II. UČEBNICE PRO REÁLKY

vydávané Jednotou českých matematiků a fyziků před sto lety

Vojtěchovy učebnice geometrie
Pithardtovy-Seifertovy učebnice deskriptivní geometrie

OSNOVA

Část I. Pohledy na první polovinu 20. století 28

1. Geometrické učebnice před sto lety a nyní 28
2. Učebnice druhé poloviny 19. století 29
3. Marchetova reforma a její důsledky 31
4. Autoři učebnic 32
5. Recenze 33
6. Učební osnovy z roku 1933 34
7. Kompetence posledních učebnic 37
8. Bývalé reálky 38

Část II. Srovnání učebnic z 10. a 90. let 41

A. Vojtěchovy učebnice geometrie 41

9. Planimetrie pro kvartu a část kvinty 42
10. Stereometrie pro kvintu 46
11. Trigonometrie pro sextu 52
12. Analytická geometrie pro septimu 54
13. Sbírka geometrických úloh 61

B. Pithardtovy-Seifertovy učebnice deskriptivní geometrie 64

14. a) pro kvartu (1910) 66
14. b) pro kvintu (1910) 68
14. c) pro sextu (1911) 69
14. d) pro septimu (1911) 71

Část III. Společné vlastnosti učebnic z 10. a 90. let 73

15. Metody syntetická a analytická 73
16. Aplikace geometrie 77
17. Geometrie a výtvarné umění 81
18. Historie geometrie 84

Část IV. Závěr 87

19. Matematicky talentovaní studenti 87
20. Zcela na konec 91

Přílohy I – X, titulní listy učebnic 95

Část I. POHLEDY NA PRVNÍ POLOVINU 20. STOLETÍ

1. Učebnice geometrie před sto lety a nyní

A. Předně to byly učebnice Jana Vojtěcha (1879–1953), které vydávala Jednota českých, resp. československých matematiků a fyziků až do poloviny 20. století:

1. *Geometrie pro IV. třídu reálek*, 1910 – Planimetrie, 1. díl, 94 stran.
2. *Geometrie pro V. třídu reálek*, 1911 – Planimetrie, 2. díl, stránky 1–78, a Stereometrie, stránky 79–180.
3. *Geometrie pro VI. třídu reálek*, 1911 – Trigonometrie, 164 stran.
4. *Geometrie pro VII. třídu reálek*, 1912 – Analytická geometrie, stránky 1–139 [plus začátky počtu infinitesimálního, strany 140–166].

Ke svým učebnicím sestavil J. Vojtěch téměř 1 300 příkladů pro sbírku úloh, kterou sepsal společně s Bohumilem Bydžovským (1880–1969):

5. *Sbírka úloh z matematiky pro vyšší třídy středních škol*, 1912, 232 stran.

B. Za druhé to byly učebnice Josefa Pithardta (1874–1955) a Ladislava Seiferta (1883–1956):

1. *Základy deskriptivní geometrie*, díl I. pro IV. třídu reálek, 1910, 96 stran.
2. *Základy deskriptivní geometrie*, díl II. pro V. třídu reálek, 1910, 118 stran.
3. *Základy deskriptivní geometrie*, díl III. a IV. pro VI. a VII. třídu reálek, 1911, 136 stran.

Všechny tyto učebnice vycházely v dalších vydáních i s případnými úpravami pro různé typy gymnázií, a to až do poloviny 20. století.

Pokud nenapíši jinak, budu se v dalším odvolávat na výše uvedená první vydání pro reálky. Ta byla k dispozici v pozdějších vydáních na začátku mého studia geometrie.

* * *

V části II obsahově srovnávám tyto učebnice s gymnaziálními učebnicemi, které pod patronací Jednoty českých matematiků a fyziků vycházely od devadesátých let 20. století. V říjnu 2006 jsem si z nich opatřil tato vydání:

1. Eva Pomykalová: *Planimetrie*, 4. vyd. 2005, 206 stran (1. vyd. 1993).
2. Eva Pomykalová: *Stereometrie*, 3. vyd. 2002, 223 stran (1. vyd. 1995).
3. Oldřich Odvárko: *Goniometrie*, 3. vyd. 2006, 139 stran (1. vyd. 1994).
4. Milan Kočandrle, Leo Boček: *Analytická geometrie*, 2. vyd. 2000, 220 stran (1. vyd. 1995).

Nepoznamenám-li jinak, budu se odvolávat na tato vydání z let 2005, 2002, 2006 a 2000.

Již z devadesátých let mám dvoudílnou učebnici

5. Ladislav Drs: *Deskriptivní geometrie* I, II, 1994, 1996, 130 a 128 stran.

Je třeba připomenout obsahový vztah matematiky a deskriptivy IV. až VII. třídy bývalých sedmiletých reálek k dnešním vyšším třídám osmiletých gymnázií a třídám čtyřletých gymnázií:

reálky:	kvarta	kvinta	sexta	septima
gymnázia:	kvinta	sexta	septima	oktáva

(tedy např. 3. třídu čtyřletého gymnázia označuji jako septimu). Zhruba řečeno, s touž látkou z geometrie se setkávají nyní na gymnáziu studenti o rok starší a s látkou z deskriptivní geometrie (pokud ji vůbec mají) dokonce o tři roky starší než kdysi na reálce.

Než se dostanu k ohlášenému obsahovému srovnání, dotknu se okolností, které s učebnicemi z let 1910 až 1912 souvisejí.

2. Učebnice druhé poloviny 19. století

Měli J. Vojtěch, J. Pithardt a L. Seifert předchůdce? Odpověď je kladná, některá jejich jména přepisuji z jisté zprávy, o které píši v odd. 5. Vyberu z nich jen dvě. Měl jsem v ruce tyto učebnice:

Václav Jandečka (1820–1898): *Geometria pro vyšší gymnasia*, Praha.

I. *Planimetria*, 4. vyd. 1887, 133 stran.
II. *Stereometria*, 3. vyd. 1880, 80 stran.
III. *Trigonometria*, 3. vyd. 1880, 64 stran.
IV. *Analytická geometria v rovině*, 3. vyd. 1888, 117 stran.

První vydání těchto učebnic jsou z let 1864 až 1867.

Čeněk Jarolímek (1846–1921): *Deskriptivní geometrie pro vyšší školy reálné* I, II, III (pro kvintu až septimu), Jednota českých mathematiků, Praha, 1875, 1876, 1877, 152+166+112 stran.

Autor začal psát tyto učebnice, když mu bylo necelých 30 let. Znám až 2. vydání v jednom svazku 1887, které má 254 stran. V úvodu toto spojení a zejména redukci obsahu Č. Jarolímek odůvodňuje novými osnovami a sníženým počtem hodin deskriptivy. Rovněž jsem prohlédl 5. vydání z roku 1905, které má 231 stran (na titulní stránce je jako autorovo křestní jméno: Vincenc).

Kdybych měl co nejstručněji charakterizovat vztah mezi uvedenými učebnicemi ze tří období o celkové délce téměř 150 let, učinil bych to takto:

V dikci je rozdíl mezi Jandečkovými a Vojtěchovými učebnicemi zřetelně větší než mezi Vojtěchovými a nynějšími. V obsahu je tomu však naopak. Přitom je dobře si uvědomit, že mezi prvními vydáními Jandečkových a Vojtěchových učebnic je něco málo přes čtyřicet let, pak následuje období Vojtěchových knih (1910 až 1950), a zase po nějakých čtyřiceti až pětačtyřiceti letech se zhruba od roku 1995 objevují nynější učebnice. V intervalu téměř 150 roků – od 1. vydání 1. dílu Jandečkovy *Geometrie* až do dneška – jsou Vojtěchovy učebnice vysoko vpředu.

K Jandečkovým knížkám připojím jen několik málo poznámek. Jeho *Planimetria* a 1. díl Vojtěchovy *Planimetrie* si zhruba korespondují, ale 2. díl Vojtěchovy *Planimetrie* nemá analogii u V. Jandečky a bohužel ani u E. Pomykalové. – V. Jandečka i J. Vojtěch ve svých *Stereometriích* dokazují Eulerovu větu o relaci mezi počty vrcholů, hran a stěn jistých polyedrů (V. Jandečka mlčky připouští zřejmě jen konvexní mnohostěny), E. Pomykalová ji pouze sděluje. V. Jandečka i E. Pomykalová považují za samozřejmé, že součet stran konvexního n-hranu je menší než 360°; J. Vojtěch to dokazuje. Všichni tři z toho odvozují, že pravidelných mnohostěnů může být nejvýš pět. Pouze J. Vojtěch ukazuje (konstrukcí), že je jich vskutku pět. Pro ikosaedr má V. Jandečka roku 1880 na straně 37 zřetelnější obrázek než E. Pomykalová v roce 2002 na straně 129. K pravidelným tělesům se vracím v odd. 10. – Jandečkova *Trigonometria* je rozdělena na „ploskou“ (str. 11–44) a sférickou (str. 45–64), která je omezena na řešení sférických trojúhelníků jen z nejzákladnějších vzorců. I to však stačí na stranách 62 až 63 k výpočtu objemu V rovnoběžnostěnu určeného trojhranem se stranami α, β, γ ($\alpha+\beta+\gamma=2\sigma$) a protilehlými hranami a, b, c (srv. J. Vojtěch str. 154, jakási analogie Heronova vzorce):

$$V = 2abc\sqrt{\sin\sigma\sin(\sigma-\alpha)\sin(\sigma-\beta)\sin(\sigma-\gamma)}.$$

J. Vojtěch zachází mnohem dál; např. na stranách 152 až 153 odvozuje L'Huillierův vzorec pro exces sférického trojúhelníka z jeho stran. V Odvárkově *Goniometrii* je trigonometrie velice zredukována, sférická je zcela vynechána. – V analytické geometrii věnuje kuželosečkám V. Jandečka asi polovinu obsahu, J. Vojtěch dokonce asi dvě třetiny, M. Kočandrle a L. Boček asi jednu třetinu. Jak V. Jandečka, tak J. Vojtěch končí tyto partie diskusí obecné kvadratické rovnice

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0;$$

tak daleko M. Kočandrle a L. Boček nezašli. Podobně V. Jandečka a J. Vojtěch dokazují, že tečna elipsy půlí úhel průvodičů, ale dvojice současných autorů jen píše na straně 169, že se to „dá ukázat“ (viz obr. 5.19).

Celkově platí, že tisk jak Jandečkových, tak Vojtěchových učebnic je zřetelně úspornější než učebnic nynějších.

* * *

Podobně je třeba napsat několik orientačních vět o Jarolímkových učebnicích deskriptivy. Jejich 2. vydání z roku 1887 (v jediném svazku) má tyto části:

I. *O bodu, přímce a rovině* (str. 1–91);
II. *O mnohohranech a mnohostěnech* (str. 92–126);
III. *O křivkách* (str. 127–143);
IV. *O křivých plochách* (str. 144–205);
V. *O promítání centrálném a o perspektivě* (str. 206–254).

Byl to důsledek změněných osnov z osmdesátých let 19. století. Páté vydání s 229 stranami je o něco zkráceno: Látka z části III byla buď vynechána nebo zařazena jinam, v části V byla vypuštěna perspektiva. Jen pro hrubou představu, jak daleko V. Jarolímek zacházel: V 2. vydání z roku 1887 je na straně 169 na obrázku 253 sestrojen řez anuloidu rovinou; víme, že je to čára 4. stupně. V 5. vydání 1905 je tento řez vynechán a jako patrně nejsložitější konstrukce je vyrýsován průnik dvou šikmých válců s kruhovými základnami. Tento průnik, o němž zase víme, že je prostorovou kvartikou 1. druhu, je v půdorysu a nárysu velmi názorně schematicky vyznačen. – Grafické provedení obrázků či rysů je v Jarolímkově učebnici příkladné.

Mnohem podrobněji o Jarolímkově působení psal Jaroslav Folta (1933–2011) v článku *Přínos Vincence Jarolímka pro vyučování geometrie na českých středních školách.*[1]

Podrobný výčet českých matematických učebnic druhé poloviny 19. a prvních dvou dekád 20. století uvádí M. Bečvářová v monografii *Česká matematická komunita v letech 1848–1918.*[2]

Pokud by se někdo díval na Jandečkovy učebnice výlučně z dnešního pohledu, měl by dosti příležitostí k nelichotivým poznámkám. Kdo se však poučil, v jakém postavení byli Češi v polovině 19. století v habsburské říši a nespolehl se na její občasnou módní adoraci, uvědomí si, v jak obtížných podmínkách české učebnice v polovině 19. století vznikaly. Už jen vysloveně „přízemní“ okolnost: českých středních škol i jejich žáků bylo tehdy maličko a učebnice pro ně nemohly přinášet nakladatelům zisk.

3. Marchetova reforma a její důsledky

Ke konci prvního desetiletí minulého století, za ministra školství ve vídeňské vládě Gustava Marcheta (1846–1916), byla v Rakousku uskutečněna reforma nižšího a středního školství. V největší stručnosti řečeno, na gymnáziích byly sníženy hodiny klasických jazyků ve prospěch přírodovědných předmětů. To byl tehdy jistě správný krok, takže s vyučovacím obsahem reformy byl vcelku souhlas. Reforma však měla i politickou náplň, která v českých zemích vyvolala nevoli. Hlavně v národnostně smíšených oblastech reforma zvýhodňovala německý živel na úkor českého.[3] Při nynějším častém poukazování (z českých

[1] Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 4(1959), 618–627.

[2] Edice Dějiny matematiky, sv. 34, Matfyzpress, Praha, 2008; viz zvláště kapitolu VII. *Učebnice a překlady*, str. 249–262.

[3] *Československá vlastivěda*, X – *Osvěta*, Praha, 1931, viz str. 62; Josef Šusta: *Světová*

řad) na nesnášenlivou národnostní politiku Československa po roce 1918 je dobře připomenout tehdejší situaci. V roce 1920 při založení Masarykovy univerzity v Brně a Komenského (neúplné) v Bratislavě mělo[4] téměř 9 milionů Čechů a Slováků 5 vysokých škol (bez speciálních), 3 univerzity v Praze, Brně a Bratislavě a 2 techniky v Praze a v Brně, techniku v Brně až od roku 1899; něco přes 3 miliony Němců mělo 3 vysoké školy, univerzitu v Praze a 2 techniky v Praze a v Brně. Poměr 9 : 3 je jistě jiný než (3+2) : (1+2) = 5 : 3. V Čechách a na Moravě zůstal tento stav zachován až do uzavření českých vysokých škol německou okupační mocí v listopadu 1939. Zmíněný poměr byla československá odpověď na silný politický podtón Marchetovy reformy a povolení českých vysokých škol až ve druhé polovině 19. století.

4. Autoři učebnic

Zmíním se stručně o postavení autorů v roce 1910. Jan Vojtěch byl středoškolským profesorem v Brně, později profesorem na technikách v Brně a v Praze. Josef Pithardt působil jako profesor (později ředitel) reálky v Praze a Ladislav Seifert byl rovněž profesorem reálky v Plzni a po založení Masarykovy univerzity v Brně jejím profesorem. Ve školních rocích 1945/46 a 1946/47 jsem navštěvoval jeho přednášky a vykonal jsem u něho I. státní zkoušky z matematiky a deskriptivní geometrie. S J. Vojtěchem jsem se setkal v Praze jenom letmo jednou.

Je třeba si všimnout, že J. Vojtěchovi bylo v roce 1910 jen 31 roků, J. Pithardtovi 36, L. Seifertovi dokonce jen 27. O kvalitě jejich učebnic svědčí, že vydržely až do padesátých let [pak se začaly objevovat učebnice s „krátkým dechem“]. V první polovině čtyřicátých let jsem se z jejich pozdějších vydání učil, a tak z vlastní zkušenosti mohu potvrdit, že byly napsány velmi srozumitelně. V sextě jsem je ovládl všechny. Dnes – již s jakýmsi odstupem od téměř padesáti roků své učitelské činnosti – mám ke všem třem autorům hluboký respekt, že v mladém věku dokázali napsat výborné učebnice. Byly základem mého dalšího studia a neváhám připsat, že jsem jejich autorům vděčen.

Před sto lety napsal učebnice geometrie pro kvartu až septimu reálky jediný autor; nynější učebnice pro kvintu až oktávu jsou prací čtyř autorů. Samozřejmě se objevuje otázka, jak spolupracovali. K ní zatím připojím jen poznámku, která se týká kuželoseček. Jim věnuje autorka nynější učebnice *Stereometrie* (2002) obrázky 159a-d a těchto šest řádků na str. 142:

Řezy rotační válcové plochy rovinami, které nejsou směrové, a řezy rotační plochy kuželové rovinami, které nejsou vrcholové, jsou křivky, kterým souhrnně říkáme kuželosečky: elipsa (obr. 159a,b), *parabola* (obr. 159c) *a hyperbola* (obr. 159d). *Mezi kuželosečky řadíme i kružnici. Problematikou kuželoseček a řezů na válcové a kuželové ploše se podrobně zabývá deskriptivní geometrie. O kuželosečkách uslyšíte i v analytické geometrii.* Tedy až za dva roky v oktávě. Ve

politika v letech 1871–1914, díl V, Praha, 1930, str. 116.

[4] Podle sčítání v únoru 1921 – viz *Československá vlastivěda*, díl V – *Stát*, Praha, 1931, str. 210.

Stereometrii (2002) se však student setkává s elipsou už na stranách 14 a 15. Na straně 14 čte: *Obrysem kružnice … je v daném případě elipsa* (obr. 7b). *Elipsa je rovinná křivka, s níž se v matematice blíže seznámíte v analytické geometrii.* A na straně 15 je pokračování: *Obrysem koule … je elipsa.* Následuje odvolání na obrázek 10, v němž se asi sextán, dosud vůbec necvičený v prostorové představivosti, sotva vyzná a sotva rozliší hlavní kružnici od obrysu koule. Na stranách 134 až 147 je v nákresech mnohokrát elipsa – a student o ní dosud pouze ví, že vzniká průmětem kružnice. Narýsovat ji neumí. To J. Vojtěch byl se svou učebnicí stereometrie pro kvintu v jiné situaci. J. Pithardt a L. Seifert začínají učebnici deskriptivy pro kvartu (!) elipsou. Nyní se její definici dozvědí studenti až v oktávě v *Analytické geometrii* (2000) na straně 170, když výklad o kuželosečkách navazuje na učebnici *Stereometrie* (viz str. 142).

J. Vojtěch se ve svých učebnicích občas odvolává na učebnice pro nižší třídu; vůbec se neodvolává na učebnice Pithardtovy-Seifertovy. Platí to i naopak, ač bych si podobné vzájemné kontakty dokázal představit, zvláště mezi deskriptivou a analytickou geometrií. Stejně tak i v nynějších učebnicích geometrie bych si dokázal představit místa, u nichž upozornění na souvislosti by bylo velmi účelné. Studenti by měli zřetelně vědět, že planimetrie se stereometrií na jedné straně a analytická geometrie na druhé straně jednají o témže předmětu, ale jinými metodami. Poukazuji na začátek odd. 6, na první citaci z Bílkovy recenze Vojtěchových učebnic po úpravách podle osnov z roku 1933.

L. Drs v deskriptivě využívá chvályhodně analytickou geometrii, ale netajím se, že bych rád viděl, kdyby tak byl učinil v míře větší. Deskriptiva se u nás dostala do izolace; z ní jí může pomoci hlavně analytická geometrie. Mohla by vytvořit silnější můstek mezi deskriptivou a počítačovou grafikou.

5. Recenze

Recenze o Vojtěchových učebnicích vyšly brzy v Časopisu pro pěstování matematiky a fysiky. K první učebnici je napsal J. Šrůtek, o druhé až čtvrté Bohuslav Hostinský (1884–1951), tehdy docent matematiky na UK, od 1920 profesor teoretické fyziky na MU v Brně. Jsou autorovi příznivé.[5] Ocituji závěrečný Hostinského odstavec ze strany 599:

Všechny nové učebnice p. dra Vojtěcha jsou pečlivě vypracovány, jsou přesné a stručné, obrazce jsou zřetelné a úhledné; nepochybuji, že lze těchto knih při vyučování dobře použít. Objem jejich vzrostl tím, že p. autor na některých místech překročil minimum požadavků stanovených učební osnovou. Proto nebude snad proti jeho intencím, jestliže se při výkladu ve škole příslušné odstavce podle potřeby zkrátí; to, co se vynechá, nemusí být ztraceno pro žáky, kteří se o geometrii zajímají.

V poslední větě Hostinský vystihl situaci, v níž jsem byl já o nějakých třicet let později. Z vlastní zkušenosti mohu potvrdit, že Vojtěchovy učebnice

[5] Viz Časopis pro pěstování mathematiky a fysiky 40(1911), 353–354, resp. 41(1912), 597–599.

mi otevřely cestu k poznání. Tak třeba jen díky tomu, že jsem brzy přečetl všechno, co J. Vojtěch napsal z planimetrie, jsem mohl s porozuměním číst výbornou knížečku, kterou napsal Josef Holubář (1895–1975), od roku 1945 zemský školní inspektor: *O metodách rovinných konstrukcí* (*Úloha Apolloniova a úlohy příbuzné*), č. 4 sbírky *Cesta k vědění* (Praha, 1940, 110 stran, 2. vydání 1949). Totéž co o Vojtěchových mohu říci o Pithardtových-Seifertových knížkách. S jejich úvodní učebnicí deskriptivy jsem jako vůbec s první „začínal" své seznamování s geometrií. K práci všech tří autorů mohu říci: vcelku odvedli mistrovské dílo, kterému vděčím za základ svého studia.

* * *

Z podnětu Mezinárodní komise pro vyučování matematice vycházely ve Vídni od roku 1910 zprávy o matematické výuce na různých typech rakouských škol. Poslední, 13. svazek těchto zpráv *Die Lehrbücher für Mathematik, Darstellende Geometrie und Physik an den Mittelschulen mit böhmischer Unterrichtssprache* (Wien, 1914, VIII+89 stran) sestavili Karel Vorovka (1879–1929)[6] pro matematiku na stranách 2 až 56; Ladislav Červenka (1874–1947)[7] pro deskriptivní geometrii na stranách 57 až 76; Václav Posejpal (1874–1935)[8] pro matematiku ve vyučování fyzice na stranách 77 až 89. I když je zpráva většinou jen popisná, za přečtení stojí. Z Vorovkovy pasáže je pro nás nejvýznamnější část V. *Die Geometrie auf der Oberstufe*, strany 31 až 46.

Pochvalně píše jak K. Vorovka o Vojtěchových učebnicích, tak L. Červenka o Pithardtových-Seiferových. Na stranách 8 a 9 připojuje K. Vorovka seznam českých učebnic geometrie pro nižší i vyšší stupeň střední školy, a to od začátku šedesátých let 19. století. Pro vyšší třídy jako první české geometrické učebnice připomíná knížky Dominika Ryšavého (1830–1890) – od roku 1862, tři vydání – a Václava Jandečky (od 1864, šest vydání).

6. Učební osnovy z roku 1933

Po vypracování nových učebních osnov v roce 1933 upravil J. Vojtěch podle nich i své učebnice; nebyly to však změny větší. Tak vyšla *Geometrie pro IV. třídu* v 6. vydání, *Geometrie pro V., resp. VI., resp. VII. třídu* ve vydání 6., resp. 5., resp. 5. Recenzi o nich napsal Jaroslav Bílek.[9] V příznivém hodnocení je tento zajímavý moment na straně D322 dole:

Pro tuto (Z. N.: poslední) *třídu žádají také osnovy příležitostné srovnání metody syntetické a analytické. Poukazy na toto srovnání v učebnici jsou nepatrné.*

K tomu se ještě vrátím v části III, odd. 15. Za citaci rovněž stojí závěr recenze:

---

[6] K. Vorovka, původně středoškolský profesor matematiky, od roku 1921 profesor filozofie exaktních věd na UK.

[7] L. Červenka, gymnaziální profesor a později tuším zemský školní inspektor.

[8] V. Posejpal, profesor fyziky, přednášel fyziku na české univerzitě.

[9] Časopis pro pěstování matematiky a fysiky 66(1936/37), D322–D323.

Vojtěchovy učebnice geometrie vyhovují obsahově i metodicky – vždyť vhodnější dosud napsány nebyly – a záleží na učiteli, aby jich dovedl použíti a uplatniti pro správné dosažení cíle vyučování geometrie, jak jej požadují Návrhy učebních osnov.

Podle těchto osnov z roku 1933 postupovali též Karel Šilháček (1882–1957) a Hynek Sechovský (1882–1935) ve své učebnici *Analytická geometrie pro VII. třídu reálek* … , (Praha, Česká grafická unie 1936, 210 stran). Tato učebnice byla schválena ministerským výnosem z listopadu 1935. Opatřil jsem si ji ještě za svého studia v Prostějově. Je značně náročnější než Vojtěchova, vrátím se k ní ještě v odd. 15.

Mezi učebnicemi analytické geometrie K. Šilháčka a H. Sechovského (1936) a M. Kočandrleho a L. Bočka (1. vydání 1995) je časový rozdíl šedesát let, ale obsahový rozdíl je veliký. Naznačí jej tři výňatky:

a) V Šilháčkově a Sechovského knížce na straně 60 čteme: *Všechny kružnice roviny protínají úběžnou přímku v týchž dvou sdružených imaginárních bodech.* O úběžných elementech píší autoři už v odd. 9: *Desarguesův názor* na stranách 21 až 24. Nepracují s homogenními souřadnicemi a vůči jejich výkladu by se dalo leccos říci, avšak pro první seznámení s nevlastními elementy stačí.

b) Vycházejíce z plochy trojúhelníka vyjádřené souřadnicemi jeho vrcholů zavádějí autoři determinanty 2. a 3. stupně, kterých využívají zvláště na straně 128 při diskusi kvadratické rovnice.

c) Skoro jako kuriozita bude znít, že na straně 113, v části ε) je analyticko-goniometrický důkaz Rytzovy konstrukce (k pojmenování viz odd. 18, závěr poznámky [39])). V matematické symbolice by se o uvedených učebnicích analytické geometrie dalo psát

$$\text{1995 Kočandrle-Boček} \subset \text{1912 Vojtěch} \subset \text{1936 Šilháček-Sechovský}$$

s tím, že první inkluse je zřetelně „silnější“ než druhá. Šilháčkova a Sechovského knížka s ministerským schválením je jednoznačnou odpovědí na případnou výtku, že Vojtěchovy učebnice jsou nepřiměřeně náročné.

Kam až K. Šilháček a H. Sechovský zašli, ukazuje tento výňatek: strany 117 až 133 věnují čarám 2. stupně. Na straně 123 uvádějí jejich obecnou rovnici

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0,$$

a hned předvádějí, že otočením souřadnicové soustavy o úhel α definovaný rovnicí

$$\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2a_{12}}{a_{11} - a_{22}}$$

se odstraní člen s xy, což vede k známým rovnicím kuželoseček. Ukazují geometrický význam determinantů ($a_{ij} = a_{ji}$)

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

[o determinantech 2. a 3. stupně píší už na stranách 31 až 36] a nebojí se ani bodů v nekonečnu ani bodů imaginárních. Na stranách 130 až 131 píší o svazku kuželoseček a docházejí až k této větě:

Středy všech kuželoseček leží na kuželosečce „středů".

Jak by dnešní oktaván rozuměl těmto řádkům ze str. 131:

U svazku kružnic jest kuželosečka středů zvrhlá, sestávajíc ze středné a přímky úběžné, zvláště když na předešlé straně je tato definice:

Svazek kuželoseček tvoří všechny kuželosečky, které procházejí týmiž čtyřmi body. A kdyby se namáhal sebevíc, nenakreslí dvě kružnice, u kterých by viděl čtyři jejich průsečíky.

Druhou část Šilháčkovy a Sechovského učebnice tvoří *Počátky počtu infinitesimálního* (str. 145–191). Ve Vojtěchově učebnici z roku 1912 je analogická partie podstatně skromnější na stranách 118 až 147.

* * *

Podle osnov z roku 1933 vyšly též dvě učebnice vydané Jednotou, které napsali Josef Klíma (1887–1943) a Václav Ingriš (1892–1951): *Deskriptivní geometrie pro V. tř. reálek* (1934, 109 stran) a *Deskriptivní geometrie pro VI. a VII. tř. reálek* (1935, 184 stran); v letech 1939 a 1941 vyšly ve 2. vydání. První autor byl profesorem deskriptivní geometrie na brněnské technice, druhý působil – tuším – jako zemský školní inspektor v Brně.

Při jejich knihách mi není jasná tato věc: S jistotou vím, že deskriptivu jsme měli už v kvartě. Klímovy-Ingrišovy učebnice však začínají až kvintou, ačkoliv v jejich svazku pro sextu a septimu na straně 21 čteme, že řez rotačního válce rovinou *má týž výtvarný zákon jako elipsa definovaná ve č t v r t é třídě jako geometrické místo bodů, majících od dvou pevných bodů stálý součet vzdáleností.*

Klímova-Ingrišova *Deskriptiva pro kvintu* má tyto oddíly:

I. *Úvod*, str. 3–10;
II. *Kolmé promítání na jednu průmětnu*, str. 10–40;
III. *Šikmý průmět*, str. 40–44;
IV. *Kolmé promítání na dvě průmětny k sobě kolmé*, str. 44–72;
V. *Zavádění nových průměten*, str. 72–77;
VI. *Rovinné průseky a sítě hranolů a jehlanů*, str. 77–90;
VII. *Osvětlení*, str. 90–109.

Klímova-Ingrišova učebnice pro sextu a septimu se 184 stranami se od Pithardtovy-Seifertovy se 136 stranami v obsahu liší jen nepodstatně. Je o něco podrobnější, ale ani v pořadí probírané látky není významnějších rozdílů. Z aplikací ponechali J. Klíma a V. Ingriš jedině kartografii, Pithardtovo-Seifertovo grafické řešení sférických trojúhelníků správně vynechali. Naopak považuji za nesprávné, že zcela vypustili axonometrii, jíž J. Pithardt a L. Seifert věnovali alespoň strany 108 až 114 s ukázkou technického použití na straně 114. – Řezy kužele rovinami se J. Klíma a V. Ingriš zabývají dosti obsáhle na stranách 35 až 43 včetně Queteletovy-Dandelinovy věty; o ní viz následující oddíly 14-c a 15. – Naprosté unikum je Klímova-Ingrišova knížka svými stránkami 166 a 167, jež ji spojují s výtvarným uměním; viz odd. 17. – Nelíbí se mi však strana 124. Na ní je v obrázku 70 rovinný řez anuloidu, který dokonce i na první pohled připomíná konstrukci, kterou má V. Jarolímek (1887) jako obrázek 253 na straně 169. J. Klíma a V. Ingriš by byli udělali dobře, kdyby byli Jarolímkův rys připomenuli.

7. Kompetence posledních učebnic

Ve vydáních učebnic matematiky pro kvintu až oktávu, které vyšly od roku 2008 – tedy včetně učebnice E. Pomykalové *Stereometrie* (2009) pro sextu – je hned za titulní stránkou list s textem, kterého si nelze nepovšimnout. S nadpisem *Klíčové kompetence a očekávané výstupy učebnice* slibuje studentům, jaké „kompetence“ získají, když se do učebnice zahloubají. Už vidím, jak radostně učebnicí listují a těší se na své „kompetence“. Jsou povzneseni pomyšlením, že budou třeba „kompetentní“ rozeznat, zda je koule správně kulatá a že budou *myslit v evropských a globálních souvislostech.*

Vybavuje se mi příhoda z první poloviny padesátých let. Známý kolega učil na střední škole a její ředitel ho opakovaně a důrazně žádal, aby ve svém předmětu – v matematice – propagoval „výdobytky“ Sovětského svazu. Tak jednou kolega vstoupil do třídy a ze stupínku svým studentům zvěstoval toto stereometrické poselství z nejpokrokovějšího státu: „Ze všech koulí nejkulatější koule jsou v Sovětském svazu“. Dnes jsou nejkulatější koule – doufám – v evropsky globálně pojímaném našem světadílu. Rozdíl je v tom, že před padesáti roky kolega za svou zvěst ze školy letěl, což by ho dnes nepostihlo, ale ředitel opojený „kompetencemi“ by mu nepříjemnosti způsobit mohl. V této souvislosti doporučuji článek ředitele základní Mendelovy školy v Karviné Bohumila Zmrzlíka: *Kompetence pro trh práce* (Kritické listy – čtvrtletník pro kritické myšlení ve školách, č. 34, jaro 2009, str. 53–55). Článek je výtečnou ilustrací k dnešnímu způsobu hlásaného „kritického myšlení ve školách“.

Dotyčné dvě stránky v učebnicích jsou stylizovány toporně a místy téměř shodně. Z toho též soudím, že jejich autory je třeba hledat vysoko, až na ministerstvu.

M. Kočandrle a L. Boček se v 3. vydání své *Analytické geometrie* (2009) zachovali přece jen jinak a zaslouží si proto uznání. Na str. 3 sice v odstavci nadepsaném *Klíčové kompetence a průřezová témata* a v odstavci s nadpisem *Očekávané výstupy* také vyjmenovávají, co všechno budou studenti ovládat po prostudování jejich učebnice, ale činí tak „lidsky“, rozumným způsobem. Zvláštní pochvalu zaslouží oba autoři za to, že neslibují učit své studenty *myslit v evropských a globálních souvislostech.*

Je mi naprosto nesrozumitelné, že jak autoři učebnic, tak všichni, kdo měli s nimi co dělat, souhlasili, aby ony dvě stránky byly uvedeny bez podpisu. Tím formálně mohou – či lépe dokonce musí – být považováni za jejich původce.

Učil jsem rád, a nikdy mě nenapadlo, že vtloukám studentům do hlav „kompetence“ či „myšlení v evropských a globálních souvislostech“; a nikdy bych na takové označení své působnosti nebyl přistoupil.

8. Bývalé reálky

Využiji příležitosti k několika řádkům o reálkách.

Známé politické události z roku 1848 vedly k změnám i ve středním školství. Dosavadní šestileté gymnázium bylo prodlouženo o dva roky a nově bylo umožněno zřizování šestiletých reálek. První v českých zemích byla otevřena v Praze v říjnu 1849. Vzpomíná na ni Vladimír Ryšavý v článku *K stoletému jubileu první reálky v Praze.*[10] Teprve v šedesátých letech však bylo připuštěno české vyučování ve všech třídách, tedy asi pět let po jazykovém průlomu na pražské polytechnice, o který se zasloužil její první profesor deskriptivní geometrie Rudolf Skuherský (1828–1863).[11]

Kolem roku 1910, kdy vznikaly Vojtěchovy a Pithardtovy-Seifertovy učebnice, byly reálky v českých zemích už sedmileté. J. Potůček uvádí ve svém textu *Vývoj vyučování matematice na českých středních školách v období 1900–1945* (díl I., Plzeň, 1992), na straně 11 tyto údaje ze školního roku 1917/18:

gymnázia	37	žáci	9 321
reálná gymnázia	34		9 287
reálky	43		15 131
celkem	114		33 739

Vidíme, že před devadesáti roky byly reálky početnější než gymnázia (později nazývaná klasická) i než reálná gymnázia a

$$\text{(počet žáků reálek)} : \text{(počet žáků gymnázií a reálných gymnázií)} \doteq 5 : 6.$$

Reálky byly tehdy jak co do vlastního počtu, tak co do počtu žáků nejrozšířenějším typem střední školy. Měly tedy prvním i druhým počtem velmi daleko k těm nynějším středním školám či jen třídám, které jsou označovány jako výběrové nebo specializované na matematiku. Vojtěchovy a Pithardtovy-Seifertovy učebnice, nad nimiž by se dnes točila hlava studentům – budoucím středoškolským učitelům matematiky, však vydržely na starých reálkách čtyřicet roků, tj. až do padesátých let.

---

[10] Rozhledy matem.-přírodov. 28(1948-49), 17–19; podstatná část článku je věnována vzniku české matematické terminologie.

[11] Viz Z. Nádeník: *150 let od jmenování prvního profesora pro deskriptivní geometrii na pražské polytechnice Rudolfa Skuherského*, In M. Bečvářová, J. Bečvář (ed.): *Matematika v proměnách věků V*, edice Dějiny matematiky, sv. 33, Matfyzpress, Praha, 2007, 147–151.

Mezi svými materiály jsem nedávno náhodně našel vytržené listy z výročních zpráv čtyř reálek za školní rok 1937/38, bohužel bez poznámek z kterých. Na oněch stránkách jsou témata maturitních písemných prací v šesti septimách z češtiny, francouzštiny, němčiny a deskriptivní geometrie; úlohy z ní reprodukuji přímo (bez přepisu) ze zmíněných listů v příloze I.

* * *

Po kratším studiu na reálných gymnáziích v Hlučíně a v Přerově jsem ve školních letech 1939/40 až 1944/45 pokračoval na reálce v Prostějově. Pokud si pamatuji (a pokud jsem si ověřil ve výše citované Potůčkově brožuře), měli jsme od kvarty týdně 4 hodiny matematiky (včetně 2 hodin geometrie) a 2 až 3 hodiny deskriptivní geometrie (k tomu 2 hodiny týdně kreslení). V roce 1943 byla škola o rok prodloužena; většinu oktávy jsme však byli totálně nasazeni.

Našel jsem několik svých rysů (všechny v Mongeově projekci) z kvinty, sexty a septimy. Tři z nich reprodukuji jako přílohy VIII až X. Na prvním rysu z června 1942 je rovnoběžné osvětlení trojúhelníka a dutého šikmého hranolu s podstavou v pravidelném šestiúhelníku se stíny vlastními i vrženými, ovšem i do dutiny hranolu. Na druhém rysu z června 1943 je osvětlení podobné skupiny, jen hranol je nahrazen dutým šikmým kruhovým válcem. Na třetím rysu z června 1944 je mez vlastního stínu rotačního tělesa, jehož hladký meridián je složen z úsečky a dvou kružnicových oblouků. Je to patrně můj poslední rys ze střední školy. Blíží se tomu, co je ve dvojdílné vysokoškolské učebnici *Deskriptivní geometrie* (Praha, 1932) od Františka Kadeřávka (1885–1961), Josefa Klímy a Josefa Kounovského (1878–1949) v kapitolách XVI. *Rotační plochy* a XVII. *Technické osvětlení.* Sotva kdo by mi uvěřil, s jak prostinkým rýsovadlem jsem tehdy pracoval. V dnešní době rozvinuté počítačové grafiky mohou takovéto rysy vzbuzovat i posměšný úšklebek, ale byla to výchova k pečlivé práci. V této souvislosti doporučuji srovnat co do jemnosti obrázky z Pithardtových-Seifertových učebnic z let 1910 a 1911 (viz třeba příloha III–VI) s obrázky z Drsových knížek.

Ještě když jsem studoval v Prostějově, opatřil jsem si *Sbírku maturitních příkladů z matematiky a deskriptivní geometrie*, kterou sestavil František Tomší (profesor reálky v Kutné Hoře) a vydala Jednota roku 1930.[12] V části A) *Matematika* z celkem 452 úloh patří 275 geometrii; v části B) *Deskriptivní geometrie* je jich 237. Příklady jsou jednodušší i obtížnější. Jako skoro kuriozitu přepíši text úlohy 127 z části II. *Planimetrie*: *Sestrojiti kružnici, která prochází dvěma imaginárními body (stanovenými kružnicí k a přímkou p s ní mimoběžnou) a jedním bodem reálným B.* Řešení je tak na hranici jak učebnic Vojtěchových, tak učebnice Šilháčkovy-Sechovského z roku 1936. V ní je o svazku kružnic něco málo na straně 6, ve Vojtěchově knize o analytické geometrii ještě méně na straně 52, ale ve Vojtěchově *Planimetrii* (2. díl, str. 31) je přece jen několik řádků o sdružených svazcích kružnic.[13] S nimi je řešení jednoduché: Daná kruž-

[12] 75 stran. První vydání: Kutná Hora, 1927, 89 stran.

[13] Víc o nich viz vysokoškolská učebnice *Úvod do analytické geometrie* (Praha, 1923) od Bohumila Bydžovského (1880–1969), str. 137–138 (2. vyd. 1946, 3. vyd. 1956).

nice k a přímka p určují svazek $\mathcal{S}$ kružnic. Zvolíme kružnici k' a ve svazku sdruženém $\mathcal{S}$ a zkonstruujeme chordálu kružnice k' a (nulové kružnice $\equiv$) bodu B (tj. množinu středů kružnic, které procházejíce bodem B kolmo protínají kružnici k'). Průsečík této chordály s centrálou svazku $\mathcal{S}$ je střed hledané kružnice.

Všechny Vojtěchovy a Pithardtovy-Seifertovy učebnice jsem studoval bez obtíží. Ještě nyní, kdy se k nim asi po 65 letech více vracím (ale mnohokrát jsem do nich nahlížel po celý život), znovu obdivuji jejich srozumitelnost. Zvláště si pamatuji na kvartánskou Pithardtovu-Seifertovu učebnici deskriptivní geometrie, která byla na začátku mého „předbíhání“, a hned s kuželosečkami.

Řada mých spolužáků z reálky přešla v říjnu 1945 na brněnskou techniku; poněvadž jsem první čtyři semestry také studoval v Brně, vím, že s matematikou a deskriptivní geometrií neměli těžkosti.

* * *

Hořejší tabulka s číselnými údaji z roku 1918 o gymnáziích svádí k srovnání s nedávným stavem. Využiji *Statistickou ročenku ČR 2006*. Podle oddílu 21-9 na straně 653 maturovalo v roce 2005 na všeobecně vzdělávacích čtyř-, šesti- a osmiletých středních školách celkem 25 310 studentů. V roce 1918 podle Potůčkových údajů bylo v ročnících osmiletých gymnázií průměrně $(9\,321 + 9\,287) : 8 \doteq 2\,300$ studentů a v ročnících sedmiletých reálek průměrně $15\,131 : 7 \doteq 2\,200$ studentů; dohromady asi 4 500. Protože při přechodu z kvarty do kvinty docházelo k významnému úbytku, sotva bylo v roce 1918 více než 4 000 abiturientů. Tedy v rozmezí zhruba 85 let jde o nárůst nejméně šestinásobný.

To má ovšem důsledky. Co bylo možné žádat po studentech před nějakými devadesáti roky, nelze žádat nyní. Znamená to podstatnou redukci učiva. K ní se vyjadřuji v celé části II (A s odd. 9 až 13, B s odd. 14-a-d). Asi bych soudil takto: V geometrických učebnicích E. Pomykalové, O. Odvárka a M. Kočandrleho-L. Bočka došlo ke zkrácením až přílišným. V deskriptivě přistoupil L. Drs k vynecháním zřetelně menším, zvláště když přihlédneme k podstatnému snížení počtu vyučovacích hodin.

Velmi vážná se tak stává situace geometricky talentovaných studentů. Jí patří odd. 19; v něm dvakrát cituji z článku, který otiskl v Lidových novinách Stanislav Komárek.

* * *

Když při známých událostech ze začátku podzimu 1938 musela naše rodina opustit Hlučínsko, dostal můj otec koncem roku místo v Prostějově. V něm bylo klasické gymnázium a reálka (reálné gymnázium bylo dívčí). Nikdy jsem nelitoval, že mě rodiče dali na ni. Pro matematiku mi dala víc, než bych byl mohl patrně získat na klasickém gymnáziu.

Část II. SROVNÁNÍ UČEBNIC Z 10. A 90. LET

A. Vojtěchovy učebnice geometrie

Pokusím se stručně a přehledně zachytit, co při srovnání obsahů geometrických učebnic nynějších s geometrickými učebnicemi sepsanými téměř před sto lety považuji za zisk či ztrátu.

Tak nejdříve pozitiva. Je jím jistě Odvárkovo zkrácení trigonometrie a vypuštění spousty jejích vzorců. Stejně je jím jistě zařazení delší kapitoly o vektorech (str. 22–65) i byť jen nejjednodušších poznatků z prostorové analytické geometrie. Za tento krok si M. Kočandrle a L. Boček zaslouží velké uznání. – Ještě se dotknu (zdánlivé) drobnosti. Při odvození rovnice elipsy nebo hyperboly je třeba umocnění; tím se „cosi přibírá". Autoři na to na stranách 160 a 185 alespoň upozorňují, J. Vojtěch v učebnici pro VII. třídu z roku 1912 na stranách 71 až 72 a 75 přes to mlčky přešel.

Negativ je bohužel víc. Předně úplné vypuštění látky z druhého dílu Vojtěchovy *Planimetrie*, který teprve odkrývá „geometrii". Pak rozsáhlejší škrty v stereometrii (v její učebnici jsou i chyby) a bohužel i v rovinné analytické geometrii vůči Vojtěchově učebnici. Lituji, že zkrácení nebylo využito aspoň k náznakům novějších geometrických partií, jako je teorie konvexních útvarů se svými odnožemi nebo počítačová grafika; nebo naopak poučení o prastarých, ale stále aktuálních vazbách mezi geometrií a výtvarným uměním (viz odd. 17), nebo o takových aplikacích geometrie, které by nebyly tak prostinké (viz odd. 16). – Do matematických učebnic nezapadají nejlépe výroky (jimž se všichni čtyři autoři nevyhnuli) jako „Dá se ukázat, že ..." (*Analytická geometrie* 2000, str. 169) nebo „ ... uvádíme pro vaši informaci ..." (*Goniometrie* 2006, str. 120) nebo sdělování vlastností či výsledků jako nedokázaných „pravd" (*Stereometrie* 2002, např. na stranách 130 či 179). I kdyby k odvození byl zapotřebí limitní přechod, snad lze k němu napsat několik vět.

Kdybych se měl v celku vyjádřit o geometrických učebnicích Vojtěchových a nynějších, mezi jejichž vznikem je asi 85 let, nemohl bych to udělat jinak než takto: Druhé – tedy současné – jsou určeny žákům, kteří jsou mentálně podstatně méně rozvinutí než žáci z 1. poloviny minulého století, tedy z doby Vojtěchových knížek. Samozřejmě vím, že na školách gymnaziálního typu je v posledních letech v každém ročníku mnohem více studentů než před nějakými 100, resp. 60 roky, ale nemohu nevyslovit přesvědčení, že pokles a přizpůsobení učebnic dnešnímu počtu studentů je přílišný.

Ve Vojtěchových učebnicích – ke škodě studentů – není seznam doporučené či rozšiřující literatury. Z nynějších učebnic připojuje takové kratší souhrny jen E. Pomykalová ve své *Planimetrii* a *Stereometrii.* Těmto dvěma oborům se společně též říká elementární geometrie. O ní je až nepřehledná literatura. V každém směru z ní vyniká tato kniha, považovaná za nejlepší učebnici elementární geometrie:

Jacques Hadamard (1865–1963)[14]: *Leçons de Géométrie.* I. *Géométrie plane*, II. *Géométrie dans l'espace*, Paris, 1. vyd. 1898–1901, více než deset francouzských vydání, poslední z roku 1988; poslední anglický překlad: Providence, 2009; 5. vydání ruského překladu: Moskva, 1991–92.

Opisem vyjádřím, co si myslím o Hadamardově učebnici. Literární historik Emile Faquet (1847–1916) věnoval značnou část své knihy *Seizième siècle* (Paris, 1894) eseji nadepsaném *Montaigne.* Končí jej řádky, které parafrázuji takto.

Každý učitel geometrie by měl Hadamardovu učebnici číst dvakrát: na začátku své dráhy, aby věděl, jak má učit, pak k jejímu konci, aby se poučil, jak měl učit.[15]

Nebylo by správné přejít přes tuto okolnost: 3. vydání prvního dílu ruského překladu z roku 1948 i 2. vydání druhého dílu ruského překladu z roku 1951 mají v záhlaví tento údaj: *Pomůcka pro učitele střední školy.* Tyto „pomůcky pro učitele střední školy" vyšly v Moskvě v době, kdy se Sovětský svaz vzpamatovával z druhé světové války a z nedávného hladomoru, tedy za situace, která – co se obtíží týká – je jakousi analogií situace, v níž byla Francie v devadesátých letech 18. století, jak se o tom zmiňuji v odd. 14. I v této kritické době však vychází ruský překlad jedinečné učebnice.[16]

Zajímaly by mě odpovědi na tyto čtyři otázky: Kolik našich studentů učitelství matematiky na středních školách o Hadamardově učebnici

a) vůbec ví,
b) mělo ji v rukou a něco si z ní přečetlo,
c) vyslechlo si komentář svého vysokoškolského učitele k některé partii Hadamardovy učebnice,
d) jak by dopadlo, kdybych je z ní trochu zkoušel.

9. Planimetrie pro kvartu a část kvinty

Jak 1. díl Vojtěchovy *Planimetrie* (1910) pro kvartu, tak *Planimetrie* (2005) E. Pomykalové pro nynější kvintu jsou jen jakýmsi preludiem ke geometrii. Obsah první dosti podrobně vypisuje Lenka Vojteková v článku *Jan Vojtěch a jeho*

---

[14] Připojuji dva životopisy a jeden z mnoha nekrologů:
1. V. Maz'ya – T. Shaposhnikova: *Jacques Hadamard. A Universal Mathematician*, Providence, London, 1998, 574 stran;
2. Е. Полищук – Т. Шапошникова: Жак Адамар 1865–1963, Москва, 1990, 254 stran.
3. S. Mandelbrojt – L. Schwartz: *Jacques Hadamard 1865–1963*, Bulletin of the American Mathematical Society 71(1965), 107–129.

[15] Cituji podle 3. vydání z roku 1912, str. 421: *On devrait les lire tous les deux* [myšleni jsou Flaccus Horatius (65 až 8 př. Kr.) a Michel de Montaigne (1533–1592)] *sérieusement, vers vingt ans, pour apprendre comment il faut prendre la vie; on les lit beaucoup tous les deux vers la fin de la vie, pour apprendre comment on aurait dû vivre.*

[16] První ruské knihy o geometrii jsem koupil až v roce 1948 v Praze. Byly to: Жак Адамар: Элементарная геометрия I: Планиметрия, Москва, 1948; С. П. Фиников: Метод внешних форм Картана в дифференциальной геометрии, Москва, 1948; Д. Гильберт: Основания геометрии, Москва, 1948.

středoškolské učebnice.[17] Pracuje sice s 6. vydáním z roku 1934 upraveným podle osnov z roku 1933, ale rozdíly nejsou podstatné.

Překvapuje, že z *Planimetrie* (2005) vypadl důkaz Heronova vzorce. Autorka jej pouze sděluje spolu s jinými vzorci na str. 66.[18] J. Vojtěch jej dokazuje ve 2. dílu své *Planimetrie* (1911) na stranách 23 až 24 a vzápětí na straně 25 vyjadřuje stranami trojúhelníka i poloměry jeho kružnic vepsané a opsané. Ale v učebnici E. Pomykalové je na straně 73 uvedena – jako obtížnější – tato úloha 1.134: *Určete obsah S lichoběžníku, jsou-li dány jeho základny a, c a ramena b, d.* Na straně 194 je návod k řešení: *Užitím Heronova vzorce určete obsah $\triangle EBC$, kde E je průsečík AB a rovnoběžky s AD vedené bodem C. Odtud určete výšku lichoběžníku;*

$$S = \frac{1}{4(a-c)}\sqrt{(a+b-c+d)(-a+b+c+d)(a-b-c+d)(a+b-c-d)}.$$

Pokud nynější kvintán zná Heronův vzorec, není na úloze nic obtížnějšího; příčí se mi však vyžadovat, aby užil vzorec, který mu byl sdělen, ač jej lze dokázat velmi jednoduše.

Z Heronova vzorce se ihned vyčte podmínka, aby tři body v rovině o daných vzdálenostech ležely na přímce. Přepíše-li jednou student Heronův vzorec ve tvar determinantu, snadno uhodne vyjádření objemu čtyřstěnu z jeho hran, a tedy i podmínku, aby čtyři body v prostoru ležely v rovině, vyjádřenou z jejich šesti vzdáleností. Z této podmínky se lehce odvodí kvadratická rovnice pro poloměr kružnice, která se dotýká tří daných kružnic se známými poloměry a střednými. Tím jsem u algebraického řešení Apolloniovy úlohy, jež v prostorové verzi je geometrickým základem pro GPS; viz odd. 16.

* * *

E. Pomykalová v *Planimetrii* (2005) na straně 29 s obrázkem 38 věnuje kružnicím trojúhelníku připsaným ne víc než šest řádků, navíc označených jako „náročnější". To vzbuzuje pousmání, když si ve Vojtěchově 1. dílu *Planimetrie* (1910) pro kvartu přečtu na stranách 69 až 70 s obrázkem 76, co lze říci o úsecích, které na stranách trojúhelníka určují dotykové body kružnice vepsané a kružnic připsaných. O jedné aplikaci těchto poznatků v jisté důležité větě deskriptivy či stereometrie se zmiňuji v odd. 15.

Podobně na stranách 83 až 85 definuje E. Pomykalová mocnost bodu ke kružnici, ale čtenáři zůstane skryto, k čemu tento geometrický pojem je. Stránky jsou označeny jako „náročnější"; patří studentům, kteří se i na vysoké škole setkají s matematikou. Pasáž je dokladem, jak se časem mění obsah „náročnosti". Když jsem v první polovině čtyřicátých let studoval na prostějovské reálce, tak nevědět, co je chordála či potenční střed znamenalo „letět od tabule".

* * *

[17] In M. Bečvářová, J. Bečvář (ed.): *Matematika v proměnách věků V*, edice Dějiny matematiky, sv. 33, Matfyzpress, Praha, 2007, 152–165.

[18] Děkuji doc. L. Bočkovi, že mě upozornil na mé pochybení, když jsem původně tuto skupinu vzorců přehlédl.

Jak se sestrojí společné tečny dvou kružnic? Tím se E. Pomykalová spolu s jejich stejnolehlostí zabývá na stranách 166 až 171 své *Planimetrie*. Na straně 171 je obrázek 171 s konstrukcí společných tečen dvou kružnic založenou na jejich středu podobnosti; bohužel náčrt je tak zaplněn, až ztrácí na zřetelnosti. Patrně o něco jednodušší je konstrukce využívající dilatace. Tu velmi názorně předvádí J. Vojtěch v 1. dílu své *Planimetrie* (1910) na stranách 58 až 59 s obrázky 66 a 67, které L. Vojteková ve výše citovaném článku reprodukuje na straně 159 s obrázky 2 až 4. Ostatně šikovnější student by konstrukci dilatací mohl vyčíst z obrázku 87 na straně 74. S výhradou, že jsem *Planimetrii* (2005) E. Pomykalové podrobně stránku za stránkou nečetl a mohl jsem se tedy přehlédnout (stalo-li se to, velmi se omlouvám), nezahlédl jsem konstrukci tečen z bodu ke kružnici. Na straně 55 se píše: *Bodem M, který leží vně kružnice, procházejí právě dvě tečny kružnice.* Z připojeného obrázku 66 si každý, kdo ví o Thaletově větě, onu konstrukci ihned odvodí, ale v učebnici je Thaletova věta až na straně 63. Doporučuji k tomu srovnat, jak J. Vojtěch píše o této konstrukci na straně 28 s obrázkem 29 v prvním dílu své *Planimetrie* (1910).

* * *

Z *Planimetrie* E. Pomykalové vypadla také Ptolemaiova věta. Naopak J. Vojtěch ji – a zcela právem – měl za velmi důležitou a uvedl pro ni dokonce tři důkazy: jako první v druhém dílu své *Planimetrie* na straně 26 s obrázkem 129 původní Ptolemaiův[19], pak kruhovou inverzí na stranách 71 až 72 s obrázkem 170; konečně má v *Trigonometrii* (1911) pro sextu na straně 108 důkaz vycházející z kosinové věty a výpočtu úhlopříček. Věta tvoří základ pro rozsáhlou geometrii kružnic a kulových ploch. Je velmi speciálním případem relace, kterou pro tečny čtyř kružnic, které se dotýkají páté kružnice, nalezl John Casey (1820–1891) roku 1866. Z obrácené věty Caseyho lze snadno odvodit rovnici dvou cyklů, které se dotýkají tří cyklů o daných rovnicích – tedy zase algebraické (ale jiné) řešení Apolloniovy úlohy. Přenesení na prostorovou verzi této úlohy se zmíněným už významem pro GPS nečiní potíží.

* * *

Pravidelným mnohoúhelníkům věnuje E. Pomykalová ve své *Planimetrii* (2005) pro kvintu stránky 44 až 46. Na straně 44 bez důkazu sděluje: *Pravidelnému n-úhelníku lze opsat i vepsat kružnici.* J. Votěch v prvním dílu své *Planimetrie* (1910) pro kvartu to na stranách 81 až 82 dokazuje. E. Pomykalová na straně 45 s obrázkem 53 jen popisuje konstrukce stran pravidelného pětiúhelníka a desetiúhelníka; pro jejich odůvodnění odkazuje na *Přehled středoškolské matematiky* (Praha, 1991) Josefa Poláka. S podobným odkazem jsem se ve

[19] Jen na okraj poznamenávám, že původcem věty je Menelaos (kolem 100 po Kr.). Ptolemaios žil o několik desetiletí později, ale jeho *Almagest* s onou větou byl velmi rozšířen jako téměř výhradní učebnice astronomie. Viz např. J. Tropfke: *Geschichte der Elementarmathematik* II, Leipzig, 1903, str. 91.

Vojtěchových a Pithardtových-Seifertových učebnicích nesetkal. J. Vojtěch naopak v druhém dílu *Planimetrie* (1911) na stranách 32 až 34 obě konstrukce podrobně rozebírá a spolu se stranou pravidelného hvězdicovitého desetiúhelníka i propočítává.

Malé zastavení si zaslouží úlohy 1.67 a 1.68 ze strany 46 učebnice E. Pomykalové. V první se má zkusit přibližná (Dürerova) konstrukce pravidelného sedmiúhelníka $a_7 \doteq \frac{1}{2}a_3$, v druhé je s odvoláním na obrázek 54 na straně 45 návod pro *přibližnou konstrukci pravidelného devítiúhelníku vepsaného do kružnice*. Bohužel zcela chybí alespoň náznak vysvětlení, co znamená, že konstrukce pěti- a desetiúhelníka jsou jiné než „přibližné" konstrukce sedmi- a devítiúhelníka. V grafickém vyrýsování student nevidí žádný rozdíl. Pochybuji, že bylo správné na obrázku 53 označit stranu sedmiúhelníka stejně jako pěti- či desetiúhelníka, a tím jen zdůraznit skrytost podstatného rozdílu.

Zajímal by mě původ přibližné konstrukce pravidelného devítiúhelníka, kterou v úloze 1.68 (str. 46) popisuje E. Pomykalová v *Planimetrii* (2005). Pro středový úhel příslušný straně z její konstrukce vychází výborná hodnota $40{,}20°$. Jinou konstrukci uvádí A. Dürer v práci *Underweysung zur messung* ... (Nürnberg, 1525, kniha 2, obr. 18); pochází patrně z gotických stavebních hutí a dává středový úhel asi $41{,}6°$. Velmi jednoduchou konstrukci pravidelného devítiúhelníku popisuje H. Timerding v knize *Zeichnerische Geometrie* (Leipzig, 1928, str. 54, obr. 36). Při dané kružnici vyžaduje sestrojit jen jeden průměr, k němu kolmý poloměr a dva kruhové oblouky; výsledkem je středový úhel asi $41{,}4°$.

* * *

Na stranách 49 až 54 se J. Vojtěch ve druhém dílu své *Planimetrie* (1911) věnuje příčkám trojúhelníků. Začíná dělícím poměrem tří kolineárních bodů a pokračuje větami Menelaovou a Cevovou, včetně jejich obrácení jako podmínek, aby tři body ležely na přímce či aby tři přímky procházely jedním bodem. Z těchto vět a z mocnosti bodu ke kružnici vychází na stranách 51 až 52 Pascalova věta pro šestiúhelník vepsaný do kružnice. Oddíl končí Mongeovou větou – získanou z obrácené věty Menelaovy – vyjadřující kolineárnost tří vnějších středů podobnosti tří kružnic i jednoho vnějšího a dvou vnitřních. Čtyři přímky, na nichž leží tyto trojice bodů, jsou známy jako osy podobnosti tří kružnic. G. Monge (1746–1818) svou větu dokázal ve slavném díle *Géométrie descriptive* (Paris, 1795) na stranách 54 až 55, a to jednoduchou prostorovou úvahou: nad danými třemi kružnicemi jako rovníky opsal koule a sevřel je dvojicemi rovin, které se jich dotýkaly.

* * *

Strany 54 až 69 Vojtěchova druhého dílu *Planimetrie* (1911) pro kvintu patří elementům projektivní geometrie – dvojpoměr čtyř bodů či čtyř přímek a jejich vztah, Desarguesova poučka o homologických trojúhelnících, harmonická čtveřina bodů či přímek až po základní větu o čtyřstranu: na jeho každé úhlopříčce tvoří dva jeho vrcholy a dva průsečíky s ostatními úhlopříčkami harmonickou čtveřinu. Následuje pól a polára kružnice včetně jejich konstrukce, známá incidenční vlastnost a dokonce pomocí polarity i Brianchonova věta o šestiúhelníku kružnici opsaném.

* * *

Konečně na závěrečných stranách 69 až 75 se J. Vojtěch věnuje kruhové inverzi. S ní – jak jsem se už výše zmínil – dokazuje větu Ptolemaiovu, a tím naznačuje, jak lze dokázat i Caseyho větu. Následuje na stranách 73 až 74 v obrázku 173 konstrukce kružnice, která jde daným bodem a dotýká se daných dvou kružnic; na tuto úlohu se jednoduchou dilatací převádí Apolloniův problém.

Až na nepočetné výjimky [jako věty Eukleidovy a Pythagorova na stranách 74 až 80 nynější učebnice, ale už nikoliv jejich aplikace] zasahuje Vojtěchův druhý díl *Planimetrie* (1911) pro kvintu mnohem dál než dnešní učebnice E. Pomykalové pro tutéž třídu. Zřetelně se ukazuje, jak vůči požadavkům na reálkách z první poloviny minulého století poklesly požadavky na dnešních gymnáziích.

Na straně 188 *Planimetrie* E. Pomykalové (2005) je v seznamu literatury uvedena knížka J. Holubáře: *O rovinných konstrukcích odvozených z prostorových útvarů* (Praha, 1948). Student nepoučený o stereometrii Holubářovu dílku asi nebude úplně rozumět. Avšak jistě nebude rozumět Holubářově nejlepší knížce, kterou jsem citoval v odd. 5. Pouze si uvědomí, jak málo mu dala učebnice *Planimetrie* od E. Pomykalové z roku 2005.

10. Stereometrie pro kvintu

Ve Vojtěchově učebnici pro V. třídu z roku 1911 je stereometrie na stranách 77 až 180, tedy asi 100 stran se 118 obrázky. Vlastní text učebnice E. Pomykalové pro sextu z roku 2002 je mezi stranami 8 až 189, tedy asi 180 stran s 212 obrázky – mnoho nechybí do dvojnásobku stránek. To má několik příčin. Předně sazba je řidší a obrázků je rovněž téměř dvojnásobek. Ale nejpodstatnější je něco jiného. Značná počáteční část učebnice E. Pomykalové pro sextu se týká toho, co si kdysi na reálkách odbyli studenti už v kvartě – tedy o dva roky dříve – v deskriptivní geometrii s Pithardtovou-Seifertovou učebnicí z roku 1910.

Autorka *Stereometrie* (2002) píše na stranách 14 a 15 o volném rovnoběžném promítání: *Obrazem kružnice k* (obr. 7a) *je v daném případě elipsa* (obr. 7b). *Elipsa je rovinná křivka, s níž se v matematice blíže seznámíte v analytické geometrii.* Tedy až v oktávě, asi za dva a půl roku. Jak to, že před sto lety mohli J. Pithardt a L. Seifert psát o elipse už studentům na začátku kvarty? A dále na straně 15 čtu: *Obrysem koule . . . je elipsa.* Ta se pak objevuje často na stranách 136 až 147 a studentovi je tak předkládáno, o čem neví, co je. Porozumí sextán, zatím necvičený v rovinném zobrazování prostorových útvarů, obrázku 10 na straně 15 znázorňujícímu kouli vepsanou do krychle? Elipsy – jako průměty koule – na obrázku 10 ze strany 15, na obrázku 148 ze strany 136 a na obrázcích 160 až 167 ze stran 143 až 146 mají osy 28 mm a 25 mm, rozpozná v nich student elipsu, o níž skoro nic neví? Na obrázku 161 ze strany 143, vysvětlujícím zeměpisné souřadnice, jsou – nešikovně – obrazy průvodičů bodu O na rovníku a průsečíku meridiánu m s rovnoběžkou k téměř v jedné přímce. – Budou sextáni na stranách 117 a 118 v zvýrazněném zápisu správně číst řecké ϱ a nikoliv latinské p? A kde na připojených obrázcích 126 a 127 najdou roviny ϱ_1 a ϱ_2, když jsou na nich označeny Q_1 a Q_2? Některé obrázky přecházejí až do nezřetelnosti. Pochybuji, že se i schopný sextán – ale necvičený deskriptivou – zorientuje v obrázku 104 na straně 94, který znázorňuje vzdálenost vrcholu E krychle od roviny, která jdouc úhlopříčkou CF v protější stěně odsekává další vrchol B. Na straně 95 je výzva k řešení úlohy výpočtem. Analytickou geometrií to lze velmi jednoduše, ale se vzdáleností bodu od roviny se studenti seznámí až za dva roky; viz strana 132 v Kočandrlově-Bočkově *Analytické geometrii* (2000).

* * *

Zde je příležitost na tuto vsuvku: S elementárními prostorovými útvary a jejich jednoduchým zobrazováním se kdysi studenti reálek setkávali už v kvartě, tedy ve věku kolem 14 let. Dnes se tak děje – v míře daleko menší – až v sextě ve věku kolem 16 let. Gaspard Monge přednášel v slavné *École normale* chlapcům asi dvanácti- až třináctiletým. Kdo měl v ruce jeho slavné dílo *Géométrie descriptive* z roku 1795, jistě mi potvrdí tyto postřehy: Zkusit vykládat její obsah dnešním studentům by znamenalo zcela pohořet; pochybuji, že by dopadlo dobře, kdybych se ptal dnešních budoucích učitelů geometrie či deskriptivy na některé partie z Mongeových přednášek, i když jejich srozumitelnost je mistrovská. Asi před deseti roky jsem za onemocnělého kolegu suploval na pražské pedagogické fakultě přednášku pro 1. ročník o zobrazovacích metodách, tedy pro studenty – spíše pro studentky – asi devatenáctileté, kteří jen zcela výjimečně (pokud měli na střední škole deskriptivu) byli schopni nakreslit byť jen zcela jednoduchý obrázek. To mi potvrdilo dlouholetou zkušenost z techniky (na níž jsem deskriptivu nikdy nepřednášel): Začínat cvičit prostorovou představivost až ve věku téměř dvaceti roků je beznadějně pozdě.

* * *

Vrátím se k učebnicím. O mimoběžkách se J. Vojtěch v *Stereometrii* (1911) zmiňuje v paragrafu 1 na straně 85, a v paragrafu 3 na straně 93 při konstrukci osy dvou mimoběžek. Dokonce už v úvodu na straně 81 vyslovuje v textu tuto úlohu: *Daným bodem jest vésti přímku, jež protíná dvě dané přímky. Kolik přímek lze vésti tak, aby protínaly tři dané přímky, po dvou mimoběžné?* Odpověď na tuto otázku už vede k jednodílnému hyperboloidu, jehož vznik – ovšem jen v případu, že je rotační – J. Vojtěch popisuje v paragrafu 5 na straně 110 s velmi názorným obrázkem 27. E. Pomykalová se mimoběžkám věnuje na stranách 22 až 23, 48 až 49 a 95 s obrázkem 105 na straně 96, a to o poznání méně. Rozdíl je zřetelný hlavně při ose mimoběžek; její existenci považuje autorka za samozřejmou. Pochybuji, že studentovi bez větší prostorové představivosti bude pro konstrukci osy stačit obrázek 105.

Zase je na místě odbočka. Bývaly doby, kdy se na vysokých i středních školách pracovalo s geometrickými modely. Vymizely po mém soudu ke škodě. Ve známém nakladatelství Vieweg & Sohn (Braunschweig-Wiesbaden) k 200. výročí založení vyšla roku 1986 reprezentativní kniha *Mathematische Modelle*, kterou editoval Gerd Fischer (sv. I – fotografie, sv. II – komentáře). Na stranách 6 a 7 jsou velké barevné fotografie toho síťového modelu pro plynulé vytvoření jednodílného rotačního hyperboloidu (s krajními polohami ve formě válce a kužele), který J. Vojtěch jen popisuje. Pamatuji si na ten model z prostějovské reálky; dodnes si myslím, že nejlepší je vidět takový „přístroj“ skutečný, nikoliv jen promítaný plošně třebas v efektním pohybu.

* * *

V prvním vydání *Stereometrie* z roku 1995 čteme na straně 129: *Pravidelný mnohostěn má shodné stěny, kterými jsou pravidelné n-úhelníky.* To je ovšem pravda, ale jako definice to sloužit nemůže. Kdybych dva shodné čtyřstěny omezené shodnými rovnostrannými trojúhelníky spojil ztotožněním jejich dvou stěn, vznikl by polyedr omezený šesti shodnými pravidelnými trojúhelníky, ale nebyl by pravidelný; ze dvou vrcholů by vycházelo po třech hranách, ze tří po čtyřech. Ve třetím vydání z roku 2002 a ve čtvrtém vydání z roku 2009 je citovaná věta už doplněna požadavkem, že z každého jeho vrcholu vychází stejný počet hran.

Na chvíli se zastavím u definice regulárního polyedru. Z důvodů, které nebudu objasňovat, je výhodné vyslovit ji takto: Předně se definuje regulární (pravidelný) mnohohran požadavkem konvexity a rovnosti stran (tj. úhlů sousedních hran) i úhlů (tj. úhlů sousedních stěn). Pravidelným polyedrem se pak rozumí konvexní mnohostěn, jehož

a) všechny stěny jsou shodné a pravidelné a
b) všechny mnohohrany při vrcholech jsou shodné a pravidelné.

V této formě je definice symetrická vůči stěnám a vrcholům. Lze ji různě zeslabit, ale pak ztrácí onu symetrii či dualitu, která zvlášť vyniká při polopravidelných tělesech, jak Archimedových, tak duálně Archimedových. U prvních se upouští od shodnosti stěn a pravidelnosti mnohohranů při vrcholech, u druhých se upouští od shodnosti mnohohranů a pravidelnosti stěn. [Příkladem k prvním je pravidelný hranol se čtvercovými bočními stěnami (nikoliv krychle); k druhým pak v základnách spojené dvě pyramidy se vzdáleností vrcholů různou od úhlopříčky společné základny.]

* * *

Autorka v citované větě pokračuje takto: *Součet vnitřních úhlů pravidelných n-úhelníků u jednoho vrcholu musí být menší než* 360°. Z tohoto tvrzení autorka známým způsobem přichází k pěti m o ž n o s t e m : při každém vrcholu

a) buď trojúhelníky, a to 3 či 4 či 5 (tedy 4 či 8 či 20 stěn),
b) nebo 3 čtyřúhelníky (tedy 6 stěn),
c) nebo 3 pětiúhelníky (tedy 12 stěn).

Pak končí: *Vnitřní úhly pravidelného 6-úhelníku mají velikost* 120°, *takže žádný pravidelný mnohostěn nemůže mít pravidelné 6-úhelníky jako své stěny. Proto je pravidelných mnohostěnů jen* 5.

Co předposlední citát o součtu stran mnohohranu jen sděluje, J. Vojtěch v učebnici pro kvintu z roku 1911 na straně 128 dokazuje jako poučku 25′ (i když ji označuje jako „vypozorovanou“): *Součet stran mnohohranu je menší než* $4R$. Jistě nám zde schází adjektivum „konvexního“. Je však třeba se vrátit na stranu 126 (začátek paragrafu 9. *Trojhrany a mnohohrany*, který předchází paragrafu 12. *Mnohostěny pravidelné*), na níž J. Vojtěch definuje *vypuklý* (konvexní) mnohohran a píše … *jenom takové mnohohrany budeme vyšetřovati.*

Z citované věty však známým způsobem pouze vychází, že regulárních polyedrů je n e j v ý š pět. V. Jandečka ve druhé polovině 19. století a E. Pomykalová i na začátku 21. století považují za samozřejmé, že je jich pět a konstrukcemi, které by to teprve ukázaly, se vůbec nezabývají. J. Vojtěch roku 1911 má existenci pravidelného čtyřstěnu a šestistěnu za evidentní, stejně tak pravidelného osmistěnu, ač by u něj aspoň krátká zmínka nebyla na škodu. Na stranách 144 až 147 sestrojuje pravidelný dvanáctistěn z krychle a pravidelný dvacetistěn z dvanáctistěnu, a tak dokazuje jejich existenci.[20] Zabývá se u těchto pravidelných těles též symetriemi a jejich řády. Počítá poloměry koulí opsaných a vepsaných, když už dříve dokázal jejich existenci a totožnost jejich středů, což E. Pomykalová sděluje na straně 130 jen jako „pravdu“.

Neodpustím si poznámku ke znázorněním ikosaedru a dodekaedru, která E. Pomykalová uvádí na straně 129 jako obrázek 141c,e. Zvláště první z nich je nevhodný i svou miniaturností; pochybuji, že si student z něj představí pravidelný dvacetistěn (dokázal by stěny na obr. 141c spočítat?). Oba náčrty (spolu s dalšími třemi) reprodukuji v příloze II nahoře a totéž činím na ní uprostřed s kresbami z knihy G. Loria: *Vorlesungen über darstellende Geometrie* II, (Leipzig, Berlin, 1913, str. 24). Z Loriova obrázku přímo bije do očí, jak je ikosaedr stvořen: z pásu deseti rovnostranných shodných trojúhelníků a ze dvou jehlanů pětibokých, jejichž stěny jsou shodné s trojúhelníky z pásu. Autorka se měla podívat do Ottova slovníku naučného XVII (Praha, 1901, str. 479), anebo si vyhledat Leonardovy kresby, na nichž jsou hrany pravidelných těles znázorněny nikoliv ideálními úsečkami, ale tyčemi.

* * *

Rovinným řezům hranolu, jehlanu, válce a kužele se J. Vojtěch nevěnuje, mohl to přenechat deskriptivní geometrii. E. Pomykalová to v 5. kapitole začínající na straně 123 činí v malé míře, a to při kuželu pochybným způsobem.

[20] Už Eukleides tak učinil v 13. knize svých *Základů*. Jinak srv. např. Tiberiu Roman: *Reguläre und halbreguläre Polyeder*, Berlin, 2. vyd. 1987, str. 29–35 (1. vyd. 1968, rumunský originál: Bucureşti, 1965); Hanfried Lenz: *Grundlagen der Elementarmathematik*, Berlin, 3. vyd. 1975, str. 338–338; Ernest Jucovič: *Konvexné mnohosteny*, Bratislava, 1981, str. 125 (jen stručný návod); *Enzyklopädie der Elementarmathematik* IV, Berlin, 1969 (ruský originál: Moskva, 1963, str. 424–426) – zde je velice názorná konstrukce oktaedru.

Píše jen na straně 142: ... *řezy rotační kuželové plochy rovinami, které nejsou vrcholové, jsou křivky, kterým souhrnně říkáme kuželosečky: elipsa, parabola a hyperbola.* Pak odkazuje na geometrii deskriptivní a analytickou, a to je vše. Pochybuji, že každý sextán, téměř netrénovaný v prostorové představivosti, z obrázku 159b-d pochopí, kdy je řez elipsa nebo parabola nebo hyperbola. Zvláště obr. 159d hraničí s nesrozumitelností. L. Drs v 2. dílu své učebnice deskriptivy z roku 1996, (str. 71 s obr. 5.10a,b) velmi srozumitelně znázorňuje řezy kužele rovinami, které se jeví jako přímky.

J. Vojtěch se v paragrafu 10 na stranách 132 až 137 zabývá i sférickou geometrií [která v učebnici E. Pomykalové zcela chybí] až k vyšetření obsahu sférického trojúhelníka z jeho excesu v paragrafu 16 na stranách 171 až 172.

Oddíl o tělesech začíná v učebnici E. Pomykalové na straně 123 a už na straně 127 čteme: *Pro konvexní mnohostěny platí Eulerova věta: Označíme-li s počet stěn, h počet hran, v počet vrcholů konvexního mnohostěnu, pak* $s + v = h + 2$ ... *Na obr. 138* (str. 128) *jsou příklady nekonvexních mnohostěnů.* Jak se to vezme: druhé těleso na obrázku 138 může být i konvexní, znázorňuje krychli s jehlanem (se základnou ve stěně) jak přidaným, tak ubraným, tedy polyedr jak konvexní, tak nekonvexní. [Také první obrázek v řadě nahoře na straně 128 je dvojznačný, může se jevit i jako stěny pravoúhlého trojhranu, k jehož vrcholu je vsunuta krychlička.] Horší však je, že uvedeným indikativem Eulerova věta končí. Naopak J. Vojtěch se k mnohostěnům dostává až na straně 126 v paragrafu 9 a v paragrafu 11 na stranách 137 až 141 se věnuje zcela Eulerově větě a jejímu důkazu založenému na odstranění jedné stěny polyedru a na využití indukce. V první polovině 20. století si aspoň někteří studenti podle J. Vojtěcha důkaz zasloužili nebo na něj stačili, kolem roku 2000 už nikoliv?

* * *

Ještě něco ke Cavalierově principu. E. Pomykalové k jeho vysvětlení ve *Stereometrii* z roku 2002 na straně 150 stačí necelých deset řádků, a pak už jej opakovaně (str. 150–152, 155, 173, 174) používá. J. Vojtěch roku 1911 jeho výkladu věnoval strany 160 a 161, než jej aplikoval. Velmi doporučuji srovnat, co o Cavalierově principu psal kdysi J. Vojtěch kvintánům a nyní píše E. Pomykalová sextánům, tedy o rok starším studentům. V tomto srovnání je i obsaženo, jak autorka a autor – v časovém rozdílu asi 85 let mezi prvními vydáními svých učebnic – usuzovali o úrovni svých žáků.

Na straně 179 autorka *Stereometrie* udává pro anuloid vzorce jeho objemu $V = 2\pi^2 r^2 R$ a jeho povrchu $S = 4\pi^2 Rr$ (označení je udáno v obr. 202). Nebylo by lepší psát $V = \pi r^2 \cdot 2\pi R$ a $S = 2\pi r \cdot 2\pi R$ a připomenout geometrický význam faktorů?[21]

* * *

[21] Jde o Guldinova pravidla, která – neobjevil, ale – dokázal Paul Guldin (1577–1643); znal je totiž už Pappos (druhá polovina 2. století po Kr.).

Nejsem přítelem terminologického purismu. Ovšem rozlišuji mezi kruhem a kružnicí a ovšem lituji, že pro kulovou plochu nemáme jednoslovné vyjádření [koulenice podle analogie kruh – kružnice by znělo směšně], ale kdybych někoho poučoval, že třeba objezd na hlavním dejvickém náměstí není kruhový, ale kružnicový, asi bych se vděku nedočkal. V *Planimetrii* z roku 2005 je na straně 68 dokonce tučně vytištěno „kružnicový oblouk“. Což tak podobně důsledně rozlišovat mezi elipsou jako oblastí a jako křivkou? – Ve *Stereometrii* z roku 2002 na straně 123 čtu hranol, hranolová plocha, hranolový prostor; na straně 125 podobně s jehlanem. Kdyby se takto E. Pomykalová vyjadřovala ve sférické geometrii či při mnohostěnech, tak by slovy přehlušila obsah.

Na stranách 218 až 219 *Stereometrie* z roku 2002 je seznam asi 55 znaků. Nemohu se nadchnout pro takovou důkladnost jako $|\sphericalangle AVB|$. V elementární učebnici by se mělo označeními do krajnosti šetřit, a nikoliv jich vyrobit přes půl sta.

* * *

V učebnici *Stereometrie* E. Pomykalové (1. vyd. 1995, 3. vyd. 2002 i 4. vyd. 2009) je vždy na straně 136 obrázek 149 s průmětem obrysu toru na rovinu, která není kolmá na jeho osu, viz přílohu II (dole vlevo, mírně zvětšeno). Snadno se nahlédne, že tímto průmětem je čára paralelní k elipse, jmenuje se toroida. Označme a hlavní a b vedlejší osu této elipsy E, a d vzdálenost její ekvidistanty. O ní je známo, že je algebraickou čarou 8. stupně s velmi komplikovanými singularitami, reálnými i imaginárními, v konečnu i nekonečnu. Jako algebraická křivka nemůže mít hroty, které jsou jí přisouzeny na zmíněném obrázku. Její tvar, o kterém rozhodují vztahy distance d k polosám a, b elipsy E a poloměrům křivosti $\frac{b^2}{a}$, $\frac{a^2}{b}$ v jejích vrcholech popisují Gomes Teixeira v knize *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches* I (Coïmbre 1908, str. 357 a násl.), anebo Gino Loria v knize *Spezielle algebraische und transzendente ebene Kurven* II (Leipzig, Berlin, 2. vyd. 1911, str. 281 a násl.). V obrázku na příloze II (vlevo dole) je (v cm)

$$a = 1,6\ ; \quad b = 0,8\ ; \quad d = 0,6\ ; \qquad \text{tedy} \qquad b > d > \frac{b^2}{a} = 0,4$$

a vnitřní část ekvidistanty má dva reálné dvojné body na hlavní ose elipsy E a čtyři reálné body vratu, tedy zcela jiný průběh, než ukazuje zmíněný obrázek z učebnice *Stereometrie*. Správný průběh je zachycen na rysu v příloze II vpravo dole, který je převzatý z knihy F. Kadeřávka aj. citované už v odd. 8 (obr. 581 ze str. 546). Na něm K znamená elipsu, E její evolutu, T vnitřní část toroidy. Na rysu je[22]

$$a = 3,7\ ; \quad b = 2,3\ ; \quad d = r = 2\ ; \quad \text{tedy zase} \quad b > d > \frac{b^2}{a} = 1,42\ldots$$

[22] Na obrázku v příloze II dole vpravo je elipsa K půdorysem $\mathcal{K}_1$ kružnice $\mathcal{K}$, na níž jsou středy koulí o poloměru r, pro něž je torus obálkou. Rekonstruovat nárys $\mathcal{K}_2$ kružnice $\mathcal{K}$ je snadné. Když si pomůžeme třetí průmětnou, ihned vidíme, že $\mathcal{K}_2$ je – ovšem zase – elipsa se stejnou hlavní poloosou ${}^2a$ jako $\mathcal{K}_1$ a s vedlejší poloosou ${}^2b$ v druhé odvěsně pravoúhlého trojúhelníka, jehož jedna odvěsna je rovna vedlejší poloose ${}^1b$ elipsy $\mathcal{K}_1$ a přepona je rovna hlavní poloose ${}^1a$ elipsy $\mathcal{K}_1$. Na zmíněném obrázku je (všechno v cm) ${}^1a = 2,8$ a ${}^1b = 1,7$

11. Trigonometrie

Trigonometrie je část středoškolské geometrie, v níž je velké zkrácení zcela patřičné. Přesto bych považoval za oprávněnou otázku, zda v něm Odvárkova *Goniometrie pro septimu* nezachází příliš daleko. Naznačoval by to i rozsah. Zatímco učebnice planimetrie, stereometrie a analytické geometrie z devadesátých let mají všechny rozsah mírně přes 200 stran, goniometrie pouze necelých 140 stran, tedy asi o třetinu méně. Z nich jen 30 stran patří trigonometrii, z toho závěrečných 10 stran příkladům a užití. To vedlo ke zkratce, kterou zvláště v elementární učebnici nerad vidím; cituji ze strany 120 dole a strany 121 nahoře:

Na závěr uvádíme pro vaši informaci ještě tři další vzorce pro obsah trojúhelníku:

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} \qquad \textit{Heronův vzorec}$$

$$S = \varrho s, \qquad\qquad S = \frac{abc}{4r}.$$

Ovšem se mi nelíbí „informace“, zvláště u tak jednoduché věty by měl být důkaz. J. Vojtěch ve své *Planimetrii pro kvintu* z roku 1911 vzorec odvozuje na straně 24 výpočtem výšky pomocí Pythagorovy věty, a pak znovu ve své *Trigonometrii* z roku 1911 na straně 97 ze vzorců pro sinus a kosinus polovičního úhlu vyjádřených stranami ($2s = a + b + c$):

$$S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = ab\sin\frac{\gamma}{2}\cos\frac{\gamma}{2} =$$

$$= ab\sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}}\cdot\sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

Poněvadž dnešní učebnice zmíněné vzorce nemá, je možné zcela jednoduché využití kosinové věty (se znalostí $S = \frac{1}{2}ab\sin\gamma$ ze str. 118):

$$S^2 = \frac{1}{4}a^2b^2\bigl(1-\cos^2\gamma\bigr) = \frac{1}{4}a^2b^2\Bigl[1-\Bigl(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\Bigr)^2\Bigr] =$$

$$= \frac{1}{16}\Bigl[\bigl(2ab\bigr)^2 - \bigl(a^2+b^2-c^2\bigr)^2\Bigr]$$

---

a $r = 1,5$. Tedy ${}^2b^2 = 2,8^2 - 1,7^2 = 4,95$, a tudíž $\frac{{}^2b^2}{{}^2a} = \frac{4,95}{2,8} = 1,7\cdots > 1,5 = r$. Ale při $r < \frac{{}^2b^2}{{}^2a}$ je obrys toru – toroida – ovál; viz citovanou Loriovu knihu – str. 283 nahoře.
V našem případu je celý nárys obrysu viditelný, ale půdorys T obrysu je viditelný jen ve velkém oblouku mezi dvěma body vratu a v druhém oblouku mezi body dvojnými.
Může překvapit, že čára má nárys bez viditelných singularit a půdorys s nimi. Co se děje při promítání prostorových čar, je skoro zapomenuto. Velmi jednoduchý příklad: Čára $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$ je v počátku $t = 0$ regulární; totéž platí o jejím průmětu $x = t$, $y = t^2$ do roviny $z = 0$ (parabola) i o průmětu $x = t$, $z = t^3$ do roviny $y = 0$ (kubická parabola). Ale průmět $y = t^2$, $z = t^3$ do roviny $x = 0$ má v počátku bod vratu. Pro tvary průmětů prostorových čar viz už dříve v tomto oddílu citovanou Fischerovu knihu I, str. 58–59. Patrně první se těmito průměty zabýval Carl von Staudt (1798–1867) v knize *Geometrie der Lage* (Nürnberg, 1847).

a po elementárních rozkladech, které by pro sextána přece neměly být obtíží, získáme ihned známý vzorec.

Goniometrie v Odvárkově učebnici je přibližně stejně rozsáhlá jako ve Vojtěchově, ve které byla doplněna tabulkami a logaritmy, jež nyní ze známých důvodů odpadají. Ale z části III Vojtěchovy učebnice *Trigonometrie rovinná* (str. 68 až 128) zůstalo v Odvárkově knize pouhé torzo, totiž jen věty sinová a kosinová. J. Vojtěch k nim kdysi připojil větu o průmětech [vůbec nejdůležitější větu elementární trigonometrie, ač zcela jednoduchou] a větu tangentovou, též vyjádření sinu, kosinu a tangenty polovičního úhlu trojúhelníka jeho stranami. Podrobně se zabýval řešením trojúhelníka z jeho stran, úhlů i dalších prvků; veden byl ovšem – tehdy správnou, dnes zcela archaickou – snahou přizpůsobit výpočty pro logaritmy. Pozornost věnoval rovněž čtyřúhelníkům a n-úhelníkům. Neváhal podat na straně 108 třetí, trigonometrický důkaz Ptolemaiovy věty (po dvou planimetrických). Paragraf 14 *Užití v praktické geometrii* (str. 113 až 128) včetně krátké zmínky o triangulaci v českých zemích má ovšem nyní už jen historický význam. Podobný osud právem postihl celou část IV. *Trigonometrie sférická* (str. 128 až 160), jejíž důležitost je nyní zúžena na něco z oborů, které se zabývají studiem tvaru a rozměrů Země, a ovšem astronomii. Celkový obsah sférické trigonometrie ve Vojtěchově učebnici lze charakterizovat jejím vyvrcholením – totiž L'Huillierovým vzorcem pro exces sférického trojúhelníka z jeho stran. Lituji, že *sférický exces* je v nynější středoškolské geometrii (též ve stereometrii) neznámé dvousloví, a to v době, kdy v několika vědních oborech – spojených hlavně s pronikáním do kosmu, bude patrně třeba vědět i o jiných geometriích než jen o eukleidovské.

Ale ani J. Vojtěch se nezmínil o vůbec nejzajímavějším poznatku z celé elementární trigonometrie, totiž o Legendreově větě: Malý sférický trojúhelník lze řešit jako rovinný s úhly zmenšenými o třetinu excesu. Věta měla koncem 18. a v první polovině 19. století ohromný význam při konstrukcích rozsáhlých geodetických sítí i v dimenzích kontinentů a při určování tvaru či rozměrů Země.

* * *

Dostala se mi do rukou též učebnice *Matematika pro kvartu. Podobnost a funkce úhlu* autorského kolektivu Jiří Herman, Vítězslava Chrápavá, Eva Jančovičová, Jaromír Šimša (Praha, 1. vyd. 2000, 176 stran). Goniometrii v ní patří strany 67 až 114; je omezena jen na ostrý úhel a nejjednodušší vztahy. O. Odvárko věnoval goniometrickým funkcím a vzorcům (pro obecné úhly) strany 20 až 99, ale trigonometrii trojúhelníku obecného jen strany 100 až 127. Ve dvou třídách – kvartě a septimě – má tak dohromady goniometrie asi čtyřikrát větší rozsah než trigonometrie. Spíš než nad její redukcí se pozastavuji nad tímto poměrem – skoro 4 : 1.

12. Analytická geometrie

Když M. Kočandrle a L. Boček zařadili do své učebnice analytické geometrie pro oktávu delší kapitolu o vektorech (viz úvod A. části II), rozhodli se tak naprosto správně. Jen si neodpustím mírnou pochybnost, jak budou studenti vstřebávat do hlavy definici vektorového součinu ze strany 58. O jeho užitečnosti je sotva přesvědčí vzorec pro objem rovnoběžnostěnu. Asi by bylo pro ně zajímavější a přesvědčivější ukázat jim, jak opakovaným použitím vektorového součinu současná geodézie určuje vzdálenosti třeba i kontinentů. Platí tu něco podobného tomu, co jsem napsal už o Eratosthenově výpočtu zemského poloměru. Tak jako pochopit Eratosthenův postup znamená nezapomenout vztah mezi poloměrem kružnice, jejím obloukem a příslušným mu středovým úhlem, tak porozumět oné geodetické metodě znamená pochopit, jak účelně je vektorový součin ze strany 58 definován pro práci s kolmými vektory. Ovšem křivdili bychom Vojtěchově učebnici analytické geometrie pro septimu, kdybychom jí vytýkali, že v ní vektory nejsou. Před sto lety si teprve prorážely cestu. Ostatně se jich nedotkl ani Bohumil Bydžovský v 1. vydání své vysokoškolské učebnice analytické geometrie z roku 1923 (viz odd. 8) a zařadil je až do značně přepracovaného vydání z roku 1946 (v úvodu na str. 5 je označeno jako druhé, v tiráži jako první) v dílu I, kapitole VIII, na stranách 150 až 166.

Výrazným kladem současné učebnice – též vůči Vojtěchově – je část 4 *Geometrie v prostoru*, strany 106 až 137 a oddíl 5.9 *Kulová plocha*, strany 205 až 209, i když je velmi krátký.

Ale v rovinné analytické geometrii je současná učebnice podstatně chudší než Vojtěchova. Výstižná je má vlastní zkušenost jako septimána: S Vojtěchovou učebnicí jsem ještě před oktávou, v níž jsem byl totálně nasazen, stačil vstřebat podstatnou část v odd. 8 zmíněné knihy B. Bydžovského. Se současnou středoškolskou učebnicí bych to nebyl dokázal.

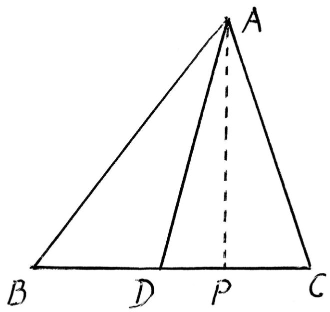
Ještě jedna celková poznámka: Už jsem připomenul, že – co se rozsahu týká – je nynější učebnice goniometrie asi dvěma třetinami každé z učebnic planimetrie, stereometrie a analytické geometrie. Nebylo možné vzít si příklad z Vojtěchovy planimetrie rozdělené do kvarty a části kvinty a analytickou geometrii dát z části už do septimy a pak do celé oktávy? Nemohu si pomoci, ale rozsah (v nynějších učebnicích) analytické geometrie lineárních útvarů v rovině a prostoru, a zvláště kvadratických v rovině se mi zdá příliš skromný jak pro vysokoškolské studium, tak pro učitelské studium matematiky – pro ně pak zvlášť, poněvadž při něm jde o reprodukční proces, v němž by nemělo docházet k tomu, že se z něj stane „klesající posloupnost“.

* * *

Teprve nyní přejdu k neúplnému výčtu, v čem jsou výraznější rozdíly mezi Vojtěchovou (1912) a Kočandrleho-Bočkovou (1995) analytickou geometrií. Zatímco v kapitolách o bodu a přímce jsou nepodstatné, zcela jinak je tomu s kapitolami o kuželosečkách.

Odvození rovnice elipsy začínají J. Vojtěch (na str. 71), M. Kočandrle a L. Boček (na str. 160) stejně, a to známým způsobem: stálý součet průvodičů se analyticky vyjádří dvěma odmocninami. Při jejich odstranění jsou M. Kočandrle a L. Boček opatrnější než J. Vojtěch. Alespoň upozorňují, že umocňováním se něco „přibírá" – což J. Vojtěch úplně přešel – a poznamenávají, že ekvivalenci výchozí rovnice (v níž jsou dvě odmocniny) se známým výsledným tvarem lze ukázat.

V krátkosti popíši, jak J. Hadamard (viz část II.A) v II. dílu své učebnice (7. vyd., Paříž 1932, str. 194–196) odvodil rovnici elipsy, aniž by pracoval s odmocninami a jejich umocněním. Jeho postup mírně modifikuji.



Obr. 1

V trojúhelníku ABC (viz obr. 1) nechť pata P výšky z vrcholu A je mezi vrcholy strany BC a nechť D je libovolný bod na ní mezi body B a P (ostatní případy se odbudou analogicky). Na trojúhelník ABD i trojúhelník ACD uplatníme kosinovou větu s úhlem při vrcholu D:

$$(*)\qquad \overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD}^2 + 2\overline{DP}\cdot\overline{BD},$$

$$\overline{AC}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{CD}^2 - 2\overline{DP}\cdot\overline{CD};$$

je totiž

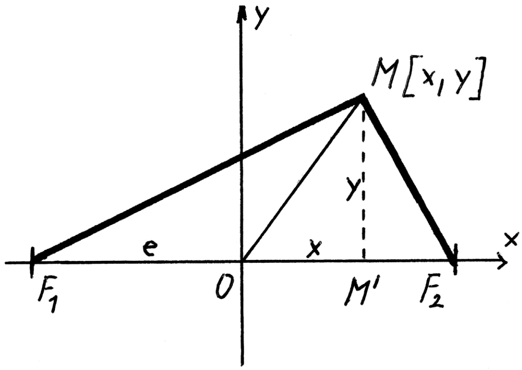
$$\overline{DP} = \overline{AD}\cdot\cos\widehat{ADC} = -\overline{AD}\cdot\cos\widehat{ADB}$$

[Rovnice lze získat i bez kosinové věty zcela elementárně, viz Hadamardovu učebnici citovanou v části II.A; a to I. díl, 12. vyd. 1937, str. 121–122.] Tudíž

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = \overline{BD}^2 - \overline{CD}^2 + 2\overline{BC}\cdot\overline{DP}.$$

Specielně je-li bod D středem strany BC, tak

$$\overline{AB}^2 - \overline{AC}^2 = 2\overline{BC}\cdot\overline{DP}.$$



Obr. 2

Změním označení podle tohoto schematu (viz obr. 1 i obr. 2 přizpůsobený obvyklému označení při elipse):

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & P & \overline{BC} & \overline{DP} \\ M & F_1 & F_2 & O & M' & 2e & x \end{pmatrix}.$$

Pak z

$$(**) \qquad \overline{F_1M}^2 - \overline{F_2M}^2 = 4ex$$

a z

$$\overline{F_1M} + \overline{F_2M} = 2a$$

vychází

$$\overline{F_1M} - \overline{F_2M} = \frac{2ex}{a}.$$

Z posledních dvou rovnic dostaneme

$$\overline{F_1M} = a + \frac{ex}{a}, \qquad \overline{F_2M} = a - \frac{ex}{a}.$$

Tudíž (viz znovu obr. 2)

$$(***) \qquad \begin{aligned} \overline{F_1M}^2 &= \left(a + \frac{ex}{a}\right)^2 = (x+e)^2 + y^2, \\ \overline{F_2M}^2 &= \left(a - \frac{ex}{a}\right)^2 = (x-e)^2 + y^2. \end{aligned}$$

Z každé z těchto rovnic po zcela elementárních úpravách se objeví

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

J. Hadamard na straně 196 citovaného dílu II pak ukazuje, že každý bod, jehož souřadnice vyhovují této rovnici, patří elipse.

K. Šilháček a H. Sechovský ve své učebnici analytické geometrie z roku 1936 (citované už v odd. 6) dospívají na stranách 97 až 99 k rovnicím elipsy a hyperboly způsobem velmi podobným uvedenému Hadamardovu s tím rozdílem, že relaci ($**$) neodvozují jako J. Hadamard geometricky, ale rozdíl čtverců průvodičů v ($**$) vyjádří z rozdílu pravých stran v ($***$).

Ještě se vrátím k rovnicím ($*$). Jestliže první násobíme $\overline{CD}$ a druhou $\overline{BD}$, dostaneme sečtením

$$\overline{AB}^2 \cdot \overline{CD} + \overline{AC}^2 \cdot \overline{BD} = \overline{AD}^2 \cdot \left(\overline{CD} + \overline{BD}\right) + \overline{BD}^2 \cdot \overline{CD} + \overline{CD}^2 \cdot \overline{BD},$$

čili

$$\overline{AB}^2 \cdot \overline{CD} + \overline{AC}^2 \cdot \overline{BD} - \overline{AD}^2 \cdot \overline{BC} = \overline{BC} \cdot \overline{CD} \cdot \overline{DB}.$$

Tuto relaci o obecné transverzále trojúhelníka objevil Mathew Stewart (1717–1785) v práci *Some general theorems of considerable use in the higher parts of Mathematics* (Edinburg, 1746).[23] Stewartova věta vede k řadě výsledků a souvisí s Ptolemaiovou větou, když z jejích čtyř bodů (vrcholů tětivového čtyřúhelníku) jsou tři v přímce.

Stewartovu větu lze dokázat velmi jednoduše i pro libovolnou situaci bodů na základně trojúhelníka. Velmi jednoduše se přesvědčíme o správnosti identity, v níž dochází k cyklické záměně $b \longrightarrow c \longrightarrow d \longrightarrow b$:

$$(a^2 + b^2)(c - d) + (a^2 + c^2)(d - b) + (a^2 + d^2)(b - c) + (b - c)(c - d)(d - b) = 0.$$

Na první pohled je vidět, že členy s a^2 vymizí a ostatní je záležitost jen zcela prostinkého výpočtu. – V obr. 1 položme osu x do základny BC a osa y nechť jde vrcholem A. Přisuďme uvažovaným bodům tyto souřadnice:

$$A[0, a], \quad B[b, 0], \quad C[c, 0], \quad D[d, 0].$$

Pak je $\overline{AB}^2 = a^2 + b^2$ atd. a hořejší identitu ihned přepíšeme ve Stewartovu větu s orientovanými vzdálenostmi na ose $x \equiv BC$.

M. Chasles v *Aperçu historique* ... (1875) popisuje význam i zobecnění Stewartovy věty a na straně 175 říká: *Cette proposition mériterait d'être plus connue q'elle ne nous parait l'être.* Se Stewartovou větou jsem se v české literatuře nesetkal.

$* \quad * \quad *$

[23] Viz Michel Chasles: *Aperçu historique* ... , 2. vyd. Paris, 1875, str. 173 a násl. (1. vyd. Bruxelles, 1837; 3. vyd. Paris, 1989 (faksimile z roku 1837); německý překlad Halle, 1839, str. 170 a násled; ruský překlad: Moskva, 1883); Encyklopädie der math. Wiss. III-1-2, Leipzig, 1914–1931, str. 985 a násl.; Heinrich Weber – Josef Wellstein – Walther Jacobsthal: *Encyklopädie der Elementar-Mathematik II – Elemente der Geometrie*, Leipzig, 2. vyd. 1907, str. 331–332; Jacques Hadamard: *Leçons de Géométrie élémentaire I. Géométrie plane*, Paris, 12. vyd. 1937, str. 122–123.

Při Odvárkově učebnici jsem se dotkl místa, které jsem četl nerad, též v Kočandrlově a Bočkově učebnici (2000) jsem se setkal s podobnými řádky. Na straně 169 nahoře autoři píší (E, F jsou ohniska, X bod elipsy): *Dá se ukázat, že* (tečna elipsy v bodě X) *je osou úhlu přímek EX a FX, a to tou osou, která neprotíná úsečku EF.* Autoři mají ovšem pravdu, lze to nahlédnout dokonce velmi snadno, když si vzpomeneme, k čemu dochází J. Vojtěch v *Analytické geometrii* (1912) na stranách 28 až 29: Když dvě přímky p a q jsou dány normálními rovnicemi (tj. součet čtverců koeficientů při x a y je 1), stačí je sečíst či odečíst, abychom dostali osy úhlů přímek p a q. Vskutku, normální rovnice prodloužených průvodičů bodu $[\xi, \eta]$ elipsy jsou (protože $e < a$, $\xi \leq a$, tak $(e\xi - a^2) \neq 0$)

$$\frac{a\eta}{a^2 - e\xi}x + \frac{a(e-\xi)}{a^2 - e\xi}y - \frac{ae\eta}{a^2 - e\xi} = 0,$$

$$\frac{a\eta}{a^2 + e\xi}x - \frac{a(e+\xi)}{a^2 + e\xi}y + \frac{ae\eta}{a^2 + e\xi} = 0.$$

Jestliže tyto rovnice předně sečteme a odstraníme nenulový faktor $\frac{2a}{a^4 - e^2\xi^2}$, dostaneme

$$a^2\eta x - b^2\xi y + e^2\xi\eta = 0,$$

což je rovnice normály v bodě $[\xi, \eta]$; jestliže od oné první rovnice odečteme onu druhou a krátíme faktorem

$$\frac{2ae\eta}{a^4b^2 - b^2e^2\xi^2}$$

[případ $\eta = 0$ je zcela triviální], dostaneme

$$b^2\xi x + a^2\eta y - a^2b^2 = 0,$$

což je rovnice tečny v bodě $[\xi, \eta]$. Celý postup nevyžaduje nic jiného, než trochu pozornosti při úpravách.

J. Vojtěch dokazuje větu o půlení úhlů průvodičů tečnou a normálou jinak, a sice na straně 88 ze směrnic průvodičů a normály. Pak ještě krátce naznačuje dva další důkazní způsoby a vyzývá čtenáře, aby je sám provedl. Může si to dovolit, protože student jeho *Planimetrie* ví, co je harmonická čtveřice bodů.

* * *

Teprve nyní přejdu k neúplnému výčtu, oč je ve Vojtěchově učebnici analytické geometrie víc než v nynější.

Už na straně 10 je obsah trojúhelníka ze souřadnic jeho vrcholů, tedy též podmínka ze souřadnic tří bodů, aby byly na přímce. Svazku přímek – včetně symbolického zápisu – patří strany 26 až 28; další strany 29 až 31 pak podmínce, aby tři přímky šly týmž bodem.

Paragraf 4 o kružnici po nejelementárnějším začátku pokračuje Apolloniovou kružnicí pro obecný poměr (str. 40), nikoliv jen pro jeho zvláštní hodnotu jako nynější učebnice na straně 143. Rovnici tečny z bodu mimo kružnici odvozuje J. Vojtěch třemi způsoby. Velmi významný rozdíl je v poláře. Zatímco v nynější učebnici je na straně 152 její rovnice jako spojnice dotykových bodů tečen vedených z bodu ke kružnici [vtipnějšího studenta asi napadne, co když je onen bod „uvnitř“ kružnice], J. Vojtěch ukazuje známou základní harmonickou vlastnost pólu a poláry i jejich vzájemnost (str. 47–48). Pak pokračuje mocností bodu ke kružnici, chordálou dvou a potenčním středem tří kružnic, též úhlem dvou kružnic – na tyto věci se už v nynější učebnici nedostalo.

* * *

Největší rozdíl je v partiích o kuželosečkách. V nynější učebnici patří parabole strany 170 až 181, z nich však příklady tvoří téměř polovinu. Autoři se spokojují s rovnicemi paraboly a s rovnicí její tečny. J. Vojtěch ukazuje, že množinou středů kružnic dotýkajících se dané přímky a dané kružnice, je parabola; v nynější učebnici se tomu jen blíží příklad 2 na straně 171. J. Vojtěch věnoval parabole strany 53 až 70, psal o jejích průměrech, dokonce na stranách 60 až 62 počítal Archimédovým způsobem i obsah parabolické úseče. Probral též vlastnosti tečny a normály vůči ose paraboly, tečnu z bodu neležícího na parabole, na stranách 69 až 70 skončil pólem a polárou definovanými zase známou harmonickou vlastností.

Elipsou a hyperbolou se J. Vojtěch zabýval současně (na rozdíl od nynější učebnice) na stranách 71 až 102. Nebudu opakovat, co je analogické k výše uvedenému pro parabolu (včetně pólu a poláry). Ale připomenu: Obě křivky vycházejí ve Vojtěchově učebnici (1912) na stranách 79 až 90 též jako množina středů kružnic, které procházejí daným bodem a dotýkají se dané kružnice. Pasáž končí J. Vojtěch výzvou: *vyšetřujte geometrické místo středů kružnic, jež se dotýkají dvou pevných kružnic.* To je jen velmi jednoduché rozšíření, od kterého už je dokonce blizoučko k řešení Apolloniovy úlohy, jež je pro nynější učebnice vzdálené.[24]

* * *

Zvláštní zmínky si zaslouží Vojtěchův 11. paragraf *Kuželosečky* na stranách 102 až 113. Začíná jejich společnou vrcholovou rovnicí, k níž vede též vyšetření množiny bodů, které mají od daného bodu a dané přímky stálý poměr vzdáleností. Dále si J. Vojtěch na stranách 104 až 108 všímá – je třeba říci, že zcela převážně synteticky, protože prostorovou analytickou geometrii nepřipouští – rovinných řezů rotační kuželové plochy až po známou Queteletovu-Dandelinovu větu o ohniskách řezu (viz odd. 14-c a 15). Následuje na stranách 108 až 113 diskuse rovnice 2. stupně s dvěma proměnnými souřadnicemi až po zjištění, že tato rovnice znamená *kuželosečku vlastní nebo zvrhlou, reální nebo imaginární.* Partie končí cvičeními, z nich cituji třetí:

[24] Podle rejstříků je v nich Apollonius zmíněn čtyřikrát; v *Planimetrii* (2005) na str. 113 při pouhém výčtu jeho úloh a na str. 123 v historických poznámkách o kuželosečkách; v *Analytické geometrii* (2000) na str. 143 při Apolloniově kružnici a na str. 202 zase v historických poznámkách o kuželosečkách.

Dokažte, že rovnice $\frac{x^2}{a^2+\lambda} + \frac{y^2}{b^2+\lambda} = 1$ *značí při stálých hodnotách* a^2, b^2 *a rozmanitých hodnotách* λ *ellipsy a hyperboly s týmiž ohnisky (konfokální); při jaké podmínce pro* λ *značí rovnice ta ellipsu (hyperbolu)? Dokažte že konfokální ellipsa a hyperbola jdoucí týmž bodem protínají se v pravém úhlu (např. křivky* $4x^2 + 9y^2 = 36$, $x^2 - 4y^2 = 4$*).*

A to jsem už u vysokoškolské učebnice B. Bydžovského (o níž jsem se poprvé zmínil v odd. 8), a sice na str. 185 v oddílu VI, paragraf 6 *Kuželosečky konfokální.*

* * *

Na stranách 108 až 113 rozebírá J. Vojtěch (1912) obvyklým způsobem kvadratickou rovnici o dvou proměnných x a y; zapisuje ji

$$(*) \qquad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0.$$

Otočením souřadnicové soustavy o známý úhel se zbavuje členu s xy a na stranách 112 píše:

Jak patrno z rozboru, značí rovnice 2. stupně kuželosečku (ellipsu [kružnici nebo bod], parabolu, hyperbolu); může však značiti také dvě přímky (se protínající, rovnoběžné, splývající) nebo neznačí útvaru reálního. Pravíme, že dvě přímky rovnicí 2. stupně vyjádřené tvoří zvrhlou kuželosečku (degenerovanou); kuželosečka vlastní i zvrhlá může býti imaginární.

Poučka 40. Rovnice 2. stupně o dvou proměnných značí kuželosečku (vlastní nebo zvrhlou, reální nebo imaginární).

Nazýváme proto kuželosečky také křivkami druhého stupně.

Protože obecná rovnice 2. stupně o dvou proměnných má šest koeficientů, z nichž jeden možno (dělením) odstraniti, jest kuželosečka určena pěti podmínkami, které možno převésti na pět rovnic ke stanovení pěti konstant. Při parabole odpadá ještě jeden koeficient, jest tedy parabola určena čtyřmi podmínkami.

Zde to vzal J. Vojtěch dosti zkrátka. Na imaginární body jen letmo narazil při průsečících přímky s kružnicí (str. 42) nebo s parabolou (str. 59) nebo s elipsou a hyperbolou (str. 80), tady najednou *kuželosečka vlastní i zvrhlá může býti imaginární.* I v posledním z citovaných odstavců se J. Vojtěch dopustil neopatrnosti. Kdybych pro kuželosečku zvolil 5 bodů $[x_i, 0]$ (všechna x_i navzájem různá), tak po dosazení do $(*)$ bych dostal pět rovnic pro neznámé koeficienty A, D a F:

$$Ax_1^2 + Dx_1 + F = 0,$$
$$\dots$$
$$Ax_5^2 + Dx_5 + F = 0.$$

Kterékoliv tři z těchto rovnic mají nenulový determinant (Vandermondeův) soustavy, tedy jedině $A = D = F = 0$ a o určenosti kuželosečky nemůže být řeč. V 5. vydání své *Analytické geometrie* (1934) J. Vojtěch na straně 112 tento pasus dosti změnil, ale zase nikoliv tak, aby byl prost námitek. Zde se srážejí dvě snahy: Záměr psát o geometrickém významu rovnice (∗) a záměr napsat to krátce. Doporučuji srovnat, co na stejné téma napsali ve své učebnici K. Šilháček a H. Sechovský (1936) (citovaní v odd. 6) na stranách 123 až 129[25] nebo B. Bydžovský 1923 (citovaný v odd. 8), str. 107 a násl.

∗ ∗ ∗

V Dodatku I. *Jiné křivky* na stranách 115 až 127 si J. Vojtěch všímá kissoidy, lemniskaty, cykloidy a křivek definovaných rovnicemi

$$y = ax^n \qquad \text{nebo} \qquad y = a\sin(bx + c).$$

Pak následuje na stranách 127 až 137 Dodatek II. *Grafické řešení rovnic numerických*; učebnice končí začátky počtu diferenciálního a integrálního.

∗ ∗ ∗

Souhrnně lze říci, že Vojtěchovy učebnice z let 1910 až 1912 obsahují učiva podstatně víc a hlubšího než dosud užívané učebnice z devadesátých let.

13. Vojtěchova sbírka geometrických úloh (1912)

Své učebnice doplnil J. Vojtěch souhrnem téměř 1 300 geometrických příkladů, které spolu s aritmetickými vydala Jednota: B. Bydžovský-J. Vojtěch: *Sbírka úloha z mathematiky pro vyšší třídy středních škol* (Praha, 1912, 232 stran). Později vyšla sbírka znovu v letech 1920, 1924, 1936; dotisk 4. vydání se objevil ještě koncem čtyřicátých let. Jako student jsem používal čtvrté, úplně přepracované vydání, jehož aritmetickou část doplnili ještě Stanislav Teplý a František Vyčichlo.

V původní geometrické Vojtěchově části je v paragrafu 10 – ten patřil k 2. dílu planimetrie zařazenému do 1. pololetí kvinty! – na straně 193 jako příklad 11 uvedena Apolloniova úloha se svými speciálními případy (ve 4. vyd. str. 195, př. 263):

Sestrojte kružnici, jež

a) *prochází daným bodem a dotýká se dané přímky a dané kružnice;*
b) *prochází daným bodem a dotýká se dvou daných kružnic;*
c) *dotýká se dané přímky a dvou daných kružnic;*
d) *dotýká se tří daných kružnic.*

---

[25] Na str. 124 se dopouštějí podobné chyby jako J. Vojtěch, když píší: *Obecná čára 2. stupně jest určena pěti podmínkami, např. pěti body, jimiž má procházeti; toto poslední určení pak jest j e d n o z n a č n é, neboť pro neodvislé konstanty vychází z něho pět lineárních rovnic.*

Ve 4. vydání z roku 1936 je tato skupina úloh ještě doplněna o konstrukci kružnice, která prochází dvěma danými body a dotýká se dané kružnice.

Na stranách 306 až 329 sbírky z roku 1912 jsou ke geometrickým úlohám připojeny výsledky nebo návody. K citovanému příkladu s Apolloniovou úlohou jsou na stranách 310 až 311 tyto pokyny:

a) Budiž daný bod A, dotykový bod hledané kružnice s danou kružnicí B, s přímkou C, průměr dané kružnice k přímce kolmý ať protíná kružnici v D, E, přímku v F; platí $\overline{DA} \cdot \overline{DA'} = \overline{DB} \cdot \overline{DC} = \overline{DE} \cdot \overline{DF}$; tím se nalezne druhý bod A' hledané kružnice.
b) Ze středu podobnosti veďte dvě sečny (jednu dotykovými body žádané kružnice) a přímku daným bodem;
c) Převeďte na a).
d) Převeďte na b) (jedna kružnice se zmenší v bod).

Stejné pokyny jsou i ve 4. vydání z roku 1936 na straně 262.

Opakuji: v 10. až 40. letech to byly úlohy pro kvintány reálky v prvním pololetí. Po svých zkušenostech z pražské pedagogické fakulty pochybuji, že by se s nimi nyní vyrovnali všichni čerství absolventi učitelského studia matematiky pro gymnázia.

Apolloniova úloha má i praktický význam. Pro známý globální poziční systém (GPS) je geometrickým východiskem právě prostorová analogie Apolloniovy úlohy [jako první se o konstrukci koule, která se dotýká čtyř daných koulí, pokusil François Viète (1540–1603) roku 1600 a zahájil tak novověký zájem o Apolloniův problém]. To J. Vojtěch – nejen kolem roku 1910, ale až do konce svého života – nemohl vědět. Když však ve své učebnici pro kvintu (1911) na stranách 73 až 74 sestrojoval inverzí kružnici, která jde daným bodem a dotýká se daných dvou kružnic, tak řešil po dilataci Apolloniovu úlohu. Ta byla geometrickým základem zvukoměřického postupu, který se už koncem 19. století – hlavně ve vojenství – užíval k určení zvukového zdroje. Když při jarní ofenzivě roku 1918 německé dalekonosné dělostřelectvo ostřelovalo Paříž, pokoušela se francouzská strana zjistit postavení německých děl zvukoměřickou úlohou. Z ní se o několik desetiletí později vyvinul zmíněný GPS.

Požadavek analytického řešení obecné Apolloniovy úlohy ve Vojtěchově sbírce nenajdeme, ač ve své učebnici pro ně vše připravil. Důvod je prostý: Řešení je technicky náročnější a vyžaduje delší diskusi, která ústí v různé polohy daných tří kružnic. Jen v paragrafu 35: *Kružnice* jsou na stranách 257 až 258 některé speciální případy Apolloniovy úlohy s konkrétním zadáním: Má se zjistit rovnice kružnice jdoucí:

26. dvěma body a dotýkající se přímky;
27. bodem a dotýkající se dvou přímek;
31. a) dvěma body a dotýkající se kružnice,
    b) bodem a dotýkající se přímky a kružnice.

Při numerickém zadání jsou to ovšem velmi jednoduché úkoly.

J. Vojtěch uvádí také úlohy, které jsou příbuzné Apolloniově. Takovými modifikacemi jsou třeba i úlohy 16 a 17 z paragrafu 10: *Mocnost bodu ke kružnici* ze strany 193 prvního vydání sbírky:

16. Dány jsou tři kružnice; sestrojte
    a) bod, z něhož vedené tečny k daným kružnicím jsou si rovny;
    b) kružnici, jež dané protíná v pravých úhlech.
17. Dokažte, že geometrickým místem středů kružnic, jež půlí dané dvě kružnice, jest přímka souměrně sdružená s chordálou kružnic těch dle osy středné.

Návody k těmto úlohám nejsou, což je v případě úlohy 16 samozřejmé,[26] ale k úloze 17 alespoň letmý pokyn měl být.

Syntetické řešení úlohy 17 jen naznačím. Chordály tří kružnic se protínají v jednom bodě. Jakési obrácení lze vyslovit takto: Z bodu H na chordále $h_{1,2}$ kružnic k_1 a k_2 vedeme jejich sečny s_1 a s_2, které je protínají v bodech A_1, B_1 a A_2, B_2: tyto čtyři body leží na kružnici k. Když zmíněné sečny s_1 a s_2 jdou středy S_1 a S_2 kružnic k_1 a k_2, kružnice k je seče diametrálně. Její střed S je pak průsečík os průměrů A_1B_1 a A_2B_2. Trojúhelníky HS_1S a HS_2S s pravými úhly při S_1 a S_2 mají společnou přeponu HS. Tudíž body H, S_1, S, S_2 leží na kružnici, jejíž střed ovšem půlí její průměr HS a leží na ose její tětivy S_1S_2.

Pochybuji, že v době Vojtěchových učebnic patřilo toto syntetické řešení k lehkým úkolům pro kvintána, který znal 2. díl Vojtěchovy *Planimetrie*. S jistotou mohu říci, že je v nedohlednu pro dnešního kvintána, který četl pouze *Planimetrii* E. Pomykalové. Ví sice, co je mocnost bodu ke kružnici, ale chordála a potenční střed se svými vlastnostmi jsou mu neznámé.

S analytickým řešením je to takto: Bylo by nad možnosti dnešního oktavána poučeného jen Kočandrlovou a Bočkovou *Analytickou geometrií*, protože by nevěděl, jak analyticky vyjádřit mocnost bodu ke kružnici, natož tedy rovnici chordály dvou kružnic. Ale septimán ovládající Vojtěchovu *Analytickou geometrii* by si poradil třeba tímto způsobem:

Souřadnicovou soustavu by zvolil tak, že dané dvě kružnice s poloměry r_1, r_2 a střednou $2M$ mají rovnice

$$x^2 + y^2 - 2Mx + M^2 - r_1^2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 + 2Mx + M^2 - r_2^2 = 0, \qquad M \neq 0.$$

Jejich chordála je $x = \frac{r_2^2 - r_1^2}{4M}$, a tedy přímka k ní souměrná podle osy středné

[26] Hledaný bod z a) a střed hledané kružnice z b) je potenční střed, o kterém J. Vojtěch ve své *Planimetrii*, 2. díl (pro kvintu), píše na str. 31 (aniž by tak pojmenoval průsečík tří chordál tří kružnic) a o kterém se E. Pomykalová v nynější učebnici planimetrie pro kvintu už vůbec nezmiňuje.

(tj. podle osy y) má rovnici

$$(*) \qquad x = \frac{-r_2^2 + r_1^2}{4M}.$$

Chordály hledané kružnice

$$(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2 - \varrho^2 = 0$$

a každé z daných kružnic jsou

$$2(\xi - M)x + 2\eta y + M^2 - r_1^2 - \xi^2 - \eta^2 + \varrho^2 = 0,$$

$$2(\xi + M)x + 2\eta y + M^2 - r_2^2 - \xi^2 - \eta^2 + \varrho^2 = 0.$$

První má jít středem $[M, 0]$, druhá středem $[-M, 0]$ daných kružnic; tedy

$$2M\xi - M^2 - r_1^2 - \xi^2 - \eta^2 + \varrho^2 = 0,$$

$$-2M\xi - M^2 - r_2^2 - \xi^2 - \eta^2 + \varrho^2 = 0.$$

Odečtením by dostal $(*)$ [s ξ místo x], c. b. d.

B. Pithardtovy-Seifertovy učebnice deskriptivní geometrie

Předně musím zdůraznit, že na geodetickém oboru ČVUT, na kterém jsem trvale působil od poloviny roku 1954 do poloviny roku 1997, jsem nikdy neučil deskriptivní geometrii. Nikdy jsem však o ni neztratil zájem.

L. Drs byl v polovině devadesátých let při nových učebnicích geometrie v podstatně obtížnější situaci než autoři geometrických učebnic. Ještě když jsem v první polovině čtyřicátých let studoval na reálce, byla deskriptivní geometrie v kvartě až septimě dvě nebo tři hodiny týdně. L. Drs stál před nesnadnou otázkou, kterou se musili zabývat i jeho předchůdci ve druhé polovině 20. století: Co z dávného cyklu deskriptivní geometrie první poloviny minulého století vybrat a směstnat do celkové, ani ne poloviční dotace? Tuto otázku je třeba mít stále v paměti při posuzování dnešního stavu deskriptivy na střední škole. Je třeba uznat, že L. Drs vybíral dobře; s uvážením, které bylo podtrženo dlouholetou učitelskou zkušeností z přednášek na strojní fakultě ČVUT. Kdybych se měl krátce vyjádřit, pak takto: L. Drsovi se podařilo v úzce vyměřeném čase patrně dosáhnout vysoko. Připouštím, že některá místa II. dílu jeho učebnice nejsou asi pro studenty jednoduchou četbou.

Navíc je třeba upozornit na tento rozdíl: Co dnes – pokud vůbec – slyší studenti z deskriptivní geometrie až v septimě, slyšel jsem kdysi už v kvartě, tedy o tři roky dříve. Několikrát jsem psal či mluvil o pařížské École normale, která vznikla v polovině devadesátých let 18. století, tedy v době, kdy sotva bylo překonáno povstání ve Vendée a na Francii se hrnula koaliční vojska. Našli se však v ní tehdy mužové, kteří mysleli dopředu, vybrali asi 1 200 chlapců a v kasárenském prostředí je vyučovali. Co jsem slyšel v kvartě, slyšeli oni od G. Monge jako dvanácti- až třináctiletí žáčci. Jak dalekosáhlé byly výsledky, ví dobře ten, kdo se seznámil alespoň v hlavních rysech s Francouzskou revolucí a s dějinami matematiky posledního desetiletí osmnáctého a prvních desetiletí devatenáctého století, kdy pokrok v geometrii byl z velké části francouzskou záležitostí.

Někdy v roce 1983 uspořádalo mé pracoviště setkání k jubileu kolegy deskriptiváře, na kterém promluvil i Ladislav Drs. Při svém vystoupení se sám sebe otázal: *Když je to nyní s deskriptivní geometrií neutěšené, nebylo zbytečné, že jsme ji kdysi studovali?* ... a hned pokračoval: *Nebylo, mnoho jsme se naučili, co dnes často i jen podvědomě využíváme.* Otázka i odpověď [po mnoha letech nejsou doslovné, ale jejich smysl jsem zachoval] jsou mi sympatické.

V první polovině osmdesátých let byl děkanem pražské fakulty architektury Jan Sedláček. V období svého úřadu uveřejnil dva články (upozornili mě na ně L. Drs a Bořivoj Kepr), z nichž něco ocituji. První se jmenuje *Rozhovor o architektuře,*[27] druhý *Slovo do diskuse o studiu architektury.*[28] Tak první citát z *Rozhovoru* ... : ... *naše střední školy neučí buď vůbec nebo jen málo deskriptivu. Pro architekturu a stavařinu je to neštěstí, ale je to i chyba obecně.* ... *To, že se deskriptiva nevyučuje, je hřích na lidech.* Druhý citát ze *Slova* ... se týká studentů hlásících se na architekturu: *Zdrcující většině* ... *chybí alespoň minimální průprava v předmětech, které budou nezbytně potřebovat. Mám na mysli například deskriptivní geometrii. Prostorová představivost absolventů středních škol je na úrovni naivity a jejich schopnost vyjádřit graficky určitou prostorovou představu je téměř nulová.*

Oba citáty jsou téměř třicet let staré. Ukazují, jak už v osmdesátých letech byla prostorová představivost studentů špatná. [Ale z druhé strany: Nikdy jsem nesouhlasil s tím, aby si její pěstování vyhrazovala pro sebe pouze deskriptiva.] Naprosto s nimi souhlasím. Vím, jak moji studenti – budoucí geodeti, pro které by prostorová představa Země se satelity kroužícími kolem ní měla být naprostou samozřejmostí – reagovali i na jednoduché úlohy z prostorové geometrie. K tomu malou ilustraci. Někdy v devadesátých letech jsem ve vybrané skupině matematicky disponovaných studentů vyššího ročníku geodetického oboru ČVUT zadal tuto úlohu: Nakreslete obraz krychle, na kterou se díváte ve směru její tělesové úhlopříčky. Jeden student zajásal, úlohu znal. Správně se s ní vyrovnali ještě dva, jakž takž další dva; zbývajících deset bylo bezradných.

Drsovu otázku i s odpovědí bych mohl vyslovit v první osobě singuláru. Doplnil bych ji ještě tak, že rysy, které jsme několikrát za rok musili vypracovat, nás učily přesnosti a pečlivosti. Sotva by mi dnes někdo uvěřil, s jak prostinkými nástroji jsem je před nějakými sedmdesáti roky rýsoval. Anebo by se tomu vysmál s odkazem na moderní počítačovou grafiku, byť by o ní nevěděl víc, než jen její název.

[27] Věda a technika mládeži 34(1980), č. 7, 196–197.

[28] Tvorba – týdeník pro politiku, vědu a kulturu č. 47 z 24. XI. 1982, str. 8.

Má zkušenost z mých studijních a dlouhých učitelských let je tato: Prostorová představivost se musí cvičit od velmi nízkého věku; začínat s ní – jak se nyní většinou dělá – až na vysoké škole, je beznadějně pozdě.

V Drsově otázce a odpovědi a Sedláčkově kritice je skryté varování, které souvisí s počítačovou grafikou. Když k této nové disciplině přistupují starší ročníky, které ještě prošly na střední, případně i vysoké škole průpravou prostorové geometrie, mají pro tvůrčí práci s počítačovou grafikou zcela jistě lepší předpoklady než mladé ročníky, o jejichž schopnosti prostorového chápání se J. Sedláček vyslovuje se zdrcující kritikou, ale které jsou samy k sobě tak nekritické, že se hlásí dokonce na fakultu architektury. Necháme-li stranou výjimečné jedince, které sudičky obdařily výjimečnou imaginací, co stvoří Sedláčkem kritizovaní studenti s počítačovou grafikou jiného než analogii formálních či až triviálních věcí?

Rozdělit středoškolskou deskriptivu na tak zřetelně různé oddíly jako geometrii na planimetrii, stereometrii, trigonometrii a analytickou geometrii nelze. Navíc uspořádání látky v učebnicích Pithardtových a Seifertových a Drsových se místy hodně odlišuje. Zhruba se dá říci, že Drsovy knihy I a II pro septimu a oktávu z let 1994 a 1996 korespondují – při jakýchsi vynechávkách – s Pithardtovými-Seifertovými knihami I a II pro kvartu a kvintu, z menší části i III pro sextu. Jejich díl IV pro septimu je už mimo Drsovy učebnice. Zase to znamená onen posun o dva až tři roky, který se dohání – pokud vůbec – už jen velmi těžko.

14 a)

I. díl Pithardtových-Seifertových Základů deskriptivní geometrie pro IV. třídu reálek (1910)

V tomto I. dílu – pro kvartu reálek! – čeká dnešního čtenáře už na prvních stránkách překvapení. Učebnice začíná na stranách 1 až 21 kuželosečkami: elipsou, hyperbolou a parabolou. S nimi se nynější studenti gymnázií setkají v geometrii až v oktávě v Kočandrlově a Bočkově *Analytické geometrii*; pokud mají deskriptivní geometrii, tak rovněž až v oktávě v II. dílu Drsovy učebnice. Je třeba si uvědomit tento rozdíl či skok: Kdysi už začátek kvarty, dnes až oktáva, to jsou čtyři roky. Tak třeba elementární poznatek – pro teorii kuželoseček významný – o osách průvodičů jako tečně a normále dokazují L. Pithardt a L. Seifert na stranách 4 až 5 zcela jednoduchou planimetrickou úvahou ústící ve zjištění (při elipse), že (jistá) osa průvodičů bodu elipsy má s ní společný právě jen onen bod. O tomto poznatku v nynější oktavánské učebnici analytické geometrie na straně 169 čteme, že *se dá dokázat*; viz k tomu část II, odd. 12 tohoto článku.

Před sto lety – a ovšem ještě v době mého studia kolem roku 1940 – byl prezentován studentům reálky na začátku kvarty takto: Zvolme na elipse s ohnisky F_1 a F_2 bod M různý od hlavního vrcholu. Na průvodiči F_1M prodlouženém za bod M určíme bod Q tak, aby $\overline{MQ} = \overline{MF_2}$; body F_2 a Q jsou symetrické podle vnější osy úhlu průvodičů. Pro libovolný bod $R \neq M$ této osy je

$$\overline{F_1R} + \overline{QR} > \overline{F_1Q} = \overline{F_1M} + \overline{MQ} = \overline{F_1M} + \overline{F_2M},$$

tedy $F_1R + F_2R > 2a$ a bod R nepatří elipse. Osa vnějšího úhlu průvodičů bodu M má tak s elipsou společný právě jen bod M, je tedy v něm její tečnou.

* * *

Rytzovu konstrukci os elipsy z jejích sdružených průměrů uvádějí autoři v učebnici pro kvartu z roku 1910 bez důkazu na stranách 9 a 10 s obrázkem 9; důkaz odsunuli až do začátku dílu III pro sextu z roku 1911 (str. 8 a 9 s obr. 8b). L. Drs tuto často používanou konstrukci synteticky odůvodňuje v II. dílu pro oktávu na stranách 110 až 111 s obrázky 8.3 a 8.4. Při této příležitosti nemohu nepřipomenout analytický důkaz Rytzovy konstrukce, který podávají K. Šilháček a H. Sechovský ve své knížce (zmíněné už v odd. 5) na straně 113. Dostávají se jím až do vysokoškolské učebnice B. Bydžovského (citované v odd. 8), strany 162 až 163.

Kružnice křivosti ve vrcholech elipsy jen popisují jak J. Pithardt a L. Seifert v dílu I na straně 9 s obrázkem 7, a pak znovu v dílu III na straně 7 s obrázkem 5, tak L. Drs v dílu II na stranách 45 až 46 s obrázkem 4.7a. Přitom v této učebnici pro oktávu už by se dal – vzhledem k současně probírané analytické geometrii v matematice – důkaz snadno provést (nebo ovšem i naopak v učebnici analytické geometrie):

Rovnice elipsy v základní poloze a rovnice kružnice s poloměrem ϱ a středem $[a-\varrho, 0]$ jsou

$$bx^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0,$$

$$x^2 + y^2 - 2(a-\varrho)x + a^2 - 2a\varrho = 0.$$

Eliminujeme-li y^2, dostaneme

$$(a^2 - b^2)x^2 - 2a^2(a-\varrho)x + a^4 + a^2b^2 - 2a^3\varrho = 0.$$

Tato rovnice má ovšem kořen a. Žádáme-li, aby i druhý její kořen byl a, vyjádříme to známými požadavky

$$a + a = \frac{2a^2(a-\varrho)}{a^2-b^2} \qquad \text{nebo} \qquad a \cdot a = \frac{a^4 + a^2b^2 - 2a^3\varrho}{a^2-b^2}.$$

V obou případech vychází, co víme: $\varrho = \frac{b^2}{a}$. Tomu by měl každý oktaván rozumět.

J. Pithardt a L. Seifert vyslovují na straně 17 úlohu 24 (tedy v prvním pololetí kvarty): *Dokažte, že konfokální elipsa a hyperbola se sečou ortogonálně.* Škoda že se tato úloha (velmi významná pro fyzikální geodézii) neopakuje v nynější geometrické učebnici pro oktávu, kdy by se velmi průhledně dal využít analytický postup: Konfokální elipsa a hyperbola jsou

$$b^2x^2 + a^2y^2 - a^2b^2 = 0, \qquad \beta^2x^2 - \alpha^2y^2 - \alpha^2\beta^2 = 0, \quad a^2 - b^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Jejich průsečík uvnitř 1. kvadrantu je $[a\alpha C, b\beta C]$; konstanta $C \neq 0$ nás nemusí zajímat. Směrnice tečen elipsy a hyperboly v jejich společném bodě jsou tedy

$$-\frac{\alpha b}{a\beta} \qquad \text{a} \qquad \frac{a\beta}{\alpha b};$$

poněvadž jejich součin je -1, jsme s důkazem hotovi. Tento postup by přece pro oktavána také neměl znamenat obtíž.

Poměrně dosti se J. Pithardt a L. Seifert věnují

- v odd. IV: *Zobrazování těles v poloze otočené* na stranách 55 až 63 průmětům jehlanů, jejichž základny nebo stěny nejsou kolmé k průmětnám (viz zvláště obr. 38 a 39a na str. 60 a 61);
- v odd. V: *O třetí průmětně* na stranách 63 až 74 vhodně volené další průmětně pro získání určitější představy o zobrazovaném tělese;
- v odd. VI: *O šikmém promítání* na stranách 74 až 82 též praktickému použití této projekce – zvláště obrázek 48a,b na stranách 80 a 81 s třemi průměty šestibokého patníku (viz příloha III);
- v odd. VII. *Řezy těles a sítě* ovšem jen přímým hranolům a jehlanům, ale i šikmo zkoseným;
- konečně v odd. VIII: *Osvětlení těles* s obrázky 56 a 57 na stranách 92 a 93 s rovnoběžným osvětlením silničního zábradlí – stále v promítání pravoúhlém a šikmém.

V Drsových učebnicích se studenti setkají s šikmou projekcí až v dílu II na začátku oktávy, tedy více než o tři roky později.

14 b)

II. díl Pithardtových-Seifertových Základů deskriptivní geometrie pro V. třídu reálek (1910)

Učebnice začíná kolmým promítáním na jednu průmětnu i s užitím afinity (str. 1–19) a pokračuje kolmým promítáním na dvě průmětny (str. 19–77). Činí tak v rozsahu, který se v nejvýznamnějších obrysech shoduje s obsáhlou 5. částí Drsovy učebnice I pro septimu (str. 43–128). J. Pithardt a L. Seifert zacházejí v Mongeově projekci o něco dál a jsou o něco stručnější než L. Drs. Mohli si to dovolit, protože měli za sebou už svůj předmět v kvartě, kdežto L. Drs musel vycházet z úplného začátku. K dispozici měl jen něco ze stereometrie ze sexty, z čehož nejdůležitější věci připomíná v krátkém přehledu (str. 9–15). Zřetelnější rozdíl je v konstrukcích zářezů dvou obrazců (v podstatě průseku dvou rovin) a hlavně jejich osvětlení, které L. Drs oprávněně vypustil (ač to byla kdysi výborná cvičení pro řezy těles rovinami). Správné bylo i vynechání dnes už téměř kuriozní partie o grafickém řešení sférických trojúhelníků. Doporučuji prohlédnout si Drsovy strany 93 a 94 s obrázky 5.59 a 5.60 a srovnat je s Pithardtovými-Seifertovými stranami 43 až 47 s obrázky 25 až 28 s rovnoběžným osvětlením. Rozhodování, co je v zásecích vidět a co nikoliv a které strany trojúhelníků jsou či nejsou osvětlené, bývalo výborným cvičením prostorové představivosti; pamatuji si, že pro některé spolužáky to nebyly nejsnadnější věci.

Druhá část učebnice je aplikací Mongeovy metody. Má tři oddíly. V prvním, *Zobrazování těles hranatých a jejich osvětlení* (str. 78–87), zvláště vynikají obrázky 52 a 53 na stranách 80 a 81 s vlastním i vrženým stínem hranolu a jehlanu; totéž platí o obrázcích reprodukovaných v příloze IV. Nejvíc bych však pochválil strany 84 až 86 s nárysy a půdorysy pravidelného dvanáctistěnu a dvacetistěnu. Něco podobného v Drsově učebnici není, a tak jsou dnešní studenti pro poučení o pravidelných tělesech odkázáni na necelé stránky 129 až 130 v učebnici E. Pomykalové o stereometrii pro sextu, o nichž jsem už psal. Tu je zase příležitost ukázat rozdíl: pravidelné polyedry kdysi dosti obsáhle ve Vojtěchových a v Pithardtových-Seifertových učebnicích pro kvintu, nyní jedině v učebnici E. Pomykalové pro sextu na několika řádcích.

Odd. druhý nadepisují J. Pithardt a L. Seifert *Průseky přímek a rovin s tělesy hranatými* (str. 87–100). Zvláště vyjímám třeba obrázek 65 na straně 98 s rovinným řezem šikmého jehlanu se základnou v pravidelném šestiúhelníku včetně konstrukce sítě vniklého komolého jehlanu. Tak daleko L. Drs ve svém I. dílu s řezy jehlanu na stranách 102 až 106 nezachází. Bohužel, obrázek 5.70 na straně 106 nevyšel zrovna nejzřetelněji. Za výrazné pozitivum je však třeba v Drsově učebnici považovat začátky axonometrie, v nichž průmět jehlanu v obrázku 5.68b na straně 103 vedle Mongeovy projekce rovinného řezu téhož jehlanu na straně 102 v obrázku 5.68a je velmi instruktivním srovnáním obou způsobů zobrazení. Konečně v odd. třetím, *Vzájemné průseky hranatých těles* (str. 101–117), probírají autoři nejen průniky samy, ale i jejich osvětlení včetně osvětlení dutin.

14 c)

III. díl Pithardtových-Seifertových Základů deskriptivní geometrie pro VI. třídu reálek (1911)

Část první, *O průmětech kružnice* (str. 1–12), koresponduje s Drsovou učebnicí II pro oktávu, a to s částí odd. 4: *Pravoúhlý průmět kružnice* (strany 41 až 50). Autoři učebnice z roku 1911 se k obvyklé osové rovnici elipsy vůbec nedostávají, L. Drs (1996) na straně 41 naopak definuje elipsu její rovnicí a s jejími vlastnostmi se jen odvolává na analytickou geometrii.[29] Kružnice křivosti ve vrcholech jak J. Pithardt a L. Seifert na straně 7 (s odkazem na díl I, paragraf 1, obrázek 7), tak L. Drs na stranách 45 až 46 uvádějí bez důkazu; M. Kočandrle a L. Boček se o nich ve své *Analytické geometrii* vůbec nezmiňují, ač by to mohli udělat snadno, jak jsem už ukázal v odd. a). Vcelku je tato část J. Pithardta a L. Seiferta, doplňující některé jen sdělené konstrukce na začátku I. dílu 1910 pro kvartu, bohatší než u L. Drse.

---

[29] Patrně toto odvolání přichází dříve, než elipsa v Kočandrlově a Bočkově učebnici *Analytická geometrie* (2000) pro oktávu.

Část druhá, *Zobrazování válců a kuželů* (str. 13–24), odpovídá v II. dílu Drsovy učebnice části oddílu 3. *Válec, kužel a koule* (str. 28–35) pro rotační těleso a části odd. 7. *Kosý kruhový válec a kužel* (str. 95–108). J. Pithardt a L. Seifert pracují i s šikmou projekcí.

Část třetí (str. 24–54) patří *rovinným řezům válcové či kuželové plochy*, a to jak rotační, tak šikmé. Zde je rozdíl vůči Drsově učebnici II velmi zřetelný. Nejvýraznější je při známém tvrzení o ohnisku rovinného řezu rotační kuželové (válcové) plochy, které ve dvacátých letech 19. století dokázali Adolf Quetelet (1796–1874) a Germinal Dandelin (1794–1847). J. Pithardt a L. Seifert (1911) na straně 31 tuto větu dokazují, a pak aplikují na řezy eliptický, parabolický a hyperbolický. Zvláště je třeba upozornit na zobrazení eliptického řezu na straně 29 v obrázku 25a (s pláštěm seříznutého kužele v obrázku 25b) nebo na straně 30 v obrázku 26b, parabolického řezu na straně 32 v obrázku 27 a hyperbolického řezu na straně 35 v obrázku 29. U L. Drse II (1996) věta sama – a tedy i její konstruktivní aplikace – chybí. Stejně tak chybí protějšek k tomu, co J. Pithardt a L. Seifert dále připomínají: dělící poměr, harmonickou čtveřinu a její invariantnost vůči centrální projekci, harmonické vlastnosti jak úplného čtyřstranu, tak kuželoseček – aniž by se jakkoliv zmiňovali o Vojtěchově učebnici s 2. dílem planimetrie pro kvintu (viz odd. 9). Následují rovinné řezy šikmého kužele: eliptický na straně 43 s obrázkem 40 (využití kolineace je na něm zcela zřetelné), parabolický na straně 46 s obrázkem 43 a konečně hyperbolický řez na straně 48 s obrázkem 45, který je (na rozdíl od předcházejících) nepříliš zřetelný pro zhuštěnost v důsledku nevhodné volby sečné roviny. Jako aplikace následuje osvětlení jednak kužele a přímky na stranách 50 a 53 s obrázky 47 a 49, jednak dutého válce na straně 51 v obrázku 48.

Část čtvrtá (str. 54–62) patří *průnikům kvadratických ploch válcových a kuželových.* Na straně 56 si autoři mohli odpustit tuto větu: *Průsečná křivka je stupně čtvrtého, neboť s rovinou má nejvýše čtyři body společné, t. j. společné body obou kuželoseček, v nichž tato rovina plochy seče.* Sextán jí mohl sotva porozumět, natož aby ji analyzoval a kriticky posoudil. Stejně tak pochybuji, že z obrázku 51 si sextán učinil správnou představu o průniku kuželové plochy s dotýkající se plochou válcovou v bodě M. Rovněž větou ze strany 57: *V bodě M sekou se dvě větve křivky; M jest bod dvojný* směřovali autoři hodně nad hlavy sextánů. Řez je zkonstruován pomocným systémem vhodně volených sečných rovin, tedy způsobem, který zavedl už G. Monge ve své knize *Géométrie descriptive* (Paris, 1795, část III). Část končí osvětlením dvou válců na straně 60 v obrázku 55 a válce s kuželem na straně 61 v obrázku 56. Také tato část nemá analogii v Drsově učebnici II z roku 1996.

Část pátá, *O ploše kulové* (str. 63–75), má až překvapivě malý protějšek v Drsově učebnici II, totiž strany 36 až 40 s konstrukcí tečné roviny a určením středu i poloměru. Naopak J. Pithardt a L. Seifert pracují i s válcovou či kuželovou plochou kulové ploše opsanou a využívají jich při osvětlení koule rovnoběžném i středovém (viz přílohu V s obrázky 60, 61 ze stran 68 a 70). Část končí průniky kulové plochy jednak zase s plochou kulovou, jednak s kuželovou. Pro konstrukci průniků je vesměs aplikována Mongeova metoda pomocné soustavy rovin či ploch.

14 d)

IV. díl Pithardtových-Seifertových Základů deskriptivní geometrie pro VII. třídu reálek (1911)

Odhlédne-li se od téměř nepatrných výjimek, lze říci, že v Drsově učebnici pro oktávu nemá tento díl protějšek.

Část šestá, *Plochy rotační* (str. 76–92), se zabývá rovinami tečnými i průsečnými kvadratických i obecnějších rotačních ploch, tečnými rovinami daným bodem nebo danou přímkou nebo s ní rovnoběžnými. Poslední paragraf 27, *Dodatek o obecnějších plochách rotačních* (str. 90–92), už přechází ve II. díl známé vysokoškolské učebnice F. Kadeřávka, J. Klímy a J. Kounovského citované v odd. 7. V pozdějších vydáních J. Pithardt a L. Seifert vypustili obrázek 73 ze strany 90 s šikmým průmětem ovoidu (hladké konvexní spojení polokoule a poloelipsoidu) a nahradili jej obrázkem s osvětlením složitější rotační nádoby, jejíž meridián tvoří úsečky a kruhové oblouky.

Část sedmá, *Základy perspektivy* (str. 92–108), podává nejdůležitější pravidla tohoto zobrazení. Ve 4. vydání z roku 1933, které vlastním, je tato část značně přepracovaná; víc je přidáno, než je ubráno. Za nemalé autorské pochybení považuji naprostou absenci odkazu na výtvarné umění, kterou však zmírňovalo, že jsme o perspektivě v malířství i v architektuře byli opakovaně poučováni v kreslení, které jsme měli ve všech třídách.

Část osmá, *Základy pravoúhlé axonometrie* (str. 108–114), je sice krátká, ale ve svém nemalém obsahu velmi výkladově úsporná. Jistě nelze považovat za začátečnický obrázek 86 na straně 114 s *axonometrickým obrazem pravoúhlého osmibokého kolena, jehož podstavní shodné (pravidelné) osmiúhelníky jsou v rovinách XY a YZ, a se sestrojením jeho osvětlení.*

Část devátá, *Grafické řešení sférických trojúhelníků* (str. 115–119), se mně už jako studentovi zdála zbytečná, zvláště po sférické trigonometrii ve Vojtěchově učebnici pro sextu; dnes to ovšem už dávno vím s jistotou.

Část desátá, *Dodatky* (str. 120–128), je nesourodá: Paragraf 38. *Průměty zeměkoule* (viz výše uvedená poznámka k obrázku 8.6a,b na straně 114 II. dílu Drsovy učebnice). Paragraf 39. *Sestrojování slunečních hodin* (tyto dva paragrafy jsem nikdy nepřečetl). Paragraf 40. *O šroubovici* (str. 127–128), který jsem strávil. Paragraf 41. *Cvičení k opakování.* Paragraf 42. *Stručný přehled historický* (str. 131–134). U něj se pozastavím s několika poznámkami.

Leonardo da Vinci a Albrecht Dürer na straně 131 jsou ovšem jména nejznámější, ale měli velmi významné předchůdce v italské renesanci.[30] – Zmínka

[30] Za všechny alespoň: Filippo Brunelleschi (1376–1446) a Piero della Francesca (kolem 1415 až 1492).

o Amédée Frézierovi (Strasbourg, 1682–1773) je raritou i ve vysokoškolských učebnicích deskriptivní geometrie; Strasbourg s ním souvisí jen tak, že v něm ve třicátých letech 18. století vyšlo jeho třísvazkové dílo, jehož první kniha je jakousi předchůdkyní, i když zdaleka ne dostatečnou, k Mongeově knize *Géométrie descriptive* z roku 1795. – Victor Poncelet naznačil význam duality ve svém známém spisu *Traité des propriétés projectives* … (Paris, 1822, 2. vyd. 1865); ale její obecný princip vyslovil až Joseph-Diez Gergonne (1771–1859; autor syntetického řešení (z roku 1816) Apolloniovy úlohy o kružnici dotýkající se tří daných kružnic). – Autoři úplně přehlédli Rudolfa Skuherského (zmínka o něm je už v odd. 8). – Paragraf 42 končí seznamem doporučené literatury. J. Pithardt a L. Seifert uvádějí osm autorů, jejichž učebnice přihlížejí k technické praxi, a pak čtyři autory děl, která *po stránce vědecké jsou vysoce cenná*: Jan Sobotka: *Deskriptivní geometrie promítání parallelního*, Praha, 1906; Wilhelm Fiedler: *Die darstellende Geometrie in organischer Verbindung mit der Geometrie der Lage*, I-II-III, Leipzig, 3. vydání 1885–1888; Theodor Reye: *Geometrie der Lage*, I-II-III, Leipzig, 1899–1910; Gino Loria: *Lezioni della geometria descrittiva* (německý překlad – 1. díl 1907, 2. díl 1913 – jsem zmínil už v odd. 10). – Zkouším si představit, jak by se dnes tvářili gymnazisté na takový seznam německých a francouzských vysokoškolských učebnic.

V Drsových učebnicích zcela chybí doporučená literatura k dalšímu studiu; snad aspoň mohla být připomenuta dvoudílná učebnice F. Kadeřávka, J. Klímy a J. Kounovského (viz odd. 8). Též proto, aby si oktaváni uvědomili, jak mnoho jim ještě schází, aby svazkům „tří K" porozuměli.

V I. dílu své deskriptivy píše L. Drs na stranách 9 a 10, na jak málo ji omezil, jak se vyvíjela a jaký je její vztah k počítačové grafice; správně zdůrazňuje nový význam, který jí deskriptiva získává.

* * *

Samostatnou sbírku příkladů J. Pithardt a L. Seifert ke svým učebnicím nepřipojili. Vynahradili ji příklady uváděnými za jednotlivými partiemi. Celkový počet těchto úloh přesahuje 550.

V. Jarolímek kdysi ke svým učebnicím (viz odd. 2) sestavil *Sbírku úloh z deskriptivní geometrie pro vyšší školy reálné*.[31] Třetí vydání – které jsem měl v ruce – je až z roku 1904; má 100 stran, na nichž je celkem asi 1 200 úloh. V odd. XXIX na stranách 76 až 98 jsou deskriptivní maturitní úlohy z let 1890 až 1903 na sedmnácti českých reálkách (tedy něco mezi třetinou a polovinou celkového počtu tehdejších reálek, viz odd. 8). Odd. XXX na stranách 98 až 100 obsahuje souhrn obtížnějších úloh. S velmi mnoha úlohami z těchto dvou posledních oddílů by si dnešní gymnazista vůbec neporadil; nezmohl by ani prostorové řešení úlohy, natož pak její grafické řešení. Zvláště úlohy z odd. XXX jsou poučením, na jaké úrovni se kdysi předpokládala intelektuální úroveň studentů.

[31] První vydání vyšlo roku 1873 pod názvem *Deskriptivní geometrie v úlohách pro vyšší školy reálné* ještě před vydáním jeho učebnic; druhé vydání je z roku 1880.

Část III. SPOLEČNÉ VLASTNOSTI UČEBNIC Z 10. A 90. LET

15. Metody syntetické a analytické

Neměly by se zcela oddělovat, ale naopak prolínat. To je velmi starý požadavek. Mnoho „ryzích“ deskriptivářů by bylo překvapeno, kdyby nahlédli do Mongeovy *Géométrie descriptive* (1795) a na straně 16 si o své vědě a analýze – tehdy nazývané algebrou – přečetli: ... *ces deux sciences ont les rapports les plus intimes* ... i s následujícím odůvodněním. Téměř celé 19. století Mongeovo tvrzení popřelo. Až Gino Loria (1862–1953) ve svých knihách o deskriptivní geometrii[32] se k němu vrátil a patrně nejvýrazněji je zdůraznil Heinrich Brauner v knize *Lehrbuch der konstruktiven Geometrie* (Wien, 1986).

Zmínku o 19. století maličko doplním. Čelným představitelem deskriptivní geometrie bez analytických metod (naopak spojené se syntetickou projektivní geometrií) byl Wilhelm Fiedler (1832–1912), který v letech 1864–1867 působil na pražské polytechnice, pak na technice v Curychu. Současně však překládal do němčiny a upravoval knihy o analytické geometrii, jejichž autorem byl George Salmon (1819–1904); vycházely dlouhá desetiletí a učily se na nich generace geometrů. Jejich jednodušším partiím je poplatná i známá vysokoškolská učebnice Bohumila Bydžovského, o které jsem se zmínil v odd. 8. Jakýmsi českým protějškem k W. Fiedlerovi je Jan Sobotka (1862–1931). Jeho *Deskriptivní geometrie promítání parallelního* (Praha, 1906)[33] je absolutně bez analytické geometrie; Sobotka však jako jediný v české literatuře studoval rozsáhle analyticky fokální vytváření kvadrik a Apolloniův problém.

O spojení analytické geometrie s deskriptivní jsem poprvé – pokud se pamatuji – mluvil v polovině šedesátých let na katedře matematiky stavební fakulty ČVUT.[34] Tyto náměty však narážely na tuhý odpor, jak ukazuje tato příhoda: K Medkově žádosti jsem v Čeladné roku 1986 na semináři odborné skupiny pro deskriptivní geometrii Jednoty československých matematiků a fyziků mluvil o její budoucnosti a odůvodňoval jsem účelnost jejího spojení s analytickou geometrií, hlavně vzhledem k počítačové grafice; zvláště jsem připomínal shodný názor profesorů deskriptivní geometrie Karla Havlíčka (1913–1983), Václava Medka (1923–1992) a Aloise Urbana (1912–1981). Příští seminář skupiny v Zadově roku 1987 začal požadavkem kolegů z olomoucké univerzity – tlumočil jej František Machala – aby skupina odmítla spojení analytické a deskriptivní či

[32] Citovány jsou už v odd. 10 a 14-d; viz zvláště předmluvy k oběma dílům a díl I, odd. 50, str. 85–88: *Schlusswort über die Wechselhilfe zwischen der darstellenden und der elementaren analytischen Geometrie*; úvodní delší odstavec lze nazvat parafrází Mongeova hořejšího vyjádření z jeho *Géométrie descriptive*.

[33] Podrobně jsem o ní psal v článku *O Sobotkově učebnici Deskriptivní geometrie promítání parallelního*, in M. Kašparová, Z. Nádeník: *Jan Sobotka (1862–1931)*, edice Dějiny matematiky, sv. 44, Matfyzpress, Praha, 2010, 250 stran, 85–126.

[34] Viz závěry mého článku *O geometrii a deskriptivní geometrii*, Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 17(1972), 187–193, a mé recenze knihy Václav Medek, Jozef Zámožík: *Konštruktívna geometria pre technikov* (Bratislava, 1978) v Časopise pro pěstování matematiky 105(1980), 82–83.

syntetické metody, které jsem doporučoval před rokem. Reagoval jsem krátce: „Dojde-li k tomu, budu si vědět rady.“ Skončilo to, jak je u nás zvykem – nijak.

V odd. 6 jsem se už zmínil, že osnovy z roku 1933 požadovaly v nejvyšší třídě příležitostné srovnání metody analytické se syntetickou. J. Bílek, recenzent nově upravených Vojtěchových učebnic (viz odd. 6), právem poznamenal, že tento požadavek byl splněn jen nepatrně. Podobně by bylo možné vyjádřit se o nynějších učebnicích.

Za velmi vhodný objekt pro srovnání či kombinaci obou metod považuji jednak ověření, že nedegenerovaným rovinným řezem rotačního kužele je elipsa nebo parabola nebo hyperbola, jednak známou Queteletovu-Dandelinovu větu (lépe: její speciální případ) o ohniscích těchto řezů jako dotykových bodů sečné roviny s koulemi kuželi vepsanými. K obojímu něco napíši.

Tak předně: Dnešní učebnice se těchto vět úplně zřekly. Se syntetickým důkazem je uvádějí J. Pithardt a L. Seifert III (1911) v učebnici deskriptivy pro sextu na stranách 30 až 36 (nevyhýbají se ani kolineaci) a s převážně syntetickým odůvodněním též J. Vojtěch v učebnici analytické geometrie pro septimu (1912) na stranách 104 až 108. V Šilháčkově-Sechovského knize (citované už v odd. 6) je odd. 42: *Kuželosečky, rozbor stereometrický* (strany 117 až 119) a odd. 43: *Kuželosečky, rozbor analytický* (str. 119 až 123). V odd. 42 jaksi obracejí Queteletovu-Dandelinovu větu (viz též obrázky 64 až 66 na stranách 117 až 119), když pomocí dotykových bodů sečné roviny s koulemi vepsanými do kužele dokazují, že řezem – za známých okolností – je elipsa nebo parabola nebo hyperbola. V odd. 43 si velmi vypomáhají trigonometrií a píší: *Uvedené důkazy ovšem nejsou ryze analytické; chceme-li takový mít, musíme znát rovnici rotační plochy kuželové a rovnici sečné roviny.*

První z citovaných vět dokazuje L. Drs ve druhém dílu své učebnice deskriptivy z roku 1996 jen v některých případech (viz str. 72, 6.–7. řádek shora). Co říkají E. Pomykalová ve *Stereometrii* (2002) na straně 142 s obrázkem 159, resp. M. Kočandrle a L. Boček v *Analytické geometrii* (2000) na straně 138 s obrázkem 5.1, nelze považovat za více než informace. Dosti pochybuji, že jejich obrázky parabolického a hyperbolického řezu jsou studentům snadno srozumitelné.

Přitom zvláště M. Kočandrle a L. Boček měli k důkazu blízko díky tomu, že se zabývali elementy prostorové analytické geometrie.

Zvolme vrchol kuželové plochy v bodě $V[0,0,v>0]$ osy z a řídící kružnici (o poloměru r a středu v počátku) v souřadnicové rovině (x,y); bod na ní je $[r\cos t, r\sin t, 0]$, $t \in \langle 0, 2\pi)$. Parametrické rovnice spojnice tohoto bodu s vrcholem V jsou

$$x = \lambda r\cos t, \qquad y = \lambda r\sin t, \qquad z = (1-\lambda)v. \tag{1}$$

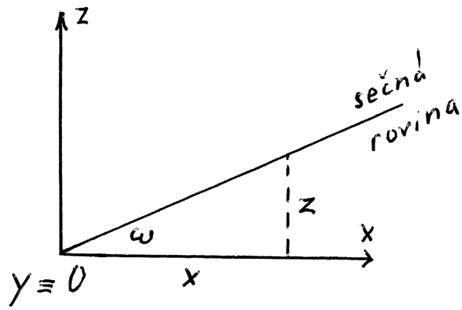
To je všechno v rámci učebnice, teprve nyní jej málo překročím. Jestliže z (1) vyloučíme λ, dostaneme

$$x^2 + y^2 - \frac{r^2}{v^2}(z-v)^2 = 0 \tag{2}$$

jako rovnici našeho kužele. Sečnou rovinu vedeme osou y:

$$z = (\operatorname{tg}\omega)x \qquad \left(0 \le \omega < \frac{\pi}{2}\right).$$

V této rovině zavedeme novou souřadnicovou soustavu tak, že $\eta \equiv y$ a počátek splývá s původním (viz obr. 3, pohled ve směru osy $y \equiv \eta$).



Obr. 3

Transformační rovnice mezi oběma soustavami jsou

$$x = \xi\cos\omega, \qquad y = \eta, \qquad z = \xi\sin\omega.$$

Po dosazení do (2) a malé úpravě vyjde jako rovnice řezu v sečné rovině

$$\left[\cos^2\omega - \frac{r^2}{v^2}\sin^2\omega\right]\xi^2 + \eta^2 + 2\left[\frac{r^2}{v^2}\sin\omega\right]\xi - r^2 = 0. \tag{3}$$

Jestliže $\cos^2\omega - \frac{r^2}{v^2}\sin^2\omega = 0$, je řez parabola. V dalším tento případ vyloučím. Užívaje identity

$$A\xi^2 + 2B\xi = A\left[\xi + \frac{B}{A}\right]^2 - \frac{B^2}{A}$$

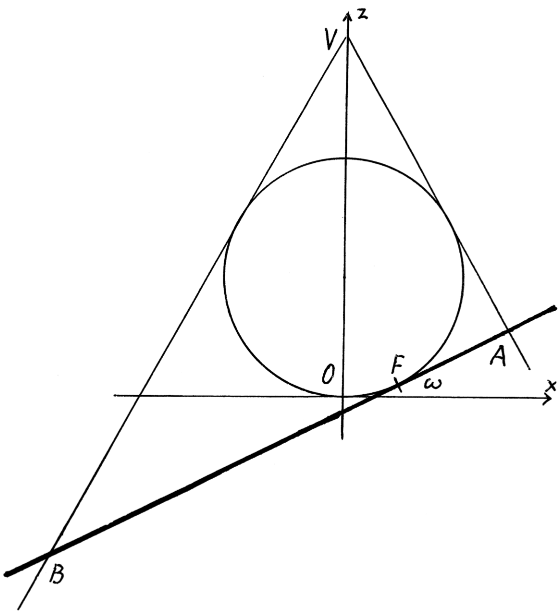
přepíši (3) po menších úpravách na

$$\frac{\left[\xi + \frac{r^2 v\sin\omega}{v^2\cos^2\omega - r^2\sin^2\omega}\right]^2}{\frac{r^2v^4\cos^2\omega}{(v^2\cos^2\omega - r^2\sin^2\omega)^2}} + \frac{\eta^2}{\frac{r^2v^2\cos^2\omega}{v^2\cos^2\omega - r^2\sin^2\omega}} = 1.$$

Při $v^2\cos^2\omega - r^2\sin^2\omega > 0$, resp. < 0 (což má známý prostý geometrický význam) je tak řezem elipsa, resp. hyperbola, jejichž poloosy a excentricity ihned vidíme. Omezíme se (viz obr. 4) na elipsu; při ní její hlavní poloosa a a excentricita e jsou

$$a = \frac{rv^2\cos\omega}{v^2\cos^2\omega - r^2\sin^2\omega}, \qquad e = \frac{rv\sqrt{r^2+v^2}\cdot\cos\omega\sin\omega}{v^2\cos^2\omega - r^2\sin^2\omega}.$$

Připomeneme-li si ze strany 70 prvního dílu kvartánské Vojtěchovy planimetrické učebnice (1910), jak se vyjádří úseky na stranách trojúhelníka mezi vrcholem a dotykovým bodem vepsané kružnice, a aplikujeme-li tento zcela elementární poznatek (který v učebnici *Planimetrie* z roku 2005 není) na trojúhelník ABV z obr. 4 [sečná rovina je zase volena kolmo k souřadnicové rovině (x, z) čili $y = 0$, stopa řezu je spojnice AB], ihned dostaneme



Obr. 4

$$\overline{AF} = \frac{1}{2}\left[\overline{AB} + \overline{AV} - \overline{BV}\right].$$

Zcela snadno zjistíme, že

$$AB = 2 \cdot \frac{rv^2 \cos\omega}{v^2 \cos^2\omega - r^2 \sin^2\omega},$$

$$\overline{AV} = \frac{v\sqrt{r^2 + v^2}}{v + r\mathrm{tg}\,\omega}, \qquad \overline{BV} = \frac{v\sqrt{r^2 + v^2}}{v - r\mathrm{tg}\,\omega}.$$

Tedy

$$\overline{AF} = \frac{(rv\cos\omega)[v - \sqrt{r^2 + v^2}\sin\omega]}{v^2\cos^2\omega - r^2\sin^2\omega}.$$

Vidíme, že je to rozdíl poloosy a a excentricity e, které jsme propočítali už výše. Tedy dotykový bod F je ohnisko elipsy, která je řezem.

16. Aplikace geometrie

Když jsem studoval na prostějovské reálce a od roku 1945 na přírodovědeckých fakultách v Brně a v Praze, nikdy mě nenapadla otázka, k čemu je geometrie v reálném životě. Studoval jsem ji – nestydím se za to – pro radost z poznání. Také od svých učitelů na střední i vysoké škole jsem nikdy neslyšel: *Co vám nyní budu vykládat z geometrie, aplikuje se v praxi tak a tak.*

V polovině padesátých let jsem začal učit na pražské technice. Nějakou dobu jsem byl ovšem zahlcen výukou, ale dosti brzy jsem si uvědomil, že bych měl vědět, zda to, co studentům vykládám, budou vskutku potřebovat, a jestliže ano, tak kde a jak; a zda je to všechno, co by měli z matematiky ovládnout. Samozřejmě jsem potřeboval delší dobu, než jsem se trochu probral českými i cizími knihami o geodézii, ale vyplatilo se mi to. Kdykoliv jsem svým studentům mohl říci: *Co nyní ode mne slyšíte, je příprava k tomu, co použijete tehdy a tehdy.* Naštěstí jsem si uvědomil, že jen u malého zlomku svých studentů mohu předpokládat takový vztah k matematice, který se neptá, nač jim bude. Ten zlomek se stále zmenšoval, jak už v devadesátých letech, kdy jsem ještě učil, rostl počet maturantů.

Vojtěchovy učebnice pro kvartu, kvintu a septimu jsou vůči aplikacím velmi macešské, ač třeba příležitostí pro poznámky o geometrických prvcích ve stavitelství by nebylo málo. Ale s *Trigonometrií* (1911) pro sextu tomu bylo jinak. V III. části *Trigonometrie rovinná* (1911) je na stranách 113 až 128 odd. 14: *Užití v praktické geometrii* – řečeno dnešní terminologií: v geodézii – tedy při vyměřování zemského povrchu do rozsahu, kdy ještě může být považován za rovinný. Ke konci odd. 14 je i jakýsi dotyk s vyšší geodézií, když je stručně vysvětlena triangulace i s mapkou, jak pokrývá území Čech a Moravy. Zcela v závěru učebnice je na několika stranách ukázána i aplikace sférické trigonometrie v astronomii.

*   *   *

Současné čtyři učebnice geometrie pro kvintu až oktávu jsou k aplikacím podobně skoupé, jako zmíněné tři Vojtěchovy. Ilustruji tento poměr jen několika poznámkami.

V nynější učebnici *Planimetrie* se na stranách 68 až 70 píše o kružnicovém oblouku a příslušném středovém úhlu. Vzorec (4) ze strany 70 by studenti patrně nikdy nezapomněli, kdyby se dozvěděli, jak kdysi Eratosthenes (asi 276 až asi 194 před. Kr.) využil toku Nilu ve směru zhruba jih-sever mezi Asuánem ležícím na obratníku Raka a Alexandrií pro odhad poloměru Země. – Na straně 41 začíná výklad o mnohoúhelnících. Což k tomu připomenout způsob – i nyní by nebylo ostudou jej aplikovat – kterým Heron (kolem 1. století po Kr.) popsal vytyčení tunelu.

V nynější učebnici *Stereometrie* je poučení o vzájemných polohách přímek a rovin od strany 22. Stačí pro výklad geometrického principu, jímž se pomocí satelitů určuje vzdálenost kontinentů. – Na stranách 135 až 136 je bohužel jen několik (a to spíše terminologických) řádků o kouli; proč se nezmínit o systému GPS (Global Position System) vzniklém asi před třiceti roky, v němž na každé z šesti drah oblétávají Zemi čtyři umělé satelity? – Proč se na straně 129 nezmínit, že by geodeti přivítali, kdyby jim geometrie mohla posloužit pravidelným mnohostěnem s velkým počtem n pravidelných trojúhelníkových stěn; geometrie však může bohužel posloužit jen počtem $n = 20$. Na velkém astronomickém kongresu v Praze roku 1968 tak navrhl ruský geodet a astronom I. D. Žongolovič *projekt ikosaedr*, kterým by byl celý zemský povrch pokryt dvaceti trojúhelníky. – Do učebnice, která oplývá obrázky kvádrů či krychlí, by jistě dobře zapadla poznámka (či dokonce fotografie) o architektům v celém světě známé vile ve Střešovicích, kterou kolem roku 1930 projektoval Adolf Loos (1870–1933) a která je ideálním spojením trojrozměrných intervalů.

V nynější učebnici *Trigonometrie* se od strany 36 probírá funkce sinus; to je příležitost vysvětlit, jak al-Biruni (973–1048) v Indii využil rozsáhlé planiny, z níž se vypínala hora, k výpočtu zemského poloměru. – V učebnici jsou příklady z geodetické praxe (třeba na stranách 123 až 124), ale v posledních desetiletích už lze vzdálenosti dvou bodů měřit přímo a od triangulace (*trojúhlí*) se přechází k trilateraci (*trojstranní*). – Je sympatické, že na straně 123 vysvětluje autor princip triangulace, byť jen šesti řádky petitem, ale student by se snad mohl dovědět, jak geniální a významem (pro určování tvaru Země) dalekosáhlý byl nápad, jímž Willebrord Snellius (1580–1626) v holandské rovině spojil věže kostelů v městech Bergen op Zoom a Alkmaar (jejich spojnice dlouhá asi 125 km je v pásu mezi 4° a 5° v. d.) sítí 33 trojúhelníků a z nich vypočítal vzdálenost věží; své výsledky publikoval roku 1617 ve spisu s případným názvem Eratosthenes Batavus (Batavové byl starý germánský kmen v ústí Rýna). Teprve objev logaritmů učinil ze Snelliovy triangulace metodu, na níž bylo až do poloviny 19. století založeno studium tvaru a rozměrů Země. – Na str. 123 v příkladu 2 je obrázek 4.15. Kdyby se v něm řeka zaměnila za Středozemní moře v prostoru východně od Gibraltaru mezi 1° a 4° z. d., šlo by téměř – se zanedbáním zemského zakřivení a značné idealizace ovšem – o spojení geodetických sítí Španělska a Alžíru, tedy i Evropy a Afriky, které roku 1879 uskutečnili francouzští inženýři. Jiná věc je, jak by se postup ze strany 123 zamlouval současným geodetům.

V nynější učebnici *Analytická geometrie* je na stranách 202 až 203 záslužná zmínka o J. Keplerovi v souvislosti s kuželosečkami, hlavně s elipsou. Ale dovolil bych si poznamenat, že J. Kepler pracoval s polární rovnicí kuželoseček (viz v odd. 8 citovanou učebnici B. Bydžovského, str. 184), o níž se autoři nezmiňují. – O kulové ploše píší autoři na stranách 205 až 208; snad se mohli zmínit o geometrickém základu v GPS, kterým je prostorová verze Apolloniovy úlohy. Má-li se kulová plocha o středu $[x, y, z]$ a poloměru r vnějšně dotýkat čtyř daných kulových ploch o středech $[x_i, y_i, z_i]$ a poloměrech r_i ($i = 1, 2, 3, 4$), tak

$$(x - x_i)^2 + (y - y_i)^2 + (z - z_i)^2 = (r + r_i)^2$$

a věc je převedena na algebraickou záležitost, která se ovšem řeší tak, že vzájemným odečtením se rovnice linearizují.

Snad bylo možné dotknout se i křivek z počítačové grafiky, které za své dlouholeté činnosti u známé automobilky Renault zavedl v šedesátých letech Pierre Bézier (1910–1999). Parametrické vyjádření přímky v rovině v nynější učebnici analytické geometrie na straně 69 nebo v prostoru na straně 106 se dá přepsat na tvar

$$X = C_{10}t + C_{11}(1-t); \qquad t + (1-t) = 1. \tag{4}$$

To vede k otázce, co znamenají analogické rovnice

$$X = C_{20}t^2 + 2C_{21}t(1-t) + C_{22}(1-t)^2; \tag{5}$$

$$t^2 + 2t(1-t) + (1-t)^2 = 1,$$

případně ještě

$$X = C_{30}t^3 + 3C_{31}t^2(1-t) + 3C_{32}t(1-t)^2 + C_{33}(1-t)^3; \tag{6}$$

$$t^3 + 3t^2(1-t) + 3t(1-t)^2 + (1-t)^3 = 1,$$

což je kubická křivka, v praxi vskutku používaná. Jakási obtíž je ovšem v důkazu, že (5) znamená parabolu (výjimečně přímku). – Připomenu, co jsem opakovaně říkal svým kolegům a co nebylo příliš rádo slyšeno: Bézierův nápad je jakási modifikace barycentrických souřadnic, které zavedl už August Möbius (1790–1868): *Der barycentrische Calcül ...* (1827). Nikoliv bezúčelně jsem v (4), (5), (6) připsal, že součet koeficientů je vždy roven 1.

Přepíšeme-li (4) na tvar (zůstávám jen v rovině)

$$x = At^2 + Bt + C,$$

$$y = Dt^2 + Et + F; \qquad A, \dots, F = \text{konst.},$$

snadno dostaneme eliminací

$$Dx - Ay = (BD - AE)t + (CD - AF).$$

Kdyby $BD - AE = 0$, znamenaly by rovnice (4) přímku. V opačném případě eliminací t dojdeme k

$$(Dx - Ay)^2 + \text{konst.} \cdot x + \text{konst.} \cdot y + \text{konst.} = 0.$$

S J. Vojtěchem (1912)[35] nebo s K. Šilháčkem a H. Sechovským (1936)[36] – ale nikoliv s M. Kočandrlem a L. Bočkem (2000) – bychom věděli, že jsme došli k parabole.

* * *

[35] Viz str. 108 až 112 – po maličkém doplnění.

[36] Viz str. 126 – ihned.

O vztahu deskriptivní geometrie a počítačové grafiky píše L. Drs ve své *Deskriptivní geometrii I* (1994) na straně 10 a ohlašuje, že pro počítačovou grafiku bude vydána oddělená učebnice.

Odůvodnění je pádné: Základní metody deskriptivy se za víc než 200 let její existence podstatně nezměnily, ale počítačová grafika se naopak velmi rozvíjí a tomu bude třeba častěji přizpůsobovat učebnici.

*　*　*

Asi před sto lety vyšla kniha Friedricha Schillinga *Über die Anwendungen der darstellenden Geometrie insbesondere über die Photogrammetrie* (Leipzig, Berlin, 1904, 198 stran). Je to souhrn přednášek, které F. Schilling (1868–1950) pronesl na prázdninovém kurzu v Göttingen pro středoškolské učitele matematiky a fyziky. Už v úvodní přednášce na straně 14 na sebe autor prozrazuje, že *spojení analytické geometrie s deskriptivní dosud není provedeno tak dalece, jak by si přál.* Pak se věnuje aplikacím deskriptivní geometrie v těchto oblastech:

1. Stereometrie, projektivní a analytická geometrie
2. Teoretická kinematika
3. Mechanika
4. Matematická fyzika
5. Analýza a algebra
6. Geodézie
7. Astronomie a matematická geografie
8. Krystalografie
9. Architektura
10. Strojírenství
11. Inženýrské vědy
12. Fyziologie a psychologie
13. Umění
14. Fotogrammetrie (patří jí strany 98 až 188).

Paragraf 14 na stranách 153 až 159 o aplikaci fotogrammetrie v malířství je věnován Albrechtu Dürerovi. Na stranách 156 a 157 autor reprodukuje čtyři Dürerovy grafické listy, na nichž je velmi instruktivně znázorněno vytvoření perspektivního obrazu. Na příloze I rekonstruuje F. Schilling půdorys a nárys situace z mědirytiny *Sv. Jeroným v domku* z roku 1514 (viz odd. 17).

Bylo by si velmi přát, aby kniha podobná Schillingově vznikla též nyní a zahrnula aplikace deskriptivní geometrie z posledního století. Bylo by pro mě příjemným překvapením, kdyby se tohoto náměru ujal český(á) autor(ka).

*　*　*

V srpnu 1984 se v Bratislavě konala konference o matematice na technicky zaměřených vysokých školách. Na ní jsem připomněl návrh, který na setkání učitelů matematiky všech typů škol v Mariánských Lázních roku 1983 vyslovil jeden kolega (neznal jsem ho a jméno si nepamatuji): Pokusit se sestavit sbírku příkladů pro aplikace matematiky jako pomůcku jednak vlastní, jednak pro naše středoškolské kolegy. Připojil jsem, že ujme-li se někdo organizace, přispěji nemálo příklady z geodézie a umění.[37]. Později jsem návrh opakoval. Nikdy jsem neslyšel: *Je to zbytečné, neúčelné* ani: *Zkusíme to, zúčastním se přípravy.* Prostě nic, jak ostatně často v podobných situacích.

Jak by aplikace vypadat neměly, zmiňuji se krátce v závěru odd. 18.

17. Geometrie a výtvarné umění

Toto spojení je slabinou jak učebnic z let 1910 až 1911, tak nynějších. Částečnou výjimkou je snad jen 4. díl (pro septimu) Pithardtovy-Seifertovy *Deskriptivní geometrie* s perspektivou na stranách 152 až 169 (předchází středové promítání na stranách 141 až 151). Jinak jsem v žádných učebnicích nenarazil na reprodukci uměleckého díla ať z malířství, ať ze stavitelství. Tento nedostatek vyplňovalo kdysi kreslení, na prostějovské reálce jsme je měli až do oktávy. Obrázek 5.13, který v Kočandrlově-Bočkově *Analytické geometrii* (2000) na str. 159 předvádí Dürerův rys z *Underweysung der messung* ... (1525), je spíše než uměleckým projevem předzvěstí deskriptivní geometrie. Co dále napíši, bude pouhé torzo z možných námětů.

V *Planimetrii* (2005) E. Pomykalové je na stranách 44 až 45 poučení o pravidelném pětiúhelníku. Přímo se vnucuje zmínka o obrazu Bohumila Kubišty (1884–1918) *Vzkříšení Lazara* (1911/12); k tomuto obrazu se zachoval Kubištův náčrt s výpočty, v němž je základem pravidelný pětiúhelník a s ním spojený zlatý řez.[38] J. Vojtěchovi absenci zmínky o B. Kubištovi zazlívat nelze, neboť se dočkal uznání – postupně velkého – až na konci padesátých let. Příležitostí k poznámkám o zlatém řezu a příbuzných věcech v architektuře je nepřeberně, třeba na gotických chrámech – namátkou Matyáš z Arrasu komponoval nejstarší část katedrály sv. Víta v letech 1344 až 1352 do poloviny pravidelného desetiúhelníka.

* * *

Ve *Stereometrii* (2002) se na str. 142 sice jen letmo a velmi neúplně dočteme o elipse, ale jejích obrázků je v knize mnoho. O využití elipsy ve stavitelství není nouze: římské koloseum (z 1. století po Kr., osy přes 180 m a 150 m), zámeček Humprecht u Sobotky (sedmdesátá léta 17. století), Dientzenhoferův kostel sv. Maří Magdaleny v Karlových Varech nad vřídlem (třicátá léta 18. století) – ostatně elipsa byla velmi důležitým prvkem barokní architektury, Vlašská kaple v Karlově ulici v Praze (z posledních let 16. století) a z nedávné doby – rovněž v Praze – nepřehlédnutelná budova ve tvaru eliptického válce poblíž strašnického krematoria. – Při dnešním zlomku deskriptivní geometrie

[37] Viz *Zborník* ... , SVŠT Bratislava, 1984, str. 40–41

[38] Viz Mahulena Nešlehová: *Bohumil Kubišta*, Praha, 1984 (tuším též 2. vyd.), str. 116–118.

by se asi hodilo do stereometrie několik řádků o perspektivě – což tak ukázat ji třeba na slavné Leonardově fresce *Poslední večeře* (1494/97) s úmyslným prohřeškem proti perspektivě (ústupek uměleckému dojmu), nebo na zmíněné už v závěru odd. 16 Dürerově mědirytině *Sv. Jeroným v domku* či na slavné mědirytině *Melancholie* (1514)? Závěrečný obrázek v Dürerově *Underweysung* ... (1525) znázorňující malíře kreslícího pohled na loutnu mistrovsky vysvětluje perspektivu i bez textu. Ve druhém, už posmrtném vydání z roku 1538 jsou připojeny dva podobné obrázky. Jsou reprodukovány na stranách 9 a 10 učebnice Michal Harant – Oldřich Lanta: *Deskriptivní geometrie*, část I. pro II. ročník SVVŠ (Praha, 1965). Co nyní napíši, je úsměvné: Obrázek na straně 10 je „cenzurován“, reprodukuje jen pravou polovinu Dürerovy rytiny. Na levé je ležící nezahalená žena, na níž kreslíř pohlíží přes svislou mřížku a perspektivní pohled přenáší na síť na papíře položeném na stole. – Rozsáhlou zásobárnou pro stereometrické příklady je české specifikum: kubismus v architektuře s nejznámějším Domem u Černé Matky boží (roh Ovocného trhu a Celetné ulice) postaveným v letech 1911 až 1912 podle návrhu Josefa Gočára (1880–1945). – Anebo pro pobavení uvést některý z grafických listů, jejichž autorem je Holanďan Maurits Escher (1898–1972); pokud by se to zdálo moc, tak aspoň *krychli*, kterou na listu Belveder 1958 drží trpaslík.

* * *

V *Analytické geometrii* (2000) by rovněž bylo možné zmínit se o elipsách v architektuře, třeba o akustice v zmíněném už zámečku Humprecht (normála elipsy půlí úhel průvodičů). Něco podobného je v dlouhé kolonádě v kroměřížské Květné zahradě (přes 200 metrů); u ní je akustika založena jednak na vlastnosti paraboly, že paprsky z jejího ohniska se od ní odrážejí rovnoběžně s její osou, jednak na náhradě paraboly v blízkosti jejího vrcholu oskulační kružnicí (určit její poloměr by neměl být pro oktavána těžký úkol).

Nevšiml jsem si – snad jsem se nepřehlédl – že by se v nynějších učebnicích geometrie objevila citace knížky F. Kadeřávka (dlouholetého profesora deskriptivní geometrie na stavební fakultě ČVUT): *Geometrie a umění v dobách minulých* (Praha, 1935; další vydání až v devadesátých letech). Ve skromné české literatuře o geometrii v umění je perlou. Díky vzácnému porozumění Petera Schreibera z univerzity v Greifswaldu vyšel i německý překlad pod názvem *Geometrie und Kunst in früherer Zeit* (Stuttgart, Leipzig, 1992).

Pro deskriptivní geometrii by mohlo být lákavé upozornění na Kubištovu geometrickou studii z roku 1910 podnícenou sumerskou plastikou hlavy s turbanem; tato studie je deskriptivářsky zajímavá nejen konstrukcí samou, ale i velmi speciální polohou válce, z něhož je formována hlava, vůči oběma průmětnám. Na studii navazuje obraz *Meditace* (1915). Rovněž studie z roku 1912 k obrazu sv. Šebestiána hýří elipsami.[39]

Kdyby se do některé učebnice dostalo i jen několik málo řádků o počítačové grafice, snad by se daly připojit dvě kresby z přílohy VII, v nichž geometrie

[39] Viz výše citovanou knihu M. Nešlehové, str. 177, 176, 141, 143.

spojuje přes interval více než 400 let umění s počítačovou grafikou. Nalevo je kresba zaklesnutých článků řetězu, kterou vytvořil roku 1565 Hans Lencker (kolem 1530 až 1585); pracoval ve známé zlatnické dílně, kterou v Norimberku vedl Wenzel Jamnitzer (1508–1585), autor krásných zobrazení hvězdicovitých mnohostěnů. Na Lenckerově kresbě jsou nejpozoruhodnější vyznačené čáry, které mají v diferenciální geometrii velký význam – první se jimi zabýval už G. Monge koncem 18. století. Napravo je tentýž motiv zpracovaný počítačovou grafikou 1992 v geometrickém ústavu Technické univerzity v Mnichově.

* * *

Náhodně se mi dostala do rukou učebnice: Martina Macháčka *Fyzika pro gymnázia – Astrofyzika.*[40] Text v této učebnici je asi třemi čtvrtinami textu jak v Planimetrii (2005) za 90 Kč, tak ve *Stereometrii* (2002) za 90,– Kč, tak i v *Analytické geometrii* (2000) za 75,– Kč; naopak je jen o málo větší než v *Goniometrii* (2006) za 82,– Kč. Vnucuje se otázka: Nebylo možné – po vzoru Macháčkovy knížky – vsunout do geometrických učebnic několik příloh s reprodukcemi uměleckých děl s úzkými vztahy ke geometrii? Nepůsobilo by na studentstvo rozdílně, kdyby jim pan profesor či paní profesorka řekl/a něco o právě probírané geometrii na oněch obrazech či stavbách, místo aby jim jen přikázal naučit se zpaměti jakýsi vzorec ke kvadratické rovnici? Když jsem ke svým studentům – též na technice, to zdůrazňuji – mluvil o geometrii v umění, nemohl jsem si stěžovat na nezájem.

Už v závěru odd. 6 jsem se zmínil, v čem je Klímova-Ingrišova *Deskriptiva* (1935) pro sextu a septimu výjimečná. V pasáži o perspektivě je na straně 166 reprodukce skici, kterou se Leonardo da Vinci (1452–1519) kolem roku 1480 připravoval na svůj časný – ale nedokončený – obraz *Klanění tří králů*[41] a na další stránce je reprodukce fotografie, kterou pro studii perspektivy v architektuře pořídil Vojtěch Hynais (1854–1925), známý jako autor druhé opony Národního divadla (1881).

* * *

Ke konci tohoto oddílu připojím ještě jednu „výtvarnou“ poznámku. Vzorem pro doplnění geometrické učebnice reprodukcemi uměleckých děl může být kniha *Geometry* od Herolda Jacobse (San Francisco, 1974, 701 stran, 2. vydání 1987) [ale obsah bych jako vzor nedával]. Je v ní mnoho reprodukcí Escherových grafik i jiných obrázků či fotografií. Dovedeme si vůbec představit – jako je tomu u Jacobsovy knihy – naši učebnici geometrie, která má na horní desce Escherův grafický list *Nahoru-dolů* (1960), tedy schodiště ve tvaru čtverce, po němž stoupají a sestupují dvě řady trpaslíků?

[40] 2. vydání: 2004, 143 stran + 16 stran barevných snímků, 100,– Kč; 1. vydání: 1998.

[41] Viz Bruno Nardini: *Leonardo da Vinci*, Bratislava, 1980 (italský originál: Firenze, 1974), str. 67–69; pro beletristické zpracování osudu *Klanění tří králů* viz František Jílek: *Muž z Vinci*, Praha, 1982, str. 107–114.

18. Historie geometrie

Za výrazný klad všech nynějších geometrických učebnic považuji to, že jsou v nich – byť jen krátké – úseky věnované historii. Ve Vojtěchových knížkách jsou roztroušené, J. Pithardt a L. Seifert je soustředili až na závěr učebnice pro septimu. Jako jedni z mála znali jméno Amédée François Frézier (viz oddíl 14-d, letmá zmínka o něm je i v Harantově-Lantově učebnici citované v odd. 17). Naopak oba autoři zapomněli na Rudolfa Skuherského.

Nebylo by mi proti mysli, kdyby historické poznámky v nynějších učebnicích byly bohatší. Zvláště rád bych v nich četl též o občanských činech některých geometrů – výraznými vzory jsou Gaspard Monge a Lazare Carnot (1753–1823). Anebo z jiné strany: Opravdu by nebyla vhodná zmínka o trojici C. F. Gauss (1777–1855), N. Lobačevskij (1792–1856), J. Bolyai (1802–1860) a jejich objevu neeukleidovské geometrie? Aby se studenti dozvěděli, že není jen „školská“ geometrie.

* * *

Využiji příležitosti, abych se dotkl jedné z našich bolestí. Do začátku devadesátých let jsem si – zpravidla za pakatel – obstaral sbírku několika desítek životopisů významných matematiků; až na malé výjimky jsou to knížky až knížečky německé a ruské (z bývalých NDR a SSSR). Proč jsou mezi nimi české brožurky tak maličko zastoupeny? Proč v našich učebnicích geometrie není upozornění aspoň na tyto svazky [z Edice portrétů *Velké postavy vědeckého nebe*, dosud jich vyšlo 16]: J. Bečvář: *René Descartes. Milovník rozumu* (Praha, 1998, 48 stran), J. Bečvář, I. Štoll: *Archimédes. Největší vědec starověku* (Praha, 2005, 72 stran), V. Štefl: *Klaudios Ptolemaios. Tvůrce geocentrické soustavy* (Praha, 2005, 56 stran)?

Patrně ojedinělý je třídílný soubor Г. И. Глейзер: *История математики в школе.*[42] O všech třech dílech jsem napsal recenzi, na kterou odkazuji.[43] V každém ze tří svazků jsou na obou předsádkách reprodukce obrazů, které souvisejí s geometrií. Na zadní předsádce třetího dílu je zmíněné už Dürerovo vyobrazení malíře zachycujícího perspektivní obraz loutny.

* * *

Nemohu se ubránit poznámky k datování ve čtyřech nynějších učebnicích geometrie. Všichni čtyři autoři v historických poznámkách důsledně píší: *před naším letopočtem* či *našeho letopočtu.* Matematici si libují v definicích a počítání – takže: Jak by reagoval pan profesor či paní profesorka, kdyby se zvědavý

[42] Просвещение, Москва. První díl pro 4.–6. třídu: 1981, 239 stran, druhý díl pro 7.–8. třídu: 1982, 240 stran, třetí díl pro 9.–10. třídu: 1983, 351 stran. Starší vydání: *История математики в средней школе*, Просвещение, Москва, 1970, 461 stran. G. I. Glejzer žil v letech 1904 až 1967.

[43] Pokroky matematiky, fyziky a astronomie 30(1985), 119.

žáček zeptal, od kdy se vlastně ten „náš letopočet“ počítá? A dokázali by vůbec spojit výklad o perspektivě na zmíněné už fresce *Poslední večeře* s výkladem o jejím biblickém smyslu a smyslu zkratek *před Kristem* a *po Kristu*, odstraněných před šedesáti roky podle sovětského vzoru jistou stranou? Malé, ale vžité reziduum. Netrpěl jím v odd. 17 citovaný Martin Macháček, který ve své učebnici na stranách 115 až 117 v *Astronomickém kalendáři* opakovaně píše *př. Kr.* a *po Kr.*

Ještě jedna maličkost. S portréty matematiků jsem se setkal jedině ve zmíněné už v odd. 6 Šilháčkově a Sechovského analytické geometrii; na straně 5 je René Descartes a na straně 149 Bernard Bolzano (v oddílu o počtu diferenciálním).

E. Pomykalová soustředila historické poznámky ve svých dvou učebnicích *Planimetrie* (2005) a *Stereometrie* (2002) do osmi míst. Je ovšem zcela správné napsat (viz *Planimetrie*, str. 187), že *k renesanci geometrie došlo v Evropě v 16. až 17. století, zejména ve Francii*, ale přece jen bych připojil toto: Starořecká geometrie se do západní Evropy nedostala přes Balkán a Alpy, ale přenesli ji Arabové ohromným obloukem podél severního pobřeží Afriky přes Gibraltar do Španělska a jako první ji v Evropě vzkřísili italští malíři a architekti už v patnáctém století, tedy zhruba o dvě století dříve, než znovu zazářila ve Francii.

V Odvárkově *Goniometrii* (2006) je delší historická poznámka na stranách 130 až 131. Líčí vývoj trigonometrie výlučně v jejím rámci bez přihlédnutí k jejím aplikacím v geodézii a astronomii. Jakýmsi odlehčením by byla třeba zmínka o způsobu, který navrhl Johann Albrecht Euler (1734–1800; syn Leonharda Eulera) v pojednání *Versuch die Figur der Erden durch Beobachtungen des Monds zu bestimmen.*[44] Eulerův postup reprodukuje Milan Burša v knize *Základy kosmické geodézie I: Kosmická geodézie geometrická* (Praha, 1967) na stranách 199 až 202. I když ne podrobnosti (k těm je třeba vědět něco víc o elipse), tak aspoň základní trigonometrické východisko lze septimánům vysvětlit. Zvlášť pozoruhodný je závěr, který J. A. Euler formuluje asi takto: *Kdyby byl Měsíc Zemi blíže anebo kdyby v blízkosti Země bylo jiné těleso, byla by předložená metoda daleko přesnější než geometrická triangualce podél poledníků.* Trvalo téměř 200 let, než se Eulerovo přání po „jiném tělese v blízkosti Země“ vyplnilo. Jako vůbec první určil Emil Buchar (1901–1976, profesor astronomie a geofyziky na ČVUT) v roce 1957 z drah sovětských Sputniků zemské pólové zploštění.

M. Kočandrle a L. Boček ve své *Analytické geometrii* (2000) začínají historické údaje na stranách 202 až 203 takto: *Kuželosečky byly známy již kolem roku 200 před naším letopočtem, kdy Apollonius z Pergy o nich napsal osmidílné pojednání.* To zase je ovšem zcela pravda, ale student z toho usuzující, že je objevil Apollonius, by se asi zmýlil. J. Vojtěch ve své *Analytické geometrii* (1911) píše na straně 113, že *kuželosečky byly známy Řekům už ve 4. století před Kr.; za*

[44] Abhandlungen der kurf.-baierischen Akademie der Wissenschaften 5(1768), 197–214.

objevitele jejich pokládá se geometr Menaichmos (okolo 350 př. Kr.). Historici geometrie to považují za pravděpodobné, nikoliv však jisté.[45]

* * *

Těžko nepsat satiru, povzdechl si před devatenácti stoletími Decimus Iuvenalis. Tak tedy: Ve *Stereometrii* (2002) E. Pomykalové je na stranách 165 až 166 úloha 5.71, která se bez nejmenší změny opakuje ve 4. vydání z roku 2009, (s ministerskou doložkou o schválení č. j. 28 997/07-23 z 20. 5. 2008) a která byla už v 1. vydání z roku 1995:

Cheopsova pyramida je 145 m vysoká, její podstavou je čtverec o straně délky 232,7 m. … c) Jak vysoká by byla zeď tlustá 60 cm, vystavěná ze zdiva této pyramidy kolem České republiky, měří-li hranice České republiky 2 303 km?

Odpověď na straně 215 říká, že asi 1,9 m.

Velká škoda, že o této úloze nevěděli soudruzi v první polovině padesátých let, jistě by se byli zajímali o další Cheopsovu pyramidu, aby zeď mohla být téměř 4 metry vysoká a nedala se snadno přelézt. Je mi zcela nesrozumitelné, že se tato „perla“ předkládá žactvu už skoro patnáct let.

[45] Doporučuji tuto literaturu: M. Cantor: *Vorlesungen über die Geschichte der Mathematik* I, Leipzig, 1880, str. 290, nebo F. Dingeldey: *Kegelschnitte und Kegelschnittsysteme*, Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften III-2-1, Leipzig, 1903–1915, str. 6 [Eratosthenes (275–194) užil pro tři typy kuželoseček název *triády Menaichma*] nebo A. Kolman: *Dějiny matematiky ve starověku*, Praha, 1968, str. 116 nebo M. Kline: *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times* I, New York, 1990, str. 90, nebo R. Cooke: *The history of Mathematics. A Brief Course*, New York, 1997, str. 103, nebo C. J. Scriba, P. Schreiber: *5000 Jahre Geometrie*, Berlin … , 2000 (2. vyd. 2005, ang. překlad), str. 41–42. U literatury staré přes 2000 let jsou takové pochybnosti pochopitelné. – Jen na dokreslení: Ptolemaiovu větu o tětivovém čtyřúhelníku neobjevil jako první Ptolemaios (okolo 85 – okolo 160 po Kr.), ale Menelaos (kolem 100 po Kr.); viz J. Tropfke: *Geschichte der Elementarmathematik* II. Leipzig, 1903, str. 91, 3. vyd. I.–IV., 1930–1940). – Existenci Villarceauových kružnic na toru (řezy bitangenciálními rovinami) dokázal Y. Villarceau (1813–1883) roku 1848, ale tyto kružnice byly známy kameníkům mnohem dříve; viz M. Berger: *Géométrie*, partie 2, Paris, 1977; angl. překlad I, II Berlin, 1987, 2. vyd. 1994; ruský překlad, I, II, část 2, Moskva, 1984, str. 384–386. – Rytzovu konstrukci os elipsy ze sdružených průměrů nevymyslil první D. Rytz (1801–1868), ale A.-F. Frézier, dokázal ji L. Mossbrügger roku 1845.

Část IV. ZÁVĚR

19. Matematicky talentovaní studenti

Jen zřídka souhlasím s článkem v Lidových novinách tak, jako se sloupkem z 13. června 2009 nazvaným *Povznesení lidu* s podtitulkem *Dnes o nastávajícím věku polovzdělanců*, který napsal filozof Stanislav Komárek. Nyní z tohoto příspěvku, který lze považovat za krátký odlesk Liessmannovy knížky, o níž píši víc v odd. 20, ocituji dva úseky. Tak první:

Naše společnost dělá neobyčejně málo pro podporu talentovaných studentů, zato vše pro „pozdvižení" ostatních. Každý, kdo situaci „v terénu" vidí, ví, jak je to frustrující.

Pokusím se napsat k tomu něco málo „matematického".

Někdy brzy na začátku roku 2010 jsem něco hledal v Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky 42(1913) a na stranách 201 až 202 jsem si všiml recenze, kterou Bohuslav Hostinský napsal o knížce *Mathematika pro nejvyšší třídu reálek*[46] Bohumila Bydžovského a Jana Vojtěcha.

Knížka není učebnicí, je dodatkem k učebnicím obou autorů, kteří se jí obracejí k žákům s dispozicemi pro matematiku. Byl to jistě originální počin a velice lituji, že se mi nedostala do rukou mnohem dřív. Autoři jí podstatně doplňují a rozšiřují své učebnice. Rozdělili ji na tři části, třináct paragrafů, které se dále člení na oddíly: I. *Přehled věcný* s těmito paragrafy. 1. *Číslo* (str. 2–21), 2. *Rovnice* (21–34), 3. *Řady* (34–44), 4. *Funkce* (44–61), 5. *Transformace* (61–74), 6. *Konstrukce* (74–88), 7. *Měření* (88–107), 8. *Souřadnice* (107–123). – II. *Myšlení mathematické* se třemi paragrafy: 9. *Úvahy logické* (123–145), 10. *Základy mathematiky* (145–150), 11. *Mathematická věda a její význam* (150–156). – III. *Náčrtek historický* se dvěma paragrafy: 12. *Mathematika starověká* (156–164), 13. *Mathematika novodobá* (164–176).

Recenze B. Hostinského je velmi příznivá; je třeba napsat, že zaslouženě. Částečný nesouhlas – aniž by byl konkrétní – vyjadřuje s paragrafem 10 a s definicí filozofie v paragrafu 11; též s odd. 102. *Doba novější* (str. 172–176) ve 13. paragrafu. K tomuto odd. jakož i k poslednímu 103. odd. *Česká mathematika* (str. 174–176) bych měl také výhrady. Tak třeba na str. 174–175 je Bernardu Bolzanovi věnováno pět řádků, z nichž se čtenář nedozví, že B. Bolzano byl Čech jen tím, že během celého svého života Čechy neopustil, byl „der Böhme", ale nikoli „der Tscheche"; také se nedozví, že byl katolickým knězem, který za deset let kazatelského působení v kostele sv. Salvátora pronesl na 500 exhort. Nemálo jsem jich četl, proto věřím současným svědectvím, že při Bolzanových kázáních býval chrám zcela zaplněn. Skromný soubor 29 proslovů přeložil a uspořádal Jaromír Loužil: *Bernard Bolzano – exhorty* (Praha, 2006).

[46] Jednota českých mathematiků, Praha, 1912, 176 stran; v málo odlišné verzi vyšla i pro klasická či reálná gymnázia.

Autoři se vůbec nezmiňují o Matyáši Lerchovi (1860–1922), který v době, když knížku psali, již působil na české brněnské technice a byl v té době vůbec nejvýznamnějším českým matematikem.

První část (§ 1–18) svádí k řadě komentářů, ale omezím se na jediný, který ukáže, jak jsme ve školské matematice „pokročili". Autoři byli před sto lety přesvědčeni, že septimáni reálek budou stačit na řešení kubické rovnice a na stranách 26 až 27 o d v o d i l i Cardanův vzorec. Když v listopadu 1939 německá okupační moc uzavřela české vysoké školy, začala Jednota českých matematiků a fyziků jako skromnou náhradu vysokoškolských přednášek vydávat sbírku *Cesta k vědění* určenou maturantům. První svazek nazvaný *O rovnicích*[47] napsal Štefan Schwarz (1914–1996). Na stranách 41 až 43 odvozuje Cardanův vzorec. Š. Schwarz – a s ním redakce knižnice – byli ještě třicet let po Bydžovského a Vojtěchově počinu přesvědčeni, že na řešení kubické rovnice maturanti reálek stačí. Mohu potvrdit, že byli přesvědčeni právem. Schwarzovu výtečnou knížku jsem četl ještě na reálce v Prostějově v první polovině čtyřicátých let.

Ale za dalších padesát roků – od poloviny devadesátých let – se už autoři *Planimetrie* a *Goniometrie* domnívají, že i odvození Heronova vzorce je pro žáky přespříliš, a tak jej jenom na stranách 66 a 121 sdělují „jako informaci". To je jistě doklad k tomu, jak jsme ve středoškolské matematické výuce „pokročili" a jak jsme v intelektuální náročnosti v matematice nedokázali překlenout oněch nešťastných čtyřicet let a navázat, když už ne na třicátá léta, tak alespoň na čtyřicátá léta, byť plná politických zvratů.

Tak zase připomenu „zašlé časy". Na začátku dvacátých let začala Jednota vydávat pro středoškoláky časopis *Matematicko-přírodovědecké rozhledy.* Mám úplné ročníky 19(1939/40) až 30(1950/51); po brutálním úderu na jaře 1951 byla Jednota v agonii, vydávání Rozhledů převzalo nově zřízené Přírodovědecké vydavatelství a odebírání jsem odřekl. Ve všech ročnících, které mám, byly vypisovány úlohy o ceny (ve formě knih vydaných Jednotou) z matematiky, deskriptivní geometrie a fyziky. Vůbec to nebyla záležitost školských úřadů či dokonce ministerstva, z vlastní zkušenosti vím, že účast v soutěži byla zcela bez podnětu školy.

Později vznikla matematická olympiáda. Měla nesrovnatelně širší záběr než soutěž z Rozhledů a stala se záležitostí školských úřadů a škol. Jen z neověřených doslechů vím, že naprostá žákovská dobrovolnost – v zájmu školy – občas utrpěla. V matematických olympiádách všech stupňů – až po mezinárodní – pracovalo mnoho učitelů, kteří se tak výrazně zasloužili o studentský zájem o matematiku. Totéž platí o dalších formách podpory žáků talentovaných v matematice, jako je „Středoškolská odborná činnost", soutěž „Klokan", korespondenční semináře pořádané katedrami i pobočkami Jednoty, a také různá soustředění žáků a studentů zajímajících se o matematiku.[48]

* * *

[47] Praha, 1941, 94 stran; druhé, rozšířené vydání Praha, 1947, 159 stran.

[48] Za upozornění na tyto další způsoby, jak podnítit studenty s matematickými dispozicemi, děkuji doc. L. Bočkovi.

Podle údajů z Potůčkovy brožury, které jsem uvedl v odd. 8, bylo v roce 1918 asi 4 000 maturantů jen z gymnázií a reálek, tehdy osmiletých a sedmiletých. Podle *Analýzy čsl. výchovně vzdělávací soustavy ministerstev školství ČSR a SSR* (Praha 1988, str. 134) bylo v sedmdesátých a osmdesátých letech v ČSR na gymnáziích (tehdy jen čtyřletých) ročně kolem 85 000 studentů, tedy asi 20 000 maturantů. To znamená 5× víc. *Statistická ročenka školství 2008–2009* (Praha, 2009; na str. D 11 v tabulce D1.1.4) udává, že v roce 2008 maturovalo na školách gymnaziálního typu téměř 24 500 studentů a studentek (těch téměř 15 000). Přepočteme-li na 1 milion Čechů jak tyto údaje, tak údaje z Potůčkovy brožury (viz odd. 8) i údaje z Ottova slovníku naučného nové doby, Dodatky II-1, Praha 1931 (o počtu obyvatel ČSR z února 1921 ze str. 1083), dostaneme pro počty maturantů tyto zaokrouhlené výsledky:

1920	Čechů	6 750 000	1918	abs.	4 000
	na	1 000 000		abs.	600
2008	Čechů	10 000 000	2008	abs.	24 500
	na	1 000 000		abs.	2 400

Za posledních devadesát let vychází tak čtyřnásobné zvýšení počtu maturantů ze škol gymnaziálních typů. S velkou pravděpodobností lze tvrdit, že nejcitelnější nárůst byl v posledních letech. Doplňuji tyto řádky druhým citátem z Komárkova článku:

Bylo-li noční můrou pedagoga minulých ér vidět nadané děti či mladé lidi dřít v továrnách a na polích bez šance na vzdělání, je přízrakem toho dnešního spatřit promovat jedince, kteří by stěží zvládli orazítkovat obálku. Ne že by ti mimořádní zmizeli, ale rozplynuli se v davu jako lžička soli v Bodamském jezeře.

Zajímal by mě výsledek těchto dvou srovnání:

Jak by dnešní studenti specializovaných matematických tříd či gymnázií či lyceí

a) si poradili se stereometrickým řešením i grafickým provedením témat maturitních písemných prací z deskriptivní geometrie na reálkách ve školním roce 1937/38 (viz odd. 8 a přílohu I);
b) se vyrovnali s učebnicemi Vojtěchovými a Pithardtovými-Seifertovými, a co z geometrie znají vůči těmto učebnicím navíc?

Přitom by se nutně musilo přihlédnout k této okolnosti: Reálky nebyly nikdy výběrovými školami, v roce 1918 na nich byla téměř polovina všech středoškolských studentů (bez učitelských ústavů a odborných škol; viz početní údaje v odd. 8); dnes tvoří studenti výše zmíněných na matematiku specializovaných tříd a škol jistě jen malý zlomek z celkového počtu středních škol gymnaziálního typu.

* * *

Na střední škole jsem nikdy neučil, a tak z ní nemám zkušenosti v práci s matematicky talentovanými žáky. Přednášel jsem však matematiku na geodetickém oboru pražské techniky a o práci s takovými studenty jsem se snažil. Nejdříve však toto objasnění.

Při slově *geodézie* se zpravidla vybaví měřické práce na menším rozsahu zemského povrchu, k nim není třeba obtížnější matematiky. Do *geodézie* však patří také studium tvaru a rozměrů celé Země a v posledních desetiletích se objevily i zcela nové obory, např. kosmická geodézie. Takové studium „ve velkém" potřebuje mnoho z matematiky, a to i z jejích hlubších partií.

Nebudu popisovat, s jakými obtížemi jsem se při práci s matematicky nadanými studenty setkával. Táhly se dlouhá léta; někdy byly větší, někdy menší. Smutné bylo, že nejčastěji přicházely od pracovně blízkých kolegů. Nikdy jsem však necítil frustraci, o které se zmiňuje S. Komárek v hořejším citátu. Byla mi vždycky cizí, ale hněv jsem cítil nejčastěji.

Odhaduji, že jsem učil patrně víc než 2 000 studentů. Asi patnácti jsem zadal matematicko-geodetické téma k diplomové práci a pomohl jim s ním. Výtahy ze čtyř diplomových prací byly publikovány, dva německy v *Aplikacích matematiky* roku 1968, dva francouzsky v časopisu *Studia geophysica et geodaetica* roku 1971 (první časopis vydává Matematický ústav AV ČR, druhý Geofyzikální ústav AV ČR). Několik studentů se po dokončení techniky z mého podnětu zapsalo na Matematicko-fyzikální fakultu UK. Tři ji dokončili, dva dokonce doktorátem (RNDr.). Ale bohužel jen jeden z nich zůstal u svého původního oboru. Dnes, už jak nedávný šedesátník, je i v cizině známým odborníkem a funkcionářem významných mezinárodních geodetických organizací. A trošku překvapení: nevystudoval gymnázium, ale střední zeměměřickou školu.

Dejme tomu, že polovina ze dvou tisíc mých studentů – tedy tisícovka – měla svým věkem a dobou teoretickou možnost dosáhnout tzv. „velkého doktorátu" DrSc. Dokázalo jich to sedm; tři v komisi pro geodézii [mohl jsem sledovat nesmlouvavou náročnost předsedů Milana Burši a Miloše Picka; prvního z Astronomického ústavu, druhého z Geofyzikálního ústavu Akademie], tři v komisi pro astronomii a jeden na Vysoké škole báňské v Ostravě. Toto necelé jedno procento je mementem vyzývajícím k zájmu o talenty. Nikoliv vyšlapávat jim cestu a zahrnovat je chválou. Svým studentům jsem kdysi často říkával: *Má pomoc vám bude tím větší, čím větší bude váš výkon.*

* * *

Jak slabým místem je práce s nadanými studenty, vím tedy z vlastního působení. Je přece příznačné, že jen díky ministerské známosti svého dobrého známého (po únoru 1948 vyhozeného z ministerstva) jsem se dostal k metodickým pokynům, které pro výchovu nadaných studentů vydalo ministerstvo školství v dubnu 1968 s č. j. 12.553/68-III/3 a v únoru 1985 s č. j. 29 774/84-30; na mém pracovišti se o těchto pokynech nikdy nemluvilo. Z posledních dvaceti let mi podobné ministerské výnosy nejsou známy. Jiná má zkušenost je tato: Na podzim 1969 jsem byl pozván na tehdejší Český úřad geodetický. Výsledkem bylo, že jsem mohl zorganizovat na geodetickém oboru ČVUT výuku matematiky ve všech pěti ročnících, samozřejmě jen pro některé studenty, a s matematicky nejschopnějšími jsem „pracoval zvlášť". Postupně narůstající všeobecná normalizační ochablost to ztěžovala až znemožňovala. Po roce 1989 byli na zmíněném úřadu ve vysokých funkcích dva moji bývalí studenti, kteří byli mezi těmi, s nimiž jsem „pracoval zvlášť". Oba jsem opakovaně prosil o schůzku – podobné pozvání jako před dvaceti roky jsem nedostal a ke schůzce nedošlo. Hnilobné normalizační poměry přetrvávaly nejen na mém pracovišti, ale i jinde.

20. Zcela nakonec

Když v roce 1946 vznikla Pedagogická fakulta UK, byla učitelstvem přijata jako velké zadostiučinění a dovršení dlouholetých snah z první republiky. Dnes je takových učilišť u nás jistě více než deset – čím se stalo, že s nynějším stavem našeho školství nemůžeme být spokojeni? V přípravě středoškolských učitelů významné místo získala metodika. Právě k ní bych vznesl otázku, na niž bych rád znal odpověď. Až do ukončení své práce na technice jsem se mnohokrát tázal svých studentů, jak by postupovali při řešení kvadratické rovnice, kdyby zapomněli onen jistý vzorec. Jen vskutku velice, velice zřídka jsem slyšel správnou odpověď. Až bolestně často jsem se dozvídal, že pan profesor či častěji paní profesorka vzorec neodvodil(a), ale prostě nadiktoval(a) s výzvou, naučit se jej zpaměti. Tomu se říká metodika matematiky? Jistěže nebylo správné, když jsem se za svého vysokoškolského studia v Brně a v Praze o způsobu matematické výuky nic nedozvěděl, ale je správné, když se na úkor obsahové náplně předmětů zdůrazňuje s takovýmto výsledkem metodika?

Na pražské pedagogické fakultě jsem od roku 1987 skoro patnáct let přednášel na téma *Geometrie ve výtvarném umění*. Bývalo mi líto studentek, které se jednou budou muset postavit před třídu – neváhám říci: plnou mládeže obojího pohlaví, která je nemilosrdná k postavám na stupínku – a budou se bát načrtnout na tabuli i jednoduchý obrázek a budou znejistěné při pomyšlení, že ani z elementární geometrie neznají, co by znát měly. Patrně i tohle může být jedním z důvodů, proč se ve školách nedostává mladých učitelských sil.

Naprosto souhlasím s popisem stavu našeho školství z výzvy *Všem, jejichž hlas je slyšet*, s níž se v září 2007 obrátil Jindřich Bečvář z Matematicko-fyzikální fakulty na českou veřejnost. Ke konci téhož měsíce se v Hradci Králové konala konference *Matematika – základ evropské vzdělanosti* (přiznám se, že tak výlučné postavení bych matematice nepřipisoval); ve sborníku *O škole a vzdělávání* (Praha, 2007), který editovala Martina Bečvářová, je závěrečný Bečvářův příspěvek *Nondum omnium dierum sol occidit* (str. 131–136), v němž autor rozebírá reakce na svou výzvu a znovu píše o našem školství; se všemi jeho řádky je třeba souhlasit. Rovněž souhlasím s přednáškou bývalého ministra školství Petra Piťhy (*1938) z *Pedagogických dnů* v Hradci Králové na začátku dubna 2008, kterou charakterizoval stav našeho školství; byla otištěna v témže roce v Učitelských novinách č. 19 na stranách 16 až 18.

* * *

Situaci matematiky však nevidím jako nejhorší ze všech předmětů. V nejhorším postavení je dějepis. Znám téměř zoufalé hlasy jeho středoškolských učitelů – jejich kolegové z vysokých škol či vědeckých ústavů je až na výjimky přehlížejí. Neznalost alespoň základní historie vlastního národa považuji do budoucna za nebezpečnější, než jen chatrné schopnosti v elementární matematice. Školské úřady si neuvědomují nebo dokonce nechtějí uvědomit – a s nimi i podstatná část naší veřejnosti, že mladí občané bez historického povědomí jsou snadným objektem zvrácených nálad. V tomto smyslu poslala Asociace učitelů dějepisu ČR v lednu 2009 dopis tehdejšímu ministru školství Ondřeji Liškovi a jeho náměstku Jindřichu Kitzbergerovi; kopie dostaly příslušné výbory Poslanecké sněmovny a Senátu, historická pracoviště a tisk. Dopis byl otištěn ve čtrnáctideníku Národní osvobození číslo 3 z 29. ledna 2009, nebyl převzat do Lidových novin. Případné reakce ministerstva a dalších orgánů mi nejsou známy.

* * *

Uvedu pasáž z brožury, která byla před třiceti roky volně k rozebrání v knihovně v Klementinu. Citát je z horní poloviny strany 80:

Jsme dosti často svědky tvrzení, že mladí lidé v školách jsou přetěžováni a nadbíhá se obecně snahám po snižování studijních nároků. Počet hodin výuky stále klesá, ale není fakticky kompenzován samostatnou prací na tvůrčích úkolech. To je jedna ze závažných chyb při formování životního stylu. Mladý člověk musí být moudře přetížen nároky učitelů i společnosti, musí mít laťku hodně vysoko a zejména musíme podle jeho talentu nároky upravovat. Jestliže zvolíme normu podle slabých studentů, pak velká část ostatních se nenaučí pilně a náročně pracovat, nenaučí se využívat dokonale čas, spolehlivě plánovat a rozvrhnout svou práci. Rozbory provedené na některých vysokých školách ukazují, že celá řada mladých lidí pracuje méně než 40 hodin týdně. Pokud nevytvoříme jiné podmínky pro studium, nezajistíme od počátku předpoklady nekontrolované samostatné tvůrčí práci a neprovedeme důslednou diferenciaci podle talentu, do té doby je třeba raději více žádat od všech. Neurózy vznikají spíše ze špatně tráveného volného času než z přemíry studijních povinností. Je třeba konstatovat, že o individuálních talentech zatím málo víme a nemáme ani potřebné určující metody jak ohodnotit možnosti mladých lidí.

Tyto řádky nejsou z období prostomyslného nadšení značné části české veřejnosti na přelomu let 1989 až 1990 či brzy po něm, ale z doby nejhlubší normalizace, z druhé poloviny sedmdesátých let, kdy ministerstvo školství za kralování Milana Vondrušky vydalo onu brožuru s názvem *Obecná představa o dlouholeté perspektivě vysokých škol* (Praha, 1978). Je po třiceti letech v nynějších geometrických učebnicích splněna ministerská představa ze závěru citátu anebo je třeba ji prostě zavrhnout jako „vrcholně normalizační“? Anebo se má považovat za splněnu těmi řádky v nynějších učebnicích planimetrie, stereometrie a analytické geometrie, které jsou v nich označeny jako *náročnější a určeny těm, kteří budu studovat na vysoké škole obor, jehož součástí bude i další studium matematiky* (Planimetrie, str. 7). Tyto řádky, které ve zmíněných učebnicích tvoří asi desetinu, resp. patnáctinu, resp. dvacetinu textu (v Goniometrii nejsou), jsou často – srovnány s Vojtěchovými učebnicemi z let 1910 až 1912 nebo dokonce se Šilháčkovou a Sechovského *Analytickou geometrií* z roku 1936 – přímo úsměvné.

K závěru připojím dva postřehy, které už jen samy o sobě dosti vysvětlují.

Na stavební fakultě ČVUT jsem působil do června roku 1997. Na katedře nás bylo v roce 1990 asi čtyřicet; ale pouze jeden mladý člen a jeden člen v pokročilém věku usilovali o změny – marně. S velkou podporou nejvýznamnějších vědeckých pracovníků z geodetické obce jsem se snažil prosadit způsob studia, který by velmi prospěl talentovaným studentům – marně. Tehdejší ovzduší vystihuje scénka ze začátku devadesátých let: Když se představovali dva kandidáti na nového děkana, ozval se z auditoria asi třicetiletý kolega s tímto dotazem: *Jaké budou mé sociální jistoty?* Dostalo se mu ujištění, že se nemá čeho obávat. Má odpověď by byla jiná: *Pane kolego, Vaše jistoty jsou ve Vaší práci; buďte rád, že minula dlouhá doba, kdy byly v lecčems jiném.*

Pamatuji si poměry z Hlučína, malého okresního města, do kterého jsem ve druhé polovině třicátých let chodil do gymnázia; městečko bylo tehdy asi deset kilometrů od hranic s Německem. Ředitel reálného gymnázia Josef Moric byl vážený občan, na ulici ho každý uctivě zdravil a ustupoval mu z cesty. Vůči zemskému školnímu úřadu v Brně byl však lilipután. Ani snít se mu nemohlo, že by si vybíral učitele, že by rozhodoval o dotaci předmětů a třeba dějepis v některých třídách úplně zrušil, že by si jeho škola volila maturitní témata. Někdy až bezbřehý liberalismus, do kterého naše školství zabředlo, má na jeho dnešním chabém výkonu podstatný díl viny.

* * *

Pamatuji doby, v nichž naše nejvyšší školské úřady viděly jen vzory z východu, z „nejpokrokovější země světa“. Nyní je vidí jen na západě, zpravidla o něco vzdálenějším. Víme, jak nám ve školství východní rady „prospěly“. Jsou i po této zkušenosti naše školské úřady schopny si připustit otázku, jak třeba dopadneme se západními radami a návody?

Doporučuji tuto knížku rakouského autora (kdyby byl stručnější, její působivost by jen zvýšil):

Konrád Liessmann (nar. 1953): *Teorie nevzdělanosti. Omyly společnosti vědění.* Praha, 2008, 125 stran (překlad německého originálu vydaného ve Vídni roku 2006).

Kapitola 6 na str. 63 s nadpisem *Bologna – prázdnota evropského vysokoškolského prostoru* začíná takto: *Bída evropských vysokých škol má jméno Bologna.*[49]

Rovněž doporučuji článek, který napsal Zdeněk Pinc (nar. 1945) z Fakulty humanitních studií UK: *Vzdělávání k povolání – příspěvek k ideji univerzity* (Aula – viz odd. 19 – 17(2009), 1–4).

Alespoň dvě věty ocituji. Když stručně popsal dnešní vysokoškolské studium, autor píše: … *Zle to dopadne s univerzitou, která z takových akademických kastrátů tvoří doktorandy a z těch pak zákonitě vyrůstá i učitelský sbor. … Vymstila se likvidace práce v klasických jazycích, vymstí se podrývání druhého racionálního sloupu vzdělávání – matematiky.*

* * *

V delší řadě posledních let musí být každému zřejmé, že s růstem počtu studentů nastává pokles jejich vzdělání. Kdyby se vyšetřovalo, v které době začíná naše školství nabývat podoby klesající funkce, bylo by třeba se vrátit až do druhé poloviny čtyřicátých let. Nedostala se mi do rukou studie, která by tak učinila. Rád bych si ji přečetl a srovnal s tím, co jsem zažil a co pamatuji jako žák, student a zejména jako učitel, který své povolání vykonával rád.

---

[49] Recenze Liessmannovy knížky a upozornění na příbuznou literaturu uveřejnil J. Bečvář na několika místech: Informace České matematické společnosti č. 66 (březen 2010), 37–41; Matematika – fyzika – informatika 20(2011), 443–445; Academia, súčasnosť a perspektívy vysokých škôl 20(2009), č. 3, 46–49; A. Trojánek (ed.): Sborník z XIV. semináře o filosofických otázkách matematiky a fyziky 2008, Velké Meziříčí, 2010, str. 126–131; sborník Jak připravit učitele matematiky, Matfyzpress, Praha, 2010, str. 311–315. J. Bečvář se opakovaně kriticky vyjadřoval k situaci ve školství a vzdělávání v těchto článcích:

• *Matematika, vzdělanost a vzdělávání*, in M. Lávička, B. Bastl, M. Ausbergerová (ed.): 10. setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2006, Vydavatelský servis, Plzeň, 2006, str. 49–63 (viz též J. Bečvář, M. Bečvářová, A. Slavík (ed.): Jak připravit učitele matematiky, Matfyzpress, Praha, 2010, str. 158–172; A. Trojánek, J. Novotný (ed.): Sborník z XIII. semináře o filosofických otázkách matematiky a fyziky 2006, Velké Meziříčí, 2008, str. 101–119);

• *Všem, jejichž hlas je slyšet*, in M. Bečvářová (ed.): O škole a vzdělávání, Matfyzpress, Praha, 2007, str. 9–20 (viz též A. Trojánek, J. Novotný (ed.): Sborník z XIII. semináře o filosofických otázkách matematiky a fyziky 2006, Velké Meziříčí, 2008, str. 120–121);

• *Naše žhavá současnost*, in M. Bečvářová (ed.): O škole a vzdělávání, Matfyzpress, Praha, 2007, str. 71–89 (viz též A. Trojánek, J. Novotný (ed.): Sborník z XIII. semináře o filosofických otázkách matematiky a fyziky 2006, Velké Meziříčí, 2008, str. 122–147);

• *Co má znát a umět pedagog* [*CMZUP*], in M. Lávička, B. Bastl (ed.): Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2008, Vydavatelský servis, Plzeň, 2008, str. 53–58 (viz též J. Bečvář, M. Bečvářová, A. Slavík (ed.): Jak připravit učitele matematiky, Matfyzpress, Praha, 2010, str. 173–178; A. Trojánek (ed.): Sborník z XIV. semináře o filosofických otázkách matematiky a fyziky 2008, Velké Meziříčí, 2010, str. 93–100);

• *Obliba matematiky*, in M. Lávička, B. Bastl (ed.): Setkání učitelů matematiky všech typů a stupňů škol 2010, Vydavatelský servis, Plzeň, 2010, str. 51–56;

• *Jak zvelebit učitelství*, in J. Coufalová (ed.): Hledisko kvality v přípravě učitelů, ZČU, Plzeň, 2010, str. 37–48 (viz též A. Trojánek (ed.): Sborník z XIV. semináře o filosofických otázkách matematiky a fyziky 2008, Velké Meziříčí, 2010, str. 109–121);

• *Stručně o současném stavu učitelství (nejen matematiky)*, in J. Bečvář, M. Bečvářová, A. Slavík (ed.): Jak připravit učitele matematiky, Matfyzpress, Praha, 2010, str. 17–28.

Příloha I

b) Z deskriptivní geometrie:

1. Sestrojte plochu kulovou, která prochází body ABC [A (1; 8; 2) B (4; 2,5; 3) C (0; 4; 5)] a dotýká se nárysny. 2. V kosoúhlém promítání ($w = 135^0$, $q = {}^3/_4$) sestrojiti část pravidelného dutého šestibokého hranolu [základna v půdorysně má střed S (0; 5; 0), jedna hrana je rovnoběžná s osou x, $r = 4$] seříznutého rovinou ϱ (8,5; 120°; 135°). Technické osvětlení. 3. Sestrojiti rot. paraboloid s osou kolmou k půdorysně, je-li dán bod na jeho povrchu A a vrchol V [A (2; 7; 5), V (0; 5; 7,3)]. Sestrojiti jeho řez s rovinou proloženou body A, B (-3; 8; ?) tak, aby průsečná křivka se dotýkala půdorysny. [Ze dvou možných případů zvoliti rovinu tak, aby její první stopa svírala s osou x menší úhel.]

b) Z deskriptivní geometrie:

1. Zobraziti krychli, je-li dán její střed S (1;5;5), jedna stěna leží v rovině ϱ (6; 5; 7) a úhlopříčka této stěny má od π odchylku $\alpha = 45^0$. Z obou možných případů zvoliti tu úhlopříčku, jejíž stopník má větší souřadnici y. 2. Anuloid je určen osou o $\perp\pi$ (x = 0, y = 6) a třemi body [A (1; 5; 5) B (4; 5; 2; 3,5) C (3; 1,5; 5)] Sestrojiti jeho řez s rovinou ϱ = (ABC). 3. V centr. promítání zobraziti a osvětliti rot. kužel, jehož podstatná kružnice je určena 3 body [A (-11; -10; 5,5) B (-7; ?; 1) C (-2; ?; 4); n ϱ = x], výška v = 8. Vržený stín na rovinu podstavy. Úběžník světla $U\varrho s$ (2; 0; 5,5). Střed promítání S (0; 6.5; 7.5).

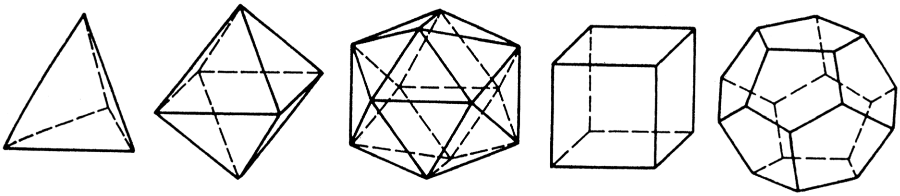
d) z deskriptivní geometrie: 1. Zobrazte koule, procházející body A (3,5; 4,5; 1), B (0; 0,5; 3,5) a dotýkající se obou průměten. Sestrojte pronik těchto koulí. — 2. V kosoúhlém promítání ($\omega = 150^0$, $q = {}^3/_4$) zobrazte technické osvětlení pístu s táhlem o společné ose OS! [O (0; 0; 0), S (10; 0; 0)]. Píst jest rot. válec s podstavou v μ, výškou v = 2,5 (na + x), polom. $r_1 = 3{,}5$; táhlo je rot. válec poloměru podst. $r_2 = 1{,}5$. — 3. Dveře, před nimiž je schod, jsou ukončeny románským obloukem. Přední, spodní hrana schodu je AB [A (3; 0; 0;), B (—3,5; 8; 0)], stěna zdi je s ní rovnoběžná a jde bodem M (7; 0; 0), výška schodu v = 1, výška dveří nad schodem (bez oblouku) $v_1 = 11$, šířka dveří š = průměru oblouku = 5,5, hloubka ve zdi h = 2. Zobrazte je v centrálním promítání C (—2; —18; 7), distanci redukujte na polovinu! Sestrojte osvětlení pro paprsky s II ν, $\alpha_1 = 45^0$!

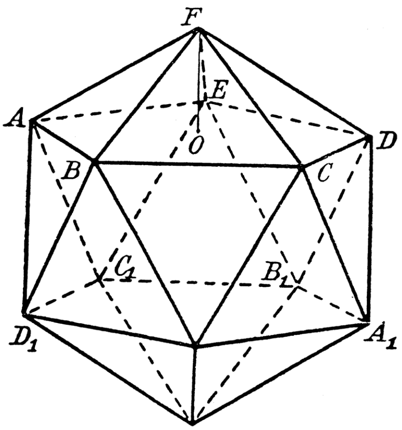
Deskriptivní geometrie:

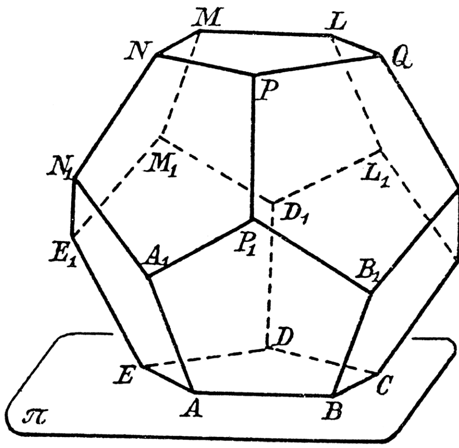
1. Dány mimoběžky a ≡ $\overline{AB}$, b ≡ $\overline{CD}$; zobraziti krychli, jejíž dvě úhlopříčky protilehlých stěn v těchto mimoběžkách leží. A (—3, 8, 3), B (3, 2, 13·5), C (6, 8·5, 6), D (0, 0, ?).
2. V šik. prom. ($\omega = 135^0$, $q = {}^1/_2$) zobr. pronik. Pravidelný pětiboký jehlan [S (8, 7·5, 0), A (8, 2·5, 0), v = 13], hranol. přímá plocha se základnou v π [M (7, 0, 4·5), N (8·5, 0, 2), P (11, 0, 2·5), Q (11, 0, 6·5)].
3. V persp. (d = 30, v = 9) zobraziti rotační válec se zákl. v π [S (—3, 7, 0), r = 4, v = 4] a desku hranol. (h = 6, v = 2). Osvětlení U_s (12, 0, —11).

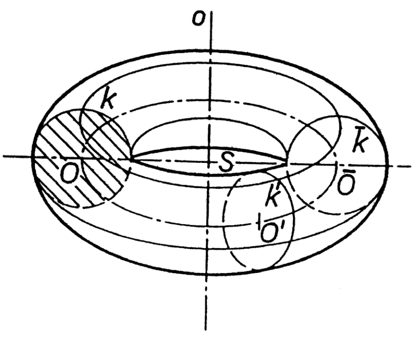
1. Průměty neprav. jehlanu čtyřbokého stojícího na π, dána-li základna, půd. odch. rov. sečné a řez (daný rovnoběžník).
2. Rovnoběžné osvětlení kamenné nádržky, složené z půlválce a dvou čtvrtkoulí.
3. Protíti rot. hyperbolid ve dvou parabolách, dána-li půd. stopa roviny sečné.

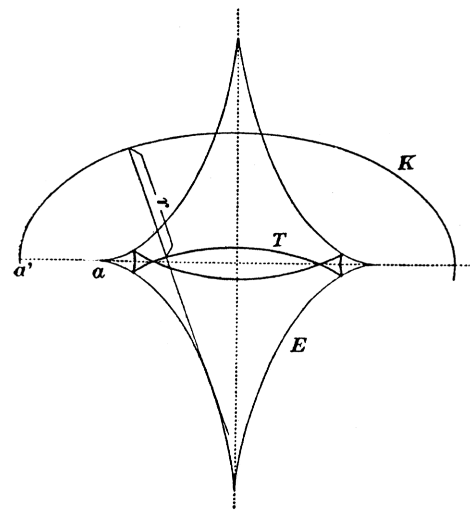
Z deskriptivní geometrie: 1. Zobraziti sdružené průměty pravidelného osmistěnu, jehož jeden vrchol A(- 2. 5, 2, 9) a jedna úhlopříčka jest na přímce p ≡ $\overline{PQ}$ [P/- 9, 1, 0/, Q/5.5, 9.5 11/].
2. Rotační hyperboloid jednoplochý [O $\perp\pi$, S /0, 5, 6/, a 2.5, b 4] protněte rovinou ϱ ≡ PQM [P/ -9, 6, 0/, Q/ -3, 12.5, 0/, M/0, 6, 5/] a zobrazte obvyklé osvětlení tělesa omezeného plochou rovinou ϱ a π.
3. V axonometrii (xy = 15, xz = 11, yz = 14) zobraziti osvětlení rot. kužele s podstavou v π [S/4, 5 5, 0/, r = 3, v = 14] a kvádru, jehož hrany zapadají do os x, y, z, a mají délku 8, 2, 5. Směr světla s ≡ $\overline{VV'}$. V'/6, - 7.5, 0/Vrchol x voliti 5·5 cm od pravého kraje.



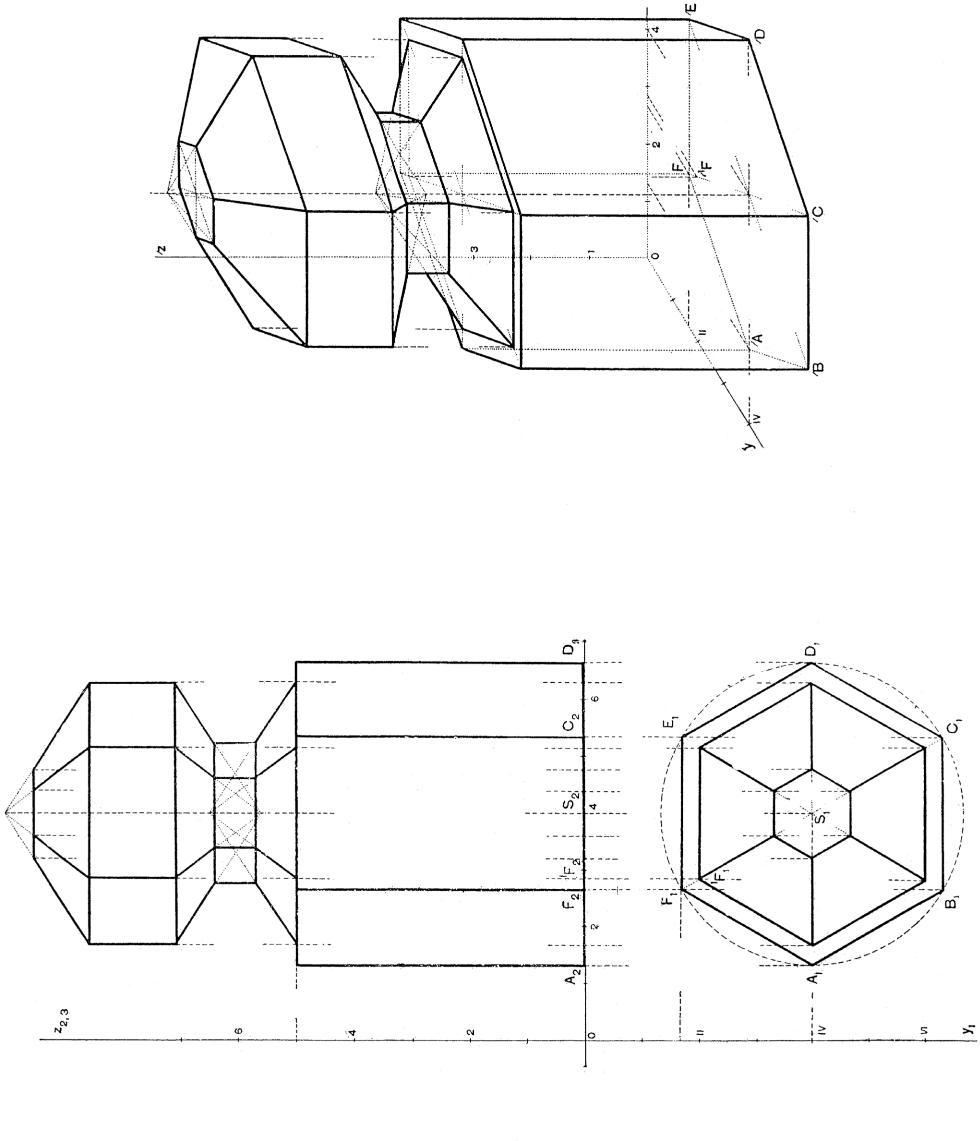

F
E
A
D
O
B
C
C_1
B_1
D_1
A_1


M
L
N
Q
P
N_1
M_1
L_1
Q_1
D_1
E_1
A_1
P_1
B_1
C_1
D
E
C
A
B
π

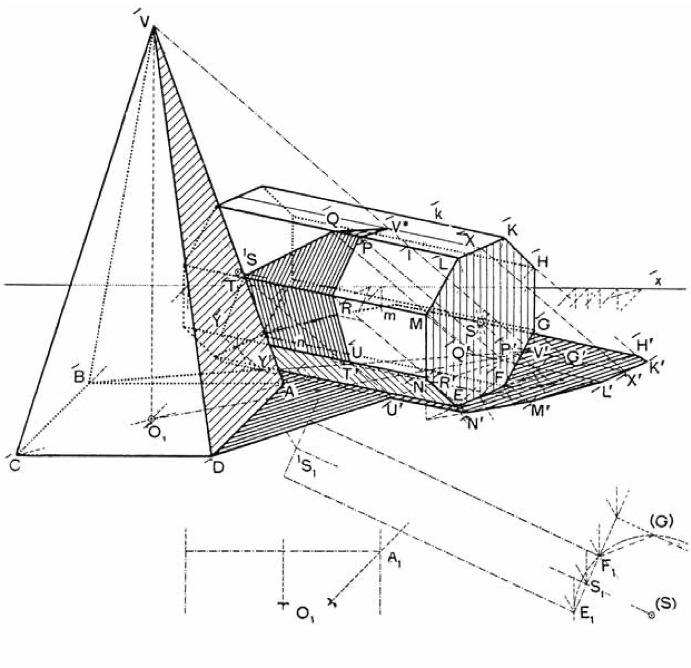

o
k
S
O
$\bar{k}$
$\bar{O}$
k'
O'


K
r
T
a'
a
E

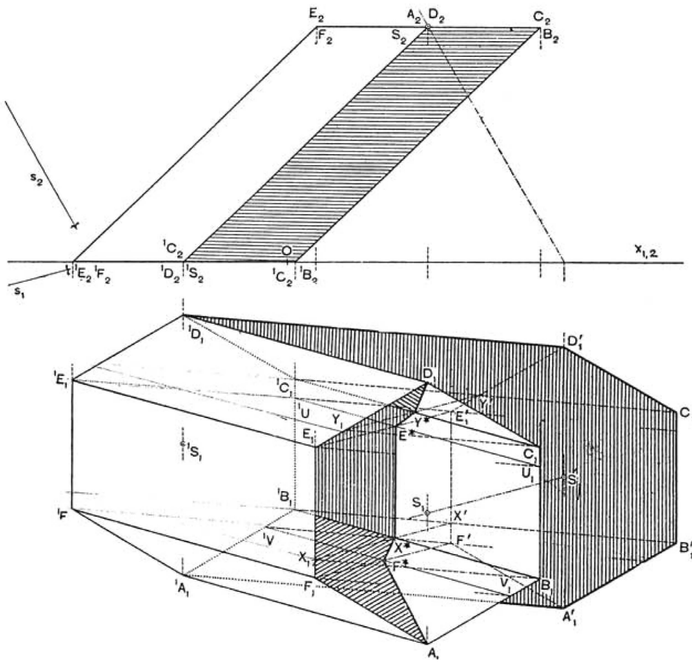
Příloha II



Příloha III

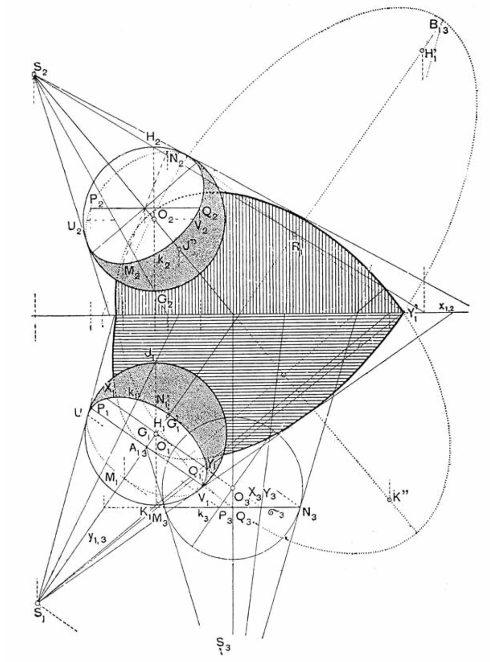


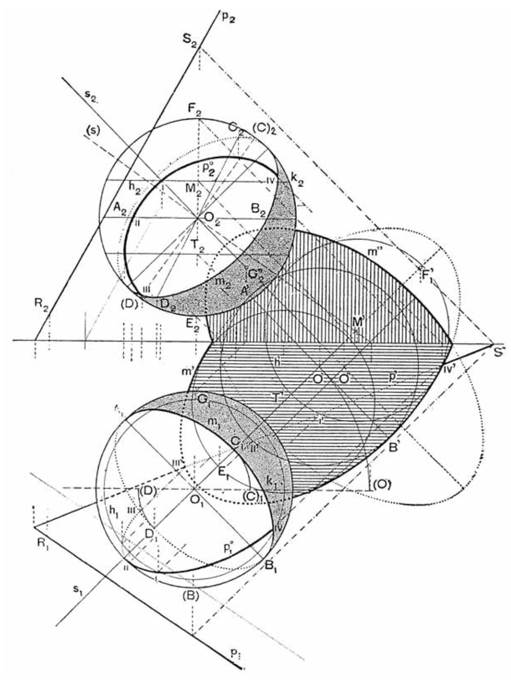
V
B
C
D
A
O1
S1
Q
V*
k
X
K
H
L
S
T
P
R
m
M
G
Y
n
U
T'
N
R'
E
U'
N'
M'
L'
X'
K'
H'
G'
V'
P'
Q'
F
x
(G)
F1
S1
E1
(S)
A1
O1



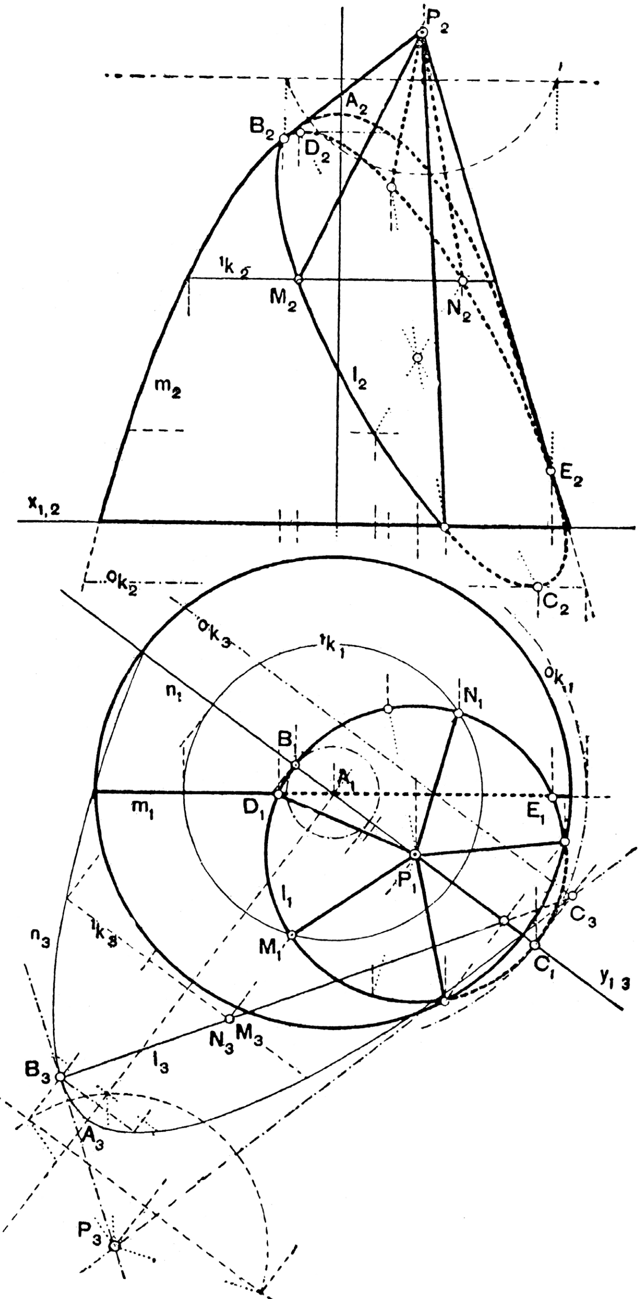
E2
F2
A2
D2
C2
S2
B2
s2
s1
x1,2
O
D1
D'1
E1
C
U
Y1
E1
Y*
E*
C1
U1
S1
B1
S1
X'
F
V
X1
X*
F'
F*
A1
F1
V1
B1
A'1
B'1
C'1
A1

Příloha IV

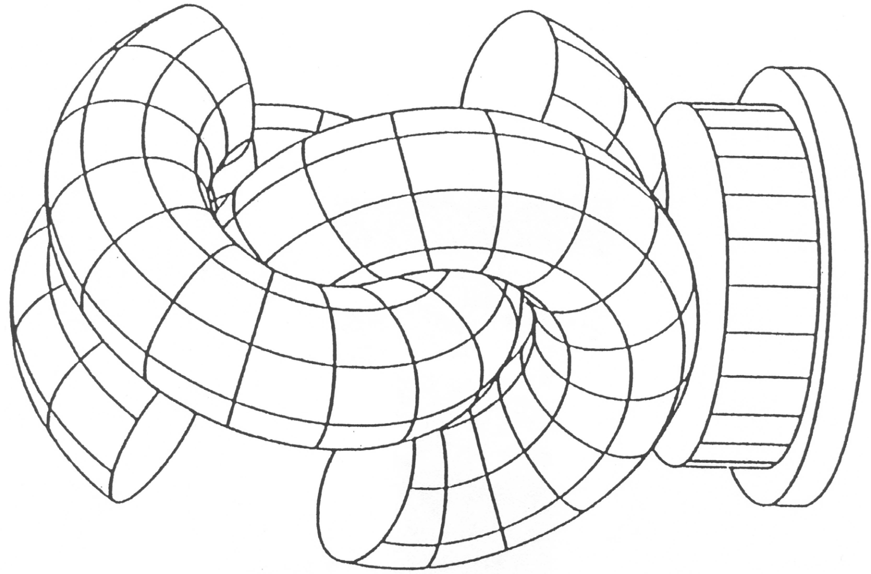

S2
H2
N2
P2
O2
Q2
U2
V2
M2
k2
G2
x1,2
J1
X1
k1
N1
U'
P1
H1
G1
O1
A1,3
M1
V1
O3
X3
Y3
N3
K1
M3
k3
P3
Q3
K''
y1,3
S1
S3
B1,3
H'1

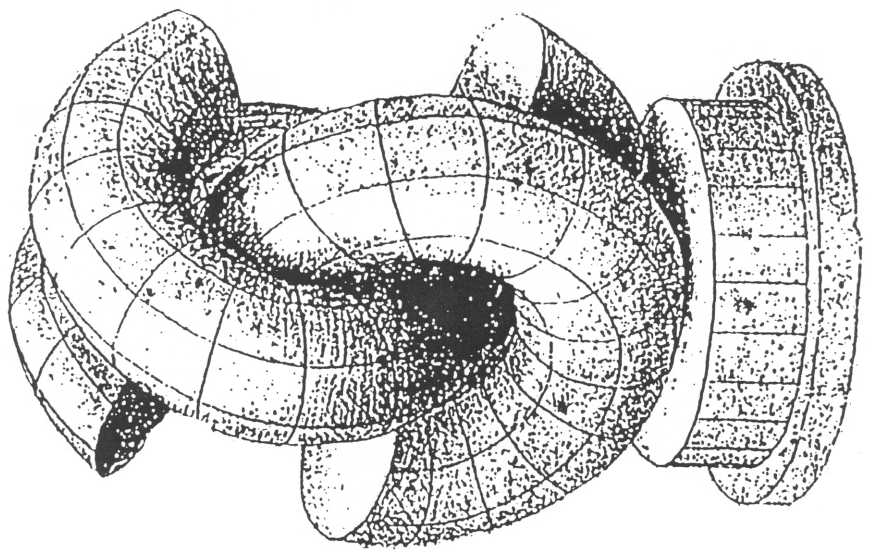

p2
S2
s2
(s)
F2
(C)2
h2
M2
A2
O2
B2
k2
T2
m2
R2
(D)
D2
E2
m''
F'
M'
S'
m'
h'
O
p'
T'
G1
m1
C1
B'
E1
k1
(O)
(D)
O1
(C)1
h1
R1
D1
B1
s1
(B)
p1

Příloha V


P2
A2
B2
D2
1k2
M2
N2
m2
l2
E2
x1,2
0k2
C2
0k3
1k1
0k1
n1
N1
B
A1
m1
D1
E1
P1
l1
C3
M1
C1
y1 3
n3
1k3
N3
M3
l3
B3
d
A3
P3

Příloha VI

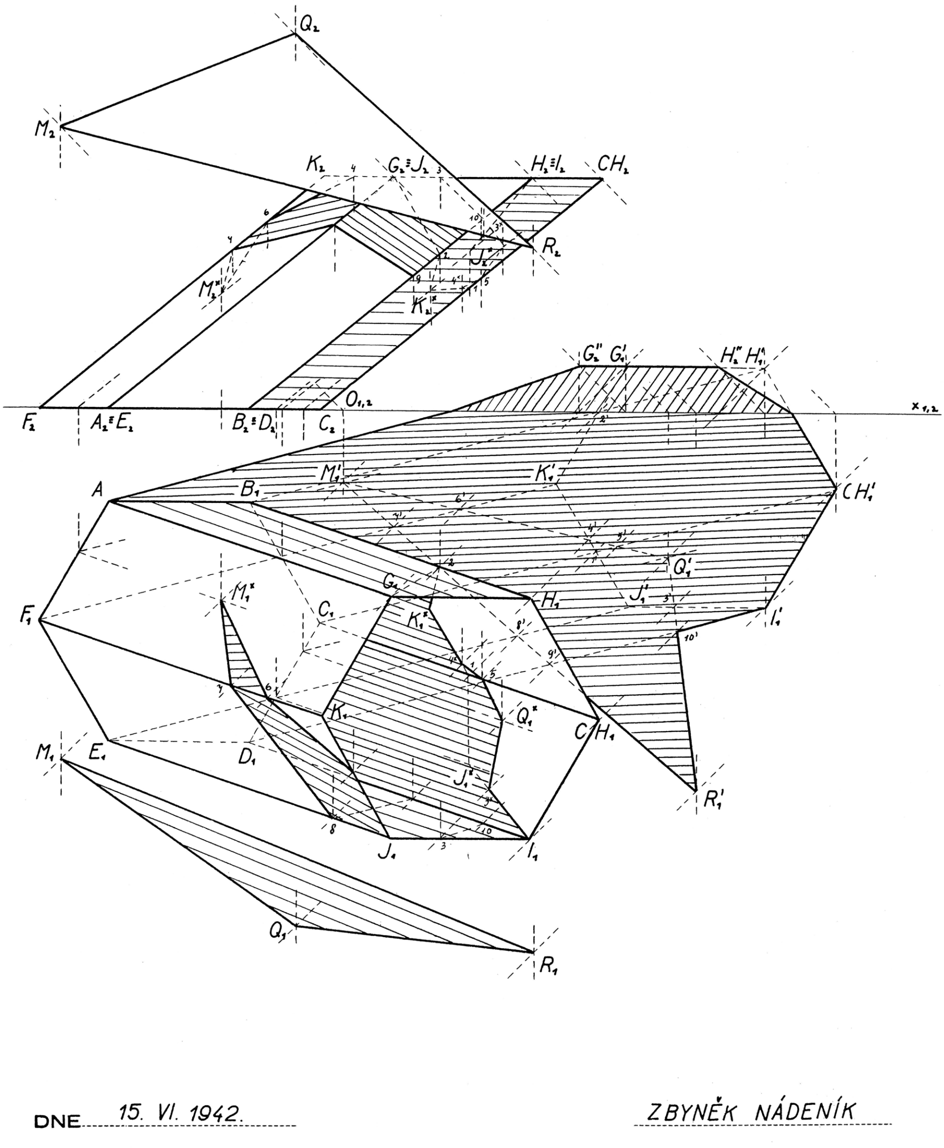




Příloha VII

REÁLKA V PROSTĚJOVĚ

LIST 7.

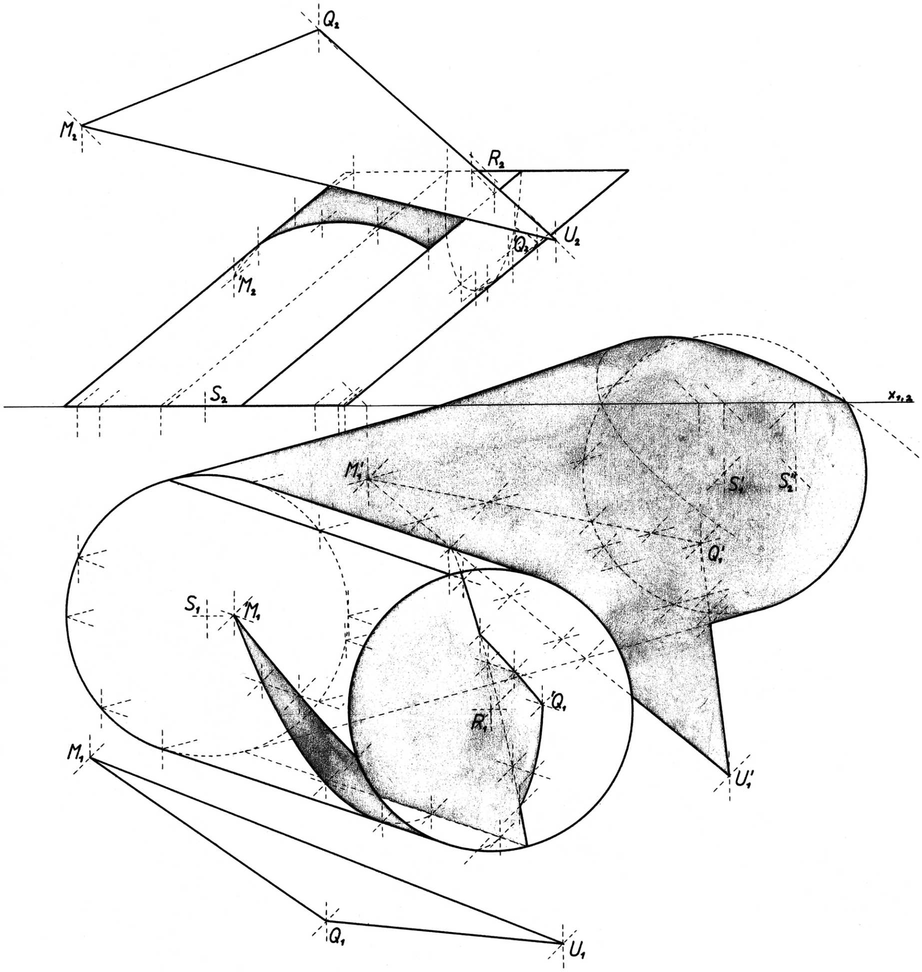


DNE 15. VI. 1942.

ZBYNĚK NÁDENÍK

Příloha VIII

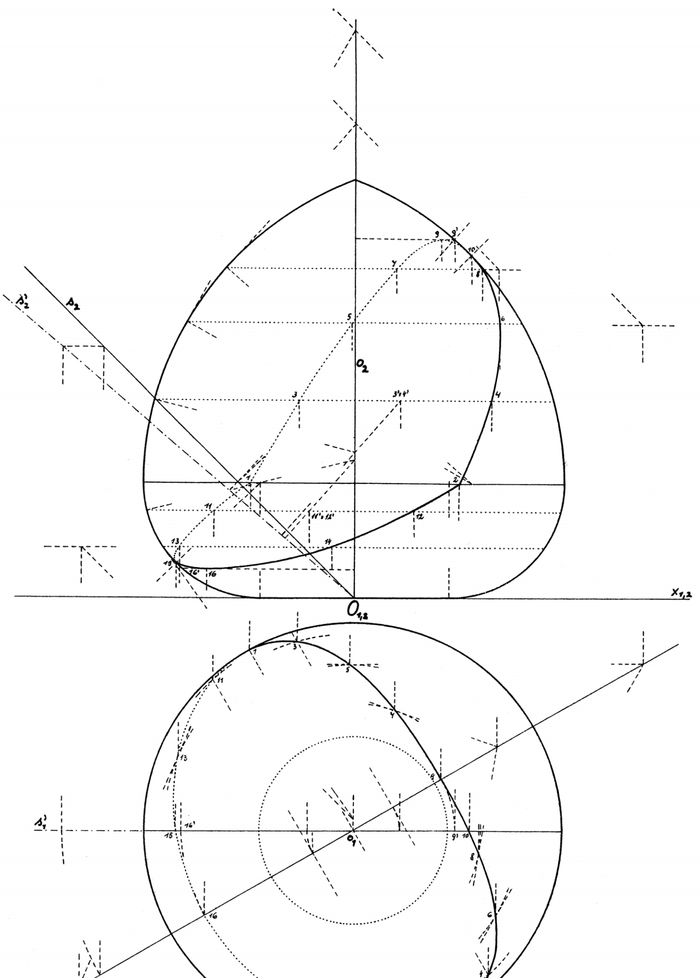
REÁLNÉ GYMNASIUM L. 5.



DNE 26. VI. 1943 Z. NÁDENÍK, VI. B.

Příloha IX

REÁLNÉ GYMNASIUM LIST 6.



DNE 3. VI. 1944. Z. NÁDENÍK, VII.C

Příloha X

Louny 1920.

UČEBNICE MATHEMATIKY PRO STŘEDNÍ ŠKOLY VYDÁVANÉ
JEDNOTOU ČESKÝCH MATHEMATIKŮ V PRAZE.

GEOMETRIE

PRO VII. TŘÍDU REÁLEK.

NAPSAL

PhDr. JAN VOJTĚCH,

PROF. II. STÁTNÍ REÁLKY A S. DOCENT ČESKÉ TECHNIKY V BRNĚ.

CENA VÁZ. K 2·80.

Schváleno vynesením vys. c. k. ministerstva kultu a vyučování
ze dne 10. ledna 1912 č. 49.187 ex 1911.

V PRAZE 1912.

NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATHEMATIKŮ.

UČEBNICE DESKR. GEOM. PRO STŘEDNÍ ŠKOLY VYDÁVANÉ
JEDNOTOU ČESKÝCH MATHEMATIKŮ V PRAZE.

ZÁKLADY
DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE.

DÍL II.

PRO V. TŘ. REÁLEK.

(Dle osnovy z roku 1909.)

Napsali:

JOSEF PITHARDT,
professor c. k. reálky v Praze-II.,

a

LADISLAV SEIFERT,
professor c. k. reálky v Plzni.

S 90 OBRAZCI V 73 ČÍSLECH.

CENA NEVÁZ. 2 K, VÁZ. 2 K 40 h.

Schváleno vynesením vysokého c. k. ministerstva kultu a vyučování
ze dne 25. srpna 1910 č. 32.674.

V PRAZE 1910.
NÁKLADEM JEDNOTY ČESKÝCH MATHEMATIKŮ.

UČEBNICE PRO STŘEDNÍ ŠKOLY VYDÁVANÉ JEDNOTOU
ČESKOSLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE
145

DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

PRO VII. A VIII. TŘÍDU REÁL. GYMNASIÍ A REFORMNÍCH REÁLNÝCH GYMNASIÍ

NAPSALI

JOSEF KLÍMA a VÁCLAV INGRIŠ

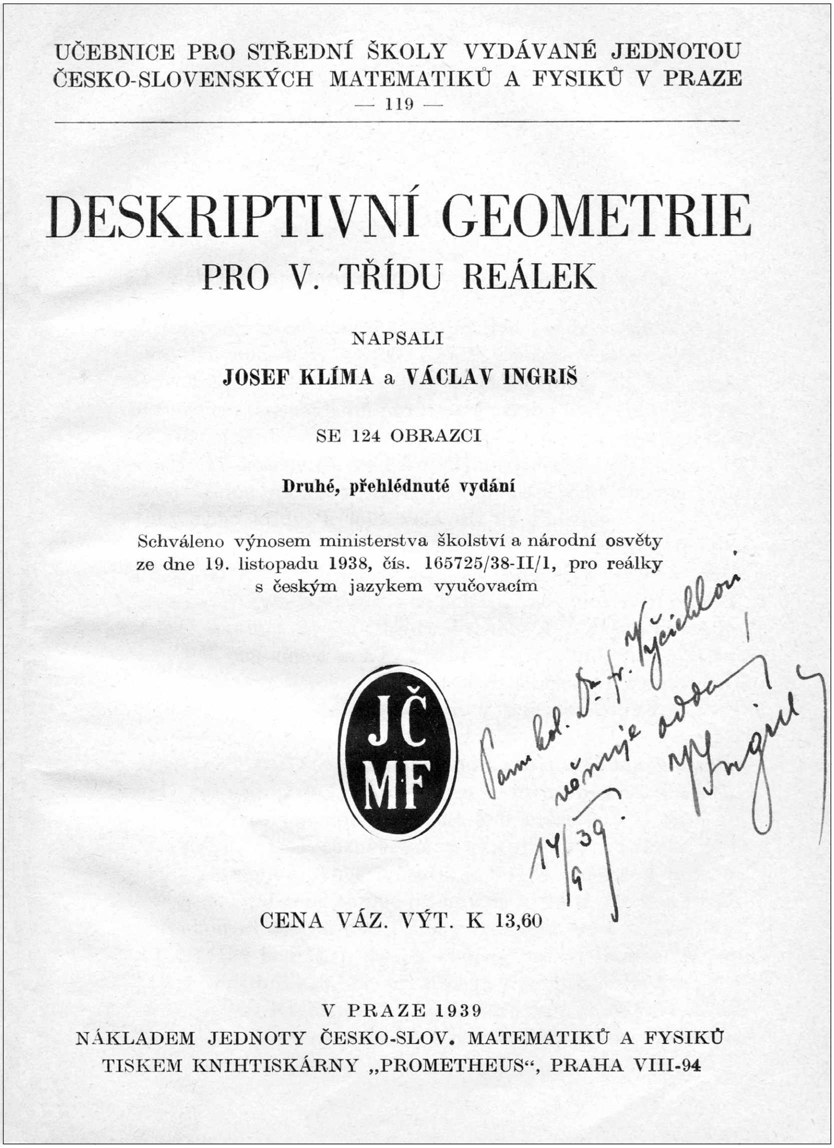
SE 124 OBRAZCI

Schváleno vynesením ministerstva školství a národní osvěty ze dne 27. května 1935, čís. 63808/35-II/1, pro reálná a reformní reálná gymnasia s československým jazykem vyučovacím v znění českém

Panu kol. Dru Frant. Vyčichlovi
v upomínku věnuje
oddaný
V. Ingriš

CENA VÁZ. VÝT. Kč 19,—

PRAHA 1935
NÁKLADEM JEDNOTY ČESKOSLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ
TISKEM KNIHTISKÁRNY „PROMETHEUS“, PRAHA VIII



UČEBNICE PRO STŘEDNÍ ŠKOLY VYDÁVANÉ JEDNOTOU ČESKO-SLOVENSKÝCH MATEMATIKŮ A FYSIKŮ V PRAZE

— 119 —

DESKRIPTIVNÍ GEOMETRIE

PRO V. TŘÍDU REÁLEK

NAPSALI

JOSEF KLÍMA a VÁCLAV INGRIŠ

SE 124 OBRAZCI

Druhé, přehlédnuté vydání

Schváleno výnosem ministerstva školství a národní osvěty ze dne 19. listopadu 1938, čís. 165725/38-II/1, pro reálky s českým jazykem vyučovacím

Panu kol. Dr. Fr. Vyčichlovi
věnuje oddaný
V. Ingriš
14/9 39.

JČ MF

CENA VÁZ. VÝT. K 13,60

V PRAZE 1939

NÁKLADEM JEDNOTY ČESKO-SLOV. MATEMATIKŮ A FYSIKŮ

TISKEM KNIHTISKÁRNY „PROMETHEUS“, PRAHA VIII-94