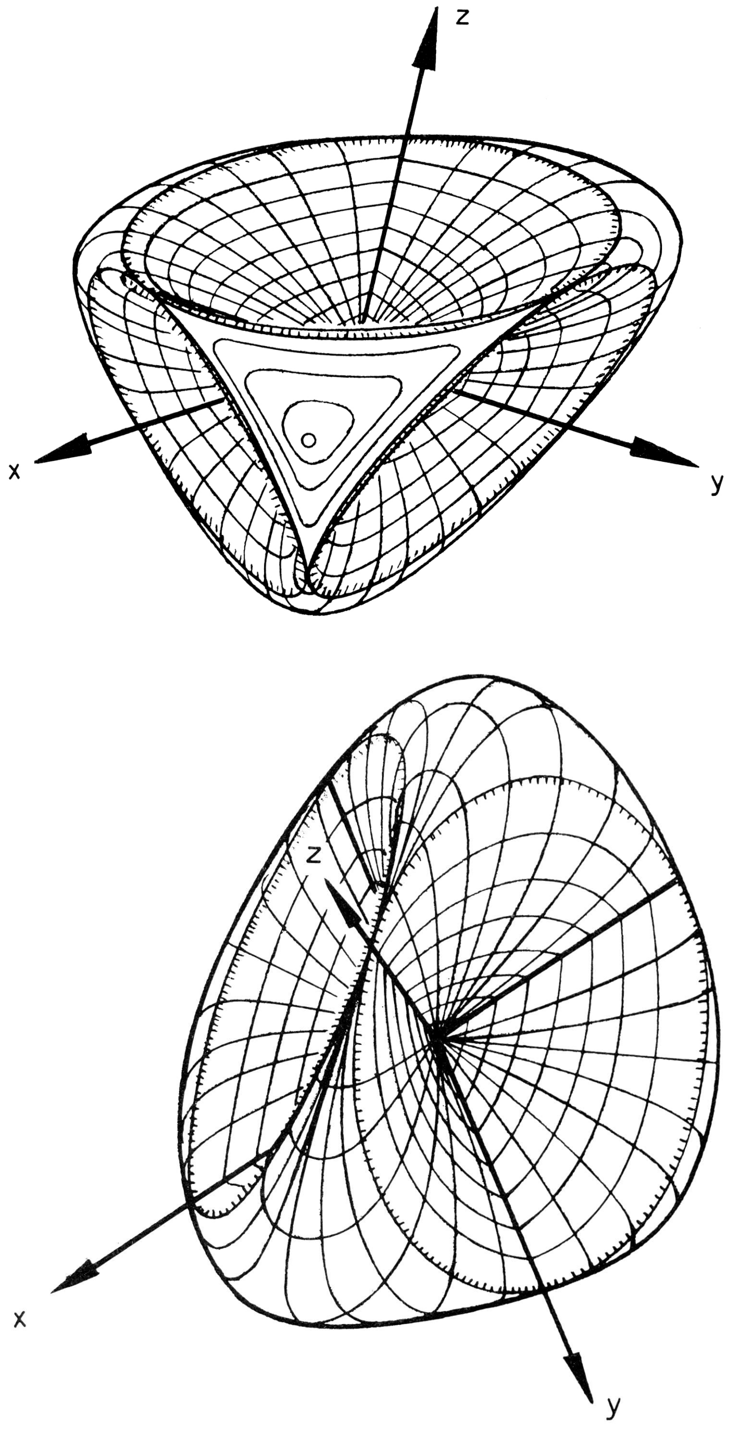
Plochou 4. stupně s jedním trojným bodem a třemi z něj vycházejícími nekomplanárními dvojnými přímkami se zabýval Jacob Steiner (1796–1863) za svého pobytu v Římě roku 1844; proto ji nazval „římská plocha“. Připomenu její vyjádření v projektivních souřadnicích $x_1, \dots, x_4$ se základním čtyřstěnem $O_1 \dots O_4$.

[11] Archiv der Mathematik und Physik 10(1847), 203–214, viz str. 212.

[12] První analytické soustavné pojednání o prostorových kubikách, které byly do té doby téměř výhradně studovány synteticky.

[13] Bruxelles, 1837, 2. vyd.: Paříž, 1875, 3. vyd. 1889, faksimile 1. vyd.: Paříž, 1989; německý překlad: Halle, 1839, reprint: Wiesbaden, 1968; ruský překlad: Moskva, 1883.

[14] Praha, 1944, kap. III, odd. 3, str. 222–224; viz též už v 6.1 citovanou knihu B. Bydžovského z roku 1948, str. 217.



Obr. 2

Vloží-li se trojný bod do vrcholu O_4 a dvojné přímky do hran O_4O_1, O_4O_2, O_4O_3, tak rovnice římské plochy se uvede na tvar

$$x_1^2x_2^2 + x_2^2x_3^2 + x_3^2x_1^2 - 2x_1x_2x_3x_4 = 0.$$

Plocha má čtyři kuželosečky, podél každé dvojnou tečnou rovinu. Vezmou-li se tyto roviny za stěny základního souřadnicového čtyřstěnu, lze rovnici Steinerovy římské plochy psát takto:

$$\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} + \sqrt{x_3} + \sqrt{x_4} = 0;$$

jednotkový bod je v trojném; odmocniny nejsou jednoznačné. Rovina jdoucí hranou souřadnicového tetraedru protíná římskou plochu ve dvou kuželosečkách (ty splývají, když rovina je tečná podél kuželosečky). Přímka jdoucí trojným bodem protne plochu ještě v jednom bodě; tím je umožněno její zobrazení na rovinu, které poskytuje mnoho příležitostí ke studiu Steinerovy plochy.

O římské ploše je rozsáhlá literatura. Viz Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, zvláště svazek III-2-2B, 1921–34. Stručný výklad poskytují Kuno Fladt (1889–1977) – Arnold Baur († 1966): *Analytische Geometrie spezieller Flächen und Raumkurven.*[15] V české literatuře o římské ploše krátce psali Jan Vojtěch: *Geometrie projektivní* (Praha, 1932, str. 672–673, s literárními údaji) a Bohumil Bydžovský: *Úvod do algebraické geometrie* (Praha, 1948, str. 576–581, bez literatury).

Názornou představu o Steinerově ploše poskytují fotografie jejích modelů ve sbírce Gerd Fischer (ed.): *Mathematische Modelle – Mathematical Models* (Braunschweig, Wiesbaden, 1986, str. 42–44; viz též sv. 2: *Kommentarband*, str. 19 + seznam lit. str. 23). Obr. 2 římské plochy jsou reprodukce ze str. 471 z výše citované Fladtovy-Baurovy knihy.

10.[16] *Jest nalézti geometrické místo bodů, jejichž poláry vůči kružnicím k_1, k_2, k_3 se protínají v jednom bodě.*

Na této úloze lze dobře ukázat jeden z rozdílů mezi analytickou a syntetickou metodou. Analytický postup se přímo vnucuje, je zcela průhledný a myšlenkově jednoduchý. Dokonce na něj mohl stačit šikovnější septimán na reálce, který se vyrovnal s první třetinou učebnice Karel Šilháček a Hynek Sechovský: *Geometrie pro VII. třídu reálek …* (Praha, 1936): rovnice poláry bodu ke kružnici je na straně 65, podmínka kolmosti dvou kružnic na straně 74, základní poučení o determinantech je na stranách 31 až 36. Ale za zmíněnou myšlenkovou snadnost se zaplatí zdlouhavějším výpočtem. Ten při syntetické metodě zcela odpadá a je nahrazen jistou dávkou důvtipu, podmíněnou ovšem též jistými předběžnými znalostmi.

[15] Braunschweig, 1975, 2. část, odd. 8: *Die Römerfläche*, str. 439–484.

[16] Místo úlohy 9 je v sešitu nepopsaný list. K přepisu jsem se tehdy nedostal.

Nejdříve naznačím analytické řešení. Ke kružnicím

$$x^2 + y^2 + 2M_i x + 2N_i y + L_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3)$$

má bod $[\xi, \eta]$ poláry

$$(\xi + M_i)x + (\eta + N_i)y + M_i\xi + N_i\eta + L_i = 0.$$

Procházejí jedním bodem právě jen při

$$(*) \qquad \Delta = \begin{vmatrix} \xi + M_1 & \eta + N_1 & M_1\xi + N_1\eta + L_1 \\ \xi + M_2 & \eta + N_2 & M_2\xi + N_2\eta + L_2 \\ \xi + M_3 & \eta + N_3 & M_3\xi + N_3\eta + L_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Symbolicky tento determinant označím

$$|\, \xi + M_i \quad \eta + N_i \quad M_i\xi + N_i\eta + L_i \,| .$$

Ovšem

$$|\, \xi \quad \eta \quad M_i\xi \,| = 0, \qquad |\, \xi \quad \eta \quad N_i\eta \,| = 0, \qquad |\, \xi \quad \eta \quad L_i \,| = 0.$$

Člen s ξ^2 je

$$|\, \xi \quad N_i \quad M_i\xi \,| = \xi^2 \begin{vmatrix} 1 & N_1 & M_1 \\ 1 & N_2 & M_2 \\ 1 & N_3 & M_3 \end{vmatrix} = -\xi^2 \begin{vmatrix} M_1 & N_1 & 1 \\ M_2 & N_2 & 1 \\ M_3 & N_3 & 1 \end{vmatrix},$$

člen s $\xi\eta$ je

$$|\, \xi \quad N_i \quad N_i\eta \,| + |\, M_i \quad \eta \quad M_i\xi \,| = 0 + 0,$$

člen s η^2 je

$$|\, M_i \quad \eta \quad N_i\eta \,| = \eta^2 \begin{vmatrix} M_1 & 1 & N_1 \\ M_2 & 1 & N_2 \\ M_3 & 1 & N_3 \end{vmatrix} = -\eta^2 \begin{vmatrix} M_1 & N_1 & 1 \\ M_2 & N_2 & 1 \\ M_3 & N_3 & 1 \end{vmatrix}.$$

Vidíme, že rovnice $(*)$ má tvar

$$\begin{vmatrix} M_1 & N_1 & 1 \\ M_2 & N_2 & 1 \\ M_3 & N_3 & 1 \end{vmatrix} (\xi^2 + \eta^2) + (.)\xi + (.)\eta - \begin{vmatrix} M_1 & N_1 & L_1 \\ M_2 & N_2 & L_2 \\ M_3 & N_3 & L_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Hledanou množinou je tedy kružnice. Podobně bychom propočítali i koeficienty při ξ a η. Dospěli bychom k

$$\begin{vmatrix} \xi^2 + \eta^2 & \xi & \eta & 1 \\ L_1 & M_1 & N_1 & 1 \\ L_2 & M_2 & N_2 & 1 \\ L_3 & M_3 & N_3 & 1 \end{vmatrix} = 0,$$

což je rovnice potenční kružnice daných kružnic k_i (viz citovanou už učebnici B. Bydžovského z roku 1923, str. 143).

L. Seifert dal přednost syntetickému řešení. Vyšel z poznatku, že poláry bodu P vůči kružnicím svazku se všechny protínají v bodě P'; je to velmi speciální případ staré věty o polární vlastnosti svazku kuželoseček, viz Eduard Weyr (1852–1903): *Projektivná geometrie základných útvarů prvního řádu* (Praha, 1898, str. 153), nebo Karel Havlíček (1915–1983): *Úvod do projektivní geometrie kuželoseček* (Praha, 1956, str. 128); pro zmíněnou specializaci viz Jan Vojtěch: *Geometrie projektivní* (Praha, 1932, 2. odst. v pozn. [5]) na str. 189). Z elementárních poznatků o svazcích kružnic pak vychází, že bod P' leží na kružnici, která jdouc bodem P protíná ortogonálně kružnice svazku. Pak stačí tento poznatek aplikovat na dva svazky určené kružnicemi k_1, k_2 a k_1, k_3 a výsledky spojit.

11. *Jest vyšetřiti křivku*

$$(x-1)^3y - x(y-1)^2 = 0$$

pomocí přibližných křivek.

Pro tento způsob viz Bohumil Bydžovský: *Úvod do algebraické geometrie* (Praha, 1948, str. 488 a násl.). B. Bydžovský odkazuje i na učebnici Karla Petra (1868–1950): *Počet diferenciální (část analytická)* (Praha, 1923, str. 446 a násl.). Viz též Julian Coolidge (1873–1958): *A Treatise on Algebraic Plane Curves* (Oxford, 1931, str. 44–49). Autorem této metody je Isaac Newton.

12.1 *Jest prostudovati průsečnou křivku ploch*

$$2x^2 + y^2 - z^2 = 0, \qquad 2xy - 2x - 1 = 0.$$

L. Seifert začal vyšetřením svazku kvadrik

$$2x^2 + y^2 - z^2 = 0, \qquad 2xy - 2xt - t^2 = 0,$$

v němž zjistil jen hyperboloidy a dva hyperbolické paraboloidy.

Průniková čára je symetrická podle roviny $z = 0$. Lze ji parametricky vyjádřit – v poloprostoru $z > 0$ – takto:

$$x = u, \qquad y = \frac{2u+1}{2u}, \qquad z = \frac{1}{2u} \cdot \sqrt{8u^4 + (2u+1)^2}; \qquad u \in (0, \infty),$$

a pak ji studovat známými způsoby z diferenciální geometrie.

12.2. *V trimetrických souřadnicích jest nalézti rovnici kružnice*

a) *jdoucí vrcholy souřadného trojúhelníka;*

b) *pro niž souřadnicový trojúhelník je polární.*

Pro trimetrické souřadnice viz Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften III-1-2 (Leipzig, 1914–1931, část III AB 10, A. Berkhan – Wilhelm Meyer (1856–1934): *Neuere Dreiecksgeometrie* (dokončeno 1914), zvláště odd. 18, str. 1190–1195). Též Albrecht Emmerich (* 1856): *Die Brocardschen Gebilde und ihre Beziehungen zu den verwandten merkwürdigen Punkten und Kreisen des Dreiecks* (Berlin, 1891, str. 33–34). V české literatuře viz Zdeněk Pírko (1909–1983):[17] *O souřadnicích v rovině* (Praha, 1942, str. 47–51). Z tohoto svazečku č. 15 sbírky „Cesta k vědění" si zaslouží pozornosti delší historický nástin na stranách 5 až 12 a seznam literatury na stranách 90 až 92.

V některých úlohách jsou trimetrické souřadnice velmi výhodné, v jiných znamenají komplikace. Např. rovnice kružnice je v nich vzdálena od jednoduchosti.

13.1. *Jest vyšetřiti svazek* $(ax+by)(\frac{x}{a}+\frac{y}{b}-1)+\lambda xy=0$ *a nalézti geometrické místo středů jeho kuželoseček.*

13.2. *Vyšetřiti geometrické místo středů kvadratických ploch systému*

$$x^2+y^2+z^2-r^2+\lambda z(x+\mu y-a)=0$$

(a, r *pevné*; λ, μ *parametry*).

V obou úlohách je analytické řešení snadné: Přejde se k homogenním souřadnicím a množina středů se získá jako množina pólů nevlastní přímky, resp. roviny. L. Seifert předvedl i syntetické vyšetření obou množin.

14.1. *Ukažte, že poloměry křivosti dvou bitangenciálních kuželoseček v bodech dotyku jsou úměrné.*

Pro kuželosečku dotýkající se v počátku osy x

$$Ax^2+2Bxy+Cy^2+2Dy=0$$

se snadno zjistí, že $y''=-\frac{A}{D}$. Z toho ihned pro poloměr křivosti v počátku vyjde $-\frac{D}{A}$. Pak L. Seifert napsal rovnici Chaslesova svazku, jehož kuželosečky se v počátku dotýkají osy x a v bodě T tečny t. Transformací souřadnicové soustavy do nové osy x v tečně T a nového počátku v bodě T se zjistí poloměr křivosti kuželosečky v bodě T. Závěr už je zřejmý.

14.2 *Dokažte, že osy všech kuželoseček, jež mají v daném bodě dotyk čtyřbodový, obalují parabolu.*

[17] Nekrolog napsal Karel Drábek, viz Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 29(1984), 52–54.

Jakmile se má studovat obálka přímek, bývá obvykle vhodné přejít k přímkovým souřadnicím, což L. Seifert udělal. Připomínám citovanou Pírkovu knížku z roku 1942, zvláště strany 21 až 29; citovaný Julius Plücker (1801–1868) – přímkové souřadnice se též nazývají po něm – patřil ke geometrům, kteří rozvinuli projektivní geometrii včetně jejího analytického pojetí; prostor chápal nejen jako 3-rozměrnou množinu bodů, a i jako trojrozměrnou množinu rovin a 4-rozměrnou množinu přímek.

15. *Dán elipsoid a soustředná koule. Polární roviny bodu M k oběma plochám se sečou v přímce δ.*

Následuje šest otázek týkajících se vztahů mezi bodem M a přímkou δ.

16. *Je dána zborcená plocha*

$$f(x,y,z) \equiv y^2z^2 + 2kxyz + k^2x^2 - 2ak^2y = 0.$$

1) *Nalézti stopy a zdánlivé obrysy na průmětnách a udati konstrukci površek.*

Následuje pět dalších otázek k dané ploše. Povrchové přímky zjistil L. Seifert takto: Protože levá strana rovnice plochy je rozdíl čtverců, lze ji rozložit na

$$(yz + kx - k\sqrt{2ay})(yz + kx + k\sqrt{2ay});$$

z toho se snadno usoudí, že přímky plochy jsou

$$yz + kx \pm k\sqrt{2ay} = 0, \qquad y = \text{konst.}$$

Pro ně pak L. Seifert odvodil jednoduchou konstrukci.

17. *Jsou dány dvě paraboly*

$$(z-a)^2 - 2px = 0, \quad y = 0; \qquad (z-b)^2 - 2qy = 0, \quad x = 0$$

jako řídící křivky přímkové kongruence.

1) *Určiti rozvinutelné plochy v kongruenci.*

Následují tři úlohy ke kongruenci. Přímkovou kongruencí se rozumí dvouparametrická množina přímek. Zpravidla je zadána dvěma řídícími čarami jako množina spojnic každého bodu jedné čáry s každým bodem druhé čáry. Literatura o nich je rozsáhlá. Souhrnně o přímkových kongruencích jedná Сергей Павлович Фиников (1883–1964): *Теория конгруэнций* (Moskva-Leningrad, 1950, německý překlad: Berlín 1959) a *Теория пар конгруэнций* (Moskva, 1956, francouzský překlad 1976).

18. *Na křivce buď dán bod obratu O a bod M. Označme r_1 poloměr oskulační kružnice křivky v M, r_2 poloměr kružnice, která se křivky dotýká v bodě*

M a jde O, a konečně r_3 poloměr kružnice, jdoucí M a dotýkající se křivky v bodě O. Jest dokázati

$$\lim_{M\to O} r_1 : r_2 : r_3 = \frac{1}{3} : \frac{1}{2} : 1.$$

L. Seifert pracoval s vyjádřením křivky ve tvaru $y = f(x)$. Se známými kanonickými rovnicemi křivky by se dal jeho postup o něco zjednodušit.

19. *Budiž M křivka, jež je geometrickým místem bodů, z nichž lze vésti k elipse tečny svírající konstantní úhel.* [Viz úlohu 1.] *Spusťme z bodu B této křivky normály na elipsu; vzdálenosti tohoto bodu od pat normál označme n_i, poloměry křivosti v těchto patách ϱ_i. Jest ukázati, že platí*

$$\frac{\varrho_1\varrho_2\varrho_3\varrho_4}{n_1n_2n_3n_4} = k = \text{konst.} \tag{$*$}$$

Zápis není dokončen. Naznačím, jak L. Seifert postupoval. Měl být o něco opatrnější. Nejdříve vyšetřil množinu bodů, pro které platí $(*)$, a pak – to už v zápisu nemám – patrně ukázal, že tato množina (tj. křivka) je při vhodné volbě konstant křivka probíraná v úloze 1. Při tomto postupu se musí připustit – a to L. Seifert přehlédl, asi ho k tomu svedlo, že bod B z textu úlohy předpokládal na čáře e úlohy 1 – že bod B, z nějž se vedou normály, je nejen vně, ale i uvnitř dané elipsy; navíc, že z bodů vně její evoluty jdou jen 2 reálné normály, další 2 jsou imaginární. Ani slovo o tom, co s poloměrem křivosti v patě imaginární normály nebo s její délkou mezi patou a bodem B. Ale velmi by L. Seifertovi křivdil, kdo by si nebyl vědom, že tento rozdíl ochotně přehlíželo mnoho jeho současných a ještě více jeho předchozích kolegů.

Seifertovým východiskem bylo parametrické vyjádření elipsy

$$x = a\cos\varphi, \qquad y = b\sin\varphi, \qquad \varphi \in \langle 0, 2\pi).$$

Pokud je bod $B[\xi,\eta]$, z něhož vedeme normály, vně elipsy, tak pro průmět n' do osy x normály n z bodu B platí

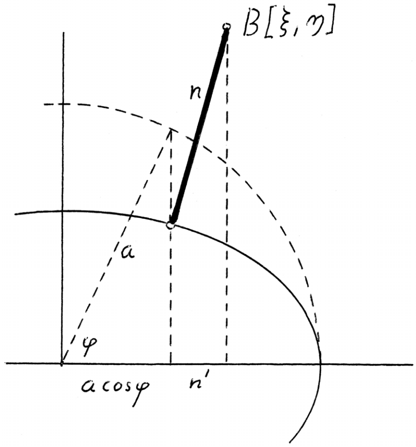
$$n' = \xi - a\cos\varphi;$$

vyčteme to ihned z obr. 3, uvědomíme-li si geometrický význam parametru φ.

(Pokud by bod B byl uvnitř elipsy, bylo by $n' = a\cos\varphi - \xi$. Ostatně měl by se zmínit i případ, že bod B je na elipse, kdy $n' = 0$.) Pro čtyři normály z bodu B tak

$$n_1'n_2'n_3'n_4' = \prod_{i=1}^{4}(\xi - a\cos\varphi_i) = \xi^4 - a\xi^3 s_1 + a^2\xi^2 s_2 - a^3\xi s_3 + a^4 s_4,$$

kde s_i je i-tá symetrická funkce z $\cos\varphi_1, \dots, \cos\varphi_4$.



Obr. 3

Tyto funkce se určí z rovnice, která se dostane, když se při uvedeném parametrickém vyjádření napíše rovnice 4. stupně pro kosiny parametrů φ pat kolmic spuštěných z bodu B na elipsu.

Podobně, už jednodušeji, se vypočítá součin $\varrho'_1\varrho'_2\varrho'_3\varrho'_4$ průmětů do osy x poloměrů křivosti. Očividná relace

$$\frac{\varrho'_1\varrho'_2\varrho'_3\varrho'_4}{n'_1n'_2n'_3n'_4} = \frac{\varrho_1\varrho_2\varrho_3\varrho_4}{n_1n_2n_3n_4}$$

vede už k požadované množině bodů.

Kdyby byl L. Seifert uvedl, odkud úlohu převzal, byl bych si to jistě poznamenal. Tak tedy: Vyslovil ji E. Barisien jako problém 1587 v Nouvelles Annales de Mathématiques (3)7(1888), 448. Následující úloha 1588 je opět od E. Barisiena a opět se týká normál. Při stejném označení se má dokázat, že

$$\frac{\varrho_1}{\varrho_1 - n_1} + \frac{\varrho_2}{\varrho_2 - n_2} + \frac{\varrho_3}{\varrho_3 - n_3} + \frac{\varrho_4}{\varrho_4 - n_4} = 2.$$

Spustím-li specielně normály ze středu elipsy, je (a, b poloosy)

$$\varrho_1 = \varrho_3 = \frac{b^2}{a}, \qquad \varrho_2 = \varrho_4 = \frac{a^2}{b}, \qquad n_1 = n_3 = a, \qquad n_2 = n_4 = b$$

a snadno se přesvědčím, že pro tyto hodnoty je poslední Barisienova relace splněna.

* * *

Zde končí první sešit, do kterého jsem přepisoval své zápisy ze Seifertova semináře. V druhém sešitu, do kterého jsem Seifertovy výklady zapisoval přímo, jsem témata čísloval římskými číslicemi.

I. *Osový komplex.*

Podstatné rozšíření úlohy 2, celkem 14 stran v sešitu. Úvodem L. Seifert připomíná terminologii: Přímka má v prostoru rovnice $x = az + c$, $y = bz + d$, tedy závisí na čtyřech parametrech. Přímky, které závisejí jen na třech parametrech (z původních čtyř omezeny jistou podmínkou), tvoří přímkový komplex. Přímky, které závisejí na dvou parametrech (z původních čtyř omezeny dva jistými podmínkami), tvoří přímkovou kongruenci. Přímky, které závisejí jen na jednom parametru (z původních čtyř omezeny třemi podmínkami), tvoří přímkovou plochu, rozvinutelnou nebo zborcenou.

II. *Jest vyšetřiti křivku*

$$x = \frac{t^2 - 1}{t(t^2 + 1)}, \qquad y = \frac{t^2 + 3}{t(t^2 + 1)}.$$

III. *Metoda znaménkovací (k zakreslení křivky): Jest zakresliti křivky*

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0 \qquad \text{čili} \qquad (x + y)(x^2 - xy + y^2) = 3axy,$$

$$(x^2 - y^2)(x + 2y) + x(x + y - 1) = 0.$$

Podaří-li se levou stranu rovnice vhodně rozložit jako třeba v prvním případu, lze postupovat takto: protože $x^2 - xy + y^2 \geq 0$, tak při $a > 0$

a) $x + y > 0 \longrightarrow x > 0, y > 0$ nebo $x < 0, y < 0$, a bod $[x, y]$ je v průniku polorovin daných uvedenými nerovnostmi, tedy jen v 1. kvadrantu;

b) $x + y < 0 \longrightarrow x > 0, y < 0$ nebo $x < 0, y > 0$ a bod $[x, y]$ je v úhlech 45° s rameny v ose sudých kvadrantů a negativních částí os x i y. – Podobně při rozkladu $y(y^2 - 3ax) = -x^3$, v němž by přípustné oblasti určovaly přímky $x = 0$, $y = 0$ a parabola $y^2 = 3ax$.

Křivka je ovšem známý Descartesův list s dvojným bodem v počátku, jeho tečnami v souřadnicových osách a asymptotou $x + y + a = 0$.

IV. *Úlohy o křivce $x^3 = x^2 + y^2$.*

L. Seifert je probíral dosti podrobně. Tak třeba – při vhodném parametrickém vyjádření zjistil tuto podmínku, aby šest bodů křivky leželo na kuželosečce: Součet parametrů oněch bodů je celistvý násobek π. Z toho četné speciální případy.

Tvar křivky, včetně izolovaného bodu v počátku, zachytil Bohumil Bydžovský v knize *Úvod do algebraické geometrie* (Praha, 1948; na obr. 41 ze str. 498). Pro hodnoty funkce $y = x\sqrt{x - 1}$ při $x \in \langle 1, 4 \rangle$ po 0.1 nebo 0.2 viz В. Д. Рыбасенко, И. Д. Рыбасенко: *Элементарные функции – формулы, таблицы, графики* (Moskva, 1987, str. 92). Příslušný graf 2 na str. 94 je nakreslen nedbale.

V. *Geometrické místo ohnisek osnovy kuželoseček.*

Osnovou kuželoseček rozuměl L. Seifert jednoparametrovou množinu kuželoseček, které se dotýkají čtyř přímek, z nichž žádné tři nemají společný bod; tedy duální útvar k svazku kuželoseček. Termín není ustálen. U Ed. Weyra (1898) a J. Vojtěcha (1932) „řada“, u V. Hlavatého (1944) „osnova“, u K. Havlíčka (1956) zase „řada“

Množinou ohnisek je cirkulární čára 3. stupně; o cirkulárních křivkách jedná a literaturu o nich uvádí G. Loria (1910) v citované už knize (II. odd., kap. 3, str. 32–36).

VI. *O prostorové kubice* $x = t, y = t^2, z = t^3$.

Pokračování úlohy 6.1.

VII. *O Steinerově římské ploše* $\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z} - 1 = 0$.

Pokračování úlohy 8.3.

VIII. *Trs (kongruence) kuželoseček.*

Jím L. Seifert rozuměl dvouparametrovou analogii k jednoparametrovému svazku kuželoseček (v terminologii B. Bydžovského (1948): síť místo trs). Ten je při daných dvou kuželosečkách $f(x, y, z) = 0$, $g(x, y, z) = 0$ určen rovnicí $\varphi f + \gamma g = 0$ se dvěma homogenními parametry φ, γ. Trs je – při daných třech kuželosečkách $f = 0$, $g = 0$, $h(x, y, z) = 0$ dán rovnicí

$$(*) \qquad \varphi f(x, y, z) + \gamma g(x, y, z) + \chi h(x, y, z) = 0$$

se třemi homogenními parametry φ, γ, χ. L. Seifert začal touto otázkou: Jaká je množina bodů, jejichž poláry (vůči všem kuželosečkám trsu) se sekou v jednom bodě? Polára pólu $P[\xi, \eta, \zeta]$ vůči kuželosečce $(*)$ je

$$\left(\varphi\frac{\partial f}{\partial x} + \gamma\frac{\partial g}{\partial x} + \chi\frac{\partial h}{\partial x}\right)\Big|_P \cdot x + \left(\varphi\frac{\partial f}{\partial y} + \gamma\frac{\partial g}{\partial y} + \chi\frac{\partial h}{\partial y}\right)\Big|_P \cdot y +$$

$$+ \left(\varphi\frac{\partial f}{\partial z} + \gamma\frac{\partial g}{\partial z} + \chi\frac{\partial h}{\partial z}\right)\Big|_P \cdot z = 0$$

čili

$$\begin{aligned} &\varphi \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\Big|_P \cdot x + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_P \cdot y + \frac{\partial f}{\partial z}\Big|_P \cdot z\right) + \\ &+ \gamma \cdot \left(\frac{\partial g}{\partial x}\Big|_P \cdot x + \frac{\partial g}{\partial y}\Big|_P \cdot y + \frac{\partial g}{\partial z}\Big|_P \cdot z\right) + \\ &+ \chi \cdot \left(\frac{\partial h}{\partial x}\Big|_P \cdot x + \frac{\partial h}{\partial y}\Big|_P \cdot y + \frac{\partial h}{\partial z}\Big|_P \cdot z\right) = 0. \end{aligned}$$

Má-li tato rovnice platit identicky ve φ, γ, χ, je to možné jen tak, že součty v závorkách vymizí. K tomu je nutné a stačí (přecházím od ξ, η, ζ k x, y, z) aby

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial g}{\partial z} \\ \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{vmatrix} = 0.$$

Determinant je známý Jacobián.[18] V uvažovaném případě je hledaná množina křivka 3. stupně.

L. Seifert si pak všímal případu, kdy se Jacobián trsu rozpadá. Jen vyslovil, že Jacobiánem trsu kružnic, určeného kružnicemi k_1 a k_2 a k_3, je úběžná přímka a kružnice ke k_1 a k_2 a k_3 ortogonální. Důkaz je snadný: Jsou-li ty kružnice

$$x^2 + y^2 + L_i z^2 + 2M_i xz + 2N_i yz = 0; \qquad i = 1, 2, 3,$$

pak příslušný Jacobián je

$$\begin{vmatrix} x + M_1 z & y + N_1 z & L_1 z + M_1 x + N_1 y \\ x + M_2 z & y + N_2 z & L_2 z + M_2 x + N_2 y \\ x + M_3 z & y + N_3 z & L_3 z + M_3 x + N_3 y \end{vmatrix} = 0.$$

Připomeneme-li si propočítání determinantu $(*)$ z úlohy 10, ihned dostaneme

$$z \cdot \begin{vmatrix} x^2 + y^2 & xz & yz & z^2 \\ L_1 & M_1 & N_1 & 1 \\ L_2 & M_2 & N_2 & 1 \\ L_3 & M_3 & N_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

$z = 0$ je nevlastní přímka a anulovaný determinant je rovnice kružnice, která je ortogonální k daným třem kružnicím.

IX. *O logaritmické spirále. Gino Loria se pokusil o klasifikace transcedentních křivek, jež mají algebraickou diferenciální rovnici.*

Tyto čáry studuje G. Loria hned na začátku své knihy *Spezielle algebraische und transzendente obene Kurven*, II. *Die transzendenten und die abgeleiteten Kurven* (Leipzig, Berlin, 2. vyd. 1911). Stojí za upozornění, že na stranách 360 až 367 popisoval historický vývoj teorie rovinných křivek i jak se mu jevila její budoucnost; po sto letech je tato teorie nejen opuštěna, ale i zapomínána.

[18] Viz B. Bydžovský (1948) str. 118 a 336. Škoda, že bez poznámky, jak pojmenování vzniklo: Carl Gustav Jacobi byl před polovinou 19. století považován po C. Gaussovi za nejvýznamnějšího německého matematika.

Logaritmické spirále se G. Loria věnoval v části VI, kap. 7, strany 60 až 70. Je integrální křivkou diferenciální rovnice $\frac{d\varrho}{d\varphi} = konst.\varrho$, v níž ϱ a φ je v polárních souřadnicích délka průvodiče a jeho amplituda pro bod čáry. L. Seifert probral několik jejích vlastností.

X. *O obálkách roviny*

$$x \cos u + y \sin u + vz + \cos 2u + v^2 = 0.$$

Rovina s touto rovnicí v pravoúhlých souřadnicích x, y a z, která závisí na dvou parametrech u a v, obaluje v „obecném" případě plochu. L. Seifert odvodil několik jejích vlastností.

XI. *Vyšetření křivky*

$$x^4 + y^3 - xy = 0$$

přibližnými křivkami.

Metoda využitá už v úloze 11.

* * *

Zde končí zápisy ze zimního semestru 1946/47.

Seminární cvičení z části letního semestru 1946/47

XII. *Trimetrické (trojúhelníkové) souřadnice.*

Pokračování úlohy 12.2. Rovnice přímky, specielně úběžné. Podmínky rovnoběžnosti či kolmosti dvou přímek. Souřadnice středů kružnic vepsané a připsaných souřadnicovému trojúhelníku. Souřadnice ortocentra, těžiště a středu kružnice opsané, Eulerova přímka (spojnice průsečíků výšek, těžnic a os stran). Rovnice kružnice, zvláště kružnice devíti bodů [středy stran, paty výšek, půlící body jejich úseků mezi vrcholy a ortocentrem; dotýká se kružnice vepsané a tří připsaných – to plyne ihned z věty, kterou dokázali John Casey (1820–1891) a další jako nutnou a postačující podmínku, aby ke čtyřem kružnicím existovala kružnice jich se dotýkající (zobecnění věty Ptolemaiovy, ba spíše Menelaovy)]. Jak udává známý historik matematiky Moritz Cantor (1829–1920) v *Allgemeine deutsche Biographie* 7(1877), str. 747, a přetiskuje Pierre Grimal (ed.) v *Dictionnaire des biographies* I (Paříž, 1958, str. 526), na onu kružnici narazili už Charles Brianchon (1783–1864) a Jean Poncelet (1788–1867), ale pro německé geometry ji objevil Karl Feuerbach (1800–1834).[19]

[19] Píše o něm M. Cantor: *Karl Wilhelm Feuerbach*, Sitzungsberichte der Heidelberger Akademie der Wissenschaften, math.-naturwiss. Klasse 1(1910), 25. Abh., 18 str.

Pak se L. Seifert věnoval útvarům, které zavedl a studoval Henri Brocard (1845–1919):[20] Kružnice, která jde vrcholy A a B trojúhelníka a v bodě B se dotýká strany BC, a další dvě kružnice sestrojené cyklickou záměnou $A \to B \to C - A$, mají společný Brocardův bod; totéž platí o třech kružnicích, z nichž první jde vrcholy A, B a v A se dotýká strany AC, a další dvě vznikají cyklickou záměnou. O těchto Brocardových bodech Ω_1 a Ω_2 platí

$$(*)\qquad \measuredangle\Omega_1 AB = \measuredangle\Omega_1 BC = \measuredangle\Omega_1 CA = \measuredangle\Omega_2 BA = \measuredangle\Omega_2 CB = \measuredangle\Omega_2 AC.$$

Tomuto úhlu ω se říká Brocardův; pro něj a pro úhly α, β, γ trojúhelníka platí mnoho relací vázajících jejich trigonometrické hodnoty, tak třeba

$$\operatorname{cotg}\omega = \operatorname{cotg}\alpha + \operatorname{cotg}\beta + \operatorname{cotg}\gamma.$$

O Brocardových útvarech jedná podrobně ve své knize připomenuté už v komentáři k úloze 12.2 Albrecht Emmerich. V předmluvě na str. III-VI se rozepisuje o historii Brocardových útvarů; o bodech označovaných jako Brocardovy s vlastností $(*)$ měl jako první psát August Crelle (1780–1855) v práci *Über einige Eigenschaften des ebenen geradlinigen Dreiecks rücksichtlich dreier durch die Winkelspitzen gezogenen geraden Linien* (Berlin, 1816). Zcela s vyloučením analytických postupů jedná o Brocardových útvarech W. Fuhrmann v knize *Synthetische Beweise planimetrischer Sätze* (Berlin, 1890), a sice v rozsáhlém dodatku o dvou částech: 1. *Die grundlegenden und elementaren Eigenschaften der Brocardschen Geometrie*, str. 115–156, a 2. *Sätze der Brocardschen Geometrie, die sich vorzugsweise auf bestimmte Kegelschnitte beziehen*, str. 157–190. Kniha je doprovázena technicky skvěle provedenými obrázky, bohužel některé jsou přeplněné čarami. Zvláště to platí o obr. 70 (na listu XI), který je prvním v 1. části. Výchozí trojúhelník má vrcholy A, B, C a Brocardovy body L', L'', které se ve změti úseček téměř ztrácejí. Velmi přístupně promluvil o Brocardově geometrii Karl Hagge ve své přednášce *Die Grundlagen der Brocardschen Geometrie des Dreiecks und die Erweiterung auf das Vieleck.*[21] Bez nadsázky lze říci, že H. Brocard otevřel novou oblast elementární geometrie (adjektivum naprosto neznamená vždy jednoduché). Po desetiletích se tato oblast dočkala nového impulzu. Peter Yff vyslovil v práci *An Analogue for the Brocard Points.*[22] domněnku, že

$$8\omega^3 \leq \alpha\beta\gamma$$

s rovností právě jen pro rovnostranný trojúhelník. Nerovnost je velmi pozoruhodná tím, že v ní nevystupují trigonometrické hodnoty úhlů, ale úhly trojúhelníka samy. První důkaz podal Faruk Abi-Khuzam v práci *Proof of Yffs Conjecture on the Brocard Angle of a Triangle.*[23]

[20] Byl důstojníkem francouzské armády; v hodnosti podplukovníka dělostřelectva se dal penzionovat a od r. 1875 publikoval geometrické práce.

[21] Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung 39(1930), 81–88.

[22] American Mathematical Monthly 70(1963), 495–501. Viz strana 500.

[23] Elemente der Mathematik 29(1974), 141–142.

Založil jej na nekonečném součinu[24]

$$\sin x = x \prod_{n=1}^{\infty} \left[1 - \left(\frac{x}{\pi n}\right)^2\right]$$

Na ne zcela korektní práci s ním upozornil a současně Yffovu nerovnost elementárně dokázal Oene Bottema (1901–1992) v článku *On Yff's Inequality for the Brocard Angle of a Triangle.*[25] Analogické relace studoval Faruk Abi Khuzan v práci *Inequalities of Yff Type in the Triangle.*[26] Přehled o novějších výsledcích spolu s příslušnou literaturou podávají R. Stroeker a H. Hoogland ve společné práci *Brocardian Geometry Revisited or Some Remarkable Inequalities.*[27] Analogiemi k Yffově nerovnosti pro Brocardův úhel se zabýval opět R. Stroeker v článku *Ineguality for Yff's Analogue of Brocard Angle of a Plane Triangle.*[28]

XIII. *O komplexní křivce.*

Jí se rozumí čára, jejíž všechny tečny jsou přímkami daného komplexu. Jedná se o integrální problém.

XIV. *O Plückerově konoidu*

$$z = 2c \cdot \frac{xy}{x^2 + y^2}. \tag{$*$}$$

Julius Plücker se zasloužil o rozvoj projektivní geometrie; zavedl homogenní souřadnice jak bodové, tak přímkové či rovinové, s nimiž studoval čáry a plochy nejen jako množiny bodů, ale duálně jako množiny tečen či tečných rovin. Konoid je přímková plocha, jejíž površky protínají pevnou vlastní přímku, nevlastní přímku (jsou rovnoběžné s pevnou rovinou) a pevnou křivku. Je-li řídící přímka kolmá k řídící rovině, mluví se o přímém konoidu. Plückerův konoid je přímý a za řídící křivku má elipsu, která je řezem rotační válcové plochy obsahující řídící (ovšem vlastní) přímku.

Literatura o konoidech je velmi rozsáhlá, zmiňuje se o nich téměř každá učebnice deskriptivní geometrie. Např. Walter Wunderlich odvozuje v učebnici *Darstellende Geometrie II* (Mannheim, 1967, str. 38–40) rovnici ($*$) kinematicky, a tím současně naznačuje význam Plückerova konoidu ve strojírenství (obr. 4 je ze str. 38).

---

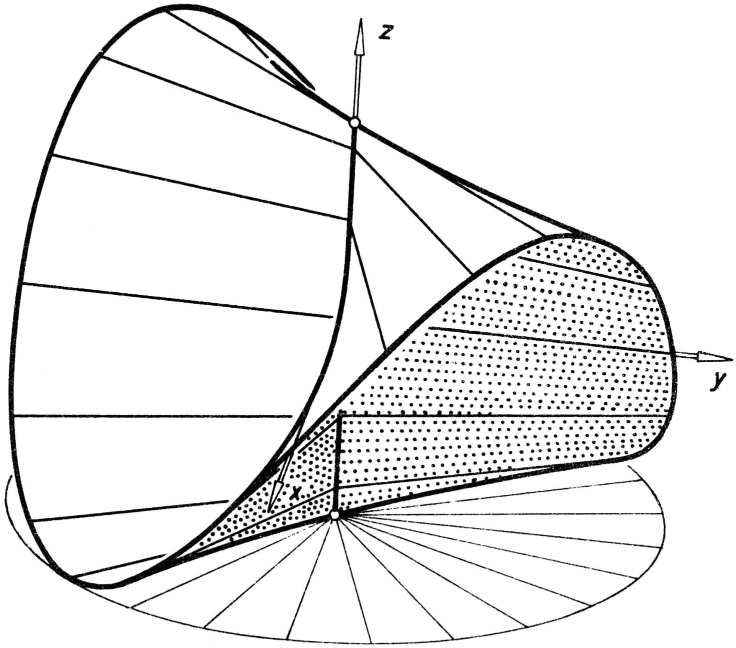
[24] Viz Karel Petr: *Počet diferenciální* (Praha, 1923, odd. 91, str. 127–129), nebo Richard Courant (1888–1972): *Differential and Integral Calculus I* (London-Glasgow, 2. vyd. 1937, kap. IX, odd. 7, str. 425–456, 1. vyd. 1934, mnohokrát reprint, německý originál: Berlin, 1927, 4. vyd. 1971, ruský překlad: Moskva 1967), nebo Григорий М. Фихтенгольц (1888–1959): *Курс дифференциального и интегрального исчисления* II (Moskva, 1948; mnoho vydání, též německého překladu, odd. 395, str. 426–430), též R. Sigl: *Ebene und sphärische Trigonometrie* (Frankfurt a. M., 1969, kap. 8, odd. 46, str. 197–200).

[25] Elemente der Mathematik 31(1976), 13–14.

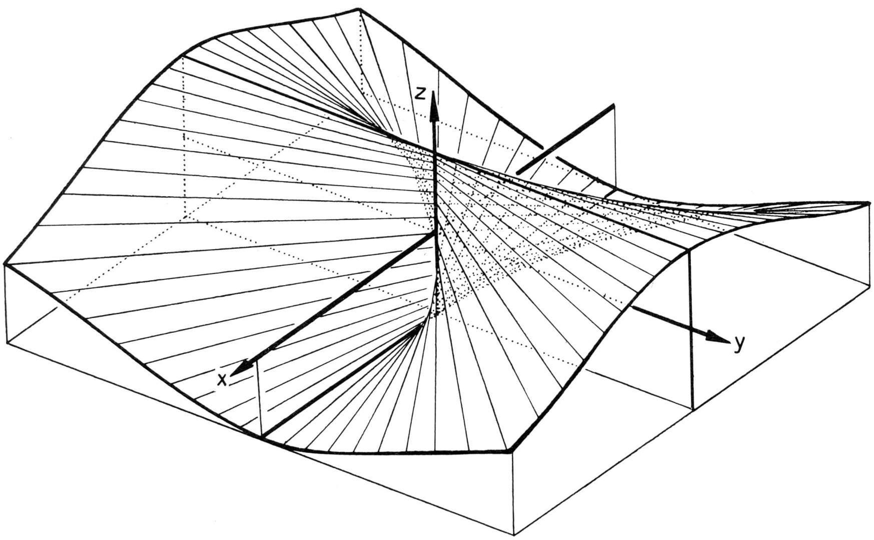
[26] Tamtéž 35(1980), 80–81.

[27] Nieuw Archief voor Wiskunde (4)2(1984), 281–310.

[28] Tamtéž (4)4(1986), 33–45.



Obr. 4



Obr. 5

Podrobně o konoidech včetně Plückerova píše Gino Loria v monografii *Vorlesungen über darstellende Geometrie II: Anwendungen auf ebenflächige Gebilde, Kurven und Flächen* (Leipzig, Berlin, 1913, str. 233–234) a zvláště Kuno Fladt a Arnold Baur ve společné knize *Analytische Geometrie spezieller Flächen und Raumkurven* (Braunschweig, 1975, str. 283–288); pracují s rovnicí

$$x = c \cdot \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2},$$

která se dostane z $(*)$ otočením souřadnicových os x a y o $45°$. Obrázek 5 Plückerova konoidu je na str. 283.

V české literatuře o konoidech včetně Plückerových jednají František Kadeřávek (1885–1961), Josef Klíma (1887–1943) a Josef Kounovský (1878–1949) v učebnici *Deskriptivní geometrie II* (Praha, 1932, 2. vyd. 1954, str. 674–688, 693–697, 724–729). V podstatně skromnější míře pak Josef Kounovský v drobné knížce *Zborcené plochy* (Praha, 1947, str. 85–90), ale zase s poukazy na aplikace ve strojírenství (např. při vzájemném převádění rotačních pohybů kolem mimoběžných os). Kratší poučení – též s aplikacemi – obsahují učebnice pro stavební fakulty Karel Drábek (1918–1991), František Harant (1925–1985) a Otto Setzer (1906–1989) v knize *Deskriptivní geometrie II* (Praha, 1979, str. 191 a násl.) a pro strojní fakulty Alois Urban (1912–1981): *Deskriptivní geometrie II* (Praha, 2. vyd. 1979, str. 209 s obr. 21.15 na str. 208, 1. vyd. 1967). Viz též novější učebnici Heinricha Braunera (1928–1990) *Lehrbuch der konstruktiven Geometrie* (Wien, 1986, str. 356–357 s obr. 9.11, na němž je v axonometrii zobrazen obrys konoidu jako obálky průmětů jeho přímek). Důkladnější poučení poskytuje starší rozsáhlý spis Karla Rohna (1855–1921) a Erwina Papperitze (1875–1921) *Lehrbuch der darstellenden Geometrie* (Berlin-Leipzig; II, 4. vyd. 1932, str. 184–186 a III, 4. vyd. 1906, str. 220–241, specielně Plückerův konoid na str. 233 a násl.; 1. vyd. ve 2 svazcích 1893). Pokud je řídící křivka Γ dána parametrickými rovnicemi pro t z jistého intervalu

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad z = h(t)$$

a řídící přímka a řídící rovina jsou v ose z a rovině $z = 0$, jsou přímky konoidu – a tedy i konoid sám – určeny rovnicemi

$$x = u \cdot f(t), \qquad y = u \cdot g(t), \qquad z = h(t), \qquad u \in (-\infty, \infty).$$

Za zřejmých předpokladů z $\frac{y}{x} = \frac{g(t)}{f(t)}$ plyne $t = F(\frac{y}{x})$ a konečně $z = \varphi(\frac{y}{x})$. V této formě je i Seifertovo zadání konoidu $(*)$:

$$z = 2c \cdot \frac{\frac{y}{x}}{1 + (\frac{y}{x})^2}$$

Má-li řídící křivka Γ stupeň s a nemá-li s řídícími přímkami bod společný, je stupeň konoidu $2s$. Jestliže řídící křivka Γ má s vlastní řídící přímkou jeden bod společný, klesá stupeň konoidu o 1. Protože Plückerův konoid má za řídící křivku Γ elipsu, která má s řídící přímkou právě jeden bod společný – a jiný společný bod žádné dvě z řídících čar nemají – je jeho stupeň 3, jak ostatně vidíme z $(*)$. Tato tvrzení jsou velmi speciálním případem obecných vět, pro které odkazuji na Loriovu učebnici.

První geometrické vyšetřování aspoň speciálních případů konoidu začali už John Wallis (1616–1703) a zvláště Amédée-François Frézier (1682–1773) v rozsáhlém třísvazkovém díle z 30. let 18. století (druhé vydání asi po 20 letech); první díl je věnován geometrii a lze jej považovat za jakousi ouverturu k Mongeově deskriptivě, druhý a třetí díl patří aplikacím hlavně ve stavitelství, v němž konoidy pro technicky příznivé konstrukční podmínky našly výrazné uplatnění.

Opíši začátek svého zápisu. *Položme* $y : x = \operatorname{tg}\varphi$; pak

$$z = 2c\frac{\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = 2c\sin\varphi\cos\varphi = c\sin 2\varphi.$$

Pro $z =$ konst. dostáváme dvě přímky. Krajní případy jsou pro $z = \pm c$ (dvě přímky splývající).

Víc se L. Seifert vytvoření Plückerova konoidu nevěnoval, přešel ke studiu jeho oskulačního hyperbolického paraboloidu a v závěru naznačil, že rovina, která jde povrchovou přímkou konoidu, jej seče v elipse (že jej seče v kuželosečce, plyne z degenerace průsečné křivky 3. stupně obsahující tvořící přímku), která se do řídící roviny kolmo promítá jako kružnice.

Z $(*)$ ihned vychází

$$y : x = (c \pm \sqrt{c^2 - z^2}) : z,$$

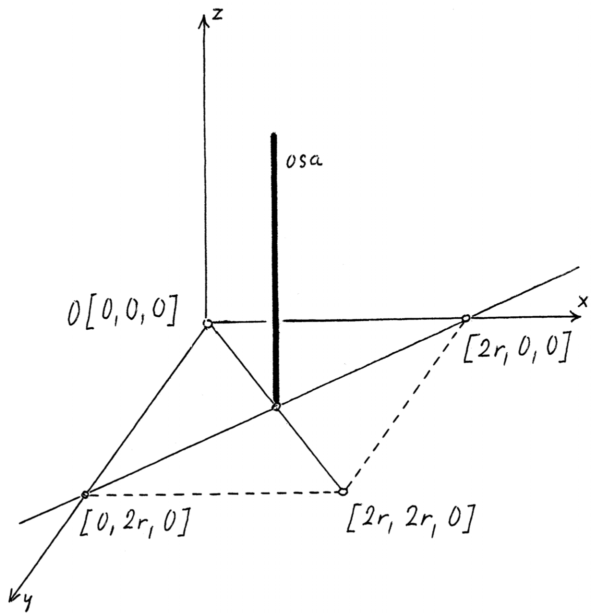
takže konoid je mezi dvěma horizontálními rovinami $z = \pm c$, z nich každá jej seče ve dvou splývajících přímkách, které jsou torsální. Rovina $z =$ konst. při $-c <$ konst. $< c$ seče konoid ve dvou přímkách (a své přímce nevlastní).

Snadno se určí elipsa, která je řídící čarou konoidu $(*)$. Rotační válcovou plochu

$$x^2 + y^2 - 2rx - 2ry = 0$$

obsahující řídící přímku – osu z – a mající za svou osu přímku $x = y = r$ protneme rovinou jdoucí body $[0, 0, -c]$ a $[2r, 2r, c]$ a spojnicí bodů $[2r, 0, 0]$ a $[0, 2r, 0]$ (bod $[2r, 0, 0]$, resp. $[0, 2r, 0]$ je průsečík stopy rotační válcové plochy s osou x, resp. y, které jsou obě přímkami konoidu) (viz obr. 6). Rovnice této roviny je

$$cx + cy - 2rz - 2cr = 0.$$



Obr. 6

Na stopě válcové plochy na rovině $z = 0$ zvolíme bod

$$x = r(1 + \sqrt{2}\cos t), \qquad y = r(1 + \sqrt{2}\sin t), \qquad z = 0$$

jako kolmý průmět bodu

$$x = r(1 + \sqrt{2}\cos t), \qquad y = r(1 + \sqrt{2}\sin t), \qquad z = \frac{c}{\sqrt{2}}(\cos t + \sin t)$$

z hořejší roviny. Při měnícím se t proběhne tento bod elipsu a je už jen věcí početní trpělivosti se přesvědčit, že tato elipsa patří konoidu $(*)$. Máme tak velmi názorné jeho geometrické vytvoření: Řídícími čarami konoidu jsou osa z, nevlastní přímka roviny (xy) a elipsa, která je řezem popsané válcové plochy s popsanou rovinou.

Protože poloměr r válcové plochy je libovolný, lze za řídící křivku konoidu zvolit elipsu z jednoparametrového systému elips. Jejich poloosy jsou hlavní $\sqrt{c^2 + r^2}$ a vedlejší r, mají tedy konstantní excentricitu.

XV. *Problém normál kuželoseček.*

U problému, vést ke kuželosečce z bodu v její rovině normály, se L. Seifert dosti zdržel, zápis mám na osmi stránkách. Úloha je přes dvě tisíciletí stará. Zabýval se jí už Apollonius, po němž je pojmenována rovnoosá hyperbola, s níž ji řešil.

Většinou pomocí parametrického vyjádření odvodil L. Seifert delší řadu vět o normálách obou středových kuželoseček i paraboly. B. Bydžovský věnoval v učebnici *Úvod do analytické geometrie* (Praha, 1923) problému normál strany 217 až 221. Velké množství příslušných literárních údajů uvádí Friedrich Dingeldey (1859–1939) v článku z roku 1903 v Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften III-2-1 (str. 62–69).

Ani B. Bydžovský ani L. Seifert se nedotkli otázky, zda a kdy se úloha, která je ovšem 4. stupně, rozpadá na dvě úlohy 2. stupně. Patrně jako první se touto situací zabýval Carl Pelz (původně a po návratu ze Štýrského Hradce do Prahy Karel Pelc 1845–1908). O problému píši více v části E o Seifertově knížce *Kubické a bikvadratické problémy*, v níž mu patří odd. 16.

* * *

Nyní se podrobně věnuji úlohám 1 a XVI ze Seifertova semináře. Přepíši celý svůj původní zápis a doplním jej svými poznámkami po více než šedesáti letech. **Značím je opět dvojitou postranní čarou.**

Úloha 1.

Má se vyšetřit množina bodů, z nichž se jeví elipsa nebo hyperbola v konstantním úhlu α.

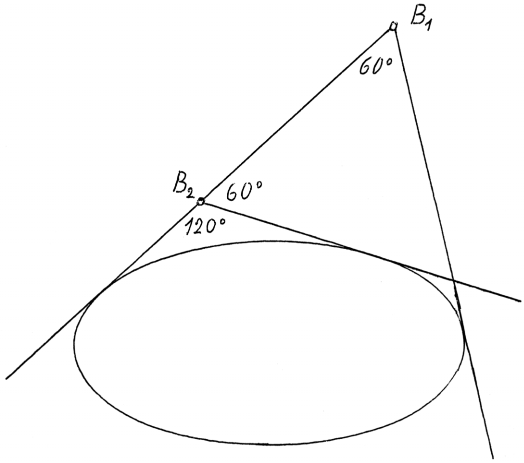
Případ $\alpha = 90°$ je znám ze střední školy, viz K. Šilháček a H. Sechovský: *Geometrie pro VII. třídu reálek …* (Praha, 1936, str. 110); autoři zde pracují i s imaginárními útvary, a tak jako hledanou množinu dostávají kružnici se čtvercem poloměru pozitivním, nulovým či záporným.

U podobných úloh se vyplatí nakreslit si náčrt pro úvodní orientaci. Pro elipsu jsem to učinil na obr. 7. Z bodu B_1 je elipsa vidět v úhlu $\alpha = 60°$, z bodu B_2 pak v úhlu $120° = 180° - 60° = 180 - \alpha$. Můžeme očekávat, že hledaná množina bodů jsou dva ovály, které při $\alpha = 90°$ splynou.

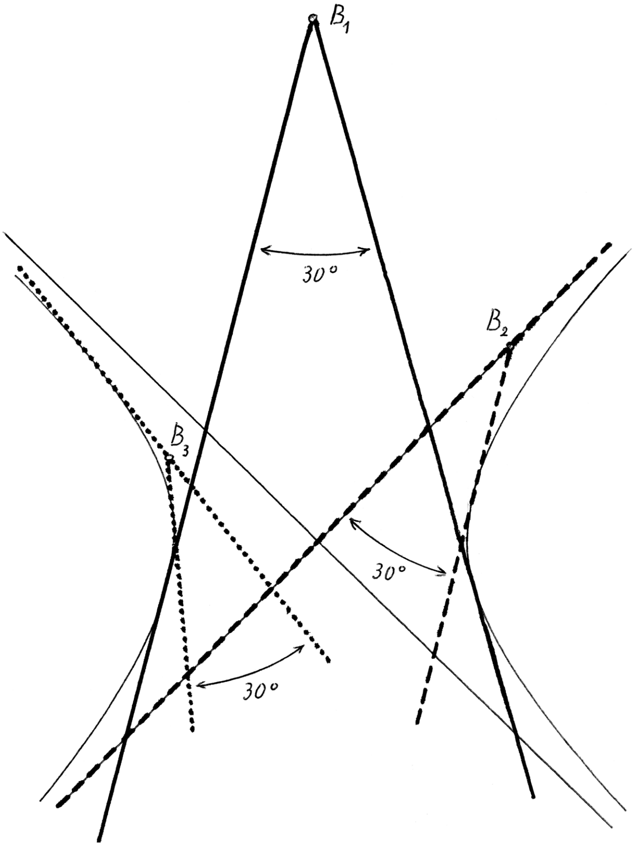
Při hyperbole jsou hledané čáry daleko rozmanitější, jejich tvar závisí na vztazích mezi poloosami hyperboly a, b a $k = \operatorname{tg}\alpha$. Na obr. 8 je situace s rovnoosou hyperbolou při $\alpha = 30°$. Z bodu B_1 je ji vidět v úhlu $\alpha = 30°$ s plně vytaženými rameny, která jsou tečnami různých větví. Z bodu B_2 na asymptotě se hyperbola jeví jak v úhlu $\alpha = 30°$, tak v úhlu $150° = 180° - 30° = 180° - \alpha$; jedno rameno je asymptota vytažená silně čárkovaně, druhé rameno je vyznačeno stejně. Z bodu B_3 jdou k téže větvi hyperboly dvě tečny vytažené silně tečkovaně, větev leží v jejich úhlu $150° = 180° - 30° = 180° - \alpha$. Téměř s jistotou můžeme očekávat výjimečné situace, když zorný úhel α s $k = \operatorname{tg}\alpha$ bude roven úhlu asymptot. Protože tangens jejich polovičního úhlu je b/a (a hlavní, b vedlejší poloosa hyperboly), tak k zmíněnému případu dochází – pokud $a \neq b$ – při

$$\frac{2\frac{b}{a}}{1 - (\frac{b}{a})^2} = k \qquad \text{čili} \qquad k(a^2 - b^2) - 2ab = 0.$$

S poslední rovnicí se později vskutku setkáme.



Obr. 7



Obr. 8

Tečny vedené ke kuželosečce

$$b^2x^2 + \varepsilon a^2y^2 - a^2b^2 = 0 \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

z bodu $P[\xi, \eta]$ mají rovnici

Viz B. Bydžovský: *Úvod do analytické geometrie* (Praha, 1923, str. 84–85; ve 2. vydání z roku 1946 str. 186–187).

$$(b^2\xi^2 + \varepsilon a^2\eta^2 - a^2b^2)(b^2x^2 + \varepsilon a^2y^2 - a^2b^2) - (b^2\xi x + \varepsilon a^2\eta y - a^2b^2)^2 = 0.$$

Pro jejich průsečíky s úběžnou přímkou platí rovnice

$$(\varepsilon a^2\eta^2 - a^2b^2)b^2x^2 - 2\varepsilon a^2b^2\xi\eta xy + (b^2\xi^2 - a^2b^2)\varepsilon a^2y^2 = 0$$

čili

$$\varepsilon(\xi^2 - a^2)\Big(\frac{y}{x}\Big)^2 - 2\varepsilon\xi\eta\frac{y}{x} + (\varepsilon\eta^2 - b^2) = 0.$$

Poměry y/x hovící této rovnici jsou směrnice tečen z bodu P; označme je k_1, k_2. Jest

Ovšem pokud $\xi \neq \pm a$; geometrický význam tohoto požadavku je jasný; analogicky by se při $\eta \neq \pm b$ počítal poměr x/y.

$$k_{1,2} = \frac{2\varepsilon\xi\eta \pm \sqrt{4\varepsilon^2\xi^2\eta^2 - 4\varepsilon^2\xi^2\eta^2 + 4\varepsilon^2a^2\eta^2 + 4\varepsilon b^2\xi^2 - 4\varepsilon a^2b^2}}{2\varepsilon(\xi^2 - a^2)} =$$

$$= \frac{\varepsilon\xi\eta \pm \sqrt{\varepsilon(b^2\xi^2 + \varepsilon a^2\eta^2 - a^2b^2)}}{\varepsilon(\xi^2 - a^2)}.$$

Pro ně však musí platit

$$\operatorname{tg}\alpha = k = \frac{k_2 - k_1}{1 + k_1k_2} = \frac{-\frac{2\sqrt{\varepsilon(b^2\xi^2+\varepsilon a^2\eta^2-a^2b^2)}}{\varepsilon(\xi^2-a^2)}}{1 + \frac{\varepsilon\eta^2-b^2}{\varepsilon(\xi^2-a^2)}} = \frac{-2\sqrt{\varepsilon(b^2\xi^2 + \varepsilon a^2\eta^2 - a^2b^2)}}{\varepsilon(\xi^2 + \eta^2) - (\varepsilon a^2 - b^2)}.$$

V čitateli prvního zlomku mělo být $\pm(k_2 - k_1)$. Dvojznačnost se odstraní následujícím umocněním, které znamená zahrnutí dvou případů: $0 < \alpha < 90°$ a $\alpha' = 180° - \alpha$.

Po úpravě vychází

$$k^2\big[\varepsilon^2(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\varepsilon(\xi^2 + \eta^2)(\varepsilon a^2 + b^2) + (\varepsilon a^2 + b^2)\big] = 4\varepsilon(b^2\xi^2 + \varepsilon a^2\eta^2 - a^2b^2),$$

$$\text{(1)} \qquad k^2(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\varepsilon(\varepsilon k^2a^2 + k^2b^2 + 2b^2)\xi^2 -$$

$$- 2\varepsilon(\varepsilon k^2a^2 + k^2b^2 + 2\varepsilon a^2)\eta^2 + k^2(\varepsilon a^2 + b^2)^2 + 4\varepsilon a^2b^2 = 0,$$

což je při proměnných ξ, η rovnice hledaného geometrického místa.

Hned si všimněme: Při elipse s $\varepsilon = 1$ je absolutní člen v (1) nenulový, tedy čára neprochází počátkem, tj. středem výchozí elipsy. Jestliže při nerovnoosé hyperbole s $\varepsilon = -1$ absolutní člen vymizí, tj. je-li

$$k^2(-a^2 + b^2)^2 - 4a^2b^2 = 0, \tag{2}$$

má čára v počátku dvojný bod s tečnami o rovnici

$$\big[k^2(-a^2 + b^2) + 2b^2\big]\xi^2 + \big[k^2(-a^2 + b^2) - 2a^2\big]\eta^2 = 0;$$

vzhledem k (2) tedy

$$b^2\xi^2 + a^2\eta^2 = 0.$$

V počátku má tak vyšetřovaná čára při výchozí nerovnoosé hyperbole a (2) izolovaný dvojný bod. Viz B. Bydžovský: *Úvod do algebraické geometrie* (Praha, 1948, zvláště str. 498).

Je to tedy křivka 4. stupně, jež dvojnásobně prochází kruhovými body.

Takové čáry se jmenují bicirkulární. O nich jednají Gino Loria: *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven I* (Leipzig, Berlin, 1910, část 3: *Kurven vierter Ordnung*, kap. 3: *Elliptische, insbesondere bizirkulare, Kurven vierter Ordnung im allgemeinen*, str. 114–124); Gomes Teixeira: *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches I* (Coïmbre, 1908, kap. IV: *Quartiques remarquables*, odd. IV: *Les quartiques bicirculaires*, str. 234–258); množství literárních údajů v Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften III-2-1 (Leipzig, 1903–1915) poskytuje Gino Loria (v kap. 5aB, odd. VIII: *Bizirkularkurven vierter Ordnung*, str. 549–558). Bicirkulárními křivkami se dvěma osami symetrie se jako řezy toru zabýval už Perseus (212–166 př. Kr.), srovnej s obr. 615c ze soustavy Cassiniových křivek na str. 597 ve druhém díle učebnice *Deskriptivní geometrie* F. Kadeřávka, J. Klímy a J. Kounovského (Praha, 1932).

Hledejme inflexní tečny křivky (1) *v těchto bodech:*

Inflexními tečnami se tu rozumí tečny v dvojných kruhových bodech. Přímky jdoucí kruhovými body mají rovnice $\eta = \pm \mathrm{i}\xi + \lambda$. V homogenních souřadnicích ξ, η, ζ jde přímka $a\xi + b\eta + c\zeta = 0$ absolutními body $[1, \pm\mathrm{i}, 0]$ právě při $a \pm b\mathrm{i} = 0$, což vede k $\pm\mathrm{i}\xi + \eta + (\frac{c}{b})\zeta = 0$.

Dosazením do (1) *dostáváme*

$$k^2(\xi^2 - \xi^2 \pm 2\mathrm{i}\lambda\xi + \lambda^2)^2 - 2\varepsilon(\varepsilon k^2a^2 + k^2b^2 + 2b^2)\xi^2 -$$

$$-2\varepsilon(\varepsilon k^2a^2 + k^2b^2 + 2\varepsilon a^2)(-\xi^2 \pm 2\mathrm{i}\lambda\xi + \lambda^2) + k^2(\varepsilon a^2 + b^2)^2 + 4\varepsilon a^2b^2 = 0.$$

Vypadnutí členů s ξ^4 a ξ^3 jsme musili čekat, neboť každá přímka $\eta = \pm\mathrm{i}\xi + \lambda$ prochází kruhovým bodem; ten má první souřadnici $\xi = \infty$ a je dvojným bodem naší křivky. Se zavedením homogenních souřadnic do právě zjištěné rovnice křivky bychom se souřadnici $\xi = \infty$ mohli vyhnout.

V této rovnici kvadratické v ξ je u ξ^2 koeficient

$$-4k^2\lambda^2 - 4\varepsilon b^2 + 4\varepsilon^2 a^2;$$

jeho nulová hodnota je nutná a postačující podmínka pro to, aby přímky $\eta = \pm\mathrm{i}\xi + \lambda$ byly tečnami křivky v jejích dvojných bodech, ztotožňujících se s body kruhovými.

Rovnice 4. stupně $0\cdot\xi^4 + 0\cdot\xi^3 + \alpha\xi^2 + \beta\xi + \gamma = 0$ má dvojnásobný kořen ∞, aby jej měla za trojnásobný, musí $\alpha = 0$. Při homogenních souřadnicích by nebylo třeba tohoto vyjadřování.

Z ní vychází

$$\lambda = \pm\frac{\sqrt{a^2 - \varepsilon b^2}}{k} = \pm\frac{e}{k},$$

e je ovšem délková excentricita výchozí kuželosečky

takže tečny křivky v kruhových bodech jsou

$$y = \mathrm{i}\xi \pm \frac{e}{k}, \qquad \text{resp.} \qquad y = -\mathrm{i}\xi \pm \frac{e}{k}.$$

Jejich dva reálné průsečíky

$[0, \pm\frac{e}{k}]$, další čtyři jsou imaginární

leží na ose y ve vzdálenosti $\pm\frac{e}{k}$ od počátku; jsou to reálná ohniska křivky.

Pro situace čtyř ohnisek elipsy připomínám strany 172 až 173 z výše citované knihy B. Bydžovského z roku 1923.

Reálných dvojných bodů křivka nemá; neboť reálné hodnoty ξ, η hovící rovnicím (f značí levou stranu rovnice (1))

$$\frac{\partial f}{\partial \xi} = 4k^2\xi^3 + 4k^2\xi\eta^2 - 4\varepsilon(\varepsilon k^2 a^2 + k^2 b^2 + 2b^2)\xi = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial \eta} = 4k^2\eta^3 + 4k^2\xi^2\eta - 4\varepsilon(\varepsilon k^2 a^2 + k^2 b^2 + 2\varepsilon a^2)\eta = 0,$$

nesplňují rovnici (1).

Po zavedení homogenních souřadnic ξ, η, ζ přejde levá strana v (1) ve formu 4. stupně. Pro ni platí známá Eulerova identita

$$\xi\frac{\partial f}{\partial\xi}+\eta\frac{\partial f}{\partial\eta}+\zeta\frac{\partial f}{\partial\zeta}=4f.$$

Singulární bod se definuje vymizením parciálních derivací (viz výše citovanou učebnici B. Bydžovského z roku 1948, str. 314). Jestliže v bodě s $\zeta\neq 0$ vymizí $\frac{\partial f}{\partial\xi}$ a $\frac{\partial f}{\partial\eta}$ i f, je podle Eulerovy identity též $\frac{\partial f}{\partial\zeta}=0$.

Vypsané rovnice $\frac{\partial f}{\partial\xi}=0$ a $\frac{\partial f}{\partial\eta}=0$ se rozřeší snadno. Po krácení $4k^2\neq 0$ se rozpadají na

$$\xi=0,\qquad \xi^2+\eta^2-\varepsilon(\varepsilon a^2+b^2+2\frac{b^2}{k^2})=0,$$

$$\eta=0,\qquad \xi^2+\eta^2-\varepsilon(\varepsilon a^2+b^2+2\varepsilon\frac{a^2}{k^2})=0.$$

To vede ke čtyřem možnostem a) až d), které postupně proberu.

a) Řešení $\xi=0$, $\eta=0$ vede podle (1) ke

$$k^2(\varepsilon a^2+b^2)^2+4\varepsilon a^2b^2=0.$$

U elipsy s $\varepsilon=1$ je tato rovnice nemožná. U hyperboly s $\varepsilon=-1$ jsem tuto situaci probral už ve své poznámce za rovnicí (1).

b) Řešení $\xi=0$, $\eta^2=a^2+\varepsilon b^2+2\frac{a^2}{k^2}$ po dosazení do levé strany (1) vede k

$$k^2\Big(a^2+\varepsilon b^2+2\frac{a^2}{k^2}\Big)^2-2\varepsilon k^2\Big(\varepsilon a^2+b^2+2\varepsilon\frac{a^2}{k^2}\Big)\Big(a^2+\varepsilon b^2+2\frac{a^2}{k^2}\Big)+$$

$$+\,k^2(\varepsilon a^2+b^2)^2+4\varepsilon a^2b^2=\;-4a^4\Big(1+\frac{1}{k^2}\Big)\neq 0.$$

c) Odbude se podobně jako b).

d) Vzájemným odečtením druhých rovnic v uvažované soustavě vyjde

$$\frac{\varepsilon a^2-b^2}{k^2}=0.$$

To je možné jen tak, že buďto $k=\infty$ anebo $a^2=b^2$ při $\varepsilon=1$. O prvním případu už byla a ještě bude zmínka; druhý znamená, že výchozí elipsa přechází v kružnici o poloměru a. Druhá a čtvrtá rovnice uvažované soustavy se pak redukují na jedinou:

$$\xi^2+\eta^2-2a^2\Big(1+\frac{1}{k^2}\Big)=0.$$

Ihned vidím, že ξ a η vyhovující této rovnici splňují i rovnici (1) s $\varepsilon = 1$, $a = b$

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 - 4\Big(1 + \frac{1}{k^2}\Big)a^2(\xi^2 + \eta^2) + 4\Big(1 + \frac{1}{k^2}\Big)^2 a^4 = 0.$$

V tomto případě přechází naše čára 4. stupně v dvakrát počítanou kružnici o poloměru $a\sqrt{2}$; každý bod této kružnice je singulárním bodem naší kvartiky. Geometricky je situace ovšem průhledná: Kružnice o poloměru a je vidět v úhlu α z každého bodu soustředné kružnice o poloměru $\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{1-\cos\alpha}}$.

Pro $k = 0$ vychází z (1)

$$-4\varepsilon b^2\xi^2 - 4\varepsilon^2 a^2\eta^2 + 4\varepsilon a^2 b^2 = 0$$

čili

$$b^2\xi^2 + \varepsilon a^2\eta^2 - a^2 b^2 = 0,$$

což je rovnice původní kuželosečky.

Toto zjištění je ovšem triviální, může posloužit k ověření výpočtů.

Při $k = \infty$ dostáváme z (1)

ovšem po dělení k^2 a pak přechodu $k \to \infty$

$$(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\varepsilon(\varepsilon a^2 + b^2)\xi^2 - 2\varepsilon(\varepsilon a^2 + b^2)\eta^2 + (\varepsilon a^2 + b^2)^2 = 0$$

čili

$$[\xi^2 + \eta^2 - \varepsilon(\varepsilon a^2 + b^2)]^2 = 0,$$

což je dvojnásob počítaná kružnice se středem ve středu kuželosečky s poloměrem $a^2 + \varepsilon b^2$.

S čtvercem poloměru $a^2 + \varepsilon b^2$ ovšem. Při $\varepsilon = 1$ tedy $a^2 + b^2$, při $\varepsilon = -1$ pak $a^2 - b^2$. Viz hned první poznámku o středoškolské učebnici K. Šilháčka a H. Sechovského.

Pro $a = b$ se (1) *specializuje na*

$$k^2(\xi^2+\eta^2)^2 - 2\varepsilon a^2(\varepsilon k^2+k^2+2)\xi^2 - 2\varepsilon a^2(\varepsilon k^2+k^2+2)\eta^2 + a^4k^2(\varepsilon+1)^2 + 4\varepsilon a^4 = 0$$

čili

$$k^2(\xi^2 + \eta^2)^2 - 2\varepsilon a^2(\varepsilon k^2 + k^2 + 2)(\xi^2 + \eta^2) + a^4k^2(\varepsilon + 1)^2 + 4\varepsilon a^4 = 0.$$

Levá strana je v $\xi^2 + \eta^2$ kvadratický trinom, a tedy pro $a = b$ degeneruje (1) *ve dvě kružnice se středy ve středu kuželosečky.*

Už v předposlední rovnici je nedopatření. V závorce při η^2 má být

$$(\varepsilon k^2 + k^2 + 2\varepsilon).$$

Tedy při $\varepsilon = 1$

$$k^2(\xi^2 + \eta^2)^2 - 4a^2(k^2 + 1)(\xi^2 + \eta^2) + 4a^4(k^2 + 1) = 0,$$

což dává vskutku dvě kružnice soustředné s výchozí.

* * *

Úloha XVI.

a)

Nalézti společné body kuželoseček

$$x^2 + 2y^2 - 4x + 2y = 0, \qquad 2xy + 1 = 0.$$

Určíme λ tak, aby

$$x^2 + 2y^2 - 4x + 2y + \lambda(2xy + 1) = 0$$

degenerovala:

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & -2 \\ \lambda & 2 & 1 \\ -2 & 1 & \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \text{čili} \qquad \lambda^3 + 2\lambda + 9 = 0.$$

Rovnice má jen jeden reálný kořen $\lambda \doteq -1.74$.

Na první pohled je vidět, že

1) je jen jeden, protože derivace levé strany poslední rovnice je $3\lambda^2 + 2 > 0$;

2) je v intervalu $(-2, -1)$,

takže se některým ze známých způsobů snadno vypočítá.

To znamená, že dané kuželosečky se protínají jen ve dvou reálných bodech. Rovnice

$$(*) \qquad x^2 + 2y^2 - 4x + 2y - 1.74(2xy + 1) = 0$$

značí dvě přímky; jejich rovnice se naleznou určením jejich průsečíku a úběžných bodů. Jedna z nich seče kuželosečku $2xy + 1 = 0$ v hledaných bodech.

Praktičtějším řešením by bylo zakreslení obou daných kuželoseček na milimetrový papír (provede se to velmi snadno) a přibližné určení prvních souřadnic obou reálných průsečíků. To by se pak zpřesňovalo známými způsoby z rovnice

$$2x^4 - 8x^3 - 2x + 1 = 0$$

vznikající eliminací y z rovnic daných dvou čar.

b)

Nalézti vrchol paraboly $y^2 - xz = 0,\ x - 2y + z - 1 = 0.$

Podél přímky $x = y = z$ *se kužel dotýká roviny* $x - 2y + z = 0,$

neboť z její rovnice a rovnice dané kuželové plochy ihned vychází $(x - z)^2 = 0$,

jež je rovnoběžná s $x - 2y + z - 1 = 0;$

tedy tato rovina seče kužel v parabole;

ta přímka

$x = y = z$

je rovnoběžná s osou paraboly. Přímka počátkem rovnoběžná s vrcholovou tečnou jest $x + y + z = 0,\ x - 2y + z = 0$ *(*$x + y + z = 0$ *je kolmá k přímce* $x = y = z$*). Ta přímka je též* $y = 0,\ x + z = 0$*. Ke směru danému touto přímkou nalezneme průměrovou rovnici (tj. polárnou rovinu k danému kuželu vzhledem k přímce* $y = 0,\ x + z = 0$*), jež pak seče* $x - 2y + z = 1$ *v hledané ose. Tato polární rovina je* $-x + z = 0$ *(úběžný bod přímky* $y = 0,\ x + z = 0$ *je* $[1, 0, -1, 0]$*).*

Nevlastní kuželosečka $f(x, y, z) = y^2 - xz = 0,\ t = 0$ daného kužele má vůči nevlastnímu bodu $[1, 0, -1, 0]$ přímky $y = 0,\ \ x + z = 0$ poláru

$$1 \cdot f_x + 0 \cdot f_y - 1 \cdot f_z = 0,$$

tj. $-x + z = 0$.

Osa je pak $x - 2y + z - 1 = 0,\ x - z = 0$*. Vrchol je průnik této osy s kuželem* $y^2 - xz = 0$*. Jest* $V\left[\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$.

Úlohu lze řešit i zcela jinak. Snadno se nahlédne, že parametrické vyjádření průniku je

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{2}\big[\,1 + 2t + \varepsilon\sqrt{1+4t}\,\big], \\ y &= t, \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \varepsilon = \pm 1 \\ z &= \frac{1}{2}\big[\,1 + 2t - \varepsilon\sqrt{1+4t}\,\big]. \end{aligned}$$

Položíme-li $u = \varepsilon\sqrt{1+4t}$, dostaneme

$$\begin{aligned} x &= \frac{1}{4}u^2 + \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}, \\ y &= \frac{1}{4}u^2 \qquad\;\; - \frac{1}{4}, \\ z &= \frac{1}{4}u^2 - \frac{1}{2}u + \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Tečný vektor této paraboly je $\left(\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}u, \frac{1}{2}u - \frac{1}{2}\right)$ a směr její osy je dán vektorem $(1, 1, 1)$, totiž poměry $\lim_{u\to\infty} x : y : z$. Skalární součin těchto vektorů vymizí jedině při $u = 0$, což je tedy parametr vrcholu, který má tak souřadnice $\left[\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$.

Anebo ještě kratčeji a elementárněji. Protože jak daná kuželová plocha, tak daná sečná rovina jsou symetrické podle roviny $x = z$, je podle této roviny symetrická i průsečná parabola; jinými slovy: osa průsečné paraboly je průsečnice dané roviny s uvedenou rovinou symetrie. Souřadnice hledaného vrcholu jsou tedy řešením rovnic

$$y^2 - xz = 0, \quad x - 2y + z - 1 = 0, \quad x - z = 0.$$

Zjistíme bez námahy, že $V\left[\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right]$.

Vidíme, že poslední dvě úlohy a) a b) nepatří k obtížnějším. Spíš než pro seminář k II. státní zkoušce by byly námětem do prosemináře k I. státnici. Doplním tedy Seifertův úkol b) zjištěním cyklických rovin zadané kuželové plochy. To přispěje k představě o ní. Odvolávám se na Bydžovského *Úvod do analytické geometrie* (Praha, 1923, str. 323–325 a 375–380), ale jen částečně na 2. vydání z roku 1946 (str. 402–410).

Daná kuželová plocha není rotační, neboť její nevlastní kuželosečka se dvakrát nedotýká absolutní kružnice; soustava $y^2 - xz = 0$, $x^2 + y^2 + z^2 = 0$ má totiž čtyři různá řešení. Vyšetřím cyklické roviny plochy. Rovnice hlavních směrů je

$$\varrho^3 - \varrho^2 - \frac{1}{4}\varrho + \frac{1}{4} = 0.$$

Její kořeny určíme zpaměti: $\varrho_1 = 1$, $\varrho_2 = \frac{1}{2}$, $\varrho_3 = -\frac{1}{2}$. Víme, že

$$y^2 - xz - \varrho_i\bigl(x^2 + y^2 + z^2\bigr) = 0$$

znamená tři dvojice cyklických rovin našeho kužele. Snadno zjistíme, že $\varrho_1 = 1$ a $\varrho_3 = -\frac{1}{2}$ vedou k imaginárním cyklickým rovinám. Zbývá tedy dvojice rovin

$$y^2 - xz - \frac{1}{2}\bigl(x^2 + y^2 + z^2\bigr) = 0, \qquad \text{čili} \qquad (x + y + z)(x - y + z) = 0.$$

Reálné kružnice naší kuželové plochy leží tedy v rovinách

$$x + y + z + \alpha = 0, \qquad x - y + z + \beta = 0, \qquad \alpha, \beta = \text{konst.} \neq 0.$$

Ve svazku kvadrik určeném touto dvojicí rovin a naší kuželovou plochou je kulová plocha

$$\bigl[x^2 - y^2 + z^2 + (\alpha + \beta)x + (-\alpha + \beta)y + (\alpha + \beta)z + \alpha\beta\bigr] + 2(y^2 - xz) = 0$$

čili

$$\Bigl(x + \frac{\alpha + \beta}{2}\Bigr)^2 + \Bigl(y - \frac{\alpha - \beta}{2}\Bigr)^2 + \Bigl(z + \frac{\alpha + \beta}{2}\Bigr)^2 = \frac{1}{4}\bigl(3\alpha^2 + 2\alpha\beta + 3\beta^2\bigr).$$

Ze souřadnic středu a z poloměru této koule se už snadno určí středy a poloměry kružnic daného kužele ležící v jeho cyklických rovinách.

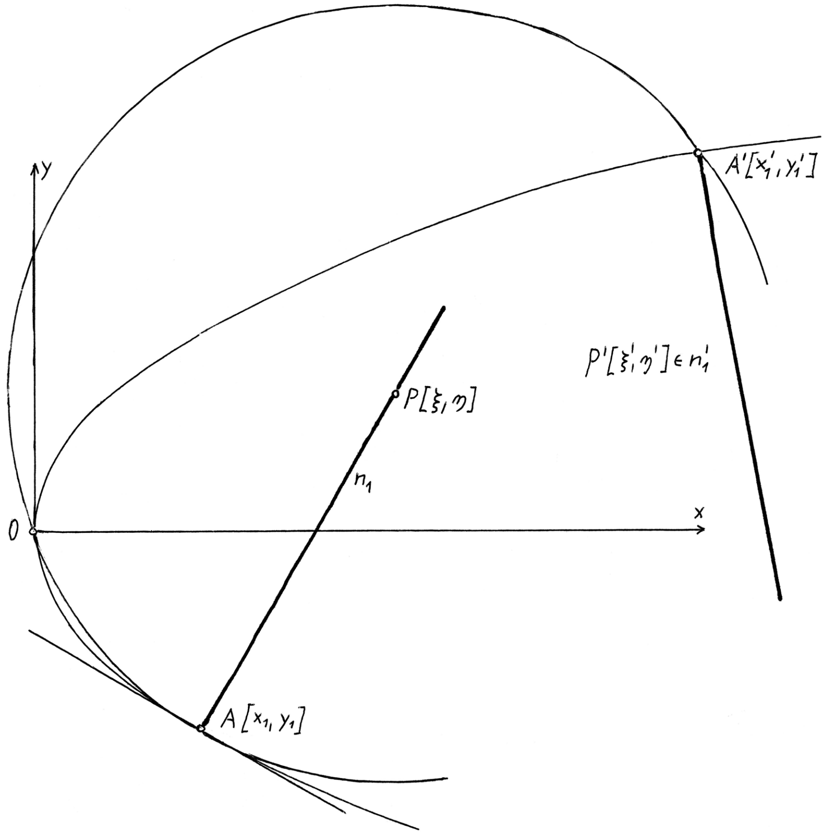
c)

Nechť jsou A, B, C paty normál paraboly z bodu P. Vrcholem O paraboly veďme tři kružnice, jež se paraboly dotknou v A resp. B, resp. C. Tyto kružnice sečou parabolu ještě v A', B', C'. Dokázati, že normály bodů A', B', C' jdou týmž bodem.

Viz následující obr. 9. Z bodu $P[\xi, \eta]$ jde k parabole normála n_1 s patou $A[x_1, y_1]$. Kružnice k_1 jdoucí vrcholem O paraboly a dotýkající se jí v bodě A ji ještě protíná v bodě $A'[x_1', y_1']$. Normála paraboly v bodě A' je označena n_1'. Analogicky se získají normály n_2' a n_3'. Spolu s ní se protínají v jediném bodě $P'[\xi', \eta']$.

Pořadnice bodů A, B, C buďtež y_1, y_2, y_3, souřadnice bodů A', B', C' x_1', x_2', x_3'; y_1', y_2', y_3'. Jest $y_1' = -2y_1$, $y_2' = -2y_2$, $y_3' = -2y_3$, jak vychází z věty, že spojnice průsečíků kuželosečky s kružnicí jsou antiparalelní k ose kuželosečky.

Na tomto místě byl Seifertův výklad víc než stručný. S důkazem o právě zmíněné antiparalelnosti se omezím jen pro parabolu, kdy je početně jednodušší. Na parabole $y^2 = 2px$ zvolím čtyři body $B_i\bigl[\frac{y_i^2}{2p}, y_i\bigr]$ (tato y_i nejsou ovšem hořejší y_1, y_2, y_3).



Obr. 9

Leží na kružnici, když a jen když (viz citovanou už učebnici B. Bydžovského z roku 1923, str. 120)

$$\Delta = \begin{vmatrix} \dfrac{y_1^4}{4p^2} + y_1^2 & \dfrac{y_1^2}{2p} & y_1 & 1 \\ \dfrac{y_2^4}{4p^2} + y_2^2 & \dfrac{y_2^2}{2p} & y_2 & 1 \\ \dfrac{y_3^4}{4p^2} + y_3^2 & \dfrac{y_3^2}{2p} & y_3 & 1 \\ \dfrac{y_4^4}{4p^2} + y_4^2 & \dfrac{y_4^2}{2p} & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

čili

$$\Delta' = \begin{vmatrix} y_1^4 & y_1^2 & y_1 & 1 \\ y_2^4 & y_2^2 & y_2 & 1 \\ y_3^4 & y_3^2 & y_3 & 1 \\ y_4^4 & y_4^2 & y_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Nyní odečtu od druhého řádku první, od třetího řádku druhý a od čtvrtého řádku třetí; ihned dostaneme

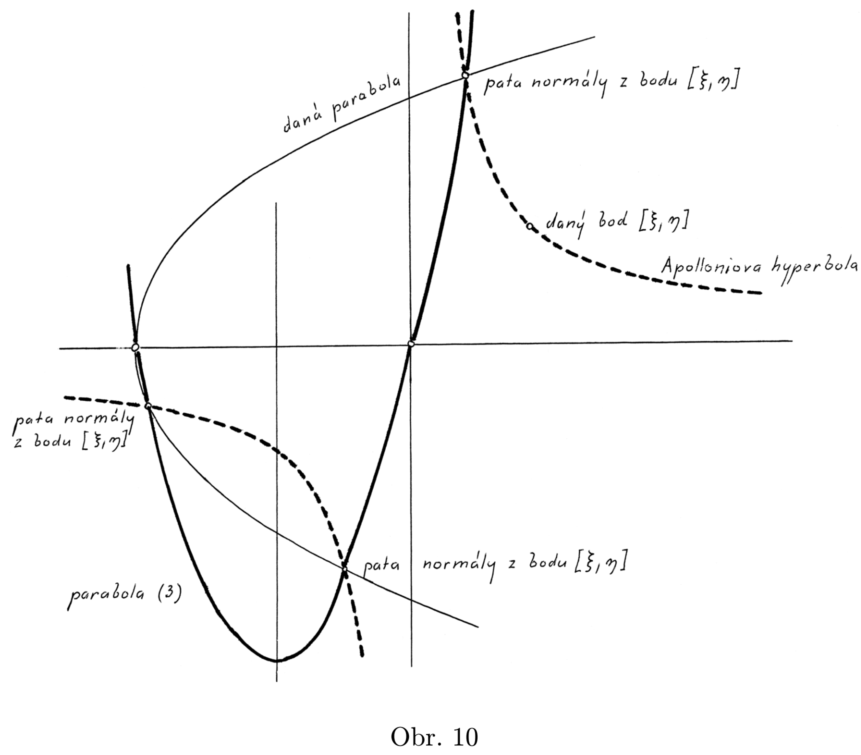
$$\Delta' = (y_2 - y_1)(y_3 - y_2)(y_4 - y_3) \begin{vmatrix} (y_2^2 + y_1^2)(y_2 + y_1) & y_2 + y_1 & 1 \\ (y_3^2 + y_2^2)(y_3 + y_2) & y_3 + y_2 & 1 \\ (y_4^2 + y_3^2)(y_4 + y_3) & y_4 + y_3 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -(y_1 - y_2)(y_1 - y_3)(y_1 - y_4) \cdot (y_2 - y_3)(y_2 - y_4) \cdot (y_3 - y_4) \cdot (y_1 + y_2 + y_3 + y_4) = 0.$$

Poněvadž pořadnice bodů B_i jsou navzájem různé, znamená to

$$(1) \qquad y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0;$$

pokud některé splývají, dojdeme po známém limitním přechodu k témuž výsledku.



Obr. 10

Směrnice spojnice bodů $B_1\left[\frac{y_1^2}{2p}, y_1\right]$, $B_2\left[\frac{y_2^2}{2p}, y_2\right]$ a $B_3\left[\frac{y_3^2}{2p}, y_3\right]$, $B_4\left[\frac{y_4^2}{2p}, y_4\right]$ jsou

$$\frac{y_1 - y_2}{\frac{y_1^2}{2p} - \frac{y_2^2}{2p}} = \frac{2p}{y_1 + y_2}, \qquad \frac{y_3 - y_4}{\frac{y_3^2}{2p} - \frac{y_4^2}{2p}} = \frac{2p}{y_3 + y_4},$$

takže se liší vzhledem k (1) jen znaménkem. Spojnice B_1B_2 a B_3B_4 jsou tudíž antiparalelní vůči ose paraboly. Totéž platí o spojnicích B_1B_3 a B_2B_4 jako i o B_1B_4 a B_2B_3.

V Seifertově úloze je jeden z bodů B_i ve vrcholu paraboly s pořadnicí 0, ze zbývajících tří splývají dva. V důsledku (1) můžeme říci: Kružnice, která jde vrcholem paraboly a dotýká se jí v bodě A s pořadnicí y, protíná ji ještě v bodě A' s pořadnicí $-2y$. V dalším se vracím k Seifertovu označení.

y_1, y_2, y_3 jsou kořeny rovnice, již dostaneme vyloučením x z rovnic $y^2 = 2px$ a

$$(*) \qquad 2x^2 - \frac{\xi - p}{p} y^2 - \eta y = 0,$$

totiž

$$(**) \qquad y^3 - 2p(\xi - p)y - 2p^2\eta = 0.$$

Zase je třeba se zastavit. Jak L. Seifert přišel k rovnici $(*)$?

Vyloučíme-li x z rovnice naší paraboly $y^2 = 2px$ a z rovnice obecné kuželosečky

$$ax^2 + 2bxy + cy^2 + 2dx + 2ey + f = 0,$$

dostaneme

$$(2) \qquad ay^4 + 4bpy^3 + 4p(pc + d)y^2 + 8ep^2y + 4p^2f = 0.$$

Tato rovnice přejde v kubickou rovnici $(**)$, když buďto

α) $a = 0$ nebo

β) $f = 0$,

kdy lze odštěpit y a jeden kořen je $y = 0$, ten vede ovšem k nevlastnímu bodu paraboly jako patě jedné z normál z bodu $[\xi, \eta]$.

α) Srovnáme-li při $a = 0$ rovnice $(**)$ a (2), vyjde

$$2b = \frac{1}{2p}, \qquad 2d = -2pc, \qquad 2e = -\frac{\xi - p}{2p}, \qquad f = -\frac{\eta}{2}$$

a (2) přejde v

$$xy - (\xi - p)y - p\eta + 2cp\left[y^2 - 2px\right] = 0.$$

To je při proměnném parametru c svazek kuželoseček určený naší parabolou a její Apolloniovou hyperbolou příslušnou bodu $[\xi, \eta]$ (viz Bydžovského *Úvod …* z roku 1923, str. 220–221).

β) Srovnáme-li při $f = 0$ po redukci o y rovnici (2) s $(**)$, vyjde

$$a = 1, \quad b = 0, \quad 2(pc + d) = p - \xi, \quad 2c = -\frac{1}{2}\eta,$$

takže (2) přejde v

$$x^2 + (p - \xi)x - \frac{1}{2}\eta y + c\big[y^2 - 2px\big] = 0,$$

čili – při proměnném c – ve svazek kuželoseček daných naší parabolou $y^2 = 2px$ a parabolou

$$\left[x - \frac{\xi - p}{2}\right]^2 = 2 \cdot \frac{\eta}{4}\left[y + \frac{(\xi - p)^2}{2\eta}\right]. \tag{3}$$

Při $c = \frac{p-\xi}{2p}$ dostaneme Seifertovu kuželosečku $(**)$.

Oba případy α) i β) jsou ilustrovány na obr. 10. Apolloniova hyperbola je vytažena silně čárkovaně; prochází ovšem bodem $[\xi, \eta]$, z nějž vedou normály. Parabola (3) je vytažena silně plně; prochází ovšem počátkem, tj. vrcholem výchozí paraboly. Spolu s ní určuje svazek, v němž je Seifertova kuželosečka $(*)$.

Tedy

$$y_1 + y_2 + y_3 = 0, \quad y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1 = -2p(\xi - p), \quad y_1y_2y_3 = 2p^2\eta.$$

Jest

viz začátek řešení $y_i = -\frac{1}{2}y_i'$

$$y_1' + y_2' + y_3' = 0, \tag{$***$}$$
$$y_1'y_2' + y_2'y_3' + y_3'y_1' = -8p \cdot (\xi - p) = -2p\big[(4\xi - 3p) - p\big],$$
$$y_1'y_2'y_3' = -16p^2\eta = 2p^2 \cdot (-8\eta).$$

Má tedy průsečík normál v bodech A', B', C' souřadnice $[4\xi - 3p, -8\eta]$, jsou-li $[\xi, \eta]$ souřadnice průsečíku normál v bodech A, B, C.

Buďto jsem něco vynechal, nebo byl L. Seifert velmi stručný. Ověřím to. Normály výchozí paraboly v jejích bodech (při y vynechávám čárky) $\big[\frac{y_1^2}{2p}, y_1\big]$ a $\big[\frac{y_2^2}{2p}, y_2\big]$ jsou

$$2py_1x + 2p^2y - 2p^2y_1 - y_1^3 = 0,$$
$$2py_2x + 2p^2y - 2p^2y_2 - y_2^3 = 0.$$

Jejich průsečík má souřadnice

$$\xi_{12}' = \frac{1}{2p}\big[2p^2 + (y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2)\big], \qquad \eta_{12}' = -\frac{1}{2p^2}y_1y_2(y_1 + y_2).$$

V důsledku první rovnice v $(***)$ je

$$y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2 = (-y_2 - y_3)^2 + (-y_2 - y_3)y_2 + y_2^2 = y_2^2 + y_2y_3 + y_3^2,$$
$$y_1y_2(y_1 + y_2) = (-y_2 - y_3)y_2(-y_3) = y_2y_3(y_2 + y_3).$$

Pro souřadnice $[\xi'_{23}, \eta'_{23}]$ průsečíku normál naší paraboly v jejích bodech $\left[\frac{y_2^2}{2p}, y_2\right]$ a $\left[\frac{y_3^2}{2p}, y_3\right]$ tedy $\xi'_{12} = \xi'_{23}$, $\eta'_{12} = \eta'_{23}$. To znamená, že normály paraboly v jejích bodech $\left[\frac{y_i^2}{2p}, y_i\right]$ se vskutku protínají v jednom bodě P'. Pro jeho souřadnice $[\xi', \eta']$ můžeme tedy psát

$$\begin{aligned}3\xi' = \xi'_{12} + \xi'_{23} + \xi'_{31} \; &= \\ &= \frac{1}{2p}\left[2p^2 + (y_1^2 + y_1y_2 + y_2^2)\right] + \\ &+ \frac{1}{2p}\left[2p^2 + (y_2^2 + y_2y_3 + y_3^2)\right] + \\ &+ \frac{1}{2p}\left[2p^2 + (y_3^2 + y_3y_1 + y_1^2)\right] = \\ = 3p - \frac{3}{2p}\big(y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1\big),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}3\eta' &= \eta'_{12} + \eta'_{23} + \eta'_{31} = \\ &= -\frac{y_1y_2(y_1 + y_2)}{2p^2} - \frac{y_2y_3(y_2 + y_3)}{2p^2} - \frac{y_3y_1(y_3 + y_1)}{2p^2} = \\ &= \frac{1}{6p^2}\big[-(y_1 + y_2 + y_3)(y_1y_2 + y_2y_3 + y_3y_1) + 3y_1y_2y_3\big].\end{aligned}$$

Vrátíme-li se k rovnicím $(***)$, tak už snadno zjistíme, že souřadnice bodu P' jsou

$$\xi' = 4\xi - 3p, \qquad \eta' = -8\eta,$$

jak uvedl L. Seifert.

* * *

Při poslední korektuře doplňuji, co jsem dříve přehlédl.

K úloze XII (viz str. 128) L. Seifert výjimečně citoval (velmi neúplně) tuto náročnější učebnici: Alfred Clebsch (1833–1873): *Vorlesungen über Geometrie* I, Leipzig, 1876, 2. vyd. 1932; v něm viz kap. XVI. *Die Geometrie des Dreiecks*, str. 312–338 s trimetrickými souřadnicemi.

C. Imaginární elementy v geometrii (Praha, 1941)

Seifertova knížka o 75 stranách vyšla roku 1941 jako 10. svazek sbírky *Cesta k vědění*, jejíž vydávání zahájila Jednota už roku 1940 brožurou Štefana Schwarze (1914–1996) *O rovnicích* (2. rozšířené vydání: 1947). Byl to zdařilý pokus Jednoty alespoň o částečnou náhradu univerzitního studia matematiky a fyziky, když německé okupační úřady po svém brutálním zásahu v listopadu 1939 uzavřely české vysoké školy. Redaktorem matematické části *Cesty k vědění* byl František Vyčichlo.

Svazek se L. Seifertovi vskutku vydařil. Vzhledem k charakteru knížky je pochopitelné, že citacemi šetřil, lze však litovat, že je uváděl neúplně. S dobrým porozuměním mohl tehdy svazek číst septimán z reálky, protože pojmy jako dvojpoměr či imaginární bod mu nebyly cizí (s prvním se seznámil už v kvintě, s druhým v septimě). Dnešní oktaván by si se Seifertovou knížkou poradil stěží. Práce s komplexními elementy zjednodušuje výsledky a – což je ještě důležitější – umožňuje více proniknout v geometrické vztahy. B. Bydžovského *Úvod do analytické geometrie* (Praha, 1923) věnuje imaginárním útvarům značnou pozornost (o druhém vydání z roku 1946 a třetím vydání z roku 1956 to už platí v míře podstatně menší, tak třeba se autor zřekl vztahu mezi rotační kvadrikou a absolutní kružnicí). Vyplatí se srovnat Bydžovského učebnici z roku 1923 s jen o pět let starší náročnou knihou Gastona Darbouxe (1842–1917) *Principes de Géométrie analytique* (Paris, 1917), která je – z literatury mně známé – nejrozsáhlejším a nejhlubším studiem geometrických útvarů prostřednictvím imaginárních elementů. Nelze si nevšimnout, že B. Bydžovský uvádí Darbouxovu knihu v seznamu literatury jen v 1. vydání na straně 404 (ve druhém vydání seznam literatury vůbec není).

Přístupněji a v míře daleko menší než G. Darboux psal o imaginárních elementech už více než o šedesát let dříve Michel Chasles v knize *Traité de Géométrie supérieure* (Paris, 1852), hlavně v kapitole V. *Du système de deux points ou de deux droites imaginaires* (strany 55–66) a v kapitole XXXIII. *Cercle imaginaire* (strany 546–556). M. Chasles dokonce už dříve v *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie*[29] na konci poznámky Note XXVI. *Sur les imaginaires en Géométrie*[30] napsal, že již Johann Lambert (1728–1779) srovnával reálné a imaginární prvky na dvojici tvořenou jednotkovou kružnicí $x^2 + y^2 = 1$ a jednotkovou rovnoosou hyperbolou $x^2 - y^2 = 1$.

M. Chasles uvádí i dalšího autora, který významně přispěl svými úvahami o – jak píše: *propriétés contingentes*[31] – k poznání významu imaginárních útvarů.

---

[29] 1. vydání: Bruxelles, 1837, 2. vydání: Paris, 1875, reprint: Paris, 1989, německý překlad: Halle, 1839, reprint: Wiesbaden, 1968.

[30] 1875: strany 368–370; 1839: strany 394–397.

[31] Adjektivum *contingent* má i v současné francouzštině mnoho významů. Dobře je zde vystihuje jeho opak: jistý, nutný, racionální. Viz *Le Grand Robert de la langue française II* (Paris, 2. vydání: 1991, str. 868).

Byl jím Lazare Carnot (1753–1823)[32] svými knihami *De la Corrélation des figures de Géométrie* (Paris, 1801) a *Géométrie de position à l'usage de ceux, qui se destinent à mésurer les terrains.*[33]

L. Seifert cituje ještě další významná jména a knihy. Nejdříve je to na str. 6 Jean Poncelet: *Traité des propriétés projectives des figures I, II* (Paris, 1822; 2. vyd. 1865). Četbu obou dílů ztěžuje záplava slov. Velmi zajímavá recenze je v Journal für die reine und angewandte Mathematik 1(1826), 96; patrně ji napsal vydavatel August Crelle. Je v ní zachycen poměr mezi J. Ponceletem a Jacobem Steinerem při formování nové nauky – projektivní geometrie – a začátek jejich rivality. Známý je Steinerův nejasný postoj k imaginárním útvarům. V této souvislosti je zajímavý třetí odstavec oznámení o Steinerově úmrtí v citovaném Journalu 62(1863), 199–200. O postupném vyrovnávání geometrů s imaginárními elementy píše Felix Klein (1849–1925) v knize *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus* II: *Geometrie.*[34] S výhradou velkého zjednodušení se Ponceletovy úvahy odvíjely třeba od tohoto názoru: U dvou shodných elips v jedné rovině, u nichž hlavní (vedlejší) osa jedné splývá s vedlejší (hlavní) osou druhé, vidíme čtyři průsečíky. Jestliže jednu z elips budeme ve směru její osy vhodně posunovat, uvidíme postupně jen tři, pak jen dva, pak jen jeden, nakonec ani jeden průsečík. Jak se mohly ztrácet?

Ke skupině, kterou tvořili L. Carnot, J. Poncelet, M. Chasles a později G. Darboux – uvádím je v časovém sledu a s tím, že první dva přistupovali k imaginárním útvarům řekněme geometricky, čtvrtý se zřetelnou převahou analytických postupů, třetí byl nějak mezi nimi – je třeba ještě přiřadit dalšího Francouze. Byl jím Edmond Laguerre (1834–1886) se svými pracemi *Sur l'emploi des imaginaires en Géométrie*[35] a *Mémoire sur l'emploi des imaginaires dans la géométrie de l'espace.*[36]

Vůči citované skupině francouzských geometrů je třeba připomenout aspoň několik německých matematiků, kteří k imaginárním elementům v geometrii přistupovali úplně jinak. Velmi zhruba by se dalo říci, že se k problému postavili s velikou důsledností, která patrně způsobila, že odezva jejich prací byla omezená.

Prvním je s naprostou zřetelností Carl von Staudt (1798–1867): *Geometrie der Lage* (Nürnberg, 1847) a *Beiträge zur Geometrie der Lage I, II, III* (Nürnberg, 1856–1860). Proniká jimi Staudtovo úsilí odstranit výjimky a dosáhnout co nejobecnějších formulací. Podařilo se mu výlučně geometrickými prostředky definovat imaginární elementy a rozlišit je i ve dvojici komplexně

---

[32] O jeho činnosti jako matematika, občana či politika a vojáka jsem v březnu 2004 mluvil v semináři doc. Jindřicha Bečváře na Matematicko-fyzikální fakultě UK; Lazare Carnot byl naprostým opakem politického chameleonství.

[33] Paris, 1803, německý překlad I, II Altona 1808–1810, jen ten jsem měl v rukou.

[34] Berlin, 1909 a další vydání, ruský překlad ve 2. vydání: Moskva, 1987, str. 180–200.

[35] Nouvelles Annales de Mathématiques (2) 9 (1870), 163–175, 241–254.

[36] Tamtéž (2) 11 (1872), 14–21, 108–117. Viz Œuvres de Laguerre II: *Géométrie* (Paris, 1905), strany 88–108 a 238–262; též *Sur l'emploi des imaginaires dans la géométrie dans l'espace*, strany 109–123 (původně v Bulletin de la Société philomatique 1870).

sdružených. Staudtovým východiskem byla čtveřice elementů téhož druhu jako čtyři body v přímce nebo čtyři přímky či roviny ve svazku. Pro takové čtveřice použil označení (neujalo se) *der Wurf* (pl. *die Würfe*; v novější němčině má toto slovo naprosto jiný význam) a vybudoval pro ně „Rechnung mit Würfen“. L. Seifert má naprosto pravdu, když na str. 7 poznamenává, že Staudtovy knihy nejsou snadná četba (soudím, že velmi těžká četba) a pro začátečníka jsou téměř nepřístupné (soudím, že zcela). Doporučuje dvě starší práce (doplňuji a opravuji jeho údaje): Otto Stolz (1842–1905): *Die geometrische Bedeutung der complexen Elemente in der analytischen Geometrie*[37] a Jacob Lüroth (1844–1910): *Das Imaginäre in der Geometrie und das Rechnen mit den Würfen.*[38] Obě citované práce jsou pokusem učinit Staudtovu teorii přístupnější, ale ani ony nejsou míněny jako úvodní četba.

Pro ni bych doporučil pasáž v knize, v níž by se to ani nečekalo (ale v níž to nepřekvapí čtenáře aspoň poněkud seznámeného s teorií přímkových kongruencí a komplexů): Konrad Zindler (1866–1934): *Liniengeometrie mit Anwendungen* I (Leipzig, 1902, II. díl 1906), část V. *Imaginäre Elemente* (str. 203–278), zvláště § 71: *Logische und geschichtliche Bemerkungen über das "Imaginäre" in der Geometrie* (strany 255 až 261 s řadou literárních údajů na straně 260); výstižně je charakterizován význam Staudtovy teorie (mj. rozlišení komplexně sdružených elementů). Srv. též L. Locher-Ernst: *Das Imaginäre in der Geometrie.*[39]

Studium „imaginárního“, tak jak je zachyceno v knihách a pracích z 19. století, může nyní asi zaujmout jen historika matematiky. Ale pokud by si dnešní vysokoškolský student matematiky chtěl učinit představu o významu „imaginárního“ v geometrii, musí sáhnout po téměř 100 let staré, bohatstvím a hloubkou zcela ojedinělé Darbouxově knize.

* * *

L. Seifert v odd. 1 (str. 9–16) a 8 (48–49) připomíná základní věty z rovinné a prostorové projektivní geometrie. Už v odd. 2 (16–23) píše o imaginárních bodech na reálné přímce a v odd. 3 (23–27) duálně o imaginární přímce ve svazku s reálným středem. Odd. 4 (27–33) věnuje involuci na kružnici. Pak přechází v odd. 5 (33–36) k imaginárním elementům v rovině. Následují v odd. 6 (36–40) jednoduché konstrukce s imaginárními elementy a v odd. 7 (40–48) nelineární imaginární útvary v rovině. Velmi instruktivní je Seifertův výklad – i když stručný – o svazku kružnic a svazku sdruženém (42–43).[40] Konstrukce, které L. Seifert popisuje v těchto kapitolách, mi kdysi dávno usnadnily porozumění strojným úlohám s danými imaginárními elementy, jak je uvádějí Václav Hlavatý: *Projektivní geometrie I: Útvary jednoparametrické* (Praha, 1944)[41] a Vincenc Jarolímek (1846–1921): *Základové geometrie polohy v rovině a v prostoru*

[37] Mathematische Annalen 4(1871), 416–441.

[38] Tamtéž 8(1875), 145–214, a 11(1877), 84–110.

[39] Elemente der Mathematik 4(1949), 97–105, 121–128.

[40] Podrobněji viz B. Bydžovský: *Úvod do analytické geometrie* (Praha, 1923), str. 132–139 (ve 2. vyd. 1946 str. 319–327, ve 3. vyd. 1956 str. 371–379) a *O immaginárních bodech*, Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 39(1910), 317–329, 417–426.

[41] Úlohy jsou soustředěny hlavně do kap. II, odd. 9–11, str. 179–197; pamatuji si, že

I–V (Praha, 1908 až 1918) v daleko větším rozsahu.[42] Cizojazyčná – zvláště německá – literatura o takových konstrukcích je rozsáhlá. Odd. 9–11 (49–59) patří imaginárním bodům a přímkám v prostoru.

* * *

Poněkud déle zůstanu u posledního odd. 12 (59–67), v němž L. Seifert značně zhustil výklad. Pokusím se jej trošku doplnit: Rovnice kvadratické kuželové plochy s vrcholem v počátku a osách v souřadnicových osách je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0; \tag{1}$$

tatáž rovnice v homogenních souřadnicích x, y, z, t znamená i nevlastní kuželosečku plochy (1) v rovině $t = 0$. Na str. 64 se L. Seifert táže: Kdy je reálná plocha kuželová (1) rotační? Otázka může překvapit, protože odpověď je pro geometra bezprostřední, totiž $a^2 = b^2$. Ale otázka má hlubší metodický význam. L. Seifert na tomto zcela jednoduchém případu ukazuje, jak se v obtížnějších situacích stejná otázka zvládá pomocí absolutní kružnice, která má rovnici

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \qquad t = 0. \tag{2}$$

Úloha se řeší pomocí poznatku, že kvadrika, jejíž nevlastní kuželosečka se dvakrát dotýká absolutní kružnice, je rotační (až na jakousi výjimku, která zde odpadá); a naopak.[43] Naznačím to.

Svazek určený nevlastní kuželosečkou kuželové plochy (1) a absolutní kružnicí je

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} - \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0, \qquad t = 0. \tag{3}$$

Parametry vedoucí k jeho degenerovaným kuželosečkám jsou určeny známou kubickou rovnicí v λ

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a^2} - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{b^2} - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{c^2} - \lambda \end{vmatrix} = 0.$$

Její kořeny jsou ovšem $\frac{1}{a^2}$, $\frac{1}{b^2}$, $-\frac{1}{c^2}$, takže k dvojnásobnému kořenu – ten vede k dvojnásobnému dotyku kuželoseček (1) a (2) v nevlastní rovině – dojde jedině při $a^2 = b^2$, kdy se náš kužel stává rotačním.

---

ještě na reálce jsem dovedl sestrojit kuželosečku danou bodem reálným a dvěma dvojicemi bodů komplexně sdružených nebo z duálního zadání – jsou to konstrukce (11.2a) a (11.2b) ze str. 193–194; mnoho z nich jsem už ovšem zapomněl.

[42] Zvláště vytýkám ze sv. II část II: *Konstrukce kuželoseček z prvků dílem imaginárních* (str. 10–19 s doplňky ve sv. V, str. 23–28) a část X: *Konstrukce reálné plochy kulové z prvků imaginárních* (str. 70–75) a ze sv. III rozsáhlé syntetické studium imaginárních kuželoseček a kvadrik, str. 54–106.

[43] Viz B. Bydžovský: *Úvod* ..., Praha, 1923, str. 323–325, nikoliv už druhé a třetí vydání.

Pokud se nejedná o podobně speciální rovnici 3. stupně jako v našem případu, je zpravidla napsání diskriminantu, jehož anulování znamená dvojnásobný kořen, početně náročné. Jak se této obtíži vyhnout, ukazují Georg Salmon (1819–1904) a Wilhelm Fiedler (1832–1912) v knize *Analytische Geometrie des Raumes*, I: *Die Elemente und die Theorie der Flächen zweiten Grades.*[44] Stačí v rovnici (3) určit λ a případně podmínky pro koeficienty tak, aby levá strana byl úplný čtverec. V našem případě to nastane právě jen při $\lambda = \frac{1}{a^2} = \frac{1}{b^2}$. A jsme u $a^2 = b^2$.

Na konci odd. 12 (str. 65–67) dospívá L. Seifert k této větě: Vrcholy V rotačních kuželových ploch, jejichž řídící křivkou je daná elipsa E, vytvoří hyperbolu H prostorově konfokální s elipsou E.[45]

I analytický důkaz lze učinit velmi průhledným; Seifertův výsledek o něco rozšířím. Souřadnice vrcholu V označme ξ, η, ζ a elipsa E nechť je

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0, \qquad z = 0 \quad (a > b).$$

Ta se z vrcholu V promítá kuželovou plochou

$$b^2(x\zeta - z\xi)^2 + a^2(y\zeta - z\eta)^2 - a^2b^2(z - \zeta)^2 = 0$$

čili s vypsáním pouze kvadratických členů

$$\begin{aligned} &(b^2\zeta^2)x^2 + (a^2\zeta^2)y^2 + (b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - a^2b^2)z^2 - \\ &\qquad - 2(b^2\xi\zeta)xz - 2(a^2\eta\zeta)yz + \cdots = 0. \end{aligned} \tag{4}$$

Tato kuželová plocha bude rotační, když – jak už víme – pro svazek kuželoseček v nevlastní rovině

$$[\text{pouze kvadratické členy z (4)}] \; - \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0 \tag{5}$$

existuje takové λ, že levá strana poslední rovnice při něm připouští (za jistých podmínek) přepsání v úplný čtverec (jeho anulování dává spojnici dotykových bodů, v niž přešly dvě degenerované kuželosečky svazku). Snadno je vidět, že k tomu musí v (4) vymizet buďto

[44] Leipzig, 4. vyd. 1898, kap. VII, odd. 120, str. 147–149. První vydání *A Treatise on the Analytic Geometry of Three Dimensions* (Dublin, 1848), 5. vydání: I–II 1912 až 1915; německý překlad: 1. vydání 1860, od 4. vydání ve 2 svazcích, 5. vydání 1922; z těchto učebnic se učily generace geometrů.

[45] Tj. roviny těchto kuželoseček jsou kolmé a hlavní vrcholy každé z nich jsou ohniska druhé.

A) koeficient $a^2\eta\zeta$ při yz a navíc ještě $a^2\zeta^2 - \lambda$ při y^2 anebo

B) koeficient $b^2\xi\zeta$ při xz a navíc ještě $b^2\zeta^2 - \lambda$ při x^2.

V případě A) je $\eta = 0$ (neboť $\zeta = 0$ je vyloučeno) a $\lambda^2 = a^2\zeta^2$. Z (5) pak zbývá

$$(b^2\zeta^2 - a^2\zeta^2)x^2 - 2(b^2\xi\zeta)xz + (b^2\xi^2 - a^2\zeta^2 - a^2b^2)z^2 = 0.$$

Má-li na levé straně být čtverec, nutně

$$(b^2\xi)^2 = (b^2 - a^2)(b^2\xi^2 - a^2\zeta^2 - a^2b^2),$$

a tedy

$$\frac{\xi^2}{a^2 - b^2} - \frac{\zeta^2}{b^2} = 1,$$

což spolu s $\eta = 0$ znamená hyperbolu v souřadnicové rovině $y = 0$ s čtverci poloos $a^2 - b^2 = e^2$ a b^2. Hyperbola je prostorově konfokální s výchozí elipsou (viz obr. 21 na str. 67 Seifertovy knížky).

Postup by se dal mírně zjednodušit. I malé vědomosti z deskriptivní geometrie stačí k tomu, abychom nahlédli, že vrchol V se může pohybovat jedině v rovině $y = 0$.

V případě B) je $\xi = 0$ a $\lambda = b^2\zeta^2$, takže z (5) a (4) dostaneme

$$(a^2\zeta^2 - b^2\zeta^2)y^2 - 2(a^2\eta\zeta)yz + (a^2\eta^2 - b^2\zeta^2 - a^2b^2)z^2 = 0.$$

Aby nalevo byl čtverec, musí

$$(a^2\eta)^2 = (a^2 - b^2)(a^2\eta^2 - b^2\zeta^2 - a^2b^2);$$

pak

$$\frac{\eta^2}{a^2 - b^2} + \frac{\zeta^2}{a^2} = -1.$$

Protože ještě $\xi = 0$, tak jsme došli k imaginární elipse v souřadnicové rovině $x = 0$. Na ose y má tato elipsa body $[0, \pm\mathrm{i}\sqrt{a^2 - b^2}, 0]$. Pro jejich význam je třeba něco připomenout.

* * *

Při definici ohniska středové kuželosečky jako bodu Π, z něhož k ní jdou isotropické tečny, se snadno ukáže, že ohniska jsou právě čtyři, a to dvě reálná na hlavní ose a dvě imaginární na vedlejší.

Při homogenních souřadnicích x, y, t jsou isotropické přímky vycházející z bodu $\Pi[\xi, \eta, \tau]$ dány rovnicí

$$(\tau x - \xi t)^2 + (\tau y - \eta t)^2 = 0$$

čili

$$\tau^2x^2 + \tau^2y^2 + (\xi^2 + \eta^2)t^2 - 2\xi\tau xt - 2\eta\tau yt = 0. \tag{6}$$

Tečny z bodu $\Pi\big[\xi, \eta, \tau\big]$ k elipse

$$f(x, y, t) \equiv b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2t^2 = 0$$

mají (už dříve připomenutou) rovnici

$$f(\Pi) \cdot f(x, y, t) - \frac{1}{4}\Big[x \cdot f_x(\Pi) + y \cdot f_y(\Pi) + t \cdot f_t(\Pi)\Big]^2 = \tag{7}$$

$$= \big[b^2\xi^2 + a^2\eta^2 - a^2b^2\tau^2\big] \cdot \big[b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2t^2\big] -$$

$$-\big[b^2\xi x + a^2\eta y - a^2b^2\tau^2t^2\big]^2 = 0.$$

Při xy je v (6) koeficient 0, v (7) koeficient $2a^2b^2\xi\eta$. Srovnání vede k dvěma možnostem:

a) $\eta = 0$. Rovnice (6) a (7) se zjednoduší na

$$\tau^2x^2 + \tau^2y^2 + \xi^2t^2 - 2\xi\tau xt = 0,$$

$$\tau^2x^2 + \frac{a^2\tau^2 - \xi^2}{b^2}y^2 + \xi^2t^2 - 2\xi\tau xt = 0,$$

takže srovnáním koeficientů při y^2 ihned vychází $\xi^2 : \tau^2 = a^2 - b^2$, což dává známá dvě reálná ohniska na hlavní ose elipsy.

b) $\xi = 0$. Rovnice (6) a (7) se zjednoduší na

$$\tau^2x^2 + \tau^2y^2 + \eta^2t^2 - 2\eta\tau yt = 0,$$

$$\frac{b^2\tau^2 - \eta^2}{a^2}x^2 + \tau^2y^2 + \eta^2t^2 - 2\eta\tau yt = 0.$$

Tedy $\eta^2 : \tau^2 = (b^2 - a^2) : 1$, a to vede ke dvěma imaginárním ohniskům na vedlejší ose.

Situaci při hyperbole dostaneme, když v hořejším výsledku místo b píšeme ib: známá dvě reálná ohniska $\big[\pm\sqrt{a^2 + b^2}, 0\big]$ na hlavní ose a dvě imaginární ohniska $\big[0, \pm\sqrt{-a^2 - b^2}\big]$ na vedlejší ose.

Doporučuji srovnat s Bydžovského učebnicí *Úvod do analytické geometrie* (Praha, 1. vyd. 1923), §4: *Základní vlastnosti ohnisek* (str. 171–174).[46] B. Bydžovský si všímal dosti podrobně všech čtyř ohnisek středových kuželoseček. Ale po třiceti letech učebnice věnovaná stejné kategorii vysokoškolských studentů

[46] V podstatně přepracovaném 2. vydání z roku 1946 odd. 173: *Ohniska kuželosečky* (str. 366–369); ve 3. vydání z roku 1956 stejně nazvané odd. 182-3 (str. 420–423).

(budoucích středoškolských učitelů matematiky), totiž Milan Sekanina (1931–1987) – Leo Boček – Milan Kočandrle – Jaroslav Šedivý (1934–1988): *Geometrie I, II* (Praha, 1986, 1988) se už souvislosti ohnisek s isotropickými přímkami vyhýbá.[47]

Knížka končí dodatkem o geometrickém znázorňování komplexních čísel v Gaussově rovině (str. 68–75). Připojím k němu odkaz na historickou poznámku Kamila Malečka: *Norský zeměměřič Caspar Wessel (1745–1818) a jeho objev geometrické interpretace komplexních čísel.*[48] C. Wessela přivedly k jeho objevu patrně geodetické polygonové pořady. Svou práci dánsky psanou předal roku 1797 dánské Královské Akademii, která ji publikovala dánsky ve svých (všem vědním oborům věnovaných) spisech roku 1799.[49] Tak se stalo, že úplně unikla pozornosti matematiků. K 100. výročí vydala dánská Akademie francouzský překlad Wesselovy práce *Essai sur la répresentation analytique de la direction* (Copenhagen, 1897, XIV+60 stran).[50] Překladatelé Herman Valentiner (1850–1913) a Thorvald Thiele (1838–1910) napsali každý též předmluvu; druhá (str. XI–XIV) s charakterem matematickým, první (str. III–X) s charakterem historickým. Začíná posloupností John Wallis (1616–1703) – 1685, C. Wessel – 1797, C. Gauss (1777–1855) – 1799, Jean Argand (1768–1822) – 1806, doplňuji C. Gauss – 1832 v *Theoria residuorum biquadraticorum. Commentatio secunda.*[51] Kdo by čekal goniometrický tvar komplexního čísla, byl by překvapen; na straně 177 je podrobný popis zobrazení komplexních čísel na body v rovině – z toho *Gaussova rovina.* C. Gauss opakovaně zdůrazňuje, že pro úplné pochopení teorie bikvadratických zbytků[52] nestačí reálná čísla, že se musí přejít k obecnějším, která obsahují jako speciální případ čísla reálná. Podrobně líčí historický vývoj Julian Coolidge (1873–1958) v I. kapitole své knihy *The Geometry of the Complex Domain* (Oxford, 1924, 242 stran).

Ernesto Pascal (1865–1940) vydal jako editor *Repetitorium der höheren Mathematik* (Leipzig, Berlin, 2. vyd. 1910), a pro jeho díl II-1 *Geometrie* napsal Heinrich Timerding (1873–1945) kapitolu VIII. *Geometrische Rechnungsarten* s § 1. *Geometrische Theorie der komplexen Zahlen* (str. 152–155, viz zvláště

---

[47] Poněkud odbočím terminologickou poznámkou. Známé dva imaginární body v nekonečnu, společné všem kružnicím v rovině, nazývá B. Bydžovský „kruhovými“ [v 3. vyd. připouští na str. 360 i cirkulární či isotropické body; jejich původcem je podle něho Julius Plücker: *Kreispunkte*; viz 1. vyd. 1923 str. 401, 3. vyd. 1956 str. 484], autoři v II. dílu na str. 197 „izotropickými“. V literatuře je toto adjektivum běžně vyhrazeno pro přímky, které jdou kruhovým bodem. Vzniklo spojením dvou řeckých slov: $\iota\sigma o\varsigma$ = rovný, stejný a $\theta\varrho o\pi o\varsigma$ = způsob, povaha. Všechny izotropické přímky mají tu společnou (stejnou) vlastnost (povahu), že každá z nich je kolmá sama k sobě či vzdálenost libovolných dvou bodů každé z nich je nulová – z toho též pojmenování „minimální přímky“.

[48] Geodetický a kartografický obzor 46(2000), 17.

[49] Norsko bylo v letech 1536 až 1841 součástí Dánska.

[50] Podle Josef Naas – Hermann Schmid: *Mathematisches Wörterbuch* II, Berlin-Leipzig, 1961, str. 875, se připravovalo nové vydání.

[51] Göttingische gelehrte Anzeigen 1831; Carl Friedrich Gauss Werke II, Göttingen, 1863, str. 169–178.

[52] Vůči libovolnému číslu p se jiné číslo k nazývá bikvadratickým zbytkem, existují-li čísla $x^4 - k$, která jsou dělitelná p; Gaussova definice, str. 169.

str. 152; Wesselova práce je uvedena s chybným údajem Paris, Mém. 1797). H. Timerding a též Christoph Scriba a Peter Schreiber v knize *5000 Jahre Geometrie* (Berlin, 2001, několik dalších vydání a také anglický překlad) na str. 409 připomínají ještě Wesselova předchůdce, Heinricha Kühna, učitele v Gdansku, který těsně po polovině 18. století publikoval ve spisech petrohradské Akademie práci o geometrickém znázornění komplexních čísel. Heinrich Wieleitner (1874–1931) v knize *Geschichte der Mathematik II: Von 1700 bis zur Mitte des 19. Jahrhunderts* (Berlin, Leipzig, 1923, 154 stran, 2. nezměněné vydání: 1939) na str. 8 a 61 Wesselovo prvenství výslovně vytýká (viz též zřetelněji v ruském překladu: Moskva, 1966, str. 25, 158, 400). Taktéž činí Christoph Scriba a Peter Schreiber v právě citované knize. Viz též J. Budon: *Sur la représentation géométrique des nombres imaginaires (analyse de quelques mémoires paru de 1795 à 1820)*.[53] Opakovaně je C. Wessel citován i v Enc. der math. Wissenschaften III-1-2 (Leipzig, 1914–31); viz zvláště str. 782, 1285, 1300.

Lze L. Seifertovi vyčítat, že se ani zhruba čtyřicet let po francouzském překladu Wesselova spisu nezmínil o Wesselově prioritě? Jestliže ano, pak větší výtku by si zasloužil Emil Calda: *Matematika pro gymnázia – Komplexní čísla* (Praha, 1. vyd. 1994, 4. vyd. 2008), který v historických poznámkách na str. 124 dokonce ani po sto letech od zmíněného překladu nenapsal o C. Wesselovi rovněž vůbec nic. Je velká škoda, že v učebnici pro gymnazisty není Wesselova práce uvedena jako vzorový příklad spojení inženýrské praxe s abstraktními pojmy matematiky.

* * *

Absolutní kružnice – dvojnásob neskutečná, jednak v nekonečnu, jednak imaginární – je znamenitým příkladem, jak „matematický výmysl“ může mít zcela reálné využití. Ukáži to na dvou otázkách, úzce spojených se známým navigačním systémem GPS (*General Position System*) z 80. let.

Geometrický princip tohoto systému je v řešení prostorové Apolloniovy úlohy: K daným čtyřem koulím nalézt pátou, která se jich dotýká. Je však třeba se vyhnout takovým polohám oněch čtyř koulí, při nichž je řešení neurčité, tj. je jich nekonečně mnoho. Nejjednodušší takovou situaci tvoří čtyři koule téhož poloměru, které jsou vepsány toru a dotýkají se jej podél jeho meridiánů; pro tyto čtyři koule je řešením Apolloniovy úlohy každá koule, která se vně dotýká toru podél jeho rovnoběžky. A naopak, zvolím-li čtyři koule, z nichž každá se vně dotýká toru podél jeho rovnoběžky, pak se těchto koulí dotýká každá koule toru vepsaná a dotýkající se jej podél jeho poledníku.

Víme, že torus vzniká otáčením kružnice kolem osy ležící v rovině kružnice. Jeho rovnici získáme snadno. Zvolíme-li za osu otáčení osu z a meridián v kružnici $(x-v)^2+z^2=r^2$, $y=0$, tak známým způsobem (po odstranění odmocniny) dostaneme

$$(x^2+y^2+z^2)^2-2(v^2+r^2)(x^2+y^2)+2(v^2-r^2)z^2+(v^2-r^2)^2=0.$$

[53] Bulletin des sciences mathématiques (2) 57 (1933), 175–200, 220–232.

Přejdeme-li k homogenním souřadnicím, ihned uvidíme, že v nevlastní rovině má torus křivku

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = 0, \qquad t = 0,$$

tedy dvakrát počítanou absolutní kružnici. Plochám 4. stupně s touto vlastností se říká cyklidy. Jako první je studoval Charles Dupin (1784–1873) v práci *Applications de Géométrie et de Méchanique à la marine, aux ponts et chaussées, etc., pour faire suite aux développement de Géométrie* (Paris, 1822), zvláště *Quatrième mémoire*, § III. *Propriétés des surfaces cyclides*, … (str. 200–210). Svá vyšetřování cyklid – i dřívější – shrnul Gaston Darboux v monografii *Principes de Géométrie analytique* (Paris, 1917), hlavně v knize V. *De l'inversion* (kap. III-V, str. 405–461). Cyklidy se vytvoří kulovou inverzí z toru, a pokud se týká Apolloniovy úlohy, mají stejnou vlastnost jako torus. Viz Z. N.: *GPS and the Space Apollonian Problem, Volum dedicated to Milan Burša* (Praha, 2009, 191–199). Tento příspěvek byl „geometrickou ozvěnou" na práci, kterou uveřejnil Theodor Wunderlich: *Die geometrischen Grundlagen der GPS – Einzelpunktbestimmung.*[54] Studovat Dupinovy cyklidy bez imaginárních elementů znamená vniknout jen v naprostý začátek jejich vlastností.

Jiná geodetická aplikace absolutní kružnice souvisí s prací, kterou jsem neměl v rukou: U. Strobel: *Über die Drehkegel durch vier Punkte.*[55] Při studiu geometrických základů GPS se dostal k této otázce: Co tvoří vrcholy rotačních kuželových ploch, které procházejí čtyřmi pevnými body?

K první informaci se dostaneme povrchním způsobem: Kvadrika je určena devíti podmínkami: Má-li procházet čtyřmi danými body, znamená to čtyři podmínky. Má-li být singulární, znamená to jednu podmínku. Má-li být rotační – nyní přijde ohlášená aplikace: tj. má-li se dvakrát její nevlastní kuželosečka dotýkat absolutní kružnice – znamená to dvě podmínky. Celkem tedy $4+1+2 = 7$ podmínek. K určení kvadriky chybí $9 - 7 = 2$ podmínky. Z toho se dá – opakuji: povrchně – usoudit, že vrcholy požadovaných kuželových ploch závisejí na dvou parametrech. Takže lze očekávat, že v „obecné" situaci bude hledanou množinou plocha. Jen zprostředkovaně vím, že podle U. Strobela je 14. stupně.

* * *

Řádky o pěkné Seifertově knížce věnované imaginárním elementům v geometrii skončím povzdechem: Profesor geodézie na vídeňské Technické univerzitě T. Wunderlich ve výše citované práci z roku 1992 na str. I 2/9 si stěžuje na … *das bedauernswerte Zurückdrängen des Geometrieunterrichts im Universitätsbereich* … Jen v univerzitní oblasti? Současné středoškolské učebnice geometrie jsou zlomkem toho, co jsem měl za sebou z reálky, kterou jsem končil před 65 roky. Imaginární geometrické prvky byly v učebnici pro septimu, nyní na gymnáziích už dlouho vymizely.

---

[54] *XI. Informationskurs für Ingenieurvermessung*, ETH-Zentrum Zürich, 1992, str. I 2/1–12.

[55] Sitzungsberichte der Österreichischen Akademie der Wissenschaften, Abt. II, 198(1989), 4–7.

D. Cyklografie (Praha, 1949)

Cyklografie je geometrický obor, který studuje zobrazení mezi kružnicemi v rovině a body v prostoru; kružnice v rovině je určena dvěma souřadnicemi středu a poloměrem, bod v prostoru rovněž třemi údaji, totiž svými souřadnicemi. Korespondence se definuje takto: Kružnice o středu $S[x, y]$ a poloměru r se orientuje v cykl a tomu se přiřadí bod $[x, y, r]$, resp. $[x, y, -r]$ při pozitivní, resp. negativní orientaci cyklu. Je to vrchol pravoúhlého přímého (ovšem rotačního) kužele s podstavou omezenou cyklem.

Česká literatura o cyklografii není rozsáhlá. Jan Sobotka (1862–1931) v knize *Deskriptivní geometrie promítání parallelního* (Praha, 1906) jí věnoval kap. III: *Promítání kruhové*, odd. 41–53 na str. 56–78. Tuto Sobotkovu pasáž nelze považovat za víc než za elementární úvod do cyklografie. O kapitole III jsem psal ve sborníku *Jan Sobotka.*[56] J. Sobotka sice už též pracuje s cykly, které zhruba před 25 roky zavedl Edmond Laguerre (viz dále), ale zdaleka ne důsledně. Zřetelně je to patrné na straně 63 při známé Mongeově[57] větě o středech podobnosti tří kružnic, která se s cykly vysloví jednodušeji.

Ve 40. letech vyšly tři menší knížky, z nichž v prvních dvou je cyklografii věnována jen část obsahu, kdežto třetí jí patří zcela:

Josef Klíma: *Různé způsoby zobrazovací v deskriptivní geometrii* (knižnice Cesta k vědění, sv. 27, Praha, 1944, 94 stran). Odd. 14: *Cyklografické promítání* (str. 77–81) se omezuje pouze na jeho nejzákladnější pravidla. Jen na čtyřech posledních řádcích zachází o něco dál; podotýká, že kuželové plochy, která je cyklografickým obrazem kružnic dotýkajících se dané kružnice, lze využít k řešení Appoloniovy úlohy.

Josef Holubář (1895–1975): *O rovinných konstrukcích odvozených z prostorových útvarů* (Cesta k vědění, sv. 47, Praha, 1958, 95 stran). Odd. 5 *Cyklografie* zaujímá strany 42 až 84. V nich J. Holubář věnuje hodně pozornosti cyklografickému řešení Apolloniovy úlohy. Je to pochopitelné u autora skvělé knížky

---

[56] M. Kašparová, Z. Nádeník: *Jan Sobotka (1862–1931)*, editoři Martina a Jindřich Bečvářovi, edice Dějiny matematiky, sv. 44, Matfyzpress, Praha, 2010, 250 stran.

[57] V poznámkách ke kap. III píše na str. 629 J. Sobotka: Totéž odvození (rozumí se prostorový Mongeův postup z Géométrie descriptive, Paris, 1795; viz odst. 42 na str. 53–54) podal již d'Alembert v Nova acta scien. imp. Petropolitanae t. 14, 1805. Podle tohoto údaje by práce vyšla 22 let po d'Alembertově úmrtí. Michel Chasles: *Aperçu historique* ..., 2. vyd. Paris, 1875 (viz str. 293, ruský překlad Moskva 1883; 1. vyd. Bruxelles, 1837, německý překlad Halle, 1839, str. 298; 3. vyd. Paris, 1989), píše: *... cette belle propriété du cercle, que Fuss attribue à D'Alembert: les points de concours des tangentes communes à trois cercles, pris deux à deux, sont en ligne droite* (jedná se o Mongeovu větu), Nova Acta Petropolitana, ann. 1797 et 1798, tom XIV.
Prof. Marie I. Jurkina z Moskvy mi se zvláštní ochotou obstarala výpisky z dotyčné práce, kterou publikoval Nicolas Fuss (1755–1825): *Démonstration de quelques théorèmes de Géométrie*, Nova acta Academiae scientiarum Imperialis 14(1805), 139–152 (Mathematica et Physico-mathematica, annes 1797–1798). N. Fuss se vskutku v úvodu své práce v souvislosti s Mongeovou větou zmiňuje o d'Alembertovi, ale způsobem, který lze považovat jen za náznak. Podstatná jsou výše uvedená data publikací, která nezpochybňují Mongeovo prvenství.

O metodách rovinných konstrukcí, úloha Apolloniova a úlohy příbuzné (Cesta k vědění, sv. 4, Praha, 1940; 2. vyd. 1949). Nemohu se ubránit této poznámce: Holubářovy knížky byly určeny středoškolským studentům, kteří na ně stačili s vědomostmi získanými z Vojtěchových geometrických učebnic, používaných na reálkách až do 50. let – mohu to potvrdit z vlastní studentské zkušenosti. Ale mezi Holubářovými knížkami a nynějšími učebnicemi planimetrie a stereometrie od Evy Pomykalové, které jsou vydávány s patronací Jednoty už patnáct let, je ohromná mezera, kterou by – snad – překonali jen zcela výjimečně disponovaní jedinci. S jejich výjimkou by nynější studenti v obrázcích z Holubářových knížek viděli jen zcela nesrozumitelnou změť čar.

Ladislav Seifert: *Cyklografie* (knižnice Kruh, sv. 15, Praha, 1949, 103 stran) je v české literatuře nejdůkladnějším poučením o zobrazení mezi kružnicemi v rovině a body v prostoru. Na dalších stránkách o ní píši podrobněji.

V základním a nejrozsáhlejším českém díle o deskriptivní geometrii František Kadeřávek – Josef Klíma – Josef Kounovský: *Deskriptivní geometrie I, II* (Praha, 1928, 1931, 2. vyd. 1945, 3. vyd. 1954) se na cyklografii vůbec nedostalo. Pokud vím, totéž lze říci i o pozdějších českých vysokoškolských učebnicích deskriptivy.

Seifertova knížka je velmi přístupná, autor v ní mistrně uplatnil své dlouholeté učitelské zkušenosti. Nevyhýbá se úplně analytickým postupům, ale vysoko převažuje syntetické odvozování. Má osm oddílů, jich se nyní dotknu.

I. Úvod (str. 7–24)

Úvod je opakováním a doplněním planimetrických poznatků z kvintánské Vojtěchovy učebnice *Planimetrie*, která se používala na reálkách v druhém až pátém desetiletí minulého století. O jednom doplnění se výslovně zmíním: Na stranách 17–18 píše L. Seifert o tečnové vzdálenosti dvou cyklů. Na ní je založena věta, kterou roku 1866 objevil John Cassey (1820–1891) jako nutnou (později se ukázalo, že je i postačující) podmínku, aby ke čtyřem kružnicím v rovině existovala pátá jich se dotýkající. Tato věta, z níž lze snadno odvodit rovnici kružnice, která se dotýká tří kružnic určených svými rovnicemi, je zobecněním pradávné Ptolemaiovy věty [která není Ptolemaiova, ale Menelaova, ne-li Euklidova[58]].

II. Lineární řada cyklů. Cyklické pole (str. 25–34)

Obě pojmenování zavedl ve své zmíněné už učebnici Jan Sobotka. První znamená množinu cyklů, které odpovídají bodům přímky; druhé znamená množinu cyklů, které odpovídají bodům roviny. Dva cykly určují dva body; stopník jejich spojnice (tj. nulová kružnice) je střed podobnosti výchozích cyklů. Tři cykly určují tři body; stopa roviny jimi určené je osa podobnosti výchozích cyklů

[58] Viz třeba Johannes Tropfke (1866–1939): *Geschichte der Elementar-Mathematik II*, Leipzig, 1903, str. 91–92 (2. vyd. I-VII, 1921–1924; z 3. částečného vyd. I-IV, 1930–1940 sv. IV: *Ebene Geometrie*).

[známá věta, kterou rovněž přechodem do prostoru dokázal Gaspard Monge (1746–1818); viz výše pozn. [57]].

III. Cyklografické kužele a cyklografické kružnice (str. 35–45)

Každá kružnice k a její cyklografický obraz určují jako řídící čára a vrchol kuželovou plochu, které se říká cyklografická. Všechny cyklografické kužele sečou nevlastní rovinu v kuželosečce, které se říká základní; L. Seifert ji označuje C. Kuželosečka, která jde dvěma body základní kuželosečky C, se nazývá cyklografická kružnice. Kvadrika, která prochází základní kuželosečkou C, se nazývá cyklografická kulová plocha (C je analogií k absolutní kružnici v metrické geometrii). L. Seifert zmíněné útvary studuje a dospívá tak až k řešení Apolloniovy úlohy: K daným třem cyklům sestrojit cykly, které se jich dotýkají. U Seifertova řešení na stranách 42 až 44 se zastavím.

Je po výtce syntetické, nelze je však nazvat ryze cyklografickým. L. Seifert totiž odvozuje cyklografickým způsobem – aniž by to výslovně řekl – syntetickou konstrukci, kterou roku 1814 uveřejnil Joseph Gergonne (1771–1859).[59] A zase: L. Seifert se zhlédl – aniž by to napsal – v postupu, který uplatnil Wilhelm Fiedler v 1. dílu (4. vyd. 1904, str. 242–243) své známé učebnice o deskriptivní geometrii ve spojení s projektivní geometrií (více o této třísvazkové učebnici viz poslední odd. *Krátká historie cyklografie*). V krátkosti naznačím čistě cyklografické řešení jak v rouše

a) syntetickém,[60] tak

b) analytickém.

a) I při minimální představivosti se nahlédne, že cykly, které se dotýkají pevného cyklu k_1, se zobrazují v pravoúhlou kuželovou plochu; označím ji K_1. Cyklům, které se dotýkají cyklů k_1 a k_2, koresponduje tak průsečnice kuželových ploch K_1 a K_2. Protože ke každé přímce na jedné z těchto ploch existuje na druhé ploše přímka s ní rovnoběžná, protínají se kuželové plochy K_1 a K_2 v nevlastní kuželosečce, a tedy ještě v další kuželosečce; ta leží v rovině, kterou označím ϱ_{12}. Když ke třem daným cyklům k_1, k_2, k_3 takto sestrojím roviny ϱ_{12}, ϱ_{23} a ϱ_{31}, snadno známým způsobem ověřím, že tyto tři roviny patří svazku. Jeho osa pak kuželové plochy K_1, K_2, K_3 protíná ve dvou bodech, které jsou cyklografickými obrazy cyklů dotýkajících se cyklů k_1, k_2, k_3.

b) Analytické řešení by mohlo vypadat takto: V průmětně $z = 0$ zvolíme kružnici k se středem v počátku a poloměrem r a orientujme ji v pozitivní cykl. Cykl $\varkappa$, který se vnějšně dotýká cyklu k, bude orientován záporně; kóta z cyklografického obrazu cyklu $\varkappa$ bude tedy záporná. Označíme-li poloměr cyklu $\varkappa$ třeba ϱ, bude tedy $\varrho = -z$. Má-li střed cyklu $\varkappa$ první dvě souřadnice x a y, lze

[59] Viz Annales de Mathématiques 4(1814), 349; tato práce mi zůstala nepřístupná; viz třeba už zmíněnou Holubářovu knížku o rovinných konstrukcích z roku 1940, str. 23–25.

[60] Srv., jak postupuje J. Holubář ve své druhé knížce o rovinných kostrukcích z roku 1948, strana 51 a násl.; plynule přechází od stereografického k rovinnému Gergonneovu řešení na straně 54.

tedy vnější dotyk cyklů k a $\varkappa$ vyjádřit takto:

$$\sqrt{x^2+y^2} = r+\varrho = r-z.$$

Jestliže cykly k a $\varkappa$ mají vnitřní dotyk, je orientace cyklu $\varkappa$ zase pozitivní, tedy $\varrho = z$, a jejich dotyk znamená, že

$$\sqrt{x^2+y^2} = |r-\varrho| = |r-z|.$$

V obou případech tak

$$x^2+y^2-(z-r)^2 = 0$$

a cyklografickým obrazem cyklů, které se dotýkají cyklu k, je tak kuželová plocha s vrcholem $[0,0,r]$ a řídící čarou v kružnici K.

Zvolíme-li dva pozitivní cykly k_1 a k_2 o středech $[x_1,y_1]$ a $[x_2,y_2]$ a poloměrech r_1 a r_2, pak cykly, které se dotýkají cyklů k_1 a k_2 mají cyklografický obraz v průniku kuželových ploch K_1 a K_2 o rovnicích

$$(x-x_1)^2+(y-y_1)^2-(z-r_1)^2 = 0,$$
$$(x-x_2)^2+(y-y_2)^2-(z-r_2)^2 = 0.$$

Jestliže je od sebe odečteme, hned nahlédneme, že onen průnik leží v rovině ϱ_{12}

$$(*)\quad 2(x_2-x_1)x+2(y_2-y_1)y-2(r_2-r_1)z-(x_2^2+y_2^2-r_2^2)+(x_1^2+y_1^2-r_1^2) = 0.$$

Přibereme-li třetí cykl k_3 o středu $[x_3,y_3]$ a poloměru r_3 a napíšeme-li rovnice rovin ϱ_{23} a ϱ_{31} analogické k $(*)$

$$(**)\quad 2(x_3-x_2)x+2(y_3-y_2)y-2(r_3-r_2)z-(x_3^2+y_3^2-r_3^2)+(x_2^2+y_2^2-r_2^2) = 0,$$

$$2(x_1-x_3)x+2(y_1-y_3)y-2(r_1-r_3)z-(x_1^2+y_1^2-r_1^2)+(x_3^2+y_3^2-r_3^2) = 0,$$

tak na první pohled vidíme, že součet levých stran rovnic $(*)$ a $(**)$ vymizí. To znamená, že roviny ϱ_{12}, ϱ_{23}, ϱ_{31} tvoří svazek. Závěr je stejný jako v **a)**.

* * *

Když jsem jako student reálky četl Holubářovu knížku z roku 1940, Gergonnovu důkazu jsem rozuměl, ale bylo mi záhadou, jak na svůj důkaz přišel. Dnes ovšem už dávno vím, jak bych postupoval, maje ke třem kružnicím sestrojit další dotykovou, aniž bych něco věděl o známých konstrukcích této úlohy. Ke kružnici k bych si nakreslil tři kružnice k_1, k_2, k_3, které se jí dotýkají v bodech D_1, D_2, D_3. Asi by mě napadlo, že s třemi kružnicemi je spojen potenční střed a osa podobnosti. A pak by mě už asi přímo udeřilo do očí, že dotykové body D_1, D_2, D_3 leží na spojnicích potenčního středu s póly osy podobnosti vůči kružnicím k_1, k_2, k_3. Musil by ovšem následovat důkaz.

Na stranách 40 až 41 píše L. Seifert krátce o Steinerově potenční kružnici, tedy o pojmu, který spolu se Steinerovu potencí dvou kružnic je dnes neprávem už zapomenut. Jsou mi známy jen dvě české knížky o geometrii, které si oněch dvou Steinerových pojmů všímají. Kromě Seifertovy *Cyklografie* (Praha, 1949) psal o nich ještě – a více – Teodor Monin (1858–1893) v druhé části své knihy *O některých druzích souřadnic projektivických – Příspěvek ku theorii křivky kruhové* (Praha, 1889, 108 + 35 stran). T. Moninovi se podrobně věnuje Martina Bečvářová: *České kořeny bulharské matematiky* (40. svazek edice Dějiny matematiky, Praha, 2009, a to na str. 29 a násl.). Co J. Steiner nazval potencí a potenční kružnicí dvou kružnic, je vysvětleno na stranách 68 až 70 s obr. 2. Rovněž je připomenuta – i se svým osudem – Steinerova kniha *Allgemeine Theorie über das Berühren und Schneiden der Kreise und der Kugeln* (Zürich-Leipzig, 1931), v níž autor Jacob Steiner o zmíněných pojmech podrobně psal; rukopis dokončil už před více než sto lety kolem roku 1825.[61]

IV. Cyklografické koule (str. 46–63)

V této kapitole si L. Seifert dosti posloužil analytickou geometrií. Po mém soudu tak mohl učinit ještě víc.

Kulová plocha má v homogenních souřadnicích rovnici

$$(x - x_0)^2 - (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 - r^2t^2 = 0, \qquad r^2 > 0,$$

a tedy vždy prochází absolutní kružnicí

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \qquad t = 0.$$

Cyklografickou koulí nazývá L. Seifert kvadriku danou rovnicí

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 - (z - z_0)^2 \pm r^2t^2 = 0.$$

Tato kvadrika vždy jde čarou, která ležíc v nevlastní rovině má rovnici

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0, \qquad t = 0;$$

tuto čáru nazývá L. Seifert základní kuželosečkou C. Cyklografická koule je ovšem jedno- nebo dvojdílný rotační hyperboloid s osou kolmou k průmětně a současně je analogií k „obyčejné“ kouli. Kuželosečka C je analogií absolutní kružnice.

[61] Viz předmluva na str. XI a násl.; též referát, který napsal Stefan Cohn-Vossen (1902–1936) pro Zentralbaltt für Mathematik I (1931), 288–289.

L. Seifert vyšetřuje, co je cyklografickým obrazem

a) cyklografické koule, případně

b)průniku dvou či tří cyklografických koulí.

Na straně 50 zjišťuje, že oním obrazem je pro a) kongruence cyklů (jejich 2-parametrová množina), které od hrdla cyklografické koule mají konstantní (reálnou či imaginární) tečnou vzdálenost. Na straně 53 si všímá průniku dvou, resp. tří cyklografických koulí, jehož cyklografickým obrazem je svazek cyklů, resp. dvojice bodů. To lze velmi snadno dokázat analyticky, ale i synteticky bez obtíží nahlédnout.

Toto studium dovedl L. Seifert až k zobecněné Apolloniově úloze na straně 57: Sestrojit cykly, které sečou tři dané cykly v daných třech úhlech. Velmi doporučuji srovnání jak s výše citovanou Steinerovou knihou, zvláště se stranami 182 až 183 (v §31, odd. III) v její 4. části *Von den Winkeln, unter welchen sich Kreise, und von den Winkeln, unter welchen sich Kugeln schneiden*, tak i s výše rovněž citovanou druhou Holubářovou knížkou z roku 1948, str. 77 a násl.

V. Cyklické zobrazení bodových transformací (str. 64–76)

Tuto kapitolu věnoval L. Seifert transformaci, kterou objevil Edmond Laguerre v souvislosti se zavedením cyklu jako orientované kružnice a orientované přímky. Učinil tak v sérii prací z let 1880 až 1883, viz Charles Hermite (1822–1901) – Henri Poincaré (1854–1912) – Eugéne Rouché (1832–1910): *Oeuvres de Laguerre II. Géométrie* (Paris, 1905, str. 592–619 a 651–659). Wilhelm Blaschke: *Untersuchungen über die Geometrie der Speere in der euklidischen Ebene*[62] nazval tuto transformaci Laguerreovou inverzí. Vskutku je jakousi dualitou k mnohem známější kruhové inverzi. Ta reprodukuje úhel dvou cyklů, v Laguerreově inverzi je invariantní jejich tečnová vzdálenost. L. Seifert se dostává až k známému Laguerreovu vzorci, který vyjadřuje úhel přímek p a q pomocí dvojpoměru těchto přímek a isotropických přímek svazku, určeného přímkami p, q. K Laguerreově inverzi se ještě vrátím v posledním odd. *Krátká historie cyklografie.*

VI. Cyklický obraz křivky (str. 77–84)

Kapitola vyžaduje jakési povědomí o některých speciálních křivkách. Ale nemohu si pomoci: Když L. Seifert v odd. 6.4 na stranách 81 až 83 vyšetřuje prostorové čáry, které v cyklografii odpovídají cykloidě nebo epicykloidě nebo hypocykloidě, zachází – řeknu to obrazně – do jakési slepé uličky.

Na straně 82 se zabývá prostorovou křivkou o rovnicích

$$x = R\cos\varphi, \qquad y = R\sin\varphi, \qquad z = 2R\sin\frac{\varphi}{2}.$$

[62] Monatshelfte für Mathematik und Physik 21(1910), 3–60.

Poznamenává o ní, že leží na válcových plochách

$$x^2 + y^2 = R^2, \qquad z^2 = 2R(R - x)$$

a na cyklografické kuželové ploše

$$(x - R)^2 + y^2 - z^2 = 0.$$

L. Seifert to poněkud přehnal, když o čáře napsal: Je to známá hypopéda. Pochybuji, že i před šedesáti roky, kdy Seifertova knížka vyšla, o hypopédě vědělo mnoho geometrů. Věc se má takto: Snadno se nahlédne, že čára je i na kulové ploše

$$(x + R)^2 + y^2 + z^2 = 4R^2$$

se středem $[-R, 0, 0]$ a poloměrem $2R$. Křivka se tedy jeví jako průnik této kulové plochy s výše připomenutou rotační válcovou plochou $x^2 + y^2 = R^2$. Obě plochy se dotýkají v bodě $[R, 0, 0]$, v němž má čára dvojný bod.

Gino Loria: *Curve sghembe speciali algebriche e transcendenti I* (Bologna, 1921) píše o této čáře na stranách 199 až 201 v paragrafu nazvaném *L'ippopeda di Eudosso*, že si jí pomáhal už Eudoxos z Knidu (kolem 408 až 355 př. Kr.) při studiu pohybu hvězd; připojuje, že Eudoxovy úvahy rekonstruoval Giovanni Schiaparèlli (1835–1910), italský astronom, matematik a geodet, znalec antického hvězdářství – viz *Dizionario Enciclopedico Italiano X* (Roma, 1959) a И. Г. Колчинский – А. А. Корсунь – М. Г. Родригес: *Астрономы*, Киев, 1986. Jedná se o průsečnou křivku ploch kulové a rotační válcové, které se dotýkají. Dovedu se představit, že mnohý současný geometr, který uznává jedině obsáhlé teorie, se k Loriovým oběma dvojdílným dílům o speciálních rovinných algebraických a transcedentních křivkách (německy 1902, 2. vyd. 1910–1911, italsky až 1930–1932) a analogických prostorových čarách staví povýšeně či odmítavě. Ale je třeba nezaujatě uznat, že jde o díla, jakých lze dosáhnout jen výjimečně.

VII. Cyklické zobrazení ploch (str. 85–94)

I tuto kapitolu považuji za slepou uličku. Bez jakéhosi povědomí o některých speciálních prostorových čarách je těžko srozumitelná. Jejich studium, kdysi hodně rozšířené, už dávno odeznělo. Vytvoření a vlastnosti takových čar jako třeba konické spirály jsou dnes neznámé a nezajímavé věci.

V souvislosti s cyklografickým obrazem plochy se L. Seifert dostává na straně 89 ke konické spirále jako k průniku rotačního paraboloidu s osou kolmou k průmětně a válcové plochy, která jsouc kolmá k průmětně má za řídící křivku evolventu kružnice. Ke konickým spirálám uvádí L. Seifert na straně 89 tuto citaci: *Pirondini, Crelle J., sv. 118, p. 61.* Student sotva bude vědět, že se jedná o práci, kterou napsal Geminiano Pirondini (1857–1914): *Trajectoires isogonales des génératrices d'une surface développable* pro Journal für die reine und angewandte Mathematik 118(1897), 61–74; tento časopis založil v roce 1826 německý matematik a inženýr August Crelle [podle jeho plánů byla v roce 1838 postavena vůbec první železnice v Prusku mezi Berlínem a Postupimí].

Snad stojí za poznamenání, že v souvislosti se šroubovicemi na rotačních kvadrikách cituje L. Seifert třikrát Matyáše Lercha (1860–1922), v desetiletích kolem přelomu 19. a 20. století nejvýznamnějšího českého matematika. Pražské prostředí se k němu chovalo zle, jistě působil i macešský poměr vídeňského dvora k tehdy jediné (až do roku 1919) české univerzitě. Po desetiletém pobytu ve Švýcarsku se vrátil – a to na brněnskou českou techniku založenou až roku 1899 – teprve 1906. Od 1920 už jen krátce působil na nově vzniklé brněnské univerzitě.

VIII. Užití cyklické projekce a Laguerrových transformací (str. 95–101)

Rozumí se užití prostorových důkazů k větám o skupinách paprsků a cyklů v rovině. Ale je třeba hned napsat, že oddíl příliš přesvědčivě pro prostorové odvozování rovinných poznatků nevyznívá. Už pouhé formulace vět, ke kterým L. Seifert takto dochází, nejsou zrovna jednoduché. Jistou zajímavost je třeba větám přiznat, ale nelze se ubránit námitce, že jsou samoúčelné, protože chybí aspoň náznak jejich využití. To je velmi podstatný rozdíl vůči Mongeovu důkazu o středech podobnosti tří kružnic.

L. Seifert má naprosto pravdu, když kapitolu VIII začíná takto: *Ukážeme v následujícím, jak z některých vět prostorové geometrie poměrně jednoduchých vycházejí věty o cyklech a paprscích zdánlivě velmi složité.* Ještě poměrně prostou formulaci má tato věta ze strany 98: *Dány jsou 4 paprsky. Sestrojme cykly, které se vždy 3 z daných paprsků dotýkají. Pak středy jejich jsou na kružnici a tečnové vzdálenosti vždy 2 a 2 zbývajících jsou stejné.*

Zkusím naznačit, k jakým těžkostem by vedl pokus o rovinný analytický důkaz. Dejme tomu, že rovnice přímek p_i, které jsou nositelkami daných paprsků, jsou v normálním tvaru

$$x\cos\varphi_i + y\sin\varphi_i + d_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3, 4).$$

Jedna z kružnic, dotýkající se přímek p_1, p_2, p_3 (nepřihlížím k orientaci) má střed $[\xi_4, \eta_4]$ vyhovující těmto dvěma rovnicím (jako bod stejně vzdálený jak od přímek p_1 a p_2, tak od přímek p_2, p_3,):

$$\begin{aligned}\xi_4\cos\varphi_1 + \eta_4\sin\varphi_1 + d_1 &= \xi_4\cos\varphi_2 + \eta_4\sin\varphi_2 + d_2,\\ \xi_4\cos\varphi_2 + \eta_4\sin\varphi_2 + d_2 &= \xi_4\cos\varphi_3 + \eta_4\sin\varphi_3 + d_3,\end{aligned}$$

čili

$$\xi_4 = -\frac{d_1(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_3) + d_2(\sin\varphi_3 - \sin\varphi_1) + d_3(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)}{\cos\varphi_1(\sin\varphi_2 - \sin\varphi_3) + \cos\varphi_2(\sin\varphi_3 - \sin\varphi_1) + \cos\varphi_3(\sin\varphi_1 - \sin\varphi_2)}$$

a podobně η_4; zřetelně je vidět, že čitatel i jmenovatel vznikají cyklickou záměnou indexů. Analogicky by se vyjádřil střed $[\xi_1, \eta_1]$, resp. $[\xi_2, \eta_2]$, resp. $[\xi_3, \eta_3]$ jisté kružnice dotýkající se přímek p_2, p_3, p_4 resp. p_3, p_4, p_1, resp. p_4, p_1, p_2

(pro přehlednost naznačovaného důkazu nepřihlížím k orientaci). Pak by bylo třeba ukázat, že tyto naše čtyři středy leží na kružnici, tedy že

$$\begin{vmatrix} \xi_1^2+\eta_1^2 & \xi_1 & \eta_1 & 1 \\ \xi_2^2+\eta_2^2 & \xi_2 & \eta_2 & 1 \\ \xi_3^2+\eta_3^2 & \xi_3 & \eta_3 & 1 \\ \xi_4^2+\eta_4^2 & \xi_4 & \eta_4 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Anebo by bylo třeba propočítat šest vzdáleností mezi našimi čtyřmi středy a využít obrácené věty Ptolemaiovy – ale to by bylo početně ještě obtížnější.

O syntetickém důkazu lze téměř s jistotou tvrdit, že by byl nepřiměřeně zdlouhavý a těžkopádný. Seifertovo výše vytknuté tvrzení, že cyklickou projekcí a Laguerreovou transformací lze snadno získat věty o cyklech a paprscích v rovině, bylo tedy zcela oprávněné.

Na obr. 1 jsou dány čtyři paprsky p_1, p_2, p_3, p_4 a vyznačeny čtyři cykly. Předně cykl C_{234} – o středu S_{234} – dotýkající se paprsků p_2, p_3, p_4; a analogicky cyklickou záměnou další tři cykly C_{123}, C_{124}, C_{123}. Současně je silně vytažena kružnice, na níž leží všechny čtyři středy těchto cyklů. Ty jsou přeneseny do obr. 2 s vyznačením rovných tečnových vzdáleností pro dvojice C.

* * *

Zde je příležitost k této poznámce:

Studentům nanejvýš srozumitelný prostorový důkaz rovinného tvrzení je Mongeův postup při důkazu známé věty o poloze šesti středů podobnosti tří kružnic (či tří středů podobnosti tří cyklů); jak jsem se už zmínil v pozn. [57] na začátku tohoto oddílu D, je v *Géométrie descriptive* (1795). Za mistrovstvím tohoto důkazu je jistě Mongeovo dlouholeté vyučování na škole v Mézière. Nemaje absolutně žádné vysokoškolsky vědecké školení v metodice vyučování geometrii, troufal bych si Mongeovu myšlenku vyložit názorně už žáčkům 1. stupně základní školy. Opatřil bych si tři polokoule K_1, K_2, K_3 různých velikostí a upevnil bych je na stůl jejich rovníky; ty by tvořily dané tři kružnice k_1, k_2, k_3. Pak bych z plastické destičky vytvořil polokuželovou plochu K_{12} vzniklou osovým řezem rotační kuželové plochy; plochu K_{12} bych uzpůsobil tak, aby při položení krajními polopřímkami p_{12} a p'_{12} na stůl se dotýkala polokoulí K_1 a K_2 podél půlkružnic. Vrchol této polokuželové plochy by byl středem podobnosti kružnic k_1, k_2. Nakonec bych na polokoule K_1, K_2, K_3 položil rovinu ϱ. Ta by se dotýkala i polokuželové plochy K_{12}, její vrchol by byl na stopě roviny ϱ na stole. Závěrem bych podotkl, že totéž by se dalo udělat pro dvojice ploch K_2, K_3 a K_3, K_1, a tak bych názorně ukázal, že vrcholy kuželových ploch K_{12}, K_{23} a K_{31} (tj. středy podobnosti kružnic k_1, k_2 a k_2, k_3 a k_3, k_1 leží na přímce, totiž stopě roviny ϱ na stole.

G. Monge před více než dvěma sty roky vykládal o své větě jinochům asi dvanáctiletým. Před sto lety Jan Vojtěch (1879–1953) Mongeovu větu zařadil do pokročilejší planimetrie pro 1. pololetí kvinty reálek; dokázal ji planimetricky pomocí obrácené věty Menelaovy. Před téměř sedmdesáti roky jsem důkaz Mongeovy věty studoval z Vojtěchovy učebnice na reálce v Prostějově. Nyní už dávno vím, co jsem tenkrát vědět nemohl, ale čeho jsem se už dotkl: Význam Mongeovy věty je ohromný, G. Monge jí postavil můstek k syntetickým řešením Apolloniovy úlohy, která hluboce ovlivnila – nikoliv elementární – tzv. „elementární geometrii“.[63]

Krátká historie cyklografie

Zbývá se zmínit o počátcích cyklografie, jejím vývoji a dnešním stavu. Vznik cyklografie nastíním podle *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* III.1-1, Leipzig 1907–1910, III AB6: Erwin Papperitz (1857–1938): *Darstellende Geometrie*, (str. 517–595, zvláště str. 595) a podle úvodu na stranách 1 až 6 knihy (druhý autor ji připravil k tisku po úmrtí prvního) Emil Müller (1861–1927) – Josef Krames (1897–1986): *Vorlesungen über darstellende Geometrie II: Die Zyklographie* (Leipzig, Wien, 1929). Řada jejich údajů je už na začátku článku prvního autora: *Beiträge zur Zyklographie*[64] Stručně se vývoje cyklografie dotýká i L. Seifert v úvodu své knížky. Krátké zmínky lze ovšem nalézt i v jiných knihách, např. Gino Loria: *Il passato e il presente delle principali Teorie geometriche, storia e bibliografia* (Padova, 4. vyd. 1931, viz str. 284, 1. vyd. 1887) nebo Ernesto Pascal (1865–1940), editor H. Timerding: *Repertorium der höheren Geometrie* I (Leipzig, Berlin, 2. vyd. 1910, str. 44–45); Též Christoph Scriba – Peter Schreiber: *5000 Jahre Geometrie* (Berlin, 2000, str. 361–363, 2. vyd. 2005). Hlubší pohled na cyklografii poskytuje Erwin Kruppa (1885–1967): *Über neuere Fortschritte der darstellenden Geometrie*.[65] v oddíle 3. *Zyklographie* (str. 421–424).

Základní myšlenku cyklografického zobrazení vyslovil Barthélémy Cousinéry (1790–1851): *Géométrie perspective ou principes de projection polaire appliquée à la description des corps* (Paris, 1828). Tuto knihu neznám, ale z velmi skoupých zmínek o ní v literatuře mohu soudit, že se B. Cousinéry inspiroval distanční kružnicí z centrálního promítání. Pochvalně se o Cousinéryově knize

[63] Na pozadí toho, co jsem právě napsal, je třeba si všimnout této skutečnosti: Dnešní gymnaziální geometrické učebnice vydávané s patronací Jednoty už patnáct let Mongeovu větu vůbec neznají. Co je však ještě vážnější: Nezná ji ani dvojdílná učebnice *Geometrie I a II* (Praha, 1986–88), kterou čtveřice autorů napsala pro budoucí učitele geometrie studující na vysokých školách. Taková učebnice by patrně neměla být výlučně „čistou“ geometrií, ale měla by hodně přihlížet ke geometrii v reálném prostředí, tedy v umění, stavitelství a technice. Budoucí učitelé by měli třeba něco vědět o velkém triumfu geometrie, když dvě expedice vyslané francouzskou Akademií ve 30. letech 18. stol. do zemí s velmi rozdílnými zeměpisnými šířkami rozhodly výlučně geometrickými metodami založenými na elementárních vlastnostech elipsy, zda je Země k pólům zploštělá či protáhlá a určily její rozměry. Za svého studia na přírodovědeckých fakultách v Brně a v Praze jsem o výkonu francouzských inženýrů [v Laponsku pracoval i Švéd Anders Celsius (1701–1744)] neslyšel, zrovna tak o jiných aplikacích. Ale jejich absenci v nynějších učebnicích pro mnohonásobný počet studentů vůči stavu ještě před několika desetiletími považuji za vážnou chybu.

[64] Jahresbericht der deutschen Mathematiker-Vereinigung 14(1905), 574.

[65] Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik 4(1924), 411–431.

vyjadřuje Michel Chasles: *Aperçu historique* … (2. vyd. Paris, 1875; v kap. III, §37 na str. 137, v kap. V, §9 na str. 197 a v kap. VI, §20 na str. 269). M. Chasles klade Cousinéryovu knihu vedle Mongeovy *Géométrie descriptive* (Paris, 1795) a oceňuje, že B. Cousinéry zobrazuje prostor jinak než G. Monge ve své učebnici.

Cousinéryho zobrazením kružnic v rovině na body v prostoru se analyticky zabýval N. Druckenmüller: *Die Übertragungsprincipien der analytischen Geometrie* (Trier, 1842)[66] Od Druckenmüllerova studia už jistě nebylo daleko k této analogii: Za obraz kružnice se středem $[x, y]$ a poloměrem r se považuje bod $[x, y, ir]$. Reálná kružnice se tak zobrazuje na imaginární bod, kružnice s imaginárním poloměrem naopak v reálný bod. Pro toto zobrazení se objevily názvy minimální nebo isotropická projekce.[67] Zabývala se jí řada matematiků ve 2. polovině 19. století, zvláště v období ohraničeném knihami Michel Chasles: *Traité de Géométrie supérieure* (Paris, 1852)[68] a Sophus Lie (1842–1899) – Georg Scheffers (1866–1945; redigoval Lieovy rukopisy): *Geometrie der Berührungstransformationen* I (Leipzig, 1896, 694 stran). V kapitole 10. *Beziehung zwichen Sätzen über Geraden und Kugeln* (str. 411–480), kterou S. Lie hned na začátku označuje jako vůbec nejdůležitější z celé knihy, je od strany 427 jednáno o zmíněné minimální projekci; zvláště bych upozornil na obrázky 76 až 78 na stranách 427 až 428. Je však třeba připomenout, že uvažované zobrazení se objevuje i v knihách, v nichž bychom to ani nečekali. Příkladem je Wilhelm Fiedler: *Cyklographie oder Construction der Aufgaben über Kreise und Kugeln* (Leipzig, 1882), viz odd. 94 na stranách 107 až 108 a odd. 112 na stranách 138 až 141. Připojuji, že nejdůkladněji a nejrozsáhleji ukázal význam imaginárních útvarů pro geometrii Gaston Darboux v knize *Principes de Géométrie analytique* (Paris, 1917). Ta se však obrací na pokročilejší geometry.

Nelze nepřipomenout rozsáhlou učebnici Wilhelm Fiedler: *Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage* citovanou už v oddílu věnovaném III. kapitole Seifertovy *Cyklografie*. 1. vydání vyšlo v jednom svazku roku 1863. V něm se W. Fiedler o cyklografii nezmiňuje. Ale už od 3. vydání z 80. let je Fiedlerova učebnice podstatně rozšířena a rozdělena do tří svazků s úctyhodným rozsahem asi 1650 stran. Jak v I. dílu *Die Methoden der darstellenden und die Elemente der projektivischen Geometrie* (4. vyd. Leipzig, 1904), tak v II. dílu *Die darstellende Geometrie der krummen Linien und Flächen* (3. vyd. Leipzig, 1885) jsou roztroušeny kratší pasáže o cyklografii. Právě pro toto jen příležitostné připomínání nelze Fiedlerovo dílo pro první studium cyklografie doporučit.

Ale W. Fiedler vše cyklografii vynahradil a současně učinil velmi významný krok v jejím konstruktivním rozvoji ve své už citované knize o cyklografii a kon-

[66] V Seifertově knížce na straně 5 je tisková chyba: 1812); tato kniha mi byla nedostupná.

[67] Srv. Felix Klein – Wilhelm Blaschke: *Vorlesungen über höhere Geometrie*, viz strana 115 v 3. vydání: Berlin, 1926; 1. vydání: 1893, reprint 3. vydání: Berlin, 1968, ruský překlad: Moskva, 1939.

[68] Viz kap. XXXIII: *Cercle imaginaire*, strany 546 až 556; kap. XXXIV: *Applications des théorèmes relatifs à un cercele imaginaire, aux propriétés des cônes à base circulaire*, str. 557–579.

struktivních úlohách s kružnicemi a kulovými plochami z roku 1882. W. Fiedler nepracoval ještě s orientovanými přímkami a orientovanými kružnicemi. Na jeho knihách je vidět, že neorientované kružnice a přímky ztěžují výklad.

* * *

Bez jakékoliv souvislosti s cyklografií zavedl orientované kružnice Edmond Laguerre v sérii prací z počátku 80. let 19. století.[69]

Hned na začátku první práce této série *Sur la géométrie de direction* píše: *J'appellerai cycle un cercle défini non seulement par sa position, mais encore par le sens dans lequel on peut le supposer décrit par un point mobile.* Orientovanou přímku nazývá nejdříve *direction*, později *semi-droite* (v překladu polopřímka, což má ovšem dnes zcela jiný význam); v podobném smyslu užívá názvu *semi-plan* (polorovina, nyní též s jiným významem).

Rovněž bez souvislosti s cyklografií objevil E. Laguerre transformaci, která se spojuje s jeho jménem. Až později se ukázal její význam pro cyklografii. Naznačil jej i L. Seifert v odd. 5.2 nazvaném Laguerreova inverse na stranách 65 až 70. K jejímu prvnímu studiu nedoporučuji výše zmíněné Laguerreovy práce ani více méně příležitostné partie v některých knihách včetně Seifertovy,[70] ale učebnici Eugène Rouché – Charles de Comberousse (1826–1897): *Traité de Géométrie I* (nové vydání: Paris, 1935; 1. vyd. patrně už z 80. let 19. století.), závěr ke knize III: *Transformation par semi-droites réciproques*, str. 314–324.

Na konci je poznámka, že tyto strany redigoval sám E. Laguerre. Přidržím se jich ke skutečnému vysvětlení Laguerreovy inverse.

Dejme tomu, že jsou dány tyto prvky:

1) přímka o,

2) cykl C,

3) na kolmici spuštěné z jeho středu na přímku o ještě bod P (viz obr. 3).

Zvolme libovolnou oreintovanou přímku m a na cyklu C sestrojme dotykový bod M s ní souhlasně orientované rovnoběžky m'. Označme N průsečík cyklu C se spojnicí bodu M a pólu P. V bodě N veďme tečnou orientovanou přímku n' k cyklu C. Konečně veďme rovnoběžku n souhlasně orientovanou s ní a protínající se s původně zvolenou orientovanou přímkou na ose o. Orientované přímky m a n si korespondují v Laguerreově inversi.

Významnou vlastností Laguerreovy transformace je, že orientované tečny cyklu přecházejí zase v orientované tečny cyklu, kratčeji: cykl se reprodu-

[69] Viz Charles Hermite – Henri Poincaré – Eugène Rouché (ed.): *Oeuvres de Laguerre II, Géométrie* (Paris, 1898); strana 592 a násl.; díl I *Algèbre – Calcul intégral* (Paris, 1898); oba svazky v Národní knihovně ČR mají na titulních listech podpis Prof. Dr. Petr. Žil v letech 1868 až 1950; velmi významně povznesl úroveň matematiky na české a později Karlově univerzitě v Praze.

[70] Jako třeba Felix Klein – Wilhelm Blasche: *Vorlesungen über höhere Geometrie* (Berlin, 3. vyd. 1926, str. 254–255; 1. vyd. 1893, reprint 3. vyd. 1967; ruský překlad Moskva 1939).

kuje v cykl. To připomíná kruhovou inversi, která rovněž kružnici transformuje v kružnici. Analogie mezi inversemi Laguerreovou a kruhovou tím zdaleka nejsou vyčerpány. Připomenu jen, že zatímco ve kruhové inversi je invariantní úhel dvou kružnic, v Laguerreově transformaci má analogickou vlastnost tečnová vzdálenost dvou cyklů. Na stranách 323 až 324 pak E. Laguerre ukazuje, že v jistých situacích lze jeho transformací převést tři cykly v body a Apolloniovu úlohu tak redukovat na zcela elementární konstrukci cyklu jdoucího třemi danými body.

Svého vrcholu dosáhla cyklografie v díle už dříve zmíněném Emil Müller – Josef Krames: *Vorlesungen über darstellende Geometrie II: Die Zyklographie* (Leipzig, Wien, 1929). Kniha vyšla po úmrtí prvního autora; druhý dokončil Müllerův rukopis podle jeho poznámek a připravil jej k tisku. Každý začínající geometr by si měl přečíst aspoň Müllerův úvod na stranách 1 až 6.

O desktriptivní geometrii píše na str. 1: *Jede Abbildung, die sich konstruktiv (zeichnerisch, jedoch unter Verwedung beliebiger Zeicheninstrumente) verfolgen lässt, gehört in das Gebiet der darstellenden Geometrie.* Pak definuje – poněkud neurčitě – zobrazující transformace (*Abdildungen mit bildlichen Charakter*) touto jejich vlastností: Obraz prostorového předmětu připomíná předmět sám. Nejvýznamnějším takovým zobrazením je Mongeova projekce [*Géométrie descriptive* (Paris, 1795)]. Cyklografii označuje E. Müller jako první nezobrazující transformaci a přisuzuje jí velký význam vědecký i výchovný. Jeho předmluva obsahuje řadu literárních a historických údajů. Trvalo téměř 50 let, než se o cyklografii objevila kniha, která důsledným využíváním Laguerreovy myšlenky orientace přímek a kružnic (v jeho původní terminologii *semi-droite* a *cycle*, německy později *Speer* (šíp, oštěp) a *Zykel*) cyklografické postupy podstatně zjednodušila a pronikla do hloubky, které dřívější práce nedosáhly.

Samozřejmě se vnucuje srovnání knih Fiedlerovy z roku 1882 a Müllerovy – Kramesovy z roku 1929. To učinil už E. Müller sám v předmluvě na stranách 3 až 4. Lépe bych to nedokázal – asi bych jen nevynechal Sobotkovu *Deskriptivní geometrii promítání parallelního* (Praha, 1906), kap. III – a tak odkazuji na Müllerův úvod. V jeho závěru na str. 6 E. Müller zcela právem zdůrazňuje význam cyklografie pro hledání souvislostí. Je třeba bez váhání napsat, že tento její úkol splnil v míře vrchovaté. Rovněž v závěru se E. Müller vyjádřil o budoucnosti cyklografie – a letmo i deskriptivní geometrie – optimisticky. Také J. Krames redigoval Müllerovu knihu s přesvědčením, že cyklografie oživí utichající deskriptivní geometrii. Uvádí vztahy cyklografie k různým oblastem matematiky i její technické aplikace. Kdyby oba autoři vstali z mrtvých, mohli by být asi spokojeni s dekriptivou ve svém Rakousku, k jejímu stavu v českých zemích, v nichž měla také dlouhou a velkou tradici, by se však jistě otočili zády.

Velmi mě svádí psát o Müllerově – Kramesově knize, ač toto je článek o Seifertově *Cyklografii* a už tak jsem mnoho odbočoval. Ale když jsem řekl něco málo o Müllerově úvodu, napíši rovněž něco málo o Kramesovu dodatku na stranách 460 až 467. Hned na jeho začátku vyslovuje J. Krames řadu cyklografických problémů, které obšírně komentuje. Ale nemohu nebýt kritický.

Pochybuji, že jeho náměty by byly mohly udržet cyklografii v produktivním stavu. Stačí si uvědomit, jak skončily pokusy o čtyřrozměrnou analogii Mongeova nebo jiného promítání, abychom zapochybovali o životnosti zobrazení – analogického k cyklografickému mezi kružnicemi v rovině a body v trojrozměrném prostoru – mezi kulovými plochami v trojrozměrném prostoru a body ve čtyřrozměrném prostoru. Podobného druhu jsou náměty nahradit v rovině kružnice tříparametrovou množinou podobných a podobně ležících centrických kuželoseček nebo analogicky nahradit kulové plochy čtyřparametrovou množinou kvadrik.

E. Müller v citované předmluvě uvádí 14 prací o cyklografii z let 1891 až 1923; z období 1900 až 1920 je jich 12. S velkou rezervou – je totiž samozřejmě nemožné mít povědomí o každé publikované geometrické práci – mohu říci, že z doby po polovině 20. století mi není známa žádná práce o cyklografii. Vidím v tom potvrzení svého skeptického pohledu na Kramesovu představu o budoucnosti cyklografie.

Od Seifertovy knihy z roku 1949 už uplynulo víc než 60 let. V nich – pokud vím – nevyšla žádná česká geometrická učebnice, která by se významněji zmínila o cyklografii. Je to škoda, je totiž vzorovým příkladem zobrazení nikoliv mezi body, ale mezi body a jinými útvary.

E. Kubické a bikvadratické problémy (Praha, 1951)

1. Obsah Seifertovy knížky

Seifertova knížka *Kubické a bikvadratické problémy* vyšla jako 60. svazek knižnice *Cesta k vědění.*

Začnu tím, čím se tato brožurka velmi odlišuje od mých zápisů ze Seifertova semináře z roku 1946/47. Seminář byl téměř zcela bez literárních a historických údajů, knížka o pět roků pozdější touto absencí netrpí. Upozornit je třeba na neúplné citace, které by začátečníkovi ztěžovaly nalézt příslušnou literaturu. Objevuje se to už v začátku předmluvy na straně 5. Odkaz na *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* III AB8 a III AB9 stačí tomu, kdo je s *Encyklopädie* seznámen. Jde o její 3. část *Geometrie*, 1. díl, 2. polovina s rozsáhlými články Julius Sommer (1871–1943): *Elementare Geometrie vom Standpunkte der neueren Analysis aus*, str. 771–858 (dokončeno roku 1914), a Max Zacharias (1873–1962): *Elementargeometrie und elementare nicht-Euklidische Geometrie in sythetischer Behandlung*, str. 859–1172 (dokončeno roku 1918). Už rozsah naznačuje, že orientace v těchto pracích s více než 1 300 literárnímu údaji není snadná. Také citace následujících dvou knih není přesná. Originál je Federigo Enriques (1871–1946): *Questioni riguardanti la geometria elementare* I, II (Bologna, 1900), pro nějž F. Enriques byl editor a jen jeden z mnoha dalších autorů. Kniha vznikla z podnětu Felixe Kleina – byla přeložena do němčiny: *Fragen der Elementargeometrie* I: *Die Grundlagen der Geometrie* (Leipzig, Berlin, 1911, 366 stran) a II: *Die geometrischen Aufgaben, ihre Lösung und Lösbarkeit* (Leipzig, Berlin, 1907, 348 stran). Se Seifertovou knížkou souvisí – jedině, ale úzce – 7. článek ve II. svazku: Alberto Conti: *Aufgaben dritten Grades: Verdoppelung des Würfels, Dreiteilung des Winkels* (str. 189–266) s množstvím historických odkazů. Poslední Seifertem v předmluvě na straně 5 citovaná kniha je Theodor Vahlen (1869–1945):[71] *Konstruktionen und Approximationen* (*in systematischer Darstellung, eine Ergänzung der niederen, eine Vorstufe zur höheren Geometrie*) (Leipzig, Berlin, 1911, 347 stran), zvláště 3. část *Kubische Konstruktionen*, str. 62–103.

[71] T. Vahlen byl nejen výborný matematik, ale i „výborný“ nacista. Oslavný článek k jeho 70. narozeninám v Deutsche Mathematik (1939), 281–282, končí jeho autor F. Engel (1861–1941) pozdravem *Mit dem deutschen Grusse Heil Hitler!* Na straně 276 je oslavencova fotografie s nepřehlédnutelným odznakem na klopě. To má generace zná i z jiného, o deset let pozdějšího vydání.

Seifertovy citace z předmluvy bych ještě doplnil knihou August Adler (1863–1923): *Theorie der geometrischen Konstruktionen.*[72] Tato kniha je čtenářsky přístupnější než knihy citované L. Seifertem, o nichž jsem se zmínil výše. Se Seifertovou knížkou se úplně stýká její odd. VIII: *Geometrische Konstruktionen dritten und vierten Grades* (str. 230–264).

Náročným doplňkem je Henry Smith: *Mémoire sur quelques problèmes cubiques et biquadratiques*[73] a *Appendice au Mémoire ...*[74] K této práci se ještě vrátím.

L. Seifert dal oddílům 1 až 3 své knížky nádech snadno přístupného preludia. Ale v odd. 4 (strany 17–33) začíná už s poněkud méně snadnou četbou, když popisuje historii metod pro sestrojení zdvojené krychle a v odd. 5 (33–44) činí totéž pro trisekci úhlu. Hlavně pro odd. 6 a 7 (44–48) o řešení rovnic 3. a 4. stupně, ale i pro následující dva oddíly 8 a 9 (48–50 a 50–54) o převedení kubické rovnice na trisekci nebo delický problém a o neřešitelnosti druhými odmocninami úlohy, která vede na irreducibilní rovnici 3. stupně, a konečně i pro odd. 10 (54–56) o rovnici s racionálními koeficienty lze jako přípravu doporučit 1. svazek *Cesty k vědění* Štefana Schwarze (1914–1996): *O rovnicích.*[75] Teprve pak začíná L. Seifert s kubickými a bikvadratickými úlohami v odd. 11 (56–66), a to s řešeními využívajícími pevné kuželosečky; s křivkou 3. stupně to činí v odd. 13 (71–73). Odd. 12 (66–70) patří projektivním úlohám 3. a 4. stupně a odd. 14 (73–75) řešení kubické rovnice dvěma pravými úhly.

* * *

V odd. 15 (75–77) probral L. Seifert přibližné konstrukce pravidelného sedmiúhelníka a devítiúhelníka. Východiskem je obrázek 29 na straně 76, který reprodukuji jako obr. 1. V podstatě jde o trisekci úhlu $3\varepsilon = \sphericalangle BOC$. L. Seifert ukazuje, že pokud mezi úsečkami $a = \overline{OB}$ a $x = \overline{OP}$ platí

$$x^3 - 3x - 2a = 0, \tag{1}$$

je úhel $\sphericalangle BPC$ třetinou úhlu $\sphericalangle BOC$. Specielně při devítiúhelníku vepsaném do jednotkové kružnice je délka jeho strany

$$s_9 = 2\sin\frac{180^\circ}{9} = 2\sin 20^\circ,$$

takže $3\varepsilon = 60^\circ$, a tudíž $a = \frac{1}{2}$. Určí-li se při tomto a z rovnice (1) neznámá x, je $\overline{AE} = \frac{s_9}{2}$.

Tolik L. Seifert. Načrtneme-li si graf funkce $f(x) = x^3 - 3x - 1$, snadno nahlédneme, že rovnice $f(x) = 0$ má jediný pozitivní kořen, a to v intervalu

[72] Leipzig, 1906, VIII+301 stran; existuje doplněný ruský překlad: Oděsa, 1910, XXVI+325 stran.

[73] Annali di matematica pura ed applicata (2) 3 (1870), 112–165.

[74] Tamtéž str. 218–242.

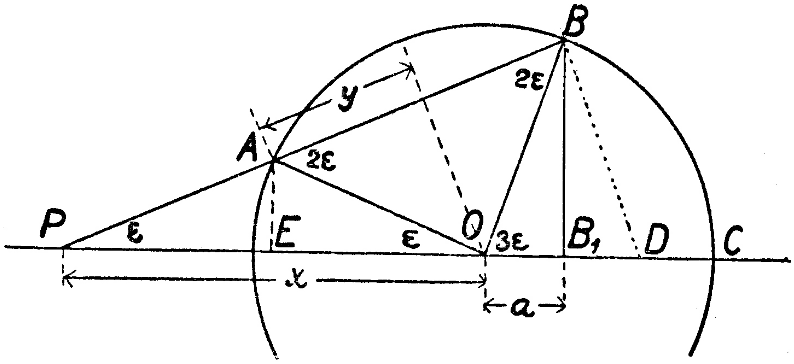
[75] Praha, 1940, 94 stran, druhé, rozšířené vydání: 1947, 159 stran.

$\langle 1,879;\ 1,880\rangle$. Metoda regula falsi poskytuje $x \doteq 1,8794$. Pravoúhlý trojúhelník AEO má přeponu 1 a odvěsnu $\overline{EO} = 0,9397$, tedy druhou odvěsnu

$$\overline{EA} = \sin\varepsilon = 0,341999...,$$

což se jen nepatrně liší od

$$\sin 20^\circ = 0,342\,020...$$



Obr. 1

Obr. 1 je trošku záludný. Kdo nečte pozorně Seifertův text a zahledí se do obrázku, snadno podlehne dojmu, že úhel $\sphericalangle AOB = 90^\circ$, a tedy v obrázku $\varepsilon = \frac{1}{4} \cdot 90^\circ$. Pak je nedorozumění dokonáno. Ve skutečnosti je na obrázku $\sphericalangle AOB = 85^\circ$. L. Seifert sice Vahlenovu knihu v předmluvě cituje, ale přece jen se na stranách 75 a 76 mohl zmínit, že se zhlédl v obrázku na str. 83 Vahlenovy knihy.

O přibližných konstrukcích pravidelného sedmi- a devítiúhelníka jedná též Heinrich Timerding (1873–1945): *Zeichnerische Geometrie* (Leipzig, 1928), zvláště v kapitole 3, oddíl 3, strany 51–56. Zájem o takové konstrukce je prastarý. Velmi zřetelný byl už u Albrechta Dürera (1471–1528); pro podrobný komentář k jeho konstrukcím odkazuji na reprezentativní dílo *Dürer – Das druckgraphische Werk* III (München, Berlin, 2004) s rozsáhlou studií, kterou napsal Peter Schreiber, znalec Dürerova díla *Underweysung der Messung ...* (Nürnberg, 1525) – viz strany 168 až 278, zvláště strana 202.

* * *

Oddíl 16 *Problém normál kuželoseček* (str. 78–94) je spolu s oddílem 4. *O zdvojení krychle* nejrozsáhlejší. Rozumí se jím úloha z bodu v rovině kuželosečky vést k ní normály. Úloha sahá až k Apolloniovi (asi 262 až 200 před Kr.). Řešil ji pomocí rovnoosé hyperboly, která se po něm i jmenuje. Zabývá se jí Bohumil Bydžovský v knize *Úvod do analytické geometrie* (Praha, 1923, str. 217–221); ve druhém vydání z roku 1946 se už na ni nedostalo.

Bohaté literární údaje poskytuje v *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften* III-2-1 rozsáhlý článek Friedrich Dingeldey (1859–1939): *Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme*, zvláště jeho oddíly 32 až 35 na stranách 60 až 69. Podle něj lze do třicátých let 19. století za nejvýznamnější práce považovat díla těchto dvou francouzských matematiků:

a) Philippe de La Hire (1640–1717): *La construction des équations analytiques* (Paris, 1679) jako dodatek k autorově *Nouveaux élémens des sections coniques* (Paris, ve vydání 1701 strany 440–452).[76] Podobné údaje poskytuje také Heinrich Wieleitner (1874–1931): *История математики от Декарта до середины XIX столетия*, Moskva, 1966, str. 250.[77]

b) Adrien Legendre (1752–1833): *Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Eulériennes* I (Paris, 1825), *Application à la Géométrie*, strany 329–364, *Examen d'une question particulière*, strany 348–349. Partikulární otázkou rozuměl A. Legendre vyšetření, kdy lze z bodu vésti k elipse dvě nebo tři nebo čtyři reálné normály (rozhoduje o tom jeho poloha vůči evolutě dané elipsy, viz výše citovanou Bydžovského učebnici, str. 219–220; odvození je spojeno s povědomím o diskriminantu kubické rovnice). Množství vlastností normál kuželoseček uvádí Adolphe Desboves (1818–1888): *Théorèmes et problèmes sur les normales aux coniques* (Paris, 1861, 53 stran).

H. Smith v úvodu a na začátku dodatku ke své výše citované rozsáhlé práci (1870) připomíná tato jména při řešení problému normál kuželoseček: René Descartes (1596–1650), Philippe de La Hire, Colin Maclaurin (1698–1746), Jean-Victor Poncelet (1786–1867), Jacob Steiner, Charles Catalan (1814–1894), Ferdinand Joachimsthal (1818–1861). Uvedl více jmen než později (roku 1903) F. Dingeldey v citovaném článku v německé encyklopedii (*Encyclopädie der mathematischen Wissenschaften*), ale vypadl Adrien Legendre.

* * *

[76] V Národní knihovně ČR v Klementinu jsou jen tyto dva svazky de La Hireovy o geometrii:
1) *Nouvelle methode en Géométrie pour les sections des coniques, et cylindriques, qui ont pour bases des cercles, ou des paraboles, des ellipses et des hyperboles* (Paris, 1673), 71 stran malého formátu bez jakéhokoliv dodatku.
2) *Sectiones conicae in novem libros distributae* (Parisiis, 1685), 249 stran velkého formátu (s připojením více než 300 stran goniometrických tabulek).
Nepřístupná v Barokním sálu jsou *Oeuvres diverses* (Paris, 1730); v 7. svazku mají být de La Hireovy práce.
Christian Scriba – Peter Schreiber: *5000 Jahre Geometrie* (Berlin, 2000, 2. vydání: 2005, angl. překlad) poněkud křivdí P. de La Hireovi, když ho na straně 322 sice chválí za spojování geometrie s praxí, ale píše, že nyní se jeho jméno spojuje nejvýš se známou konstrukcí bodů elipsy ze dvou soustředných kružnic. B. Bydžovský: *Úvod do analytické geometrie* (Praha, 1923) v závěrečném historickém přehledu připomíná na straně 398, že de La Hire jako první pracoval se souřadnicemi v prostoru (uvádí rok 1679, což by nasvědčovalo výše zmíněnému dodatku) a na straně 402, že rovněž jako první napsal rovnici nesingulární kvadriky, totiž rotačního paraboloidu.

[77] 1. vydání: 1958, německý originál: I. 1922, 136 stran, II. 1923, 154 stran.

Nikoliv de La Hire a A. Legendre, ale až Ferdinand Joachimsthal: *Über die Normalen der Ellipse und des Ellipsoïds*[78] rozvířil zájem o normály z bodu k čáře či ploše 2. stupně. Výlučně synteticky znovu dokázal (str. 175–177), co zjistil už A. Legendre; z řady nových výsledků je konstrukčně důležitý tento (str. 175): kružnice, která jde patami tří normál z bodu k elipse, prochází bodem diametrálně protilehlým k patě čtvrté normály. Větu uvádí B. Bydžovský v knize *Úvod do analytické geometrie* (1923) jako úlohu 70 na straně 225.

Joachimsthalovu syntetickou metodu převedl do analytické F. Eckardt: *Über die Normalen von Kegelschnitten, besonders über die Constructionen der von einem beliebigen Punkte ausgehenden Normalen.*[79] Podobně učinil i Matyáš Lerch (1860–1922): *Drobnosti z geometrie*[80] (zvláště části 13, str. 158–176, a 19, str. 393–406). Do problematiky zasáhli i jiní čeští matematici, L. Seifert jich na str. 79 uvádí kromě M. Lercha pět, zase s neúplnými citacemi.

Nejdříve se L. Seifert zabývá úlohou při parabole, k níž z bodu lze vést tři normály (za čtvrtou lze považovat rovnoběžku s osou paraboly). Činí tak na základě věty (jejíž původ hned objasním), že kružnice určená patami normál z bodu k parabole jde jejím vrcholem. Analytický důkaz je jednoduchý (str. 79–80), dobře by na něj stačil septimán reálky před maturitou. Při parabole $y^2 = 2px$ a bodu $[x_0, y_0]$ je rovnice kružnice

$$x^2 + y^2 - (p + x_0)x + \frac{1}{2}y_0 y = 0,$$

takže její zakreslení je zcela snadné. B. Bydžovský: *Úvod do analytické geometrie* (Praha, 1923) touto větou, kterou připisuje F. Joachimsthalovi, končí § 5 o normálách na str. 221. Blízkost této věty o normálách paraboly s výše uvedenou větou Joachimsthalovou vysvitne, když si představíme, že jeden vrchol elipsy spolu s jejím středem „uběhl do nekonečna“.

Jacob Steiner: *Die Theorie der Kegelschnitte, gestützt auf projectivische Eigenschaften.* (*Auf Grund von Universitätsvorträgen und mit Benutzung hinterlassener Manuscripte Jacob Steiner's bearbeitet von Heinrich Schröter*) (Leipzig, 2. vydání: 1876; 1. vydání: 1866) v § 37, str. 203–208 výlučně synteticky odvodil Apolloniovu hyperbolu a ukázal, že ji lze nahradit parabolou; vyšetřil i souvislost obou kuželoseček. J. Steiner se problémem zabýval už dříve, jak se zmiňují F. Kadeřávek – J. Klíma – J. Kounovský: *Deskriptivní geometrie* I (Praha, 1929, str. 49, pozn. [9]). Udávají Journal für Mathematik 1854, str. 339; úplně a správně *Über algebraische Curven und Flächen*, Journal für die reine und angewandte Mathematik 49(1855), 333–348, zvláště str. 339.

Analytické odovození paraboly je snadné. Daná elipsa a její Apolloniova hyperbola pro bod $[\xi, \eta]$ určují svazek kuželoseček s homogenními parametry A a B

$$A\big(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2\big) + B\Big[\big(a^2 - b^2\big)xy + b^2\eta + a^2\xi y\Big] = 0.$$

[78] Journal für die reine und angewandte Mathematik 26(1843), 172–178.
[79] Zeitschrift für die Mathematik und Physik 11(1866), 311–324.
[80] Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 45(1916), 1–17, 135–177, 353–417.

V něm jsou pro

$$A : B = \varepsilon\big(a^2 - b^2\big) : 2b \qquad (\varepsilon = \pm 1)$$

dvě paraboly

$$\big(bx + \varepsilon ay\big)^2 + \frac{2\varepsilon ab}{a^2 - b^2}\big[b^2\eta x - a^2\xi y\big] - a^2b^2 = 0.$$

Jejich osy jsou rovnoběžné s úhlopříčkami obdélníka, jehož strany jsou tečné k elipse v jejích vrcholech.

Karel Pelc: *Die Krümmungshalbmesser-Constructionen der Kegelschnitte als Corollarien eines Steiner'schen Satzes*,[81] aplikoval Steinerovu větu na konstruktivní úlohy, proto se jí v české literatuře říká Steinerova-Pelcova parabola. Viz třeba několikrát už připomenutou učebnici F. Kadeřávek – J. Klíma – J. Kounovský: *Deskriptivní geometrie* I (1929), odd. 22–24, str. 49–55.

* * *

Odd. 17. *Sestrojení os kuželové plochy* (str. 94–98) je jen velice malým výsekem příslušné problematiky a současně varováním, jak hluboko klesla geometrie na gymnáziích. Bez pólu a poláry se nelze obejít, ale tyto pojmy už středoškolské učebnice dávno neznají. Když si L. Seifert právě před šedesáti roky dovolil o nich psát gymnazistům, mohl tak učinit, protože až do padesátých let se používaly Vojtěchovy a Šilháčkovy-Sechovského učebnice analytické geometrie, jimž alespoň elementy polárních vlastností kuželoseček nebyly cizí. Polárou a polární rovinou kužele se rozumí přímka a rovina – obě procházejí vrcholem – s touto vlastností: Stopa přímky a roviny na rovině ϱ nejdoucí vrcholem je pól a polára vůči řezu kužele rovinou ϱ; viz k tomu Bohumil Bydžovský: *Úvod do algebraické geometrie* (Praha, 1948), strany 249 až 251. Trojhran s vrcholem ve vrcholu kužele se označuje jako jeho polární, když každá ze tří hran trojhranu spolu s protější stěnou je polárou a polární rovinou kužele. Pokud je polární trojhran pravoúhlý, jsou jeho hrany osami kužele.

Mysleme si počátkem přímku a rovinu

$$x : y : z = \alpha : \beta : \gamma, \qquad ax + by + cz = 0$$

s kolmým vektorem (a, b, c). Tato dvojice přímka-rovina jsou kolmé právě jen při

$$a : b : c = \alpha : \beta : \gamma. \tag{2}$$

Jestliže v nevlastní rovině má být bod $[\alpha, \beta, \gamma, 0]$ a přímka $ax + by + cz = 0$, $t = 0$ pól a polára vůči absolutní kružnici $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, $t = 0$, musí mít ona přímka rovnici $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$, tj. musí platit (2) vyjadřující kolmost přímky a roviny, které jdou vrcholem kužele. Nalézt osy kužele znamená tedy nalézt

[81] Věstník Královské české společnosti nauk, Praha, 1879.

společný polární trojhran daného kužele a isotropického kužele s týmž vrcholem (jinak řečeno: promítajícího z vrcholu daného kužele absolutní kružnici). Řešení poněkud obecnější úlohy sestrojit společný polární trojúhelník dvou kuželoseček je v mnoha učebnicích deskriptivní nebo projektivní geometrie, za všechny zmíním jen

a) několikrát už citovanou učebnici F. Kadeřávka – J. Klímy – J. Kounovského I (Praha, 1929; 2. a 3. vyd. 1945, 1954), oddíl 30, strany 60 až 62 [hned následující oddíl 31 na stranách 62 až 64 obsahuje konstrukci os kuželové plochy určené řídící elipsou a vrcholem mimo její rovinu],

b) Bedřicha Procházky: *Vybrané statě z deskriptivní geometrie* I (Praha, 1912; části II až VI, 1913–1918, celkem asi 900 stran).[82] V oddíle III, strany 51 až 85, uvádí autor postupně konstrukce os kvadratického kužele, jak je podali Michel Chasles, Wilhelm Fiedler, Karel Pelc, Josef Šolín (1841–1912), Jan Sobotka; následují konstrukce os nedegerované kvadriky.

* * *

Odd. 18. *Některé další kubické a bikvadratické úlohy* tvoří šest co do obtížnosti nesourodých zadání.

První je Archimedova úloha o rozdělení koule rovinným řezem na dva vrchlíky daného poměru. O této kubické úloze píše Arnošt Kolman (1892–1979): *Dějiny matematiky ve starověku* (Praha, 1968), na stranách 149 až 150. Měl by na ni stačit student gymnázia na konci sexty.[83]

Druhá úloha požaduje umístit koncové body úsečky dané délky d na ramena daného ostrého úhlu 2ω tak, aby osa úsečky šla daným bodem B. Zvolím-li souřadnicové osy v osách daného úhlu a na jeho ramenech body $P_1[x_1, -kx_1]$ a $P_2[x_2, kx_2]$ s $k = \operatorname{tg}\omega$, tak z délky $\overline{P_1P_2} = d$ a z incidence osy úsečky P_1P_2 s daným bodem $B[x_0, y_0]$ by absolvent gymnázia měl dospět k rovnicím

$$\begin{aligned}(1+k^2)x_1^2 + 2(-1+k^2)x_1x_2 + (1+k^2)x_2^2 - d^2 &= 0,\\ (1-k^2)x_1^2 + (-1+k^2)x_2^2 + 2(ky_0 - x_0)x_1 + 2(ky_0 + x_0)x_2 &= 0.\end{aligned}$$

Obě rovnice se ovšem nezmění, zamění-li se indexy 1, 2 a k za $-k$. Vidíme, že úloha je 4. stupně. Geometricky znamená vyhledání průsečíků elipsy s rovnoosou hyperbolou, analyticky eliminaci x_1 (nebo x_2) v rovnici 4. stupně v x_2 (nebo x_1), což je sice pracná, ale mechanická záležitost. Kdysi maturant, který se učil z Vojtěchových učebnic, mohl úlohu zvládnout.

[82] Obě učebnice jsou dnes nepředstavitelným penzem pro studenty technických fakult i učitelství deskriptivní geometrie.

[83] Kdo si srovná, jak o objemech rotačních těles psal před sto lety Jan Vojtěch v učebnici, která se používala do padesátých let, a jak o těch objemech píše v nynějších učebnicích Eva Pomykalová, pozná, jak hluboko sklouzla školská geometrie.

Třetí úloha požaduje nalezení samodružných bodů dvou soumístných kolineárních polí. Je kubická a už přesahuje gymnaziální geometrii Vojtěchových učebnic z desátých až čtyřicátých let. Objevuje se až ve vysokoškolských. Zabývali se jí synteticky F. Kadeřávek – J. Klíma – J. Kounovský: *Deskriptivní geometrie* I (Praha, 1929; 2. vyd. 1945, 3. vyd. 1954), odd. 29 na stranách 58 až 60; analyticky B. Bydžovský: *Úvod do algebraické geometrie* (Praha, 1948), odd. 64 a 65 na stranách 140 až 145; oběma metodami Jan Vojtěch: *Geometrie projektivní* (Praha, 1932), odd. 57 na stranách 257 až 264. Úloha se mnohokrát objevuje v české i v cizojazyčné literatuře.

Další tři úlohy se už naprosto vymykají možnostem maturantů, jimž byla knížka určena. Úlohu 4 formuluje L. Seifert – mírně řečeno – ledabyle: *Sestrojte průsečíky přímky s křivkou 3. stupně danou devíti nebo s křivkou 4. stupně danou čtrnácti body.* O povrchnosti přesvědčí B. Bydžovský: *Úvod do algebraické geometrie* (Praha, 1948), viz začátky kapitol XI: *Základní vlastnosti algebraických křivek rovinných*, str. 308 a násl., a zvláště XIV: *Kubika v rovině*, str. 422 a násl., hlavně o syzygetickém svazku čar 3. stupně. L. Seifert pominul případ, kdy oněch devět daných bodů určujících „obecně“ kubiku jsou inflexní body kubiky rodu 1; ty spolu s inflexními přímkami (spojnicemi vždy tří inflexních bodů) tvoří konfiguraci, která je základem výše zmíněného syzygetického svazku. Podle Enc. der math. Wiss. III-21-1, str. 493, jej nejdříve studoval Ludwig Hesse (1811–1874) a dodnes užívaným adjektivem jej obdařil Luigi Cremona (1830–1903): *Einleitung in eine geometrische Theorie der ebenen Kurven* (Greifswald, 1865; překlad italského originálu z roku 1861).[84]

Jen letmo se zastavím u úloh 5 a 6. Ladislav Seifert k nim připojuje neúplnou citaci Smithovy práce z roku 1870; odkazuji na její bibliografické údaje, které jsem uvedl už dříve. Práce je velmi rozsáhlá, číst ji není snadné, i výborný vysokoškolák by se v ní nesnadno orientoval. Úlohu 5 jsem v ní nenašel, úloha 6 je na straně 153. Pro obě úlohy platí, co jsem napsal výše k Seifertově úloze 4.

Úlohy 4 až 6 mají předchůdce, o kterém se L. Seifert či H. Smith nezmiňují. Je jím Jacob Steiner: *Die geometrischen Constructionen, ausgeführt mittelst der geraden Linien und eines festen Kreises …* (1833),[85] viz dodatek *Vermischte Aufgaben, nebst Andeutung ihrer Lösung mittelst des Lineals und eines festen Kreises* (strany 66 až 80), zvláště úloha 16 (a duální 17): Pro dvě kuželosečky k_1 a k_2 jsou dány dva společné body A, B, a pro každou kuželosečku k_i ($i = 1, 2$) ještě tři body C_i, D_i, E_i; mají se vyhledat zbývající dva společné body kuželoseček k_i. Východiskem Steinerova řešení je Pascalova věta, kterou se při kuželosečce dané pěti body určí její druhý průsečík s přímkou jdoucí některým z nich.

[84] Syzygie (z řečtiny) je astronomický název pro krajní polohy oběžnice. Zde tedy krajní rozmístění základních bodů svazku. Názvu se učívá i v jiných částech matematiky.

[85] Reedice: Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 60, Leipzig, 1895.

2. Dodatek: Normály z bodu k elipse

Připomínám a doplňuji:

Problém normál vedených ke kuželosečce z bodu v její rovině je prastarý, začíná u Apollonia. Ale jím také na dlouhých 18 století končí, aspoň pokud je mi známo. Až de La Hire roku 1679 – jak vím z literatury – z rovnice elipsy

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0$$

a Apolloniovy hyperboly příslušné bodu $B[\xi, \eta]$

$$e^2xy + b^2\eta x - a^2\xi y = 0$$

vyloučil y a pro první souřadnice pat hledaných normál tak nutně získal rovnici

$$e^4x^4 - 2a^2e^2\xi x^3 + (a^4\xi^2 + a^2b^2\eta^2 - a^2e^4)x^2 + 2a^4e^2\xi x - a^6\xi^2 = 0.$$

Adrien Legendre z ní roku 1825 zjistil, že z bodu B vně, resp. na, resp. uvnitř evoluty elipsy jdou k ní dvě, resp. tři, resp. čtyři reálné normály.

Zájem o problém podnítil Ferdinand Joachimsthal roku 1843. Jeho syntetická práce obsahovala pro studované normály řadu vlastností, které bylo možné konstrukčně využít. Analytické důkazy Joachimsthalových vět uveřejnil F. Eckardt (ještě jako student!) roku 1866.

O impuls se postaral i Jacob Steiner v práci *Über algebraische Kurven und Flächen.*[86] Počet normál vedených k algebraické křivce, resp. ploše stupně n ze zvoleného bodu stanovil na n^2 (viz str. 335) resp. na $n(n^2 - n + 1)$ (viz str. 344), tedy u kvadrik na šest (ze středu trojosého elipsoidu jde šest normál do jeho šesti vrcholů), ovšem se stálým připomínáním nedefinované „obecnosti“. Navíc – jako prostorovou analogii Apolloniovy hyperboly – dokázal, že paty těchto normál leží na prostorové čáře stupně $n^2 - n + 1$ (v případě kvadriky na prostorové křivce 3. stupně). Z obecnějšího algebraického hlediska přistoupil k problému Alfred Clebsch v článku *Über das Problem der Normalen bei Curven und Oberflächen der zweiten Ordnung.*[87] Naopak výlučně syntetickou konstrukci popisuje Rudolf Niemtschik (1831–1876) v práci *Einfaches Verfahren, Normalen zu Flächen zweiter Ordnung durch ausserhalb liegende Punkte zu ziehen.*[88]

* * *

Ve druhé polovině 19. století se počet prací věnovaných problému normál kuželosečky prudce zvyšuje a pokus o jejich zachycení by nemohl být jiný než značně neúplný. Proto se omezím jen na vybrané články a povšimnu si českých

[86] Journal für die reine und angewandte Mathematik 49(1855), 333–348.
[87] Journal für die reine und angewandte Mathematik 62(1863), 64–109.
[88] Sitzungsberichte der math.-natuwiss. Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften Wien 58(1868), II. Abtheilung, 831–836.

autorů. Jejich řada začíná Karlem Pelcem a bratry Emilem (1848–1894) a Eduardem (1852–1903) Weyrovými. Z dalších musí být – jako zástupce analytické metody – předně jmenován Matyáš Lerch: *Drobnosti z geometrie.*[89] V této velmi rozsáhlé, ale obsahem přístupné práci patří problému normál hlavně odd. 3, strany 158 až 176 (za jakousi průpravu lze považovat už odd. 4 až 6 na stranách 6 až 14 o rovnoosé hyperbole a jejím vztahu k elipse), a pak ještě odd. 19 (strany 393 až 406) o involuci pat normál a o reálnosti normál k elipse z bodu. Zvláště upozorňuji na Lerchův důkaz Joachimsthalovy věty (str. 165) o kružnici jdoucí patami tří normál spuštěných z bodu k elipse. Analogická věta pro parabolu se specializuje způsobem, o kterém jsem už psal. M. Lerch k této větě uvádí sedm citací z třicátých až devadesátých let 19. století, mezi nimi zmíněné už práce Joachimsthala (1853) a Smitha (1870). Z českých autorů cituje jedině Karla Pelce (1875).

Opakovaně se k problému vraceli Josef Klíma, Josef Kounovský a Jan Sobotka. J. Kounovský v práci *Zobecnění problému normál při elipse*,[90] J. Klíma ve stati *Ke konstrukci pseudonormál z bodu ke kružnici*[91] a Alois Urban v populárnějším článku *Zobecnění normál kuželoseček*[92] se zabývali touto úlohou: Z daného bodu B vésti ke kuželosečce přímku, která ji protíná v bodě P, v němž tečna kuželosečky svírá s přímkou BP daný úhel α (při $\alpha = 90°$ jde ovšem o původní úlohu). Mnoho citací uvádí také J. Klíma v práci *Deskriptivně geometrické řešení problému normál kuželoseček.*[93]

* * *

Nesporně zajímavá je otázka, kdy se úloha 4. stupně o normálách redukuje na dvě kvadratické (triviálně to nastává pro body na osách elipsy). Pokud jsem mohl zjistit, první na ni odpověděl Karel Pelc: *Zum Normalenproblem der Ellipse.*[94] Synteticky zjistil, že zmíněnou vlastnost mají body, které leží na kolmicích vztyčených ve středu elipsy k jejím oběma stejně dlouhým průměrům. Na K. Pelce navázali Carl Lauermann v článku *Zum Normalenproblem der Ellipse*[95] a Franz Mertens (1840–1927) v práci *Zum Normalenproblem der Kegelschnitte.*[96] Oba pracovali analyticky, ale s různými východisky; jejich společný výsledek lze vyslovit takto: Tutéž vlastnost jako Pelcovy přímky mají kružnice, jejichž středy jsou na hlavní ose elipsy ve vzdálenosti be/a od jejího středu a jejichž poloměr je e. – C. Lauermann nejdříve danou elipsu afinitou

---

[89] Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 45(1916), 1–17, 135–177, 353–417.

[90] Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 58(1929), 37–41.

[91] Tamtéž 59(1929), 156–167. Jedná se o reakci na Kounovského článek. Obsahuje mnoho literárních údajů.

[92] Rozhledy matematicko-přírodovědecké 23(1943/44), 53–55, 104–110.

[93] Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 42(1913), 32–42, 401–406; viz zvláště strany 32–35.

[94] Sitzungsberichte der math.-naturwiss. Classe der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften, Wien 95(1887), 481–491.

[95] Tamtéž 98(1889), 318–326. V záhlaví je uvedeno: *Lehrer an der Bürgerschule in Grulich* – něco podobného je v dnešní době nepředstavitelné.

[96] Tamtéž 98(1889), 431–445.

převedl v soustřednou kružnici K o poloměru $a+b$, při čemž transformaci zvolil tak, aby Apolloniovu hyperbolu převedla zase v rovnoosou hyperbolu H. Pak si všiml, kdy je ve svazku určeném čarami K a H degenerovaná kuželosečka. Tím vyhledání čtyř průsečíků elipsy s Apolloniovou hyperbolou (tedy bikvadratickou úlohu) převedl na určení průsečíků dvou přímek s elipsou (tedy na dvě kvadratické). – F. Mertens postupoval zcela jinak. Úloze dal projektivní charakter a s využitím kruhových bodů ji převedl na tento úkol, který je v projektivní geometrii známý: Ke svazku kuželoseček se mají nalézt dvojice přímek, že v každé z nich jedna přímka jde daným bodem a druhá se dotýká jedné kuželosečky svazku. – Konečně Pieter Schoute (1846–1913): *Zum Normalenproblem der Kegelschnitte*[97] dokázal opak: Požadovanou vlastnost mají (s výjimkou zmíněných už triviálních situací) jen body na obou Pelcových přímkách a na obou Lauermannových-Mertensových kružnicích.

Stojí za povšimnutí, jak autor postupoval. Elipsa a Apolloniova hyperbola určují svazek s parametrem z

$$z(b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2) - (e^2xy + b^2\eta x - a^2\xi y) = 0.$$

Kuželosečka tohoto svazku degeneruje ve dvě přímky, jakmile

$$\begin{vmatrix} b^2z & -\frac{1}{2}e^2 & -\frac{1}{2}b^2\eta \\ -\frac{1}{2}e^2 & a^2z & \frac{1}{2}a^2\xi \\ -\frac{1}{2}b^2\eta & \frac{1}{2}a^2\xi & -\frac{1}{2}b^2z \end{vmatrix} = 0.$$

Když se místo ξ, η píše x, y a parametr z se považuje za 3. prostorovou souřadnici, dostane se rovnice kubické plochy

$$4a^2b^2z^3 + a^2x^2z + b^2y^2z + e^2xy - e^4z = 0.$$

Je snadné nalézt jejích 27 přímek (vzatých v patřičné násobnosti). Okamžitě je vidět, že jí patří osy x a y a také nevlastní přímka roviny $z = 0$, dále se známým způsobem naleznou čtyři imaginární singulární body. Jejich šest spojnic, z nichž jen dvě jsou reálné, musí být rovněž přímkami plochy (není možné, aby přímka jí nepatřící měla s plochou 3. stupně $2 \times 2 = 4$ body – vzaté s patřičnou násobností – společné). Tyto dvě reálné přímky vedou k svazkům rovin, které protínají plochu v degenerované čáře 3. stupně. To umožnilo autorovi zjištění, že jedině Pelzovy přímky a Lauermannovy-Mertensovy kružnice vedou ke kvadratickému řešení problému normál. Za zmínku snad stojí i autorova poznámka (na str. 1522), že už jeho krajan J. W. Tesch publikoval v roce 1885 práci, v níž rozpoznal význam Pelcových přímek.[98]

[97] Tamtéž 98(1889), 1519–1526.

[98] V této souvislosti může být užitečná následující poznámka. F. Eckardt: *Ueber die Normalen der Ellipse*, Zeitschrift für Mathematik und Physik 18(1873), 106–110, ukazuje, že z bodů na dvou kružnicích – soustředných s elipsou a o poloměrech $a \pm b$ – lze konstruovati jednu normálu k elipse. Eckardtův článek jen letmo (bez bibliografických údajů) zmiňuje Karel Pelc ve výše citované práci na str. 481. Současně lituje – v roce 1887 – předčasného Eckardtova úmrtí. V Eckardtově práci z roku 1866, kterou jsem už dříve citoval, je uvedeno *Stud. Mathem. in Leipzig*, autor tedy zemřel před svým 45. rokem stejně jako F. Joachimsthal.

Není mi známo, zda někdo ve studiu této problematiky pokračoval, ačkoliv třeba závěrečný odstavec Lauermannovy práce zní takto:

Ich behalte mir vor, zu zeigen, dass auch bei der Hyperbel ähnliche Beziehungen sich aufstellen lassen; dass insbesondere bei diesem Kegelschnitt zwei zur Hauptaxe parallele gerade Linien nachgewiesen werden können, von deren Punkten aus die Normalenconstruction mit Zirkel und Lineal allein durchgeführt werden kann.

* * *

Rovinný problém normál zobecnili A. Schatteman – G. Valette v práci *On the normals of closed plane curves*[99] a prostorový Erhard Heil ve stati *Existenz eines* 6*-Normalenpunktes in einem konvexen Körper*,[100] když nalezli odhady pro počet normál jdoucích z bodu k rovinné čáře či k ploše (E. Heil novým důkazem nepublikovaného Hentschelova výsledku).

V naprosté většině prací o normálách z bodu ke kuželosečce převažuje konstruktivní hledisko. K výjimkám patří už výše citovaná Joachimsthalova studie z roku 1843 zhruba ze začátku oživeného zájmu; v období jeho doznívání zástupcem početního směru může být W. Gaedecke: *Über eine bemerkenswerte Relation beim Normalenproblem der Kegelschnitte.*[101] Jde o početní důkaz relace (založený na symetrických funkcích kořenů rovnice pro první souřadnice pat normál z bodu B), kterou pro délky n_i normál z bodu B ke kuželosečce a pro poloměry křivostí r_i v patách normál vyslovil už E. Barisien jako úlohu 1588 v Nouvelles annales de mathématiques (3) 7 (1888), 448:

$$\frac{r_1}{r_1-n_1}+\frac{r_2}{r_2-n_2}+\frac{r_3}{r_3-n_3}+\frac{r_4}{r_4-n_4}=2.$$

Relace je pozoruhodná tím, že v ní nefigurují osy kuželosečky nebo parametr paraboly (při ní jsou nalevo jen tři zlomky) a není u ní omezení pro bod P. Antonín Pleskot (1866–1935):[102] *O jistém teorému vztahujícím se k problému normál křivek algebraických*[103] přenesl Barisienovu relaci na rovinné a algebraické čáry stupně $n>2$.

Na témže místě v Nouvelles annales uveřejnil E. Barisien podobnou úlohu 1587: Pohybuje-li se bod B po čáře, z jejíchž bodů tečny vedené k elipse svírají daný úhel (o této čáře 4. stupně viz úlohu 1 ze Seifertova semináře v části B), pak

$$\frac{r_1r_2r_3r_4}{n_1n_2n_3n_4}=\text{konst.}$$

Tento vztah dokázal analyticky L. Bosi.[104] Východiskem mu zase byla známá nám už rovnice 4. stupně pro první souřadnice pat normál vedených z bodu $B[\xi,\eta]$.

---

[99] Simon Stevin (Groningen) 59(1985), 235–245.

[100] Archiv der Mathematik (Basel) 32(1979), 412–416, 496.

[101] Sitzungsberichte der Berliner mathematischen Gesellschaft 15(1916), 119–123.

[102] Vědecky významně činný středoškolský profesor, viz Karel Lepka: *Vzpomínka na Antonína Pleskota*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 51(2006), 23–30.

[103] Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 60(1931), 57–71.

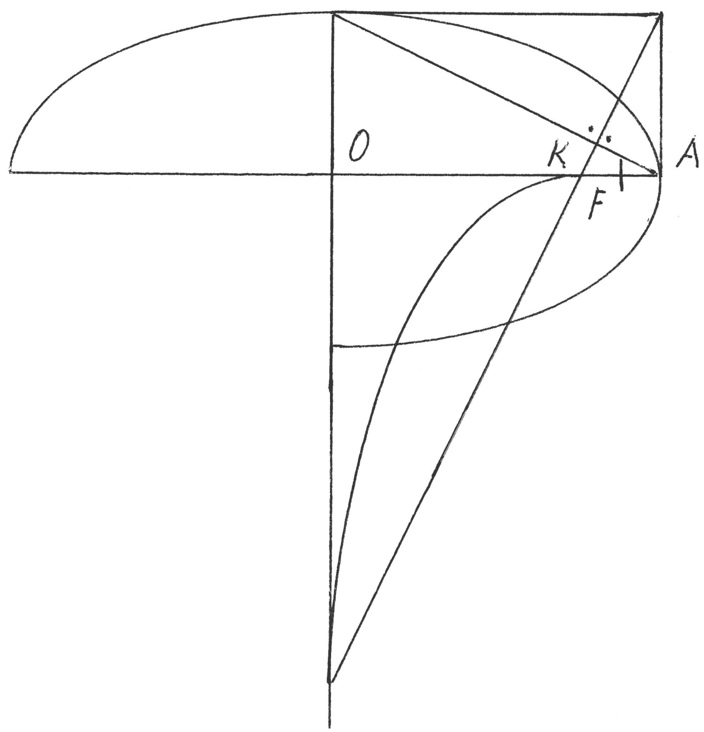
[104] Nouvelles annales de mathématiques (3) 10 (1891), 26*–27*.

K prvně uvedené Barisienově relaci je třeba odpovědět na dvě otázky:

1) Jak je tomu v případě, kdy normály jsou imaginární – jak je tomu s jejich délkami a poloměry křivosti v patách?
2) Může se stát, že některý z jmenovatelů je nulový?

Na druhou otázku lze odpovědět aspoň částečně ihned. Zvolím-li bod B na evolutě, je délka jedné normály (lépe: dvou splývajících) rovna poloměru křivosti v patě.

V úplnosti na tyto otázky zde neodpovím. Omezím se jen na body $B[\xi, 0]$ s $\xi \geq 0$, tj. na body v nikoliv negativní části osy x. Odkazuji na obr. 2, v němž K je střed křivosti elipsy v jejím hlavním vrcholu A a F je ohnisko.



Obr. 2

Známá nám rovnice pro první souřadnice pat normál z bodu $B[\xi, \eta]$ k elipse se při $\eta = 0$ zjednoduší na

$$e^4x^4 - 2a^2e^2\xi x^3 + (a^4\xi^2 - a^2e^4)x^2 + 2a^4e^2\xi x - a^6\xi^2 = 0.$$

Předem víme, že má kořeny $\pm a$ a zbývající dva jsou stejné, takže je snadno určíme:

$$x = \frac{a^2\xi}{e^2}. \tag{1}$$

Čtverec druhé souřadnice paty P normály z bodu B je tedy

$$y^2 = b^2 \cdot \frac{e^4 - a^2\xi^2}{e^4}. \tag{2}$$

Pro čtverec délky normály $n = BP$ tak vychází

$$n^2 = \frac{b^2}{e^2} \cdot (e^2 - \xi^2) \tag{3}$$

a pro poloměr křivosti elipsy v patě P

$$r = \frac{(b^4x^2 + a^4y^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4} = \frac{a^2}{be^3}\sqrt{(e^2 - \xi^2)^3}. \tag{4}$$

Výsledky předem známe – a ihned je dostaneme i z hořejších vzorců – jak pro bod B ve středu elipsy, kdy

$$\xi = 0, \qquad n^2 = b^2, \qquad r = \frac{a^2}{b},$$

tak pro bod B ve středu křivosti K ve vrcholu A, kdy

$$\xi = \frac{e^2}{a}, \qquad n^2 = \frac{b^4}{a^2}, \qquad r = \frac{b^2}{a}.$$

Dosavadní výpočet byl zcela formální bez ohledu na případnou imaginárnost uvažovaných elementů. Druhá souřadnice y v (2) je reálná, pokud

$$\xi \leq \frac{e^2}{a} = a - \frac{b^2}{a},$$

tj. pokud bod B je na uzavřené úsečce OK; nulová při $B \equiv K$; jinak ryze imaginární. Délka normály n z (3) je reálná, pokud $\xi \leq e$, tj. pokud bod B je na uzavřené úsečce OF; nulová jedině při $B = F$; jinak imaginární. Totéž platí o poloměru křivosti z (4). Pro $\xi = e$ z (1) a (2) dostáváme imaginární body

$$\left[\frac{a^2}{e}, \pm \mathrm{i}\frac{b^2}{e}\right]$$

naší elipsy; formálně mají nulovou křivost.

Pozoruhodná je situace při $B \equiv F$. Víme, že tečny z ohniska F k elipse jsou isotropické přímky, každá z nich je kolmá sama k sobě, a tedy též normálou k elipse z ohniska. Podle (3) je pro tuto normálu $n = 0$, což souhlasí s tím, že každé dva body na isotropické přímce mají nulovou vzdálenost.

Zvláště si všimneme, že pro $\xi \in (e^2/a, e)$ – tj. pro bod B mezi středem křivosti K ve vrcholu A a ohniskem F – jsou druhé souřadnice pat dvou normál ryze imaginární, ale délky normál a poloměry křivosti v patách jsou reálné.

Nyní se omezím na $\xi < e$, tj. bod B mezi středem O elipsy a ohniskem F. Z bodu B na hlavní ose elispy jdou dvě normály do jejích hlavních vrcholů, takže v Barisienově označení pro ně je

$$\frac{r_1}{r_1 - n_1} = \frac{\frac{b^2}{a}}{\frac{b^2}{a} - (a - \xi)} = \frac{b^2}{a\xi - e^2},$$
$$\frac{r_2}{r_2 - n_2} = \frac{\frac{b^2}{a}}{\frac{b^2}{a} - (a + \xi)} = -\frac{b^2}{a\xi + e^2},$$

a navíc podle vzorců (3) a (4)

(5) $$\frac{r_3}{r_3 - n_3} = \frac{r_4}{r_4 - n_4} = \frac{a^2(e^2 - \xi^2)}{e^4 - a^2\xi^2}.$$

Dosazením do levé strany Barisienovy první relace dostaneme vskutku 2.

Při $e < \xi$, tj. při bodu B na opačné straně od ohniska F než střed O elipsy, jsou podle (3) a (4) veličiny n a r ryze imaginární, takže podíl $r/(r - n)$ je reálný a opět platí (5), tedy i Barisienova relace.

Jestliže konečně $\xi = e$, tj. $B \equiv F$, je třeba přejít k limitě, protože v této situaci je $n = 0$, $r = 0$ (normála je isotropická přímka, jak jsem už připomněl). Podle (5) vychází ona limita jako nulová, a protože

$$\frac{r_1}{r_1 - n_1} + \frac{r_2}{r_2 - n_2} = \frac{b^2}{ae - e^2} - \frac{b^2}{ae + e^2} = 2,$$

dostáváme i v tomto případě Barisienovu relaci. Tím jsou vyčerpány všechny polohy bodu B na hlavní ose elipsy.

Rozklad rovnice 4. stupně pro paty normál

Postup, jak vyřešit rovnici 4. stupně

(1) $$a_0x^4 + 4a_1x^3 + 6a_2x^2 + 4a_3x + a_4 = 0$$

rozkladem bikvadratického polynomu z levé strany v součin dvou kvadratických trojčlenů

(2) $$(x^2 + 2p_1x + q_1)(x^2 + 2p_2x + q_2) = 0,$$

je dobře známý.[105] S rovnicí (1) jsou spojeny dva projektivní invarianty

(3) $$I = a_0a_4 + 3a_2^2 - 4a_1a_3;$$

(4) $$J = a_0a_2a_4 + 2a_1a_2a_3 - a_0a_3^2 - a_1^2a_4 - a_3^2 =$$
$$= \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{vmatrix}.$$

[105] Viz třeba Stefan Schwarz: *O rovnicích* (Praha, 1940, 2. vyd. 1947), str. 50–56.

Anulování prvního (druhého) znamená, že čtveřice kořenů rovnice (1) je ekvianharmonická (harmonická). Oba invarianty vedou ke kubické resolventě

$$4a_0^3t^3 - a_0It + J = 0. \tag{5}$$

Je-li t_1 její kořen, určí se koeficienty p_1, p_2 a q_1, q_2 v (2) z rovnic

$$\begin{aligned} p_1 + p_2 &= \frac{2a_1}{a_0}, & q_1 + q_2 &= \frac{2a_2}{a_0} + 4t_1, \\ p_1p_2 &= \frac{a_2}{a_0} - t_1, & q_1q_2 &= \frac{a_4}{a_0}. \end{aligned} \tag{6}$$

V dalších řádcích se znovu dotknu otázky, kdy tato bikvadratická úloha se rozpadá ve dvě kvadratické.

Jestliže z rovnice elipsy

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \tag{7}$$

a její Apolloniovy hyperboly pro bod $B[\xi, \eta]$

$$e^2xy + b^2\eta x - a^2\xi y = 0$$

vyloučíme y, dostaneme pro první souřadnice pat kolmic z bodu $B[\xi, \eta]$ k elipse (7) rovnici 4. stupně [106]

$$x^4 - \frac{2a^2\xi}{e^2} \cdot x^3 + \Big(\frac{a^4\xi^2}{e^4} + \frac{a^2b^2\eta^2}{e^4} - a^2\Big) \cdot x^2 + \frac{2a^4\xi}{e^2} \cdot x - \frac{a^6\xi^2}{e^4} = 0. \tag{8}$$

S předcházejícím označením v (1) je

$$a_0 = 1, \qquad a_1 = -\frac{1}{2} \cdot \frac{a^2\xi}{e^2}, \qquad a_2 = \frac{a^2}{6e^4} \cdot \big(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - e^4\big), \tag{9}$$

$$a_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{a^4\xi}{e^2}, \qquad a_4 = -\frac{a^6\xi^2}{e^4};$$

po výpočtu podle (3) a (4) dostaneme

$$I = \frac{a^4}{12e^8} \cdot \Big(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - e^4\Big)^2, \tag{10}$$

[106] Eugène Catalan v práci *Sur les normales aux coniques*, Nouvelles annales de Mathématiques 7(1848), 332–337, začíná zmínkou, jak de La Hire (*Nouveaux éléments des coniques*, 1679) odvodil rovnici 4. stupně pro první souřadnice pat kolmic z bodu k elipse. Rovnice, kterou uvádí E. Catalan na str. 333 s označením (3) jako de La Hireovu je – až na označení – identická s rovnicí (8).

$$J = \frac{a^6}{4e^{12}} \cdot \Big[a^2b^2e^4\xi^2\eta^2 + \frac{1}{54}\big(a^2\xi^2 + b^2\eta^2 - e^4\big)^3\Big]. \tag{11}$$

Nyní rozliším dva speciální případy.

a) Bod B na hlavní ose elipsy

Tuto situace proberu ovšem jen jako orientační, protože předem známe dvě řešení: Z bodu na ose (ať hlavní, ať vedlejší) jdou dvě normály s osou splývající.

Kubická resolventa je při $\eta = 0$ podle (5), (10) a (11)

$$4t^3 + \frac{a^4}{12e^8} \cdot \big(a^2\xi^2 - e^4\big)^2 t - \frac{a^6}{216e^{12}} \cdot \big(a^2\xi^2 - e^4\big)^3 = 0.$$

Snadno zjistíme, že má kořeny

$$t_1 = \frac{a^2}{6e^4} \cdot \big(a^2\xi^2 - e^4\big), \qquad t_2 = t_3 = -\frac{a^2}{12e^4} \cdot \big(a^2\xi^2 - e^4\big).$$

S prvním kořenem t_1 a s (9) – stále ovšem při $\eta = 0$ – pak podle (6) a (2) dojdeme k rozkladu

$$\big(x^2 - a^2\big) \cdot \Big(x - \frac{a^2\xi}{e^2}\Big)^2 = 0. \tag{12}$$

Stejně s kořenem $t_2 = t_3$ dospějeme k

$$\Big[x^2 - \Big(\frac{a^2\xi}{e^2} + a\Big) \cdot x + \frac{a^3\xi}{e^2}\Big] \cdot \Big[x^2 - \Big(\frac{a^2\xi}{e^2} - a\Big) \cdot x - \frac{a^3\xi}{e^2}\Big] = 0.$$

První rozklad je téměř triviální a mohli jsme jej napsat mnohem snadněji. Ve druhém rozkladu má první kvadratický trojčlen kořeny $a^2\xi/e^2$ a a, druhý pak $a^2\xi/e^2$ a $-a$ v naprosté shodě s (12).

b) Bod B na Pelcově přímce

V důsledku symetrie stačí vyšetřit případ

$$\xi = b\varrho, \qquad \eta = a\varrho \qquad (\varrho > 0). \tag{13}$$

V něm přepíšeme rovnici (8) na

$$x^4 - \frac{2a^2b\varrho}{e^2} \cdot x^3 + \Big(\frac{2a^4b^2\varrho^2}{e^4} - a^2\Big) \cdot x^2 + \frac{2a^4b\varrho}{e^2} \cdot x - \frac{a^6b^2\varrho^2}{e^4} = 0. \tag{14}$$

Tím jsou určeny koeficienty bikvadratické rovnice (1) a podle (3) s (4) můžeme vypočítat invarianty I a J:

$$I = \frac{a^4}{12e^8} \cdot \big(2a^2b^2\varrho^2 - e^4\big)^2,$$

$$J = \frac{a^6}{4e^{12}} \cdot \Big[a^4b^4e^4\varrho^4 + \frac{1}{54}\big(a^2b^2\varrho^2 - e^4\big)^3\Big].$$

Resolventa (5) s těmito invarianty jako koeficienty má kořen

$$t_1 = \frac{a^2}{12e^4} \cdot \left(4a^2b^2\varrho^2 + e^4\right); \tag{15}$$

přesvědčíme se o tom sice delším, ale jinak mechanickým výpočtem. Podobně zjistíme, že zbývající dva kořeny kubické resolventy jsou řešeními kvadratické rovnice

$$4t^2 - \frac{a^2}{3e^4} \cdot \left(4a^2b^2\varrho^2 + e^4\right) \cdot t + \frac{a^4}{18e^8}\left(2a^4b^4\varrho^4 + 10a^2b^2e^4\varrho^2 - e^8\right) = 0.$$

S kořenem z (15) se vrátíme k soustavě (6) a z ní dospějeme až k rozkladu (2) rovnice (14).

Spokojím se pouze s tímto návodem, protože dosavadní postup je pracný a má jistou nevýhodu – není symetrický v poloosách elipsy. Odstraním ji.

Apolloniovu hyperbolu pro elipsu (7) a bod $B[\xi, \eta]$ lze vyjádřit parametricky takto:

$$x = \frac{a^2\xi}{a^2 + \lambda}, \qquad y = \frac{b^2\eta}{b^2 + \lambda} \tag{16}$$

($\lambda = -a^2$ nebo $\lambda = -b^2$ vede k triviální situaci). Dosazením z (16) do (7) dostaneme pro parametry λ pat kolmic z bodu $B[\xi, \eta]$ bikvadratickou rovnici

$$\begin{aligned} &\lambda^4 + 2\left(a^2 + b^2\right) \cdot \lambda^3 + \left(a^4 + 4a^2b^2 + b^4 - a^2\xi^2 - b^2\eta^2\right) \cdot \lambda^2 + \\ &+ 2a^2b^2\left(a^2 + b^2 - \xi^2 - \eta^2\right) \cdot \lambda + a^2b^2\left(a^2b^2 - b^2\xi^2 - a^2\eta^2\right) = 0. \end{aligned} \tag{17}$$

Při výměně poloos a, b a současně souřadnic ξ, η bodu B se poslední rovnice nemění.

Koeficienty při λ^4 a λ^3 neobsahují souřadnice ξ, η bodu B. To přímo svádí pokusit se o rozklad

$$\left[\lambda^2 + \left(a^2 + b^2\right)\lambda + q_1\right] \cdot \left[\lambda^2 + \left(a^2 + b^2\right)\lambda + q_2\right] = 0.$$

Rozepsání

$$\lambda^4 + 2\left(a^2 + b^2\right)\lambda^3 + \left[q_1 + q_2 + \left(a^2 + b^2\right)^2\right]\lambda^2 + \left(a^2 + b^2\right)\left(q_1 + q_2\right)\lambda + q_1q_2 = 0$$

srovnám s (17)

$$\begin{aligned} q_1 + q_2 + \left(a^2 + b^2\right)^2 &= a^4 + 4a^2b^2 + b^4 - a^2\xi^2 - b^2\eta^2, \\ \left(q_1 + q_2\right)\left(a^2 + b^2\right) &= 2a^2b^2\left(a^2 + b^2 - \xi^2 - \eta^2\right), \\ q_1q_2 &= a^2b^2\left(a^2b^2 - b^2\xi^2 - a^2\eta^2\right). \end{aligned} \tag{18}$$

Z prvních dvou rovnic vychází

$$\Big[-\big(a^2+b^2\big)^2+a^4+4a^2b^2+b^4-a^2\xi^2-b^2\eta^2\Big]\big(a^2+b^2\big)=2a^2b^2\big(a^2+b^2-\xi^2-\eta^2\big),$$

což vede k

$$a^2\xi^2-b^2\eta^2=0, \tag{19}$$

tj. (13), tedy k Pelcovým přímkám.

Z (18) můžeme pak vypočítat q_1+q_2 a q_1q_2 a ovšem i q_1 a q_2. Výsledný rozklad bikvadratického polynomu pak je

$$\Big[\lambda^2+\big(a^2+b^2\big)\lambda+a^2b^2-\frac{a^2\xi^2+b^2\eta^2}{2}+ \\ +\frac{1}{2}\sqrt{(a^2\xi^2+b^2\eta^2)^2+4a^2b^2(a^2-b^2)(-\xi^2+\eta^2)}\Big]\cdot \\ \cdot\Big[\lambda^2+\big(a^2+b^2\big)\lambda+a^2b^2-\frac{a^2\xi^2+b^2\eta^2}{2}- \\ -\frac{1}{2}\sqrt{(a^2\xi^2+b^2\eta^2)^2+4a^2b^2(a^2-b^2)(-\xi^2+\eta^2)}\Big],$$

ovšem při (13), tedy

$$\Big[\lambda^2+\big(a^2+b^2\big)\lambda+a^2b^2\big(1-\varrho^2\big)+ab\sqrt{a^2b^2\varrho^4+e^4\varrho^2}\Big]\cdot \\ \cdot\Big[\lambda^2+\big(a^2+b^2\big)\lambda+a^2b^2\big(1-\varrho^2\big)-ab\sqrt{a^2b^2\varrho^4+e^4\varrho^2}\Big].$$

3. Dodatek: Normály z bodu k elipsoidu

1. Apolloniova kubická hyperbola

Se studiem normál k elipse z bodu v její rovině se přirozeně objevuje prostorová analogie o normálách z bodu $B[\xi, \eta, \zeta]$ k elipsoidu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \qquad (a > b > c > 0). \tag{1}$$

Výslovně poznamenávám, že až na výjimky, které vždy zdůrazním, půjde stále o trojosý elipsoid. Vektor kolmý k jeho tečné rovině s dotykovým bodem $D[x, y, z]$ je

$$\left(\frac{x}{a^2}, \frac{y}{b^2}, \frac{z}{c^2}\right) \tag{2}$$

a vektor kolineární se spojnicí BD má souřadnice

$$(\xi - x, \eta - y, \zeta - z). \tag{3}$$

Má-li tato spojnice být normálou elipsoidu, musí být oba vektory rovnoběžné, tedy

$$\begin{aligned} (a^2 - b^2)xy + b^2\eta x - a^2\xi y &= 0, \\ (b^2 - c^2)yz + c^2\zeta y - b^2\eta z &= 0, \\ (c^2 - a^2)zx + a^2\xi z - c^2\zeta x &= 0; \end{aligned} \tag{4}$$

kterákoliv z těchto rovnic je ovšem důsledkem zbývajících dvou. První, resp. druhá, resp. třetí rovnice značí hyperbolickou válcovou plochu; označím ji Z^2, resp. X^2, resp. Y^2. Jestliže jejich rovnice homogenizujeme čtvrtou souřadnicí t, ihned je vidět, že kvadratické válcové plochy Z^2 a Y^2 obsahují nevlastní přímku $x = 0$, $t = 0$ (a ovšem cykl.). To znamená, že jejich průnik – čára 4. stupně – se rozpadá v přímku a prostorovou křivku 3. stupně; tu označím C^3. Elipsoid protíná v $3 \times 2 = 6$ bodech, které jsou patami normál, vedenými k němu z bodu B.

Hned je třeba odpovědět na námitku, zda dojdeme k témuž výsledku, když místo dvojice Z^2, Y^2 vezmeme dvojici X^2, Z^2 nebo Y^2, X^2. Když ke kvadratické ploše X^2 připojím rovinu $x = 0$, vznikne tak kubická plocha, jejíž rovnici budu symbolicky psát $(x\,X^2) = 0$; analogicky s Y^2 a Z^2. Pro tak vzniklé tři kubické plochy platí identita

$$(x\,X^2) + (y\,Y^2) + (z\,Z^2) \equiv 0,$$

takže tvoří svazek. To znamená, že kubická plocha $(x\,X^2)$ prochází průnikem kubických ploch $(y\,Y^2) = 0$ a $(z\,Z^2) = 0$. Můžeme tedy říci, že všechny tři naše kubické plochy obsahují čáru C^3. V důsledku jejich degenerace tuto čáru C^3 obsahují i všechny tři válcové plochy X^2, Y^2, Z^2.

Prostorovou analogií k Apolloniově hyperbole z rovinného problému je tedy kterákoliv dvojice z hyperbolických válcových ploch X^2, Y^2, Z^2 – anebo, snad ještě lépe – kubická čára C^3 z jejich průseku. Na první pohled je z (4) vidět, že jde středem $[0,0,0]$ elipsoidu a bodem $[\xi,\eta,\zeta]$.

Jedno z možných parametrických vyjádření této čáry C^3 je

$$x = x, \qquad y = \frac{b^2\eta x}{(b^2-a^2)x + a^2\xi}, \qquad z = \frac{c^2\zeta x}{(c^2-a^2)x+a^2\xi}. \tag{5}$$

Jde ovšem počátkem a bodem $B[\xi,\eta,\zeta]$ a v nevlastní rovině má tři různé reálné body s asymptotami rovnoběžnými se souřadnicovými osami (osami elipsoidu):

$$\begin{gathered} \left(\infty \quad , \quad \frac{b^2\eta}{b^2-a^2}, \quad \frac{c^2\zeta}{c^2-a^2} \right), \\ \left(\frac{a^2\xi}{a^2-b^2}, \quad \infty \quad , \quad \frac{c^2\zeta}{c^2-b^2} \right), \\ \left(\frac{a^2\xi}{a^2-c^2}, \quad \frac{b^2\eta}{b^2-c^2}, \quad \infty \quad \right). \end{gathered} \tag{6}$$

V terminologii, kterou zavedl Franz Seydewitz v práci *Lineäre Konstruktion einer Curve doppelter Krümmung*,[107] se tedy jedná o kubickou hyperbolu.

Vrátím se ještě k rovnicím (5). Po dosazení za y a z do rovnice výchozího elipsoidu a odstranění zlomků dostaneme pro první souřadnice pat normál z bodu $B[\xi,\eta,\zeta]$ tuto rovnici:

$$\begin{aligned} &(x^2-a^2)\Big[(b^2-a^2)x+a^2\xi\Big]^2 \cdot \Big[(c^2-a^2)x+a^2\xi\Big]^2 + \\ &\quad + a^2x^2\Big\{b^2\eta^2\Big[(c^2-a^2)x+a^2\xi\Big]^2 + c^2\zeta^2\Big[(b^2-a^2)x+a^2\xi\Big]^2\Big\} = 0 \end{aligned} \tag{7}$$

čili

$$\begin{aligned} &x^6 \cdot \big(a^2-b^2\big)^2\big(a^2-c^2\big)^2 - \\ &-x^5 \cdot 2a^2\big(a^2-b^2\big)\big(a^2-c^2\big)\big(2a^2-b^2-c^2\big)\xi + \\ &+x^4 \cdot \Big[(.)\xi + a^2b^2\big(a^2-c^2\big)^2\eta^2 + a^2c^2\big(a^2-b^2\big)\zeta^2 - a^2\big(a^2-b^2\big)^2\big(a^2-c^2\big)^2\Big] + \\ &+x^3 \cdot (.)\xi + x^2 \cdot (.)\xi^2 + x \cdot (.)\xi^3 + a^{10}\xi^4 = 0. \end{aligned}$$

---

[107] Archiv der Mathematik und Physik 10(1847), 203–214 [viz zvláště strany 211 až 212]. Viz též Otto Staude: *Analytiche Geometrie der kubischen Kegelschnitte*, Leipzig, Berlin, 1913, str. 6, nebo Kuno Fladt – Arnold Baur: *Analytische Geometrie spezieller Flächen und Raumkurven*, Braunschweig, 2. vydání: 1975, str. 71–75 (1. vydání: 1965).

Z této rovnice ihned vyčteme:

a) Při našem trojosém elipsoidu je 6. stupně, z bodu B jde tedy k němu (bez ohledu na reálnost, ale s ohledem na násobnost) právě šest normál. To jsme ovšem mohli čekat, když ze středu elipsoidu jde do jeho šesti vrcholů šest reálných normál.

b) Přejde-li elipsoid v rotační (tj. při $a = b > c$ ve zploštělý nebo při $a > b = c$ v protáhlý), redukuje se počet normál na čtyři. To jsme dokonce musili očekávat, protože konstrukce normál z bodu B se odehrává výlučně v meridiánové rovině jím jdoucí.

c) Při $\xi = 0$, tj. když bod B leží v hlavní rovině s osami b a c, se poslední rovnice rozpadá na dvě: na $x^4 = 0$ a na $x^2 + \text{konst.} = 0$. Anulováním této konstanty se dostane rovnice

$$\frac{\eta^2}{\left(\frac{a^2-b^2}{b^2}\right)^2} + \frac{\zeta^2}{\left(\frac{a^2-c^2}{c^2}\right)^2} - 1 = 0, \tag{8}$$

která – považujeme-li η a ζ za proměnné souřadnice – znamená v rovině $\xi = 0$ elipsu. Označím ji $\varepsilon(\eta, \zeta)$, ještě se s ní setkáme (viz dále 2. Evoluta elipsoidu). – O normálách elipsoidu z bodu B v hlavní rovině poloos b a c se tedy můžeme vyslovit takto: Ze šesti normál leží vždy čtyři v oné hlavní rovině; pokud $B \notin \varepsilon(\eta, \zeta)$, další dvě normály v ní neleží; pokud $B \in \varepsilon(\eta, \zeta)$, všech šest normál z bodu B leží v oné hlavní rovině splývajíce tak, že různé jsou nejvýš čtyři. Obdobně to ovšem platí pro body B v ostatních dvou hlavních rovinách.

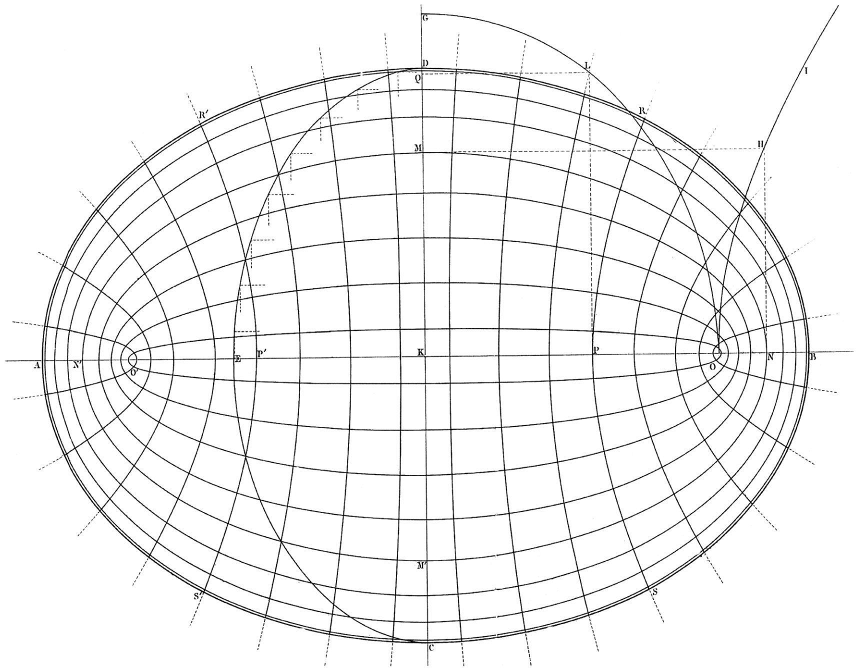
Jestliže tedy bod B leží v některé hlavní rovině elipsoidu, dochází k výjimečnosti. Ještě se s ní setkáme. V dalším budu zpravidla předpokládat, že bod B není v žádné z rovin symetrie elipsoidu, tedy $\xi\eta\zeta \neq 0$. Opak výslovně připomenu.

2. Evoluta[108] elipsoidu

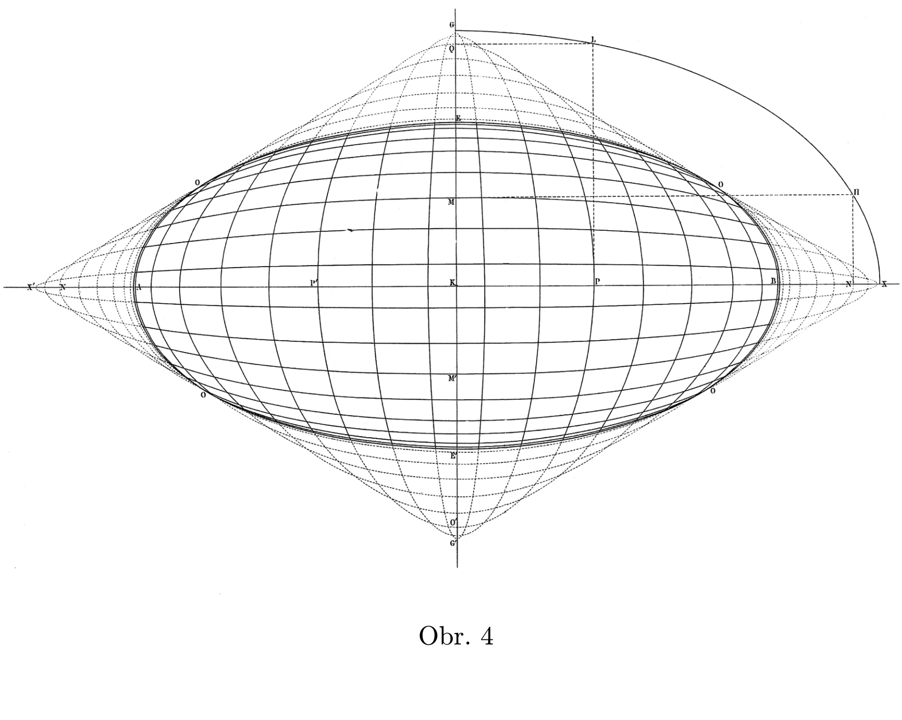
Když víme, jak důležitou úlohu v rovinném problému normál z bodu k elipse hraje její evoluta (množina středů křivosti elipsy), musíme očekávat, že při prostorovém problému normál z bodu k elipsoidu bude hrát podobnou úlohu útvar prostorově analogický k evolutě elipsy. Přikročíme k němu.

---

[108] Název není ustálen ani v české ani v cizojazyčné literatuře. B. Hostinský (2. vyd. 1942, str. 66) píše o centrálních plochách, V. Hlavatý (1937, str. 374) o evolutách s připomenutím, že pokud je evoluta plochou, říká se jí též plocha centrální. V anglické literatuře *centro-surface*, viz G. Salmon (1858), A. Cayley (1873). Ve Fiedlerově německém překladu Salmonovy knihy *Fläche der Centra*. M. Lukat při německém překladu Bianchiho učebnice (1899) užíval označení *Evolutenfläche*, str. 232 a násl., E. Kreyszig 1957, str. 328–332 (a 1968), připomíná tři názvy *Mittelpunktsfläche*, *Evolutenfläche* a *Zentralfläche*, avšak pracuje jen s prvním. W. Klingenberg (1973, str. 52–53) má dvě pojmenování: *Brennfläche*, *Zentralfläche*. V časopisech též *Krümmungsmittelpunktsfläche*. G. Monge: *Application de l'Analyse à la Géométrie*, 5. vyd. 1850 (1. vyd. 1795), § XXV *lieu des centres de courbure*, J. Favard 1957, str. 326, se přidržuje termínů *les développées* nebo *les surfaces des centres*. V ruském překladu 1960, str. 324, *еволюты* nebo *поверхности центров кривизны*.



Obr. 3



Obr. 4

Jak s neúplnou citací – kterou doplňuji – udává Otto Staude v článku *Flächen 2. Ordnung und ihre Systeme und Durchdringungskurven*,[109] k evolutám kvadrik (*Krümmungsmittelpunktsflächen* = plochy středů křivosti) se dostal už Gaspard Monge v knize *Application de l'Analyse à la Géométrie*.[110] Jeho přístup k nim byl výlučně syntetický. Využíval nyní už dávno běžného faktu, že normály plochy podél jejích hlavních (křivoznačných) čar tvoří rozvinutelné plochy. Na obr. 3 a 4 jsou reprodukovány dva rysy z Mongeovy knihy. Na prvním je průmět hlavních křivek elipsoidu do roviny velké a střední osy (a, b) a na druhém do roviny velké a malé osy (a, c). Rytec L. Wormser je pořídil před více než dvěma sty lety v kvalitě, kterou by počítačová grafika asi nedokázala. Na prvním obrázku je zřetelná poloha kruhových bodů elipsoidu, k nimž se ještě dostanu.

* * *

Na trojosém elipsoidu si mysleme bod B a označme v něm K a H Gaussovu a střední křivost elipsoidu. Hlavní – vždy pozitivní – křivosti $1/R_1 > 0$ a $1/R_2 > 0$ v bodě B jsou určeny známou rovnicí

$$\frac{1}{R^2} - H \cdot \frac{1}{R} + K = 0.$$

Označení lze zvolit tak, že pro poloměry křivosti R_1 a R_2 je $R_1 \geq R_2 > 0$ s rovností právě jen v kruhových bodech elipsoidu. V bodě B sestrojme normálu elipsoidu, orientujme ji ve směru do něj a od bodu B nanesme na ni úsečky o délkách R_1 a R_2; druhé koncové body těchto úseček označím S_1 a S_2 – jsou to středy křivosti elipsoidu v bodě B. Proběhne-li bod B celý elipsoid, vytvoří středy křivostí S_1 a S_2 jistý útvar, pro nějž budu používat názvu evoluta elipsoidu. Skládá se ze dvou plášťů; jeden Σ_1 je vytvořen bodem S_1, druhý Σ_2 pak bodem S_2.

Je velice obtížné představit si evolutu trojosého elipsoidu. Dávno pryč jsou doby – hlavně z posledních tří desetiletí 19. století – kdy vznikaly nejrůznější prostorové modely geometrických útvarů, o nichž tak studenti mohli získat názornou představu.

Walther von Dyck (1856–1934)[111]: *Katalog mathematischer Modelle* (München, 1892, Nachtrag München, 1893) uvádí na straně 282 pod číslem 197 model evoluty trojosého elipsoidu. Vyhotovil jej roku 1862 tehdy ještě student Hermann Schwarz (1843–1921). Zmíněná práce Ernst Kummer (1810–1893): *Über ein Modell der Krümmungsmittelpunktsfläche des dreiaxigen Ellipsoids*[112] mi

[109] Enc. der math. Wiss. III-2-1, Leipzig, 1903–1915, str. 199–200.

[110] Paris, 1. vyd. 1795; v 5. vydání z roku 1850 viz § XXV, str. 322–368, zvláště str. 330–331.

[111] Viz O. Giering – T. Ströhlein (Ed.): *Technische Univerisität München, Fakultät für Mathematik*, München, 1993, str. 19–21. Velice doporučuji přečíst si německo-anglickou předmluvu knihy Gerd Ficher (Ed.): *Mathematische Modelle – Mathematical Models*, Berlin, Braunschweig, 1986.

[112] Monatsberichten der königlichen preussischen Akademie der Wissenschaften 1862, str. 126.

zůstala nepřístupná. Na straně 283 s číslem 198 se W. Dyck zmiňuje o evolutě jednodílného hyperboloidu, jejíž model vyrobil sám ještě jako student roku 1877.

[Pro právě použité diferenciálně geometrické pojmy odkazuji třeba na tyto knihy:

1) Václav Hlavatý: *Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet* (Praha, 1937; německý překlad (Groningen, 1939) pořídil Max Pinl (1897–1978)[113]), zvláště odd. III, část I, (3) s (4) a část II, (1) s (2).

2) James Stoker: *Differential Geometry* (New York, 1969, 2. vyd. 1989), zvláště kap. IV, odst. 13, 14, 16.

3) Jean Favard: *Cours de Géométrie différentielle locale* (Paris, 1957, ruský překlad: Moskva, 1960), zvláště část II, odd. 1, kap. II,1 a kap. IV,6,7.

4) Erwin Kreyszig: *Differentialgeometrie* (Leipzig, 1957, 2. vydání: 1968, reprint: 1991; anglický překlad: London, 1959), zvláště kap. 4, odd. 41.]

* * *

Analogicky lze ovšem vyslovit definici evoluty pro každou plochu (splňující ovšem náležité předpoklady diferencovatelnosti). Tvar evoluty může být velmi komplikovaný, zvláště má-li výchozí plocha hyperbolické body. V hořejší závorce citované knize 1) patří evolutám strany 374 až 380 s obrázky na stranách 376 a 379; v knize 3) strany 324 až 327 s obrázky na straně 326; v knize 4) strany 328 až 332 s obrázky na straně 330.

Je-li onen útvar plocha, skládá se ze dvou plášťů; jeden Σ_1 je vytvořen bodem S_1, druhý Σ_2 pak bodem S_2. Jen jeden nebo i oba pláště mohou degenerovat v křivku. První případ nastává u rotačních ploch; u nich je jeden plášť vytvořen evolutou meridiánu, druhý degeneruje v osu plochy. Druhý případ se objevuje u Dupinových cyklid;[114] ty jsou dvojím způsobem obálkami jednoparametrového systému koulí, nejjednodušším případem je torus (anuloid), u něhož evoluta je tvořena kružnicí a její prostorovou osou (tj. osou rotace toru). U rotační válcové nebo kuželové plochy zůstává z evoluty jen osa rotace, další část „se ztrácí" v nekonečnu. Evoluta kulové plochy je ovšem její střed.

Evoluty úzce souvisejí s Weingartenovými plochami, o nichž je – na rozdíl od evolut – rozsáhlá literatura. Tyto plochy jsou charakterizovány tím, že jejich poloměry hlavních křivostí jsou vázány nějakým vztahem. Jejich studium zahájil Julius Weingarten (1836–1910): *Über eine Klasse auf einander abwickelbarer*

---

[113] Byl tehdy docentem pražské německé univerzity. Jako rodák z Duchcova ovládal částečně češtinu. Za protektorátu byl několik měsíců vězněn německou okupační mocí. Čechy opustil těsně před koncem války. V dopisech, které mi poslal ve 2. polovině šedesátých let, vzpomínal na krásné chvíle v krásné Praze do roku 1938.

[114] V komunikačních systémech GPS a Galileo získaly tyto plochy dříve nečekaný význam. Viz spolu s řadou literárních údajů Z. N.: *GPS and the Space Apollonian Problem*, str. 191–199, in Petr Holota (ed.): *Mission and Passion: Science, A volume dedicated to Milan Burša on the occasion of his 80th birthday*, Prague, 2009.

Flächen.[115] Ze starší knižní literatury připomínám Luigi Bianchi (1856–1928): *Lezioni di geometria differenziale* I (Pisa, 3. vydání: 1922), kap. IX: *Superficie evolute e teoremi di Weingarten*, str. 411–453.[116]

* * *

K parametrickým rovnicím evoluty elipsoidu lze dospět i zcela jednoduše. Viktor Kommerell (1866–1948)[117] uvedl pro poloměry R_1, R_2 hlavních křivostí plochy $f(x,y,z)=0$ kvadratickou rovnici (str. 124)

$$\begin{vmatrix} f_{xx}-\frac{V}{R} & f_{xy} & f_{xz} & f_x \\ f_{yx} & f_{yy}-\frac{V}{R} & f_{yz} & f_y \\ f_{zx} & f_{zy} & f_{zz}-\frac{V}{R} & f_z \\ f_x & f_y & f_z & 0 \end{vmatrix} = 0,$$

$$V^2 = f_x^2 + f_y^2 + f_z^2$$

(ve vzorci (10) je tiskové nedopatření, místo + má být −). Specielně v případě našeho elipsoidu je

$$f_x = \frac{2x}{a^2}, \qquad f_y = \frac{2y}{b^2}, \qquad f_z = \frac{2z}{c^2},$$

$$f_{xx} = \frac{2}{a^2}, \qquad f_{yy} = \frac{2}{b^2}, \qquad f_{zz} = \frac{2}{c^2}, \qquad f_{xy} = f_{yz} = f_{zx} = 0,$$

$$V^2 = 4\Big(\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}\Big).$$

Výraz V má jednoduchý geometrický význam. Znamená-li h vzdálenost počátku od tečné roviny elipsoidu v jeho bodě $[x,y,z]$ (v teorii konvexních útvarů se této vzdálenosti říká opěrná funkce), je

$$V = \frac{2}{h} = 2\sqrt{\frac{x^2}{a^4} + \frac{y^2}{b^4} + \frac{z^2}{c^4}}. \tag{9}$$

Po jistém výpočtu tak dostaneme pro poloměry R_1 a R_2 hlavních křivostí tuto kvadratickou rovnici:

---

[115] Journal für die reine und angewandte Mathematik 59(1861), 382–393.

[116] 1. vydání ve dvou svazcích: 1894; 2. vydání ve třech svazcích: 1902, 1903, 1909, 3. vydání: 1. svazek 1922, 802 stran, 2. a 3. svazek 1923, německý překlad: Leipzig, 1. vydání: 1899, 2. vydání podstatně zkrácené v jednom svazku: 1910.

[117] Zeitschrift für Mathematik und Physik 41(1896), 123–126.

$$(10)\quad \frac{1}{R^2}\cdot\frac{1}{h^4}-\frac{1}{R}\cdot\frac{1}{h}\cdot\Big[\frac{x^2}{a^4}\Big(\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}\Big)+\frac{y^2}{b^4}\Big(\frac{1}{c^2}+\frac{1}{a^2}\Big)+\frac{z^2}{c^4}\Big(\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}\Big)\Big]+\frac{1}{a^2b^2c^2}=0.$$

Maličko odbočím. Je tedy

$$\frac{1}{R_1}\cdot\frac{1}{R_2}=\frac{1}{a^2b^2c^2}:\frac{1}{h^4},$$

z čehož pro Gaussovu křivost elipsoidu ihned vychází jednoduchá geometrická interpretace

$$(11)\qquad K=\frac{1}{R_1R_2}=\frac{h^4}{a^2b^2c^2}.$$

Srv. Gaston Darboux: *Leçons sur la théorie générale des surfaces* II (Paris, 1915; 1. vydání: 1889), strana 393 s vzorcem (57), a Luigi Bianchi: *Vorlesungen über Differentialgeometrie* (Leipzig, 1899), str. 517 pozn. *). Z (11) snadno odvodíme, čeho ještě použijeme: Ve čtyřech reálných kruhových bodech elipsoidu[118]

$$(12)\qquad x=\pm a\cdot\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}},\qquad y=0,\qquad z=\pm c\cdot\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}$$

je opěrná funkce $h=\frac{ac}{b}$, a tedy poloměr křivosti

$$(13)\qquad R=\frac{b^3}{ac}.$$

Jednotkový vektor normály k elipsoidu (1) v jeho bodě $[x,y,z]$, orientovaný dovnitř elipsoidu, je

$$-h\Big(\frac{x}{a^2},\frac{y}{b^2},\frac{z}{c^2}\Big).$$

Parametricky můžeme tedy body $[X,Y,Z]$ evoluty našeho elipsoidu vystihnout takto:

$$X=x-R_ih\cdot\frac{x}{a^2},$$
$$Y=y-R_ih\cdot\frac{y}{b^2},$$
$$Z=z-R_ih\cdot\frac{z}{c^2}$$

s tím, že parametry x, y, z (souřadnice bodu elipsoidu) jsou vázány výchozí rovnicí elipsoidu.

[118] Viz B. Bydžovský: *Úvod do analytické geometrie*, 1923, str. 378.

Gaussova křivost K elipsoidu se vyjádří velmi jednoduchým vzorcem (11). Pro střední křivost tak podobně jednoduchý vzorec není.

Právě vypsané parametrické rovnice umožňují zjistit, jak vypadají řezy evoluty hlavními rovinami elipsoidu. Pro hlavní rovinu (xy) by rovnice řezu byla

$$R_i h - c^2 = 0.$$

3. Reálnost normál

Z rovinného případu víme, že o reálnosti normál z bodu B k elipse v její rovině rozhoduje jeho poloha vůči evolutě elipsy. Lze očekávat, že v prostorovém případu normál z bodu B k elipsoidu tomu bude podobně, ale značně složitěji.

Na otázku odpověděl před 150 roky Ferdinand Joachimsthal (práce vyšla posmrtně): *Über die Anzahl reeller Normalen, welche von einem Punkte an ein Ellipsoid gezogen werden können.*[119] Joachimsthalův postup byl značně komplikovaný (sotva mohl být jiný), a tak se omezím jen na popsání výsledku.

* * *

Nejdříve si opatříme aspoň malou orientaci o reálnosti normál z bodu $B[\xi, \eta, \zeta]$ k elipsoidu (1), když bod B necháme proběhnout osu x, tj. při $B[\xi, 0, 0]$. Z rovnice 6. stupně (7) při $\eta = 0$, $\zeta = 0$ pak zůstává jen její část na prvním řádku s těmito kořeny:

$$x = \pm a, \qquad x_1 = \frac{a^2 \xi}{a^2 - b^2}, \qquad x_2 = \frac{a^2 \xi}{a^2 - c^2},$$

poslední dva dvojnásobné. První dvojice kořenů dává ovšem dvě paty ve vrcholech $[\pm a, 0, 0]$. Tohoto triviálního případu si nebudeme všímat.

Kdo sestrojoval elipsu pomocí kružnic křivosti, napíše ihned poloměry hlavních křivostí našeho elipsoidu v jeho vrcholu $[a, 0, 0]$:

$$R_1 = \frac{b^2}{a}, \qquad R_2 = \frac{c^2}{a}.$$

Na pozitivní části osy x máme tak dva středy křivosti

$$S_1\left[\frac{a^2 - b^2}{a}\,,\,0\,,\,0\right] \qquad \text{a} \qquad S_2\left[\frac{a^2 - c^2}{a}\,,\,0\,,\,0\right].$$

Jestliže pro nějaké $\xi > 0$ je $x_1 > a$ či $x_2 > a$, tak k ose prvních souřadnic kolmá rovina $x = x_1$ či $x = x_2$ náš elipsoid neprotíná a příslušné paty normál – a tudíž i normály samy – jsou imaginární.

[119] Journal für die reine und angewandte Mathematik 59(1861), 111–124.

Zcela jednoduše se zjistí, že při

$$
\begin{array}{llll}
\xi \in \left(0\,,\ \dfrac{a^2-b^2}{a}\right) & \text{je} & x_1 < a, & x_2 < a; \\[2ex]
\xi = \dfrac{a^2-b^2}{a} & \text{je} & x_1 = a, & x_2 < a; \\[2ex]
\xi \in \left(\dfrac{a^2-b^2}{a}\,,\ \dfrac{a^2-c^2}{a}\right) & \text{je} & x_1 > a, & x_2 < a; \\[2ex]
\xi = \dfrac{a^2-c^2}{a} & \text{je} & x_1 > a, & x_2 = a; \\[2ex]
\xi \in \left(\dfrac{a^2-c^2}{a}\,,\ \infty\right) & \text{je} & x_1 > a, & x_2 > a.
\end{array}
$$

Můžeme tedy pro bod B na ose prvních souřadnic vyslovit tento závěr (symbolem $\overline{MN}$ rozumím otevřený interval s krajními body M a N; nesmí se zapomenout na dvě reálná řešení vycházející z $x^2 - a^2 = 0$): Počet řešení při

$B \in \overline{OS_1}$	je 6 reálných;
$B \equiv S_1$	jsou 4 reálná a 2 splývající;
$B \in \overline{S_1S_2}$	jsou 4 reálná a 2 imaginární;
$B \equiv S_2$	jsou 2 reálná, 2 splývající a 2 imaginární;
$B \in \overline{S_2\infty}$	jsou 2 reálná a 4 imaginární.

* * *

Teprve nyní se vrátím k výše citované Joachimsthalově práci z roku 1861. Nečte se snadno, komentáře k ní by zabraly mnoho stránek. A tak naznačím její východisko a ocituji hlavní výsledek.

Vrátím se k vektorům (2) a (3), o nich se požaduje, aby byly kolineární. Poměry jejich prvních, druhých, třetích souřadnic tedy musí být stejné. Znamená-li $-\frac{1}{u}$ jejich společnou hodnotu, tak z

$$\frac{x}{a^2} : (\xi - x) = -\frac{1}{u} \qquad \text{(cykl.)}$$

ihned vychází

$$x = \frac{a^2\xi}{a^2-u}, \qquad y = \frac{b^2\eta}{b^2-u}, \qquad z = \frac{c^2\zeta}{c^2-u}. \tag{14}$$

Dosadíme-li odtud do rovnice (1) našeho výchozího elipsoidu, dospějeme k rovnici 6. stupně v u

$$\frac{a^2\xi^2}{\left(a^2-u\right)^2}+\frac{b^2\eta^2}{\left(b^2-u\right)^2}+\frac{c^2\zeta^2}{\left(c^2-u\right)^2}=1,$$

která je východiskem Joachimsthalova vyšetřování.

Svůj hlavní výsledek formuluje F. Joachimsthal na stranách 123 a 124 takto (týká se ovšem jen reálných normál):

Von einem Punkte lassen sich an ein Ellipsoid sechs, vier oder zwei Normalen ziehen, je nachdem er innerhalb beider Theile Σ_1 und Σ_2 der Fläche der Krümmungsmittelpunkte, oder innerhalb des einen und ausserhalb des anderen, oder ausserhalb beider liegt.[120]

* * *

V Joachimsthalově větě zůstává stranou případ, v němž bod B je na jednom či obou pláštích evoluty. Pro kruhový bod elipsoidu středy křivostí splývají v jediný S, ten je tedy společným bodem obou plášťů Σ_1 a Σ_2.[121] Vyšetřím, jaké normály ze středu křivosti kruhového bodu elipsoidu k němu jdou.

Z rovnic (4) hyperbolických válců snadno nahlédneme, že jejich společná kubická hyperbola se dá parametricky vyjádřit takto:

$$x=\frac{a^2t}{a^2t+1}\xi,\qquad y=\frac{b^2t}{b^2t+1}\eta,\qquad z=\frac{c^2t}{c^2t+1}\zeta. \tag{15}$$

Ostatně jsou to Joachimsthalovy rovnice (14), když v nich místo u píšeme $-1/t$. Kubika (15) jde středem elipsoidu pro $t=0$ a bodem $B[\xi,\eta,\zeta]$ pro $t=\infty$. Pokud $\xi\eta\zeta\neq 0$ (v opačném případě degeneruje), má v nevlastní rovině tři reálné body pro $t=-1/a^2$, resp. $t=-1/b^2$, resp. $t=-1/c^2$. Její asymptoty jsou rovnoběžné s osami elipsoidu.

Chceme-li si opatřit parametry pat normál vedených k elipsoidu z bodu $B[\xi,\eta,\zeta]$, je třeba z (15) dosadit za x, y, z do rovnice elipsoidu (1):

$$\begin{gathered}a^2\xi^2t^2\left(b^2t+1\right)^2\left(c^2t+1\right)^2+b^2\eta^2t^2\left(c^2t+1\right)^2\left(a^2t+1\right)^2+\\+c^2\zeta^2t^2\left(a^2t+1\right)^2\left(b^2t+1\right)^2-\left(a^2t+1\right)^2\left(b^2t+1\right)^2\left(c^2t+1\right)^2=0\end{gathered}\tag{16}$$

čili

$$a^4b^4c^4\Big(\frac{\xi^2}{a^2}+\frac{\eta^2}{b^2}+\frac{\zeta^2}{c^2}-1\Big)t^6+\cdots-1=0.$$

[120] Z bodu lze k elipsoidu vésti šest, čtyři nebo dvě normály, podle toho, zda leží uvnitř obou částí Σ_1 a Σ_2 plochy středů křivosti, nebo uvnitř jedné a vně druhé, nebo vně obou.

[121] Není mi známo, jak se pláště Σ_1 a Σ_2 ve společném bodě chovají.

Koeficient v závorce má jednoduchý geometrický význam. Je-li bod B na elipsoidu, má rovnice kořen $t = \infty$ vedoucí k bodu B jako patě normály.

Rovnice (16) umožňuje rychle zjistit, jak se chovají normály k elipsoidu ze středů křivosti příslušných k jeho kruhovým bodům. Z důvodů symetrie stačí omezit se na kruhový bod[122]

$$\left[\, a\cdot\sqrt{\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}}\ ,\ 0\ ,\ c\cdot\sqrt{\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}}\,\right] \tag{17}$$

se středem křivosti (splývajícími dvěma středy křivosti) jako bodem B o souřadnicích

$$\xi = \frac{a^2-c^2}{a}\cdot\Big(\frac{a^2-b^2}{a^2-c^2}\Big)^{\frac{3}{2}},\qquad \eta = 0,\qquad \zeta = -\frac{a^2-c^2}{c}\cdot\Big(\frac{b^2-c^2}{a^2-c^2}\Big)^{\frac{3}{2}}. \tag{18}$$

Dosadíme-li z (18) do (15) a srovnáme s (17), získáme ihned parametr t toho bodu naší Apolloniovy kubické hyperboly, který je totožný s kruhovým bodem (připomínám při $\eta = 0$):

$$t = -\frac{1}{b^2}. \tag{19}$$

Vzhledem k $\eta = 0$ se rovnice (16) zjednoduší na

$$(b^2t+1)^2\Big[a^2\xi^2t^2\big(c^2t+1\big)^2 + c^2\zeta^2t^2\big(a^2t+1\big)^2 - \big(a^2t+1\big)^2\big(c^2t+1\big)^2\Big] = 0,$$

takže (19) se jeví jako kořen nejméně dvojnásobný. Když do hranaté závorky dosadíme ξ a ζ z (18), dostaneme pro ni po jednoduchých úpravách

$$t^4\cdot\big(a^2b^6+b^6c^2-3a^2b^4c^2\big)+t^3\cdot\big(2b^6-6a^2b^2c^2\big)+$$
$$+t^2\cdot\big(3b^4-3a^2b^2-3b^2c^2-3c^2a^2\big)+t\cdot\big(-2a^2-2c^2\big)+1.$$

Dělením (právě pro ně jsem volil vhodný zápis) se přesvědčíme, že polynom 4. stupně na předchozích řádcích se dá takto rozložit:

$$(b^2t+1)^2\cdot\Big[t^2\cdot\big(a^2b^2+b^2c^2-3c^2a^2\big)+t\cdot\big(-2a^2+2b^2-2c^2\big)-1\Big].$$

Kvadratický polynom v hranaté závorce má při (19) hodnotu

$$3b^{-4}\big(a^2-b^2\big)\big(b^2-c^2\big) > 0$$

a diskriminant (až na numerický faktor)

$$\big(a^2-b^2\big)^2+\big(b^2-c^2\big)^2+\big(c^2-a^2\big)^2 > 0.$$

---

[122] Viz B. Bydžovský: *Úvod do analytické geometrie*, 1923, str. 378 a 215.

Rovnice (16) má tak při ξ, η, ζ z (18) tyto kořeny: reálný čtyřnásobný (19) a další dva reálné různé od něj i od sebe. Ze středu křivosti elipsoidu pro jeho kruhový bod jdou k elipsoidu čtyři reálné normály splývající (v normálu kruhového bodu ovšem) a dvě další normály reálné různé.

Toto zjištění je malý doplněk k výše citované Joachimsthalově práci z roku 1861 o reálnosti normál z bodu k elipsoidu.

Následující tři oddíly se týkají významných prací o evolutě elipsoidu.

4. Salmonova práce z roku 1863

Pokud vím, jako první se evolutou trojosého elipsoidu zabýval George Salmon v práci *On the equation of the surface of centres of an ellipsoid.*[123] Většinou se však budu odvolávat na snadněji dosažitelnou knihu George Salmon-Wilhelm Fiedler: *Analytische Geometrie des Raumes* I. *Die Elemente und die Theorie der Flächen zweiten Grades* (4. vyd. 1898), a to hlavně na první asi pětinu kapitoly XI. *Von den Invarianten und Covarianten der einfachsten Systeme von Flächen zweiten Grades* (strany 320 až 425).

[Salmonovo dílo *A Treatise on the Analytic Geometry of Three Dimensions* (1. vydání: Dublin, 1848) i jeho německý překlad a zpracování W. Fiedlerem (1. vydání: Leipzig, 1860) vycházely v mnoha vydáních ještě ve dvacátých letech.[124] Ze Salmonových-Fiedlerových knih se učily generace geometrů, bohužel málo českých. Bydžovského učebnice *Úvod do analytické geometrie* (Praha, 1923) je Salmonovi-Fiedlerovi nemálo poplatná obsahem, ale nikoliv náročností – v ní je podstatně skromnější. Její druhé vydání z roku 1946 a třetí z roku 1956 skromnost ještě zřetelně stupňují.]

* * *

G. Salmon na straně 217 s odkazem na Cambridge and Dublin mathematical journal 5 píše, že lze snadno dokázat toto tvrzení: Když se bodem P elipsoidu proloží dva s ním konfokální hyperboloidy (jednodílný a dvojdílný), tak póly tečné roviny elipsoidu v bodě P vůči oběma hyperboloidům jsou dva středy křivosti pro bod P elipsoidu.

Nezdá se mi, že důkaz je „easy“, zvláště by bylo třeba leccos připomenout o triortogonálním systému kvadrik. Proto od důkazu upustím a spokojím se jen s mnohem jednodušší rovinnou analogií.

Průsečík P elipsy a konfokální s ní hyperboly

$$(20) \qquad \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-1=0, \qquad \frac{x^2}{\alpha^2}-\frac{y^2}{\beta^2}-1=0, \qquad a^2-b^2=\alpha^2+\beta^2=e^2$$

---

[123] Quarterly journal of pure and applied mathematics 2(1858), 217–222.

[124] Pro 5. anglické vydání I, II (London, 1912–15) viz recenze v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky 43(1914), str. 76, a 49(1920), str. 267–268.

má souřadnice

$$P\left[\frac{a\alpha}{e}, \frac{b\beta}{e}\right]. \tag{21}$$

Tečna v něm k elipse (20) má za svůj pól vůči hyperbole z (20) právě střed křivosti elipsoidu v bodě P. Vskutku, tečna elipsy v bodě P je

$$\frac{\alpha}{ae}x + \frac{\beta}{be}y - 1 = 0 \tag{22}$$

a polára středu křivosti elipsy[125] v bodě P z (21) – tj. polára bodu

$$\left[\frac{\alpha^3}{ae}, -\frac{\beta^3}{be}\right]$$

– vůči hyperbole z (20) je identická s (22).

* * *

G. Salmon se ve své práci z roku 1858 vyjadřoval velmi stručně. Učinit ji přístupnější by vyžadovalo dlouhé doplňování. Proto od něj upustím a spokojím se jen s několika poznámkami.

Salmonova rovnice je 12. stupně a vyplňuje na stranách 220 a 221 celkem asi 4/3 stran, zabírá 38 řádků. Její odvození vyžadovalo naprosto výjimečnou trpělivost, početní zkušenost a pečlivost. Tisk je bohužel tak drobný, že exponenty se stávají až nezřetelnými.

G. Salmon členy své rovnice uspořádal patrně nejlepším možným způsobem. Využil při něm cyklických záměn

$$\xi \to \eta \to \zeta \to \xi, \qquad \alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha.$$

Řádek 1 ze strany 220 a řádky 9 a 10 stejně jako řádky 11 a 12 ze strany 221 se napsanou cyklickou záměnou reprodukují. Stejně tak se nemění trojice řádků 5–7 a 14–16 ze strany 220, jakož i šestice řádků 8–13 ze strany 220 a řádků 13–18 ze strany 221. Konečně se cyklicky reprodukuje dvanáct řádků, a to řádky 17–20 ze strany 220 spolu s řádky 1–8 ze strany 221. Výslovně podotýkám, že rovnice není uspořádána podle stupňů svých členů.

Je třeba stále pamatovat, že pro zkrácení zavádí G. Salmon konvenci a označení podle této tabulky:

$$\begin{array}{cccccc} ax & by & cz & a^2-b^2 & b^2-c^2 & c^2-a^2 \\ \xi & \eta & \zeta & \gamma & \alpha & \beta \end{array} \tag{23}$$

[125] Pro střed křivosti elipsy viz B. Bydžovský: *Úvod do analytické geometrie* (1923), str. 215.

Na straně 221 vypisuje ještě rovnice řezu evoluty hlavní rovinou os a, b, tj. $z = 0$, a nevlastní rovinou. V obou případech se řez rozpadá ve dvě čáry 6. stupně.

* * *

Není obtížné zjistit rovnici evoluty rotačního elipsoidu při $a = b$ (při zploštělém elipsoidu; při protáhlém s $b = c$ je situace podobná).

Rovnice obou plášťů evoluty napíšeme snadno. Každý je 6. stupně. Jeden plášť degeneruje v osu elipsoidu $x = 0$, $y = 0$. Je vytvořen těmi středy křivosti, které odpovídají směru rovnoběžek. Má tedy rovnici

$$a^6 \cdot \left(x^2 + y^2\right)^3 = 0. \tag{24}$$

Druhý plášť vznikne rotací evoluty meridiánové elipsy, protože rovnici této evoluty známe – totiž[126]

$$\left[a^2x^2 + c^2z^2 - (a^2 - c^2)^2\right]^3 + 27a^2c^2(a^2 - c^2)^2x^2z^2 = 0$$

– snadno napíšeme i rovnici druhého pláště v Salmonově označení:

$$\left(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 - \alpha^2\right)^3 + 27\alpha^2\left(\xi^2 + \eta^2\right)\zeta^2 = 0. \tag{25}$$

Znásobením rovnic (24) a (25) dostaneme rovnici evoluty rotačního elipsoidu.

Členy nejvyššího stupně 12 v ní jsou

$$\begin{aligned} &\left(\xi^2 + \eta^2\right)^3 \cdot \left(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2\right)^3 = \\ &= \left(\xi^2 + \eta^2\right)^6 + 3\left(\xi^2 + \eta^2\right)^5\zeta^2 + 3\left(\xi^2 + \eta^2\right)^4\zeta^4 + \left(\xi^2 + \eta^2\right)^3\zeta^6. \end{aligned} \tag{26}$$

Nyní do Salmonovy rovnice dosadíme $\gamma = 0$ a ze zbývajících vyberu členy 12. stupně, které ještě rozdělím na členy se ζ^0, resp. ζ^2, resp. ζ^4, resp. ζ^6. S jistou dávkou trpělivosti a pozornosti jsem se přesvědčil, že tyto členy vskutku dávají (26). Podobně, jen mnohem snadněji, jsem se přesvědčil, že členy nejnižšího 6. stupně v součinu levých stran rovnic (24) a (25) – totiž $(\xi^2 + \eta^2)^3$ – souhlasí s členy nejnižšího stupně v Salmonově rovnici (při $\gamma = 0$ ovšem).

* * *

Také rovnici řezu evoluty trojosého elipsoidu jeho hlavní rovinou lze odvodit přímo. Udělám to s rovinou os a a b. Zvolím bod E na rovníku

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0, \qquad z = 0. \tag{27}$$

[126] Viz B. Bydžovský: *Úvod do analytické geometrie* (1923), str. 215, (29).

Normála elipsoidu v bodě E leží ovšem v ekvatoriální rovině. Poloměr R_1 hlavní křivosti elipsoidu v bodě E a ve směru rovníku je roven jeho poloměru křivosti v bodě E, tedy

$$R_1 = \frac{1}{a^4 b^4}\sqrt{\left(b^4x^2 + a^4y^2\right)^3}. \tag{28}$$

Množina příslušných středů křivosti je ovšem evoluta rovníku se známou rovnicí,[127] užívám v ní Salmonova označení z (23) napravo

$$\left[a^2x^2 + b^2y^2 - \gamma^2\right]^3 + 27a^2b^2\gamma^2x^2y^2 = 0. \tag{29}$$

Poloměr R_2 druhé hlavní křivosti elipsoidu v bodě E získáme z připomenutého už vzorce (11)

$$R_1R_2 = \frac{a^2b^2c^2}{h^4} \qquad \text{při} \qquad h^2 = \frac{a^4b^4}{b^4x^2 + a^4y^2}, \qquad z = 0.$$

Tedy vzhledem k (28) je $R_2 = \frac{c^2}{h}$. Jednotkový vektor normály v bodě rovníku je

$$n = \left(-\frac{hx}{a^2}, -\frac{hy}{b^2} \right),$$

takže druhý střed křivosti elipsoidu v bodě E má souřadnice (v rovině $z = 0$)

$$\overline{x} = \frac{c^2 - a^2}{a^2}x, \qquad \overline{y} = \frac{b^2 - c^2}{b^2}y.$$

Nyní už stačí, abychom za x a y odtud dosadili do rovnice ekvátoru, a dostaneme rovnici čáry druhých středů křivosti bodů elipsoidu na rovině jeho rovníku (zase hned se Salmonovým označením z (23) napravo a s vynecháním pruhů nad x, y)

$$a^2\alpha^2x^2 + b^2\beta^2y^2 - \alpha^2\beta^2 = 0. \tag{30}$$

Spojením s (28) se konečně dostaneme k Salmonově rovnici řezu evoluty elipsoidu jeho ekvatoriální rovinou $z = 0$ (viz str. 221, řádek 11 zdola – pamatujíce ovšem na stupeň 12 evoluty, takže elipsu (30) je třeba vzít trojnásobně).

V posledních řádcích je skryt nedostatek. Byly by úplné, kdybychom věděli, že na rovníkové rovině (xy) elipsoidu nejsou žádné jiné středy křivosti jeho bodů kromě těch, které patří k bodům na jeho rovníku. Geometricky je to zřejmé. Proto od poněkud delšího početního důkazu upouštím; viz ostatně závěr části 2. Evoluta elipsoidu.

* * *

[127] Viz zase B. Bydžovský: *Úvod do analytické geometrie* (1923), str. 215, (29).

Pasáže výše citovaného vydání Salmonovy-Fiedlerovy knihy (1898), které jednají o evolutě elipsy, se jen částečně shodují se Salmonovou prací z roku 1858. Předně jejich východisko je jiné než v Salmonově pojednání. Vyložím je až v části 7 o Sobotkově příspěvku ke studiu evoluty elipsoidu. Také Salmonův-Fiedlerův zápis její rovnice se podstatně liší od původního Salmonova z roku 1858. Autoři vypsali z této rovnice jen část, kterou nazvali „hlavní“, aniž by se zmínili, co tím míní. Jen ze souvislostí se dá usoudit, že celá rovnice vznikne cyklickými záměnami:

$$\alpha \to \beta \to \gamma \to \alpha, \qquad x \to y \to z \to x$$

při označení (jako dříve) $\alpha = b^2 - c^2$, $\beta = c^2 - a^2$, $\gamma = a^2 - b^2$, a při konvenci, že místo ax, by, cz se píše jen x, y, z. Na tuto třetinu rovnice potřebovali 17 zcela zaplněných řádků, které psány vedle sebe by měly délku asi 150 cm. Zápis je velmi nepřehledný, je sestaven podle klesajících stupňů svých členů.

Ze Salmonovy-Fiedlerovy rovnice (1898) se při $a = b$, tj. při $\gamma = 0$, kdy je elipsoid rotační, musí dostat rovnice jeho evoluty – která ovšem je také rotační – ve tvaru[128]

$$f(x^2 + y^2,\ z^2) = 0.$$

To se mi však nepodařilo. Rovněž selhal můj pokus získat ze Salmonovy-Fiedlerovy částečné rovnice evoluty její řez rovinou $z = 0$ (autoři jeho rovnici uvádějí na str. 234 dole) a nevlastní rovinou (na str. 235 nahoře), kdy jeho rovnice je tvořena členy 12. stupně rovnice evoluty.

5. Clebschova práce 1863

Problém normál zobecnil Alfred Clebsch v práci *Ueber das Problem der Normalen bei Curven und Oberflächen der zweiten Ordnung.*[129] Hned na prvních řádcích připomíná Salmonovu-Fiedlerovu knihu o kuželosečkách a práci Arthura Cayleyho (1821–1895) nazvanou *Note sur les normales d'une conique.*[130] Problém normál v ní A. Cayley zobecňuje v projektivní úlohu, z níž specializací vychází původní metrický úkol s pravým úhlem, který má svírat přímka z jistého bodu s kuželosečkou či kvadrikou. V prostoru lze Clebschovo zadání formulovat takto (str. 64; ponechávám Clebschovo označení):

Mysleme si dvě kvadriky U a V a bod x. Na první z nich U se má nalézt bod X s touto vlastností: Vytvoříme-li z bodu X tečný kužel ke kvadrice V, pak polární rovina daného bodu x vůči tomuto kuželi splývá s tečnou rovinou kvadriky U v bodě X.

A. Clebsch vyšetřil podrobně situace, při nichž z šesti řešení tohoto problému některá různým způsobem splývají. Četba jeho práce je náročná.

[128] Z důvodu symetrie nemohou v něm být liché mocniny souřadnic x, y, z.

[129] Journal für die reine und angewandte Mathematik 62(1863), 64–109.

[130] Journal für die reine und angewandte Mathematik 56(1859), 182–185.

Dotknu se jen jejího § 12 na stranách 99 až 101. V něm A. Clebsch dokazuje, že šest přímek, které spojují daný bod x se šesti body X (řešeními problému), leží na kvadratickém kuželi. Udává řadu jeho vlastností a specializuje je pro metrický případ normál. Krátce se k tomuto kuželi ještě vrátím v části 8.

6. Cayleyho práce 1873

Patrně nejdůkladněji studoval evolutu elipsoidu Arthur Cayley v článku *On the centro-surface of an ellipsoid.*[131] Cayleyho práce vyžaduje značné geometrické vědomosti. Hned první stránky předpokládají nikoliv jen povrchní seznámení s triortogonálním systémem kvadrik, když A. Cayley bod na elipsoidu

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

určuje eliptickými parametry ξ a η při

$$\frac{x^2}{a^2+\xi} + \frac{y^2}{b^2+\xi} + \frac{z^2}{c^2+\xi} = 1, \qquad \frac{x^2}{a^2+\eta} + \frac{y^2}{b^2+\eta} + \frac{z^2}{c^2+\eta} = 1.$$

Vycházeje z parametrických rovnic evoluty autor ji rozsáhle vyšetřuje, například podrobně studuje kuspidální kuželosečky (každý jejich bod je bodem vratu) evoluty – na takové singulární čáry se v Bydžovského *Úvodu do algebraické geometrie* (1948) nedostalo.[132] Počet těchto kuspidálních kuželoseček určuje na osm. Na straně 329 sebraných spisů VIII vyšetřuje řez evoluty nevlastní rovinou a se Salmonovým označením dostává tutéž její rovnici jako G. Salmon roku 1858 (viz začátek odd. 4 a pozn. [123]). Od strany 357 studuje troje vytvoření evoluty. V závěru na stranách 363 až 365 k numerickým hodnotám poloos elipsoidu udává numerické hodnoty různých veličin jeho evoluty.

Kdybych měl zcela krátce charakterizovat práce G. Salmona (1858), A. Clebsche a A. Cayleyho, učinil bych to takto: Po syntetickém Mongeově náznaku byl G. Salmon patrně první, kdo evolutu elipsoidu studoval analyticky (domnívám se, že pro vysoký stupeň 12 spojený s extrémní komplikovaností evoluty byly možnosti syntetického studia omezené; celková představa o jejím tvaru se až vymyká možnostem). A. Clebsch a A. Cayley – oba v rozsáhlých, nikoliv obsahem snadno přístupných pracích – pokračovali v analytickém studiu, A. Clebsch v projektivním zobecnění, A. Cayley v původní metrické formě.

[131] Transactions of the Cambridge Philosophical Society 12(1873), 319–355, viz též *The Collected Mathematical Papers of Arthur Cayley* VIII (Cambridge, 1895), 316–365.

[132] Je sympatické, jak B. Bydžovský nazval své knihy *Úvod do analytické geometrie* (1923), *Základy teorie determinantů* (1930), *Úvod do algebraické geometrie* (1948). Rád bych viděl, jak by si s mnoha příklady z Bydžovského první učebnice poradili dnešní absolventi vysokoškolského studia učitelství matematiky.

7. Sobotkův příspěvek (1914)

Znám jediného českého autora, který se zabýval evolutou elipsoidu. Je jím Jan Sobotka: *Differenciální geometrie* II (Praha, 1914)[133] v X. kapitole, odd. 205 *Centrální plocha elipsoidu* (jiný název pro evolutu) a odd. 206 *Její rovnice* na stranách 428 až 433.

J. Sobotkovi se křivdí, je-li výlučně spojován se syntetickou geometrií. Patřil sice k jejím představitelům u nás, ale výborně ovládal i metody analytické. Toto spojení bylo dosti výjimečné (nejznámějším případem je už několikrát výše citovaný W. Fiedler). Na uvedených stránkách se J. Sobotka předvedl jako výborný znalec jak syntetických, tak analytických úvah, které dokázal velmi účelně kombinovat.

Vyšel z definice středů křivosti, které použili už G. Salmon-W. Fiedler. Je třeba si povšimnout, že jak G. Salmon (1858), tak později G. Salmon-W. Fiedler vyslovili definice středů křivosti tak, že vůbec nezávisejí na diferenciálně geometrických pojmech.

J. Sobotka synteticky odůvodňuje – a pak analyticky potvrzuje, že středy křivosti elipsoidu v jeho bodě P jsou středy koulí, které dotýkajíce se elipsoidu v bodě P určují s ním svazek kvadrik, z jehož čtyř kuželů tři splývají. Podstatný rozdíl v Sobotkově postupu vůči G. Salmonovi a W. Fiedlerovi je v tom, že zatímco tato dvojice došla k implicitní rovnici evoluty, J. Sobotka dospěl k jejímu parametrickému vyjádření ve tvaru (α, β, γ souřadnice)

$$(31) \qquad \alpha^2 = \frac{\left(a^2+\lambda\right)\left(a^2+\mu\right)^3}{a^2\left(a^2-b^2\right)\left(a^2-c^2\right)}, \qquad \beta^2 = \dots, \qquad \gamma^2 = \dots \qquad \text{cykl.};$$

v němž μ je trojnásobný a λ jednoduchý kořen rovnice, která ve výše zmíněném svazku určeném elipsoidem a koulí určuje kužele.

Příbuznost Sobotkova postupu se Salmonovým-Fiedlerovým lze snadno nahlédnout i bez povědomí o jeho obsahu. Zmíněnou ústřední bikvadratickou rovnici (pro degenerované kvadriky svazku určeného elipsoidem a koulí) s trojnásobným kořenem zapisují J. Sobotka jako (5) na straně 430 a G. Salmon-W. Fiedler nahoře na straně 334 až na nepatrnou odchylku v označení úplně stejně.[134]

[133] Jsou to litografované zápisy, které ze Sobotkových přednášek pořídili J. Křížek a V. Obešlo. JČM, Praha, I. díl: 1909, X+543 stran, II. díl: 1914, VI+484 stran, III. díl: 1914, VII+506 stran.

[134] Měl v této situaci J. Sobotka citovat G. Salmona-W. Fiedlera či nemusil? Na to mohou být názory různé; učebnici jistě nelze zaplnit odvoláními. Protože v daném případě nejde o elementární či běžně známou záležitost, soudím, že zmínit se o dvojici autorů měl. Ostatně ve všech třech dílech Sobotkových přednášek jsou citace víc než výjimečné. Nejinak si počínal i Václav Hlavatý v knize *Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet* (Praha, 1937), v knize, která měla nahradit Sobotkovy tři svazky. Jistě by nebyl pochybil, kdyby ve třetím odstavci své předmluvy na straně 5 byl uvedl dílo, které tak či onak použil, totiž Luigi Bianchi: *Vorlesungen über Differetialgeometrie* (Leipzig, 1899, 2. vyd. 1910).

Sobotkův postup se objeví jako velmi přirozený, provede-li se nejdříve v rovině. Učiním tak i se zachováním Sobotkova označení.

Svazek určený elipsou o poloosách a, b a kružnicí se středem $[\alpha, \beta]$ a poloměrem R je

$$\lambda \cdot \Big(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1\Big) + \big(x-\alpha\big)^2 + \big(y-\beta\big)^2 - R^2 = 0. \tag{32}$$

K degenerovaným kuželosečkám svazku vedou anulované derivace podle x a y (proč rovnici svazku nehomogenizuji třetí proměnnou a nederivuji podle ní, brzy vysvitne)

$$\lambda \cdot \frac{x}{a^2} + (x-\alpha) = 0, \qquad \lambda \cdot \frac{y}{b^2} + (y-\beta) = 0, \tag{33}$$

které ihned přepíši na tvar

$$(x-\alpha)(\lambda + a^2) + \alpha\lambda = 0, \qquad (y-\beta)(\lambda + b^2) + \beta\lambda = 0. \tag{34}$$

Dosadíme-li za $\lambda \frac{x^2}{a^2}$ a $\lambda \frac{y^2}{b^2}$ z (33) do (32), dostaneme

$$\alpha(x-\alpha) + \beta(y-\beta) + R^2 + \lambda = 0. \tag{35}$$

[Připomeneme-li si Eulerovu relaci pro homogenní funkci, vidíme, že (35) nahrazuje parciální derivaci homogenizované funkce (32) podle třetí proměnné.] Když v (35) nahradíme $x-\alpha$ a $y-\beta$ podle (34), získáme základní rovnici 3. stupně pro parametry degenerovaných kuželoseček v našem svazku (32)

$$\frac{\alpha^2}{a^2+\lambda} + \frac{\beta^2}{b^2+\lambda} - \frac{R^2}{\lambda} = 1$$

[viz rovnici (5) na straně 430 Sobotkovy knihy II (1914)]; po odstranění zlomků tedy

$$\begin{aligned} &\lambda^3 - \Big[\alpha^2 + \beta^2 - R^2 - a^2 - b^2\Big] \cdot \lambda^2 - \\ &\qquad - \Big[\alpha^2 b^2 + \beta^2 a^2 - \big(a^2 + b^2\big) R^2 - a^2 b^2\Big] \cdot \lambda + a^2 b^2 R^2 = 0. \end{aligned} \tag{36}$$

Potřebujeme vyjádřit, že tato rovnice má trojnásobný kořen (označíme jej μ). To lze učinit zcela elementárně porovnáním koeficientů s třetí mocninou dvojčlenu, ale učiním tak známým obecným návodem: K rovnici (36) připojme její první a druhou derivaci a získáme tak pro tři neznámé α^2, β^2, R^2, při nich má rovnice (36) trojnásobný kořen, tři lineární rovnice. Jejich řešení je mechanická záležitost, proto napíši jen výsledek (trojnásobný kořen značím už μ):

$$\alpha^2 = \frac{(\mu + a^2)^3}{a^2(a^2 - b^2)}, \qquad \beta^2 = \frac{(\mu + b^2)^3}{b^2(b^2 - a^2)}.$$

Analogie se Sobotkovými rovnicemi (31) je zřejmá.

Eliminujeme-li z posledních rovnic μ, dostaneme rovnici evoluty elipsy ve tvaru, který uvádí B. Bydžovský.[135]

K průhlednosti Sobotkova postupu přispěje povědomí o teorii svazku kuželoseček. Jedná se o situaci, kterou zachycuje B. Bydžovský,[136] když jednu z kuželoseček k_1 a k_2 oskulujících v bodě O_1 nahradíme kružnicí.

8. Chaslesova-Terquemova věta

Šest normál vedených z bodu k elipsoidu leží na kvadratickém kuželi.

Autor nejstarší práce, v níž jsem se s touto větou setkal, je Jacob Steiner: *Über algebraische Kurven und Flächen*[137] Na straně 346 uprostřed čteme o kvadrice: Herr Terquem[138] irgendwo (proložil Z. N.) zuerst bewiesen hat: dass aus jedem Punkte, im Allgemeinen, je 6 Normalen auf dieselbe gehen, und dass solche 6 Normalen jedesmal in einer Kegelfläche zweiten Grads liegen. To je ovšem originální citace, ale u J. Steinera nemůže překvapit. V jeho pracích a knihách je třeba odvolání na jiné autory hledat s lucernou.[139] Rudolf Clebsch (1833–1873): *Ueber das Problem der Normalen bei Curven und Oberflächen der zweiten Ordnung*[140] při projektivním zobecnění hořejší věty na straně 99 v poznámce pod čarou stručně poznamenává, že pro normály větu dokázal Terquem a odkazuje na *Journal Bd. 49, p. 346* (viz výše a poznámka [137]).

O sedm roků později píše Adolphe Desboves (1818–1888): *Theorie nouvelle des normales aux surfaces du second ordre* (Paris, 1862) na straně 15: *Les six normales menées d'un même point à un ellipsoïde sont sur un même cône du second degré (Chasles).* Podle Josef Naas-Hermann Schmid: *Mathematisches Wörterbuch* I, (Berlin, Leipzig, 1961), str. 267, (2. vydání: Stuttgart, 1979) byl autorem věty rovněž Michel Chasles.

Nepodařilo se mi zjistit, kde a kdy M. Chasles a O. Terquem větu publikovali.

* * *

Pro její důkaz je nejvíc po ruce tento nápad: Označím t_i $(i = 1, \ldots, 6)$ ty parametry pat normál z bodu $B[\xi, \eta, \zeta]$, které jim příslušejí v parametrickém vyjádření (15) Apolloniovy kubické hyperboly pro bod B. Tyto parametry t_i

[135] *Úvod do analytické geometrie* (1923), strana 215 (5. řádek za obrázkem 43).

[136] *Úvod do algebraické geometrie* (1948) na straně 219 s obrázkem 11.

[137] Journal für die reine und angewandte Mathematik 49(1855), 333–348.

[138] Olry Terquem (1782–1862) založil roku 1855 vůbec první matematický referátový časopis.

[139] Vím, jak spoře významní geometři ze Steinerovy doby citovali své kolegy a jak spoře byli jimi citováni. Kdyby se nyní sestavil jejich „citační index“ a srovnal s dnešními, nutně by vyvstala otázka: Jak vůbec mohli být významní a jak mohou být dosud takoví?

[140] Journal für die reine und angewandte Mathematik 62(1863), 64–109.

jsou určeny rovnicí (16) stupně 6, z níž se snadno vyčtou jejich základní symetrické funkce; z nich – jak známo – se dá vyjádřit každá symetrická funkce argumentů t_i.

Souřadnice průsečíků našich šesti normál s nevlastní rovinou jsou dány pravými stranami z (15) s t_i místo t; označím je x_i, y_i, z_i (čtvrtou souřadnicí 0 lze nepsat). Nutná a postačující podmínka, aby šest bodů s danými souřadnicemi leželo na kuželosečce, je známá:

$$\begin{vmatrix} x_1^2 & y_1^2 & z_1^2 & x_1y_1 & y_1z_1 & z_1x_1 \\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill} \\ x_6^2 & y_6^2 & z_6^2 & x_6y_6 & y_6z_6 & z_6x_6 \end{vmatrix} = 0.$$

Dosadíme-li za souřadnice x_i, y_i, z_i, můžeme ze sloupců determinantu vytknout

$$a^4\xi^2 \cdot b^4\eta^2 \cdot c^4\zeta^2 \cdot a^2b^2\xi\eta \cdot b^2c^2\eta\zeta \cdot c^2a^2\zeta\xi = \big(abc\big)^8\big(\xi\eta\zeta\big)^4.$$

Po odstranění zlomků zbude determinant, který je 24. stupně v t_i. Poněvadž je symetrický v t_i, musí se dát vyjádřit zmíněnými základními symetrickými funkcemi z t_i. Dosadíme-li za ně příslušné koeficienty rovnice (16), musí se dostat nula. [Musili jsme čekat, že se z determinantu dá vytknout ξ či η či ζ; neboť leží-li bod B v hlavní rovině, jdou z něj čtyři normály v ní ležící a kužel, o němž mluví Chaslesova věta, degeneruje.]

Propočítat determinant 6. stupně, jehož prvky jsou 4. stupně v t_i, je ovšem téměř nadlidský úkol. Ale už krátká syntetická úvaha z něj učiní téměř hračku. Ukáži to na poněkud modifikované analytické části důkazu, který otiskl Desboves v knize *Théorie nouvelle des normales aux surfaces du second ordre* (Paris, 1862) na stranách 14–16.[141]

Když z bodu B vedeme normálu k elipsoidu a její patu označíme P, tak její polární rovina vůči elipsoidu – tj. tečná rovina v bodě P – je kolmá k přímce BP. Ptejme se, co vytvoří přímka vycházející z bodu B a mající tuto vlastnost: Je na ní bod, jehož polární rovina vůči elipsoidu je na ni kolmá. Zjistíme-li, že tato přímka vytváří kvadratický kužel, bude tím Chaslesova věta dokázána.

---

[141] Ve Vyčichlově matematické knihovně ČVUT (v roce 1987 byly v poslední chvíli její knihy zachráněny před koniášovskou likvidací) bylo několik Desbovesových pojednání svázaných do jedné knížky: z nich zmíněná už *Théorie et problèmes sur les normales aux coniques* (Paris, 1861, 53 stran) a právě uvedená *Théorie nouvelle …*, XII+90 stran. Desboves byl profesorem na Bonapartově lyceu v Paříži, pojednání vyšla ve sbírce *Exercices pour les classes de mathématiques spéciales.* Knížku by si měli dát před oči autoři dnešních našich učebnic středoškolské geometrie, aby zřetelně viděli, jak hluboko sklouzli, jaký je rozdíl mezi jistě výběrovým lyceem v Paříži před 150 lety a dnešním výběrovým gymnáziem u nás.
Knížku původně vlastnil profesor deskriptivní geometrie na ČVUT Josef Kounovský. Ve studijním roce 1950/51 jsem jako mladý asistent podle knihovní rady vedl knihovnu matematických ústavů ČVUT (později pojmenovaná Vyčichlova). Jí J. Kounovský odkázal svou knihovnu. Do exempláře Desbovesova svazku, kterým disponuji, jsem tenkrát vpisoval *Dar prof. Dr. J. Kounovského.*

Přímka bodem $B[\xi,\eta,\zeta]$ má parametrické rovnice (s parametrem u)

$$x = \xi + u\alpha, \qquad y = \eta + u\beta, \qquad z = \zeta + u\gamma. \tag{37}$$

Zvolme na ní bod s parametrem u_0; jeho polární rovina je

$$\frac{\xi + u_0\alpha}{a^2}x + \frac{\eta + u_0\beta}{b^2}y + \frac{\zeta + u_0\gamma}{c^2}z - 1 = 0.$$

Její kolmost k zvolené přímce se vyjádří požadavkem, aby matice

$$\begin{pmatrix} \frac{\xi+u_0\alpha}{a^2} & \frac{\eta+u_0\beta}{b^2} & \frac{\zeta+u_0\gamma}{c^2} \\ \alpha & \beta & \gamma \end{pmatrix}$$

měla hodnost 1. Tento požadavek vede k rovnicím

$$u_0\bigl(b^2 - a^2\bigr)\alpha\beta + b^2\beta\xi - a^2\alpha\eta = 0,$$
$$u_0\bigl(c^2 - b^2\bigr)\beta\gamma + c^2\gamma\eta - b^2\beta\zeta = 0.$$

Po vyloučení $u_0\beta$ a krácení b^2 dostaneme

$$\bigl(a^2 - b^2\bigr)\zeta\alpha\beta + \bigl(b^2 - c^2\bigr)\xi\beta\gamma + \bigl(c^2 - a^2\bigr)\eta\gamma\alpha = 0.$$

Poněvadž podle (37) je

$$\alpha : \beta : \gamma = (x - \xi) : (y - \eta) : (z - \zeta),$$

tak

$$\bigl(a^2 - b^2\bigr)\zeta(x-\xi)(y-\eta) + \bigl(b^2 - c^2\bigr)\xi(y-\eta)(z-\zeta) + \bigl(c^2 - a^2\bigr)\eta(z-\zeta)(x-\xi) = 0.$$

Ale tato rovnice znamená kvadratický kužel s vrcholem $B[\xi,\eta,\zeta]$.

Poslední rovnice je identická s tou, ke které došel A. Desboves ve své knížce na straně 16 jako (6).

4. Dodatek: Náměty

1. V 2. dodatku *Normály z bodu k elipse* jsem psal o Petrových přímkách a Lauermannových-Mertensových kružnicích, pro jejichž body se bikvadratická úloha vésti z nich normály k elipse redukuje na dvě kvadratické; připsal jsem, co dokázal P. Schoute: Tak se úloha rozpadá jedině pro body na zmíněných přímkách a kružnicích (ovšem s výjimkou triviálního případu, kdy bod je na osách elipsy). Využil k tomu existenci 27 přímek na obecné kubické ploše. Měl by se nalézt elementárnější důkaz odpovídající povaze úlohy.

2. Pokusit se o zjednodušení důkazů jak Lauermannova, tak Mertensova, že pro body B na kružnicích

$$(x \mp be)^2 + y^2 = e^2$$

se úloha vésti z něj normály k elipse

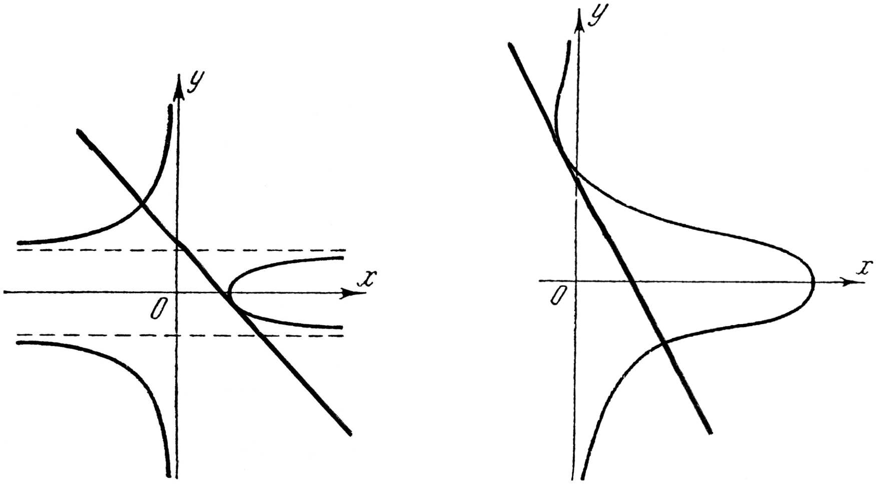
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

rozpadá na dvě kvadratické. Viz krátký důkaz, že tutéž vlastnost mají Pelcovy přímky

$$ax \pm by = 0.$$

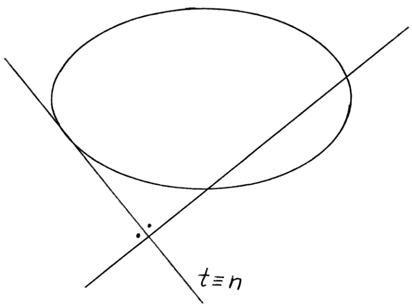
Pro body B v průsečících Lauermannových-Mertensových kružnic s Pelcovými přímkami musejí být oba rozklady shodné.

3. Málo jsou prozkoumány otázky spojené s normálami rovinných čar a ploch stupně většího než 2. Podle Steinerových vzorců, o kterých jsem se zmínil už na začátku 2. dodatku, lze z bodu k rovinné křivce 3. stupně vést 9, k ploše 3. stupně 21 normál (ve vágních „obecných“ případech); pro podrobnější údaje viz A. C. Смогоржевский – Е. С. Столова: *Справочник по теории плоских кривых третьего порядка* (Moskva, 1961), kapitola IV, § 3, str. 99. U těchto útvarů se objevují situace, které u kuželoseček a kvadrik jsou vyloučeny. Např. u rovinné kubiky může být její normála i její tečnou. Viz k tomu opět citovanou knihu; autoři v kapitole I na stranách 7 až 28 uvádějí a zakreslují všechny typy rovinných kubik podle známé Newtonovy klasifikace z roku 1704. Na jejich celkem 78 obrázcích je několikrát čára, pro niž je tečna i normálou. Zřetelně je to vidět třeba na obr. 53 (str. 22), obr. 62 (str. 24), obr. 65 a 66 (str. 25), obr. 69 (str. 26). Z nich reprodukuji obr. 65, 66 jako obr. 5 a 6 se silným zakreslením oněch tečen-normál.



Obr. 5, 6

Pro jejich existenci svědčí i kubika degenerovaná v kuželosečku a přímku (viz obr. 7), z nichž se známým způsobem odvodí nezvrhlá čára 3. stupně.



Obr. 7

4. Podobná otázka se týká přímky, která je normálou rovinné kubiky ve dvou jejích různých bodech.

5. Literatura, která je mi známá, jedná až na příležitostné poznámky jen o jednom typu středových kvadrik – totiž o elipsoidu. U něj a dvojdílného hyperboloidu lze očekávat jisté analogie mezi jejich centrálními plochami. Avšak u jednodílného hyperboloidu a elipsoidu se rozdíly dají čekat, protože v každém svém bodě má tento hyperboloid zápornou totální křivost. V každém bodě P tohoto hyperboloidu leží jeho středy křivosti na různých stranách tečné roviny v bodě P (oproti elipsoidu a dvojdílnému hyperboloidu); také nemá reálné kruhové body. Studium centrální plochy jednodílného hyperboloidu by patrně nebylo pouhou analogií studia centrální plochy elipsoidu.

6. Zatímco počet normál z bodu ke středové kvadrice je šest, u obou paraboloidů se snižuje na pět (u kuželů a válců na čtyři). Evolutu eliptického paraboloidu (ten má všechny body s pozitivní totální křivostí) podrobně vyšetřil Ferdinand Caspary (1853–1901): *Die Krümmungsmittelpunktsfläche des elliptischen Paraboloids.*[142] V § 3 se mu podařilo zapsat rovnici evoluty ve velmi uzavřeném tvaru. V § 4 vyšetřil řezy evoluty hlavními rovinami i rovinou nevlastní; v § 5 určil body, z nichž několik normál k paraboloidu splývá; v § 6 studoval singularity evoluty, zvláště její dvojnou čáru. Není mi známa práce, která by se podobně zabývala hyperbolickým paraboloidem, jenž má všude zápornou křivost.

7. Analogické úlohy lze formulovat i při prostorové čáře 3. stupně. Dvojice tečna-normála rovinné křivky je nahrazena trojicí tečna t – hlavní normála n – binormála b anebo rovinami

$$(t, n) - (n, b) - (b, t).$$

Patří k elementárním poznatkům, že z bodu jdou k prostorové kubice tři oskulační roviny; leží-li onen bod na ploše tečen kubiky, dvě oskulační roviny splývají; leží-li dokonce na kubice samé, splývají všechny tři. Nedostal jsem se k práci, která by se zabývala reálností těchto oskulačních rovin. Omluvou mi může být, že rozsah literatury o algebraických prostorových křivkách je až nepřehledný.

8. Existují k Barisienovým relacím (viz závěr 2. dodatku: *Normály z bodu k elipse*) prostorové analogie aspoň pro některé kvadriky?

9. Jan Sobotka: *Prostorová obdoba Steinerovy paraboly*[143] je práce, která přímo vyzývá k dalšímu hledání prostorových analogií k problémům, v nichž vystupuje Steinerova-Pelcova parabola.

10. Existují i pro elipsoid útvary analogické k Pelcovým přímkám a Lauermannovým-Mertensovým kružnicím (ovšem mimo triviální případy)? Jinými slovy: kdy se úloha 6. stupně o normálách z bodu k elipsoidu rozpadá třeba na tři kvadratické?

[142] Journal für die reine und angewandte Mathematik 81(1876), 143–192.

[143] Rozpravy České akademie, II. tř. matematicko-přírodnická 23(1914), č. 47, 1–18; v německé verzi *Das räumliche Analogon der Steiner'schen Parabel*, Bulletin International Académie Tchèque des Sciences 19(1914), 330–350.

F. Závěrem

Když se nyní po více než šedesáti letech dívám na Seifertův seminář zpátky, nemohu se ubránit několika poznámkám.

Témata semináře i způsob, kterým je L. Seifert podával, tkvějí v 19. století. Do semináře nedolehly ohlasy novějších geometrických směrů, zvláště nikoliv teorie konvexních útvarů a diferenciální geometrie ve velkém, rovněž ne projektivní nebo afinní diferenciální geometrie. Ponechám zcela stranou časopiseckou literaturu a jen krátce zůstanu u knižní. L. Seifert se ani nezmínil třeba o těchto knihách: Wilhelm Blaschke: *Kreis und Kugel*,[144] W. Blaschke: *Vorlesungen über Differentialgeometrie I*,[145] Tommy Bonnesen (1873–1935): *Les problèmes des isoperimètres et des isépiphanes* (Paris, 1929), T. Bonnesen – Werner Fenchel (1905–1988): *Theorie der konvexen Körper*.[146] Zcela stranou zůstaly výsledky Blaschkeovy školy o afinní diferenciální geometrii. Totéž platí o projektivní diferenciální geometrii (viz část VI), třeba alespoň něco málo z knihy Guino Fubini (1870–1943) – E. Čech: *Introduction à la géométrie differentielle projective des surfaces* (Paris, 1931) by bývalo vhodným seminárním námětem.

Své námitky doložím příkladem. V úloze 1 ze Seifertova semináře se mají nalézt v rovině dané elipsy takové body V, z nichž tečny vedené k elipse svírají daný úhel α. Mohu si myslit, že jsem kolem dané elipsy položil uzavřenou gumovou hadičku a hrotem V ji napínal tak, aby při vrcholu V stále tvořila úhel α. Od této formulace je už jen malý krůček k její obměně: Gumovou hadičku schopnou natažení nahradím provázkem neměnné délky se svázanými konci, který má pevnou délku d. Hrotem V provázek napněme a ptejme se: Když se bude bod V pohybovat, jakou čáru vytvoří? Obě otázky, jak první Seifertova s pevným úhlem α, tak druhá s pevnou délkou d, jsou jistě srozumitelné i studentovi.

Viděli jsme, že odpověď na Seifertovu otázku nebyla zrovna jednoduchá. Je tomu s druhou otázkou podobně? Ano, odpověď opět vyžaduje jisté úsilí.

Poskytuje ji věta, kterou publikoval John Graves (1806–1870) ve svém překladu z francouzštiny (vím o něm jen z literatury) Chaslesovy práce: *Two geometrical memories on the general properties of cones of the second degree and on the spherical conics* (Dublin, 1841): Zvolme dvě konfokální elipsy e a E, první v druhé. Na vnější elipse E zvolme bod V a veďme z něj tečny k vnitřní

[144] Leipzig, 1916, reprint 1949, 2. vydání: Berlin, 1956, ruský překlad: Moskva, 1967; recenzi 1. vydání napsal Bohuslav Hostinský, viz Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 47(1918), 43–44; viz, co jsem o jejím autorovi připojil už na začátku v odd. A, str. 111.

[145] Berlin, 1921, 2. vydání 1924, 3. vydání: podstatně rozšířené a přepracované 1930, 4. vydání: 1945. Od W. Blaschkeho je také výborný informativní článek *Aufgaben der Differentialgeometrie im Grossen*, Sitzungsberichte der Berliner Mathematischen Gesellschaft 15(1916), 62–69.

[146] Berlin, 1934, reprinty: 1948, 1974, anglický překlad: 1987.

elipse e; jejich dotykové body označme T_1 a T_2. Součet délek úseček $\overline{VT_1}$ a $\overline{VT_2}$ a delšího z oblouků T_1T_2 elipsy e je konstantní, tj. nezávislý na volbě bodu V na elipse E. (Užívajíce pozdější terminologie bychom mohli napsat: Konvexní obal bodu $V \in E$ a elipsy e má konstantní délku své hranice). Hned si všimněme: kdyby se elipsa e smrštila v úsečku spojující ohniska, jednalo by se o starou známou zahradnickou konstrukci elipsy.

Mají zahradnická a Gravesova konstrukce prostorové analogie? Ano, uvedu je v největší stručnosti. K zahradnické konstrukci elipsy ji objevil Otto Staude v článku *Ueber Fadenconstructionen des Ellipsoides*[147] a v knize *Die Focaleingenschaften der Flächen zweiter Ordnung* (Leipzig, 1896).[148] Ke Gravesově větě pak Ferdinand Gonseth (1890–1975): *Un théorème relatif à deux ellipsoïdes confocaux.*[149]

Gonsethova analogie se popíše jednoduše se znalostí pojmů z teorie konvexních těles: Integrál střední křivosti kapucovitého tělesa určeného elipsoidem a bodem V mimo něj zůstává konstantní, když bod V se pohybuje po elipsoidu konfokálním s daným.

* * *

Druhá výtka se týká literatury. V citacích a odkazech byl L. Seifert víc než skoupý. Nevzpomínám si, že by byl někdy do semináře přinesl nějakou práci a aspoň její část komentoval nebo doplňoval. Přímo se k tomu nabízely dva přehledy po mnoha oblastech geometrie včetně jejich souvislostí: Felix Klein: *Vorlesungen über höhere Geometrie*,[150] David Hilbert a Stephan Cohn-Vossen: *Anschauliche Geometrie.*[151]

* * *

Ale naopak: Seifertovu semináři za mnoho vděčím. Různost témat velmi zvyšovala jeho zajímavost a přiměla mě podívat se více na řadu geometrických oblastí, kterým L. Seifert věnoval svou pozornost. Bez přehánění mohu napsat, že Seifertovy semináře a přednášky mi poskytly základ, který jsem v pozdějších přednáškách a seminářích B. Bydžovského už jen doplňoval.

Ostatně můj první uveřejněnný článek *O polárních křivkách prostorové kubiky*[152] měl námět ze Seifertova semináře (úlohy 6 a VI). Příspěvek byl výta-

[147] Mathematische Annalen 20(1882), 147–185.

[148] Pro výstižný popis Staudeho složitější konstrukce viz Friedrich Schur: *Nachruf auf Otto Staude*, Jahresbericht der deutschen Mathematiker Vereinigung 40(1931), 219–223.

[149] L'enseignement mathématique 19(1917), 324–325, a Bulletin des sciences mathématiques 42(1918), 177–180, 193–194.

[150] Berlín, 1893, 3. vydání podstatně přepracoval W. Blaschke roku 1926; reprint 1968, ruský překlad: 1939.

[151] Berlin, 1932, anglický překlad: 1999, ruský překlad: 1981.

[152] Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 75(1950), D131–D139.

hem z dřívějšího elaborátu, ke kterému jsem připojil několik rysů a František Vyčichlo mi jej uznal za písemnou práci k II. státní zkoušce z deskriptivní geometrie. Kdybych si nebyl podrobně přepisoval, doplňoval a hlavně propočítával úlohy ze Seifertova semináře, nevím, zda bych byl zvládl téma, které mi v prosinci 1949 dal Eduard Čech k disertaci pro doktorát (více v části o E. Čechovi).

Seminář byl týdně 2 hodiny, tedy za semestr jistě ne víc než 25 hod. Tuto krátkou dobu dokázal L. Seifert dokonale využít, s nároky na své posluchače se ovšem příliš neomezoval. Rád bych viděl, jak by v Seifertovu semináři obstáli nynější studenti učitelství matematiky na gymnáziích.

L. Seifert byl mým prvním profesorem geometrie na vysoké škole. I po více než šedesáti letech na něho rád vzpomínám.