GEOMETRICKÉ PRÁCE KARLA ZAHRADNÍKA II.

Nejpočetnější skupina vědeckých a odborných prací K. Zahradníka je věnována tematice racionálních křivek. Tento druh křivek lze definovat formálně ryze algebraickým způsobem, nicméně pro čtenáře bude přístupnější spojovat algebraický výklad s názornou geometrickou interpretací objektů formulovaných analytickým způsobem, jenž je pro Zahradníkův styl charakteristický. Jednoduchost a informativní hodnota algebraického vyjádření se více projevuje při používání homogenních souřadnic, jež jsou při práci v projektivní rovině vhodnější, avšak jejich nevýhoda spočívá v tom, že jsou nepoužitelné na vyjádření metrických a podobnostních vlastností a relací, které tvoří podstatnou část Zahradníkových výsledků o rovinných algebraických křivkách. Přechod od homogenních souřadnic k nehomogenním a obráceně nečiní čtenáři obeznámenému se základy analytické metody v projektivní a algebraické geometrii žádné potíže, ovšem předpokládat tuto znalost v dnešní době, když algebraická geometrie třebas i v elementární klasické podobě (téměř) vymizela z programu vysokoškolského vzdělávání matematiků jakékoliv specializace, je nereálné.

Pro porozumění Zahradníkovým článkům bude proto účelné uvést několik základních informací o analytickém vyjádření rovinných algebraických křivek, jejich prvků, vlastností a vztahů k jiným objektům projektivní roviny. Všechny údaje budou uvedeny v homogenních projektivních souřadnicích. Vyjádření v nehomogenních souřadnicích, vhodné pro vlastní část rozšířené euklidovské roviny, lze získat jednoduchým procesem dehomogenizace rovnic a jiných zápisů v homogenních souřadnicích.

Několik obecných poznámek o rovinných algebraických křivkách v projektivní rovině

Ambientní rovinou je reálná projektivní rovina $P^2(R)$, v nutných případech rozšířená komplexifikací do komplexní projektivní roviny $P^2(C)$.

Ireducibilní algebraickou křivkou stupně n ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$) v projektivní rovině se nazývá množina všech bodů projektivní roviny vyhovujících rovnici

$$f(x_0, x_1, x_2) = 0,$$

kde $f(x_0, x_1, x_2)$ je nenulová ireducibilní homogenní polynomická funkce tří proměnných x_0, x_1, x_2 stupně n nad polem reálných čísel. (Pro zdůraznění se dodává přívlastek *reálná* (křivka).)

Je-li homogenní polynomická funkce f stupně n reducibilní a její rozklad na ireducibilní činitele má tvar

$$f = f_1^{r_1} \cdots f_k^{r_k},$$

kde f_i, $i = 1, \ldots, r$, je ireducibilní homogenní polynomická funkce stupně n_i ($n_i \in \mathbb{N}$, $n_i \geq 1$) a $r_i \in \mathbb{N}$, $r_i \geq 1$; $i = 1, \ldots, k$, ireducibilní křivky dané rovnicemi

$$f_i(x_0, x_1, x_2) = 0, \quad i = 1, \ldots, k;$$

se nazývají *ireducibilní komponenty* c_i rozkladu křivky c dané rovnicí

$$f(x_0, x_1, x_2) = 0$$

a čísla r_i, $i = 1, \ldots, k$, se nazývají násobností komponent c_i $(i = 1, \ldots, k)$ v rozkladu křivky c. Každému bodu r-násobné komponenty se přisuzuje *násobnost* $\geq r$.

Je zřejmé, že platí:

$$n = r_1 n_1 + \cdots + r_k n_k.$$

Další úvahy se budou týkat výlučně ireducibilních křivek.

Stupeň křivky označuje maximální možný počet průsečíků křivky s přímkou. Průsečíky křivky s přímkou jsou určeny kořeny jisté algebraické rovnice stupně n. Je-li násobnost kořene určujícího průsečík rovna k, mluví se o bodu jako k-násobném průsečíku. Počet společných bodů ireducibilní křivky stupně n s přímkou se započítáním násobnosti je roven n.

Bod křivky se nazývá r-násobným, je-li alespoň r-násobným průsečíkem křivky s každou přímkou, jež bodem prochází. Přímka, pro niž je násobnost průseku v r-násobném bodě křivky větší než r, se nazývá *tečnou* křivky (v daném bodě). Bod násobnosti 1 se nazývá *jednoduchým* bodem a tečna křivky v něm *obyčejnou* tečnou. Bod násobnosti $r \geq 2$ se nazývá *singulárním* bodem křivky. V bodě násobnosti 2 může mít křivka dvě různé tečny anebo jedinou – dvojnásobnou tečnu. V prvním případě se bod nazývá *uzlovým bodem*, ve druhém případě *bodem vratu*.

Rovnici křivky stupně n lze napsat sestupně podle mocniny neznámé x_0 ve tvaru

$$f(x_0, x_1, x_2) = u_0 x_0^n + u_1(x_1, x_2) x_0^{n-1} + \cdots + u_n(x_1, x_2) = 0,$$

kde u_0 je konstanta a $u_i(x_1, x_2)$, $i = 1, \ldots, n$, je binární homogenní polynomická funkce proměnných x_1, x_2 stupně i. Bod O_0 je právě tehdy r-násobným bodem křivky ($r \in \mathbb{N}$, $r \geq 1$), jsou-li koeficienty u_0, $u_1(x_1, x_2)$, $\ldots$, $u_{r-1}(x_1, x_2)$ identicky rovny nule. Množina všech tečen v r-násobném bodě je dána rovnicí

$$u_r(x_1, x_2) = 0.$$

Homogenní binární polynomická funkce $u_r(x_1, x_2)$ stupně r v proměnných x_1, x_2 je nad polem reálných čísel rozložitelná na součin lineárních homogenních polynomických faktorů a ireducibilních homogenních kvadratických faktorů. V krajním případě jsou faktory rozkladu lineární a navzájem různé, což geometricky znamená: V r-násobném bodě křivky existuje nejvýše n vzájemně různých tečen.

Vyskytuje-li se v rozkladu funkce $u_i(x_1, x_2)$ tentýž lineární činitel h-krát $(1 \leq h \leq r)$, nazývá se tečna jím určená h-násobnou tečnou křivky (v r-násobném bodě). Ireducibilní kvadratické činitele rozkladu funkce $u_i(x_1, x_2)$ určují v komplexifikaci reálné projektivní roviny dvě sdružené imaginární tečny.

Křivka stupně n, jež má v bodě O_0 uzlový bod s tečnami o_1, o_2 (osy soustavy souřadnic; jejich rovnice jsou $x_1 = 0$ a $x_2 = 0$), resp. bod vratu s tečnou o_1, má rovnici

$$x_1 x_2 x_0^{n-2} + \cdots = 0,$$

resp.

$$x_1^2 x_0^{n-2} + \cdots = 0.$$

Po dehomogenizaci vzhledem k x_0 a označení $\frac{x_1}{x_0} = x$, $\frac{x_2}{x_0} = y$ nabývají rovnice tvaru

$$xy + u_3(x, y) + \cdots = 0,$$

resp.

$$x^2 + u_3(x, y) + \cdots = 0.$$

(Levé strany rovnic jsou zapsány jako součet homogenních složek vzestupně podle stupně.)

Několik číselných vztahů:

Počet koeficientů v rovnici ireducibilní rovinné algebraické křivky stupně n:

$$\binom{n+2}{2}.$$

Počet jednoduchých podmínek nezávislých pro určení ireducibilní křivky stupně n:

$$\binom{n+2}{2} - 1 = \frac{n(n+3)}{2}.$$

Maximální počet dvojnásobných bodů ireducibilní křivky stupně n, jež nemá singulární body větší násobnosti:

$$\frac{(n-1)(n-2)}{2}.$$

Rod (geometrický) ireducibilní křivky, jež má právě d dvojnásobných bodů a žádné další singulární body:

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - d.$$

Ekvivalence r-násobného bodu s počtem s dvojnásobných bodů:

$$s = \frac{r(r-1)}{2}.$$

Počet všech společných bodů dvou ireducibilních křivek stupně n, resp. m, se započtem násobnosti průseku: nm (Bézoutova věta).

Plückerovy vzorce

Třídou křivky se nazývá maximální možný počet jednoduchých tečen křivky procházejících daným bodem. Dotykové body tečen k dané křivce, jež procházejí daným bodem, jsou ty průsečíky křivky s prvou polárou bodu vzhledem ke křivce, jež jsou regulárními (tj. nesingulárními) body křivky. Má-li ireducibilní křivka stupně n za jediné singularity u uzlových bodů a k bodů vratu, z vlastnosti, že první polára bodu vzhledem ke křivce n-tého stupně má stupeň $n-1$, plyne pro třídu m křivky z Bézoutovy věty o počtu společných bodů dvou ireducibilních křivek vztah:

$$m = n(n-1) - 2u - 3k.$$

To je první Plückerův vzorec.

Pro úplnost budou uvedeny i další Plückerovy vzorce, ačkoliv je Karel Zahradník ve svých pracích téměř nevyužívá.

Označíme-li pro danou křivku její stupeň n, její třídu m, počet uzlových bodů u, počet bodů vratu k, počet inflexních bodů ι a počet dvojných tečen τ (tečny se dvěma různými body dotyku), za předpokladu, že křivka nemá další singularity a význačné body anebo tečny, platí 2. až 4. Plückerův vzorec:

2. $\iota = 3n(n-2) - 6u - 8k$,
3. $n = m(m-1) - 2\tau - 3\iota$,
4. $k = 3m(m-2) - 6\tau - 8\iota$.

Poslední dva vzorce jsou duální k prvním dvěma.

Jelikož dualita u křivek není předmětem Zahradníkova zkoumání (s málo výjimkami), použití posledních dvou vzorců se v jeho pracích vyskytuje ojediněle.

Ireducibilní křivka třetího stupně má nejvýše jeden singulární bod, a to dvojnásobný – uzlový bod nebo bod vratu. Má-li křivka třetího stupně dvojnásobný bod, musí to být bod reálný. Každá přímka roviny křivky procházející tímto dvojnásobným bodem s výjimkou tečen (tečny) v tomto dvojnásobném bodě protíná křivku ještě v jednom bodě. Je tedy svazek přímek se středem v dvojnásobném bodě křivky s výjimkou jedné přímky nebo dvou přímek (podle toho, je-li dvojnásobný bod bodem vratu nebo uzlovým bodem) bijektivně ekvivalentní se soustavou bodů křivky s výjimkou dvojnásobného bodu. Tato bijekce je v homogenních souřadnicích vyjádřena zápisem tří proměnných souřadnic bodu křivky ve tvaru homogenních polynomických funkcí téhož stupně se dvěma homogenními parametry $x_i = \varphi_i(t_0, t_1)$, $i = 0, 1, 2$. V nehomogenních souřadnicích jsou souřadnice proměnného bodu křivky vyjádřeny jako racionální funkce jednoho nehomogenního parametru: $x = \psi(t)$, $y = \chi(t)$. Křivka tohoto tvaru se nazývá *racionální křivka*.

Hlouběji a podrobněji je možno se s teorií algebraických křivek seznámit v knize [1].

Racionální křivky v díle Karla Zahradníka

a) Racionální křivky

Různé partikulární problémy týkajíce se rovinných racionálních křivek tvoří jádro vědeckých prací K. Zahradníka. Značná část těchto prací má stejné nebo podobné schéma, v němž mimo vlastností křivek důležité místo zabírají jisté skupiny bodů a tečen křivky, jakož i korespondence v soustavách bodů a tečen.

V chronologickém pořadí je první prací této skupiny *Zur Theorie der Curven dritter Ordnung und dritter Classe* (K teorii křivek třetího řádu a třetí třídy) [Z6]. Má-li ireducibilní křivka třetího stupně (v práci je stupeň označován názvem *řád*) v pravoúhlé kartézské soustavě souřadnic v rozšířené euklidovské rovině počátek soustavy souřadnic za bod vratu a je-li tečnou v tomto bodě souřadnicová osa x, má křivka rovnici

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = ey^2,$$

kde a, b, c, d, $e \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $e \neq 0$. Parametrické vyjádření souřadnic bodů křivky má po jisté transformaci soustavy souřadnic tvar

$$x = -\frac{du}{au^3 + bu + c}, \qquad y = -\frac{d}{au^3 + bu + c}, \qquad u \in \mathbb{R}.$$

Následuje vyjádření sečny a tečny křivky. Parametry trojice průsečíků křivky s přímkami svazku jsou vázány trilineární rovnicí, symetrickou vzhledem k parametrům těchto průsečíků. To znamená, že parametr kteréhokoliv z těchto tří průsečíků je už jednoznačně určen parametry ostatních dvou. Tato korespondence je v článku nazývána *kubickou involucí.*

Dále je ukázáno, že bodem roviny v nespeciální poloze prochází šest normál křivky a obálka všech normál křivky je racionální křivka šesté třídy a desátého stupně.

Druhá práce *Zur Theorie der Curven dritter Ordnung und vierter Classe* (K teorii křivek třetího řádu a čtvrté třídy) [Z7] je variací tématu předešlé práce s tím rozdílem, že objektem zkoumání je tentokrát křivka třetího stupně (v originálu třetího *řádu*) s uzlovým bodem, což má za následek podle 1. Plückerova vzorce, že je čtvrté třídy.

V kartézské soustavě souřadnic (obecně kosoúhlé), v níž je uzlový bod počátkem a tečny v něm souřadnicovými osami, má křivka rovnici

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = hxy,$$

kde a, b, c, d, $h \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$, $h \neq 0$; její parametrické vyjádření má tvar

$$x = \frac{hu}{a + bu + cu^2 + du^3}, \qquad y = \frac{hu^2}{a + bu + cu^2 + du^3}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Jsou nalezeny nutné a postačující podmínky pro parametry tří bodů křivky incidujících s jednou přímkou. Další vlastnosti bodů křivky popisují věty:

Dotykové body dvojic tečen incidujících s regulárními body křivky tvoří kvadratickou bodovou involuci na křivce. Tato involuce se promítá z dvojnásobného bodu křivky involucí ve svazku přímek, jejíž samodružné přímky jsou tečny křivky v dvojnásobném bodě.

Dotykové body dotyčnic vedených bodem křivky, průsečík těchto tečen a průsečík křivky se spojnicí dotykových bodů tvoří harmonickou čtveřici.

Dvojice průsečíků křivky s přímkami svazku se středem na křivce tvoří bodovou involuci. Její samodružné body jsou dotykové body tečen incidujících se středem svazku.

Všechny spojnice dvojic dotykových bodů tečen vedených všemi body křivky obalují kuželosečku – tzv. involuční kuželosečku dané kubiky.

Přímky svazku se středem mimo kubiku protínají kubiku v trojicích bodů, jež vyhovují jedné kubické rovnici. Korespondence v této trojici je v práci nazývána kubickou involucí.

Obecnou teorii aplikuje Karel Zahradník na *Descartův list* o rovnici

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0, \qquad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,$$

v parametrickém vyjádření

$$x = \frac{3au}{1+u^3}, \qquad y = \frac{3au^2}{1+u^3}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Specifickými otázkami jsou hledání inflexních bodů, asymptot a výpočet obsahu.

Podobné otázky jsou řešeny také u *strofoidy*, jež má rovnici

$$x^3 + xy + a(x^2 - y^2) = 0, \quad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0,$$

v parametrickém vyjádření

$$x = \frac{a(u^2-1)}{u^2+1}, \qquad y = \frac{au(u^2-1)}{u^2+1}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Kružnice má se strofoidou čtyři průsečíky. Dotýká-li se strofoidy, dva z průsečíků se vzájemně rovnají. Dotýká-li se kružnice strofoidy ve dvou bodech, spojnice těchto dotykových bodů tvoří involuci ve svazku přímek. Středem svazku je pól křivky. Množina středů všech kružnic dvojnásobně dotýkajících se strofoidy je parabola, jež má ohnisko v pólu strofoidy.[1]

Dále jsou prozkoumány trojice oskulačních kružnic procházejících jedním bodem strofoidy a trojúhelníky oskulačních bodů (tzv. oskulační trojúhelník) a je uveden výpočet obsahu části roviny ohraničené strofoidou.

Recenzent dr. F. August z Berlína v referativním časopisu *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*[2] konstatuje, že práce nepřináší nic podstatně nového, nicméně může sloužit začátečníkům na nácvik určitých metod analytické geometrie.

[1] Pojem *pól křivky* bude vysvětlen v teorii *kisoidál*.

[2] Viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 5(1873), str. 366.

Článek *Theorie křivek racionálních třetí třídy* [Z16] je dualizací elementární teorie racionálních křivek třetího stupně. V přímkových nehomogenních souřadnicích je představena křivka jako množina všech tečen, z nichž jedna má s bodovou obálkou této množiny společné dva různé body anebo jeden dvojnásobný bod. Úplná rovnice křivky třetího řádu (v dnešní terminologii *stupně*) v rozšířené euklidovské rovině má v nehomogenních přímkových souřadnicích u, v tvar

$$au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3 + eu^2 + fuv + gv^2 + hu + kv + l = 0,$$

kde všechny koeficienty jsou reálná čísla a aspoň jeden z koeficientů členů třetího stupně je různý od nuly. Nevlastní přímka roviny má souřadnice $u = 0$, $v = 0$. Nutná a postačující podmínka, aby byla tečnou křivky, je $l = 0$. Rovnice dotykového bodu nevlastní přímky zní $hu + kv = 0$. Je-li dále $h = 0$, $k = 0$, je nevlastní přímka roviny dvojnásobnou tečnou křivky a souřadnice dotykových bodů jsou dány rovnicí

$$eu^2 + fuv + gu^2 = 0,$$

jež má dva reálné kořeny, jeden dvojnásobný kořen anebo dva sdružené imaginární kořeny podle toho, zda je diskriminant $f^2 - 4eg$ kladný, roven nule anebo záporný. Dva podstatně rozdílné případy jsou: dotykové body dvojnásobné tečny jsou různé anebo dotykový bod dvojnásobné tečny je dvojnásobný průsečík tečny s bodovou obálkou, tj. je inflexním bodem obálky a dvojnásobná tečna je tudíž inflexní tečnou.

Vhodnou volbou určujících prvků soustavy souřadnic lze tečnovou rovnici křivky v tomto případě zjednodušit na tvar

$$au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3 = ev^2,$$

v němž inflexní tečna má rovnici $v = 0$. Z každého jejího bodu lze vést jedinou další tečnu, jejíž parametrické vyjádření má tvar

$$u = \frac{e\lambda}{a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d}, \qquad v = \frac{e}{a\lambda^3 + b\lambda^2 + c\lambda + d}, \qquad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Toto vyjádření přímkových souřadnic tečen křivky racionálními funkcemi parametru λ je důvodem názvu *racionální křivka*.

Další postup vyšetřování křivky je dualizací schématu vyšetřování racionálních křivek třetího stupně v pracích [Z6] a [Z7]. Hledají se parametry tří tečen incidujících s libovolným bodem mimo obálku tečen a další vztahy mezi tečnami z různých bodů, přímkové rovnice dotykových bodů tečen, vzájemná závislost parametrů tří tečen procházejících jedním bodem. Závislost tří tečen incidujících s jedním bodem je obdobně jako u bodové křivky nazývána kubickou involucí. Dále je ukázáno, že křivka třetí třídy s dvojnásobnou tečnou, jež je inflexní tečnou, je křivkou třetího stupně.

V případě, když body dotyku dvojnásobné tečny s obálkou jsou různé, rovnici křivky lze uvést na tvar

$$au^3 + bu^2v + cuv^2 + dv^3 = euv, \quad a \neq 0,\ d \neq 0,\ e \neq 0,$$

a v parametrickém vyjádření na tvar

$$u = \frac{e\lambda}{a + b\lambda + c\lambda^2 + d\lambda^3}, \qquad v = \frac{e\lambda^2}{a + b\lambda + c\lambda^2 + d\lambda^3}, \quad \lambda \in \mathbb{R}.$$

Vyjádření tří tečen incidujících s jedním bodem, vztahy mezi trojicemi incidujícími se dvěma různými body přímkové rovnice dotykových bodů a kubická involuce jsou odvozeny stejně jako v případě inflexní tečny. Dále je dokázáno, že tato křivka třetí třídy je křivkou čtvrtého stupně, tj. přímka v rovině křivky protíná obálku všech tečen obecně ve čtyřech bodech.

S dotykovým bodem jednoduché tečny s bodovou obálkou všech tečen křivky incidují další dvě tečny, zvané *sdružené*. Dvojice sdružených tečen pro všechny body obálky protínají dvojnásobnou tečnu ve dvojicích bodů, jež vytvářejí na této tečně kvadratickou bodovou involuci. Jejími samodružnými body jsou dotykové body dvojnásobné tečny s obálkou.

Tečny ${}^1t$, ${}^2t$ sdružené k tečně t se protínají v bodě, jímž lze vést další tečnu t' křivky. Čtveřice tečen v pořadí ${}^1t$, ${}^2t$, t, t' je harmonická. Z toho plyne, že i dvojice průsečíků tečen t, t' s dvojnásobnou tečnou tvoří kvadratickou bodovou involuci s týmiž samodružnými body, jako má výše uvedená involuce.

Průsečíky všech dvojic sdružených tečen vytvářejí kuželosečku zvanou *Weyrova involuční kuželosečka*.[3]

Parametry trojice tečen křivky vedené všemi body přímky, jež není tečnou křivky, vyhovují kubické rovnici závislé pouze na souřadnicích této přímky. Korespondence trojic tečen určena touto rovnicí se nazývá *kubickou involucí příslušnou* k přímce.

V závěru práce jsou ještě řešeny dva speciální problémy týkající se harmonických a ekvianharmonických čtveřic tečen.[4]

Rozsáhlá trojdílná práce *Rationale ebene Curven dritter Ordnung* (Racionální rovinné křivky třetího řádu) [Z13] je systematickým shrnutím, doplněním a rozšířením prací [Z6] a [Z7].

Práce začíná rovnicí kubiky s dvojnásobným bodem v počátku pravoúhlé kartézské soustavy souřadnic v rozšířené euklidovské rovině. Bez dalších úprav má tato rovnice tvar

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 + ex^2 + fxy + gy^2 = 0$$

s reálnými koeficienty $a, \dots, g$; $a \neq 0$, $g \neq 0$. V polárních souřadnicích (r, φ), kde $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ $(r \geq 0, \varphi \in (-\infty, \infty))$, má rovnice křivky tvar

$$r^3(a\cos^3\varphi + b\cos^2\varphi\sin\varphi + c\cos\varphi\sin^2\varphi + d\sin^3\varphi) +$$

$$+ r^2(e\cos^2\varphi + f\cos\varphi\sin\varphi + g\sin^2\varphi) = 0.$$

[3] Kuželosečka je pojmenována podle Emila Weyra.

[4] O této práci není v základních referativních časopisech žádný záznam.

Tečny křivky v počátku soustavy souřadnic jsou určeny rovnicí

$$e\cos^2\varphi + f\cos\varphi\sin\varphi + g\sin^2\varphi = 0,$$

neboli v souřadnicích x, y rovnicí

$$ex^2 + fxy + gy^2 = 0.$$

Rovnice dává dvě různé tečny (reálné anebo sdružené komplexní), když je diskriminant $f^2 - 4eg \neq 0$, a dvojnásobnou, když je $f^2 - 4eg = 0$. První případ znamená, že dvojnásobný bod je uzlovým bodem, v druhém případě je bodem vratu. V případě, když počátek soustavy souřadnic je bodem vratu a dvojnásobnou tečnou v něm je osa x soustavy souřadnic, rovnice křivky nabývá tvar

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dx^3 = ey^2; \quad a \neq 0,\ e \neq 0.$$

V první části práce je pojednán tento případ.

Každá polopřímka s počátkem v počátku soustavy souřadnic svírá s kladnou poloosou osy x úhel velikosti φ tak, že pro každý bod $[x, y]$ polopřímky různý od počátku platí

$$x = uy, \quad \text{kde } u = \mathrm{cotg}\varphi.$$

Každá přímka incidující s počátkem, různá od osy x, protíná křivku kromě bodu vratu ještě v jednom bodě $[x, y]$, jehož souřadnice vyjádřené pomocí parametru u mají tvar

$$x = \frac{eu}{au^3 + bu^2 + cu + d}, \qquad y = \frac{e}{au^3 + bu^2 + cu + d}, \quad u \in \mathbb{R};$$

to je parametrické vyjádření souřadnic všech regulárních bodů křivky ve tvaru racionálních funkcí jednoho parametru u (viz [Z26]).

Podle Plückerova vzorce je třída vyšetřované křivky rovna číslu 3. Některé vlastnosti křivky a vztahy k dalším útvarům roviny popisují věty jako např.:

Protínají-li dvě různé přímky p, p' kubiku v bodech A_1, A_2, A_3, resp. B_1, B_2, B_3, pak protínají přímky A_iB_i $(i = 1, 2, 3)$ kubiku v bodech C_i $(i = 1, 2, 3)$, jež incidují s jednou přímkou.

Speciálně: Jsou-li tři kolineární body regulárními body křivky a sestrojí-li se těmito body další tečny různé od tečen v těchto bodech, jsou dotykové body těchto dalších tečen opět kolineární.

Kuželosečka v obecné poloze protíná kubiku v šesti bodech. Jelikož kuželosečka je jednoznačně určena pěti body (v „obecné“ poloze), jsou parametry šesti průsečíků kubiky s kuželosečkou vázány určitou rovnicí mezi parametry. Platí:

Nechť A_1, A_2, …, A_6 je šest průsečíků regulární kuželosečky s vyšetřovanou kubikou C. Nechť $\leftrightarrow A_1A_2 \cap C = B_{12}, \ldots, \leftrightarrow A_6A_1 \cap C = B_{61}$ je šest průsečíků *křivky s nositelkami stran šestiúhelníku $A_1, A_2, \ldots, A_6$ vepsaného křivce. Body $B_{12}, \ldots, B_{61}$ leží na kuželosečce.*

Nechť $\leftrightarrow A_1A_4 \cap C = D_{14}$, $\leftrightarrow A_2A_5 \cap C = D_{25}$, $\leftrightarrow A_3A_6 \cap C = D_{36}$, jsou průsečíky křivky C se spojnicemi protilehlých vrcholů šestiúhelníka vepsaného křivce. Body D_{14}, D_{25}, D_{36} jsou kolineární.

Dále jsou vyšetřovány sečny, tečny a normály křivky. Přímým výpočtem se potvrzuje, že kubika je třetí třídy, a zjišťuje, že bodem roviny (v „obecné“ poloze) prochází šest normál kubiky.

Přímky svazku přímek, jehož střed není bodem kubiky, protínají kubiku v trojicích různých bodů s výjimkou přímky procházející bodem vratu; tato přímka protíná kubiku v jediném dalším bodě. Trojice bodů kubiky ležící na přímkách svazku tvoří kubickou involuci (v dnešní terminologii korespondenci), jejíž dvojné body jsou bod vratu kubiky (společný pro všechny involuce uvedeného druhu) a dotykové body tečen procházejících středem svazku přímek.

V každém regulárním bodě M kubiky existuje tečna m, jež má tento bod za dotykový. Kromě toho prochází jím tečna t, jež má dotykový bod T různý od M. Obálka všech přímek TM pro všechny regulární body M kubiky je křivka třetího stupně a třetí třídy (různá od základní kubiky), jež má bod vratu dané kubiky za svůj bod vratu.

Pro evolutu kubiky, tj. obálku všech normál kubiky nebo ekvivalentně množinu všech středů křivosti, nejsou uvedeny explicitní rovnice, nýbrž pouze výchozí rovnice, z nichž lze eliminací získat žádoucí vyjádření.

Jako použití prezentované teorie o křivce třetího stupně s bodem vratu uvádí Karel Zahradník aplikaci na Dioklovu kisoidu. Její algebraickou rovnici uvádí ve tvaru

$$y = x\sqrt{\frac{x}{a-x}}$$

bez explicitního vymezení existenčních podmínek. Rovnici třetího stupně odtud dostaneme umocněním obou stran rovnice na druhou, což – jak známo – není ekvivalentní úprava. Parametrické rovnice mají tentýž tvar jako v paragrafu předešlé kapitoly. Jsou vyšetřeny nevlastní body kisoidy, další tečny procházející daným bodem a rovnice asymptot. (Ze tří asymptot je jedna reálná a dvě sdružené imaginární s reálným průsečíkem.) Bodem v rovině kisoidy procházejí čtyři normály této křivky.

Kružnice bez speciální polohy ke kisoidě má s kisoidou společné čtyři body. Podle Bézoutovy věty je sice počet společných bodů včetně násobnosti šest, ale dva z nich jsou společné pro všechny kružnice roviny: jsou to kružnicové body – sdružené imaginární body na nevlastní přímce, jimiž prochází i kisoida. Čtyři body kisoidy leží na jedné kružnici právě tehdy, když součet jejich parametrů je roven nule.

Z přehledných algebraických vztahů mezi parametry čtyř kocyklických bodů kisoidy (tj. čtyř bodů kisoidy, jež incidují s jednou kružnicí) plyne pro několik dalších od kružnice odvozených čtveřic bodů kisoidy, že jsou kocyklické.

Dále je odvozena rovnice oskulační kružnice v regulárním bodě kisoidy; bod oskulace je trojnásobným společným bodem kisoidy a oskulační kružnice. Je nalezen poloměr křivosti a střed křivosti (tj. střed oskulační kružnice). Množina všech středů křivosti kisoidy – evoluta kisoidy – je racionální křivka čtvrtého stupně. Lze ji získat také jako obálku všech normál kisoidy.

Paty normál libovolného bodu tečny vratu (kromě bodu vratu) ke kisoidě leží na jedné kružnici. Prozkoumány jsou případy, když je čtveřice pat normál na kisoidě čtveřice harmonická, resp. ekvianharmonická. Množina všech bodů, pro něž čtveřice pat normál má první, resp. druhou vlastnost, je křivka třetího stupně, resp. parabola.

Závěrem je proveden výpočet obsahu rovinného útvaru zčásti ohraničeného kisoidou, jakož i délky oblouku kisoidy.

První pokračování článku začíná kompletní dualizací teorie racionální křivky třetího stupně s bodem vratu. Podrobnými kroky dualizace je vybudována teorie křivky třetí třídy jako množiny tečen, v níž existuje jediná inflexní tečna. V přímkových souřadnicích ξ, η lze tečnovou křivku napsat v tečnovém tvaru

$$a\xi^3 + b\xi\eta^2 + c\eta^3 = d\eta^2,$$

v parametrickém vyjádření s parametrem u ve tvaru

$$\xi = \frac{du}{au^3 + bu + c}, \qquad \eta = \frac{d}{au^3 + bu + c}, \quad a \neq 0,\ u \in \mathbb{R}.$$

Mechanická tvorba vět duálních k větám z teorie křivek třetího stupně s bodem vratu pro duální tečnovou křivku třetí třídy s inflexní tečnou má jedno úskalí, jež si K. Zahradník zcela nevyjasnil: v rozšířené euklidovské rovině, jež je pro něj (jediným) modelem bodové projektivní roviny, není dualita mezi množinou všech bodů a množinou všech přímek bezproblémová, neboť existuje nekonečně mnoho nevlastních bodů incidujících s jedinou nevlastní přímkou, ale *jediná* nevlastní přímka incidující se *všemi* nevlastními body.[5] Nekorektnost mechanického přístupu k dualizaci je zesílena používáním dobové německé terminologie, v níž za duální objekt k *nekonečně vzdálenému bodu* (unendlich ferner Punkt) je proklamována *nekonečně vzdálená přímka* (unendlich ferne Gerade), což podle litery dualizace má být přímka incidující s jedním nevlastním bodem. To však je rozšířená vlastní přímka, o níž prohlášení za nekonečně vzdálenou (od čeho?) nedává smysl.

Nicméně dualizace vět o bodové křivce třetího stupně s bodem vratu pro křivku třetí třídy s inflexní dotyčnicí ve většině případů smysl dává a přispívá k charakterizaci tohoto typu křivky.

Hlavní složkou této druhé části článku (tj. prvního pokračování) je teorie ireducibilních křivek třetího stupně s uzlovým bodem. Zvolí-li se uzlový bod za

[5] Samodualnost projektivní roviny jako množiny všech jejích bodů a všech jejích přímek je založena v její axiomatizaci; v ní však není žádné zmínky o dělení prvků na vlastní a nevlastní.

počátek a tečny v uzlovém bodě za osy kosoúhlé kartézské soustavy souřadnic, nabude rovnice křivky tvar

$$ax^3 + bx^2y + cxy^2 + dy^3 = hxy,$$

kde všechny koeficienty jsou reálná čísla, $a \neq 0$, $d \neq 0$, $h \neq 0$; parametrické vyjádření má tvar

$$x = \frac{hu}{a + bu + cu^2 + du^3}, \qquad y = \frac{hu^2}{a + bu + cu^2 + du^3}.$$

Podle prvního Plückerova vzorce je třída křivky rovna číslu 4.

Součin parametrů tří bodů křivky incidujících s jednou přímkou je roven konstantě. Tento výsledek je speciálním případem Weyrovy věty: Součin parametrů všech $3n$ bodů, jež má racionální křivka stupně tři společné s křivkou stupně n, je roven konstantě.

Jsou odvozeny rovnice sečen a tečen. Každým regulárním bodem křivky kromě tečny v tomto bodě procházejí ještě dvě tečny s dotykem v jiných dvou různých bodech křivky, neboť třída křivky je rovna číslu 4. Dotykové body těchto dalších dvou tečen se nazývají *sdružené body*. Dvojice sdružených bodů vytvářejí na kubice s uzlovým bodem kvadratickou involuci, jejíž samodružné body jsou další dotykové body dvou různých tečen křivky v uzlovém bodě. Páry sdružených bodů kubiky se z uzlového bodu promítají involutorními dvojicemi přímek svazku se středem v uzlovém bodě. Samodružné přímky této involuce jsou tečny kubiky v uzlovém bodě. Spojnice dotykových bodů U_1, U_2 dalších dvou tečen incidujících s bodem U křivky protíná kubiku ve třetím průsečíku U', jenž je body U_1, U_2 od bodu U harmonicky oddělen. To znamená, že dvojice U, U' vytvářejí na kubice kvadratickou involuci. Protože má tytéž samodružné prvky jako předchozí involuce, je s ní totožná.

Z početných dalších podobných vlastností kubiky jsou zajímavé:

Spojnice sdružených bodů kubiky obalují kuželosečku, jež se podle Emila Weyra nazývá *involuční kuželosečkou.* Označíme-li sdružené body U_1, U_2 a body k nim náležející U, U', obalují spojnice UU' tutéž involutorní kuželosečku. Tvrzení kromě analytického důkazu provedeného Zahradníkem plyne již z totožnosti involucí $\{(U_1, U_2)\}$ a $\{(U, U')\}$.

Korespondence mezi trojicemi bodů, v nichž křivku protínají přímky jednoho svazku, je opět – jak je ve všech Zahradníkových pracích obvyklé – nazývána involucí. Samodružnými body korespondence jsou dotykové body tečen procházejících středem svazku přímek. Jelikož je křivka čtvrté třídy, existují pro bod mimo kubiku čtyři tečny, tudíž i čtyři samodružné body uvedené kubické involuce příslušné k bodu.

Posledním výsledkem druhé části je zjištění, že bodem mimo křivku prochází obecně sedm normál křivky a že obálka všech normál kubiky s bodem vratu je křivka sedmé třídy a dvanáctého stupně.

Třetí část práce, tj. druhé pokračování úvodní práce, je plně věnována rozsáhlým aplikacím obecnější teorie kubiky s uzlovým bodem na Descartův list a strofoidu.

Descartův list je uveden v kosoúhlé kartézské soustavě souřadnic v rozšířené euklidovské rovině rovnicí tvaru

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0, \quad a \neq 0.$$

Počátek O soustavy souřadnic je uzlovým bodem křivky a osy soustavy souřadnic jsou tečnami křivky v dvojnásobném bodě. Parametrické vyjádření křivky má tvar

$$x = \frac{3au}{1+u^3}, \qquad y = \frac{3au^2}{1+u^3}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Geometrický význam parametru v euklidovské rovině je následující: Je-li U bod křivky s parametrem u, je

$$u = \mathrm{tg}(|OU, +x|_o),$$

kde OU je průvodič bodu U (tj. orientovaná úsečka s počátečním bodem O a koncovým bodem U) a $|OU, +x|_o$ je velikost orientovaného úhlu, jehož počáteční rameno je kladná poloosa x a koncové rameno je polopřímka $\mapsto OU$.

Součin parametrů tří kolineárních bodů křivky je roven -1. Ze tří inflexních bodů křivky je jeden reálný, dva jsou sdružené imaginární body, všechny jsou nevlastní, tudíž inflexní tečny jsou asymptoty.

Pojednání o sečnách a tečnách končí zjištěním, že třída křivky je rovna číslu 3, a rovnicemi asymptot.

Involuční kuželosečka Descartova listu je hyperbola, jejíž asymptoty jsou tečny křivky v jejím uzlovém bodě.

Vyšetřování normál a evoluty konkretizuje obecné výsledky o stupni a třídě evoluty parametrickým vyjádřením množiny všech středů křivosti.

Jako ukázka řešení klasické problematiky křivek je uveden výpočet obsahu obrazce ohraničeného křivkou a její reálnou asymptotou.

V rozsáhlém paragrafu *Construction des Blattes* (Konstrukce listu) jsou popsány dvě konstrukce bodů křivky. První je prováděna ryze elementárními euklidovskými prostředky. Druhá, tzv. projektivní konstrukce dává body křivky jako druhé průsečíky kuželoseček svazku

$$x^2 - by + \lambda y^2 = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

a přímek svazku

$$y - \lambda x = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

korespondujících v projektivnosti obou svazků, dané přiřazením kuželosečky a přímky s týmž parametrem λ. Jelikož střed svazku přímek, jímž je počátek soustavy souřadnic O, je bázovým bodem svazku kuželoseček, protíná každá přímka svazku korespondující kuželosečku ještě v jednom bodě, jenž je regulárním bodem křivky, a bod O, společný všem kuželosečkám svazku a korespondujícím přímkám svazku přímek, je dvojnásobným bodem křivky. Parametrické vyjádření průsečíků korespondujících útvarů má tvar

$$x = \frac{\lambda}{1+\lambda^3}, \qquad y = \frac{\lambda^2}{1+\lambda^3}.$$

Konstrukce bodů Descartova listu v pravoúhlé kartézské soustavě souřadnic je popsána úplně a podrobně.

Obdobně je konkretizována teorie strofoidy. Její rovnice je uvedena ve tvaru

$$x^3 + xy^2 + a(x^2 - y^2) = 0, \quad a \in \mathbb{R},\ a \neq 0;$$

v parametrickém vyjádření má tvar

$$x = \frac{a(u^2-1)}{u^2+1}, \qquad y = \frac{a(u^2-1)u}{u^2+1}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Strofoida je cirkulární kubika, tj. prochází (nevlastními) kružnicovými body roviny. Její třetí nevlastní bod je inflexní. Podle obecného výsledku je strofoida křivkou čtvrté třídy; její tečnové parametrické vyjádření má tvar

$$\xi = \frac{4u}{a(u^2-1)^2}, \qquad \eta = \frac{1-4u^2-u^4}{a(u^2-1)^2}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Strofoida má tři inflexní tečny, z nichž jedna je reálná a dvě sdružené imaginární inflexní tečny se protínají ve vlastním reálném bodě. Reálná inflexní tečna má dotykový bod nevlastní, je tudíž asymptotou křivky.

Vlastním bodem strofoidy procházejí vždy dvě pevné normály incidující s kružnicovými body roviny, takže normály strofoidy vlastním, specifickým způsobem přiřazené k vlastnímu bodu, s nímž incidují, jsou čtyři.

Specifickými výsledky pro normály strofoidy jsou:

Paty normál strofoidy procházejících bodem osy y leží na jedné kružnici.

Množina všech bodů, jejichž paty normál tvoří ekvianharmonickou čtveřici, je singulární kuželosečka rozložitelná na dvě různé přímky.

Evoluta strofoidy je křivka čtvrté třídy, jejíž tečnové vyjádření má parametrický tvar

$$\xi = \frac{-4u}{4a(u^2-1)(u^2+3)}, \qquad \eta = \frac{1-4u^2-u^4}{4a(u^2-1)(u^2+3)}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Přechodem k bodovým souřadnicím se ukáže, že je to racionální křivka šestého stupně.

Kružnice má se strofoidou kromě kružnicových bodů společné ještě čtyři body, jejichž parametry jsou vázány rovnicí. Má-li kružnice se strofoidou dvojnásobný dotyk, promítají se body dotyku z uzlového bodu vzájemně kolmými přímkami. Spojnice dotykových bodů strofoidy s kružnicemi dvojnásobně se dotýkajícími strofoidy procházejí pevným bodem – pólem strofoidy. Tyto dvojice dotykových bodů tvoří tak středovou involuci. Množina středů všech kružnic dvojnásobně se dotýkajících strofoidy je parabola, jež má pól strofoidy za své ohnisko.

Existuje kružnice, jež protíná všechny kružnice dvojnásobně se dotýkající strofoidy pod pravým úhlem. Strofoidu pak lze považovat za obálku soustavy všech těchto kružnic.

Jako už dříve, jsou vyšetřovány oskulační trojice bodů, tj. bodů, jež jsou body oskulace se třemi kružnicemi procházejícími společným čtvrtým bodem strofoidy. Výpočtem souřadnic středů křivosti je zjištěno, že evoluta strofoidy je racionální křivka šestého stupně a čtvrté třídy, jak už bylo stanoveno dříve.

V závěru je uveden výpočet obsahu strofoidy integrální metodou a popsány čtyři postupy konstrukcí – zčásti elementárních – bodů strofoidy.

Recenze první části práce sepsaná profesorem A. Brillem z Mnichova a druhé a třetí části sepsaná profesorem F. Augustem z Berlína[6] stručně a věcně informují o obsahu práce.

Kratší práce *Výtvary jednoznačně příslušných prvků dvou racionálních rovinných křivek* [Z20] je spíše než prací zaměřenou na konkrétní výsledky přehledným metodickým příspěvkem, jenž objasňuje vztahy mezi některými základními číselnými charakteristikami rovinných křivek a uvádí paralely duálních objektů a duálních operací.

Nejdříve je společnou symbolikou zaveden zápis souřadnic bodů, resp. tečen racionálních křivek pomocí racionálních funkcí jednoho parametru, pak týmž formálním způsobem jsou popsány přímka jako spojnice bodů a bod jako průsečík přímek. Přiřazení korespondujících prvků generujících útvarů je vyjádřeno bilineární rovnicí mezi parametry těchto prvků. Jako množina spojnic korespondujících bodů dvou racionálních křivek *stupně* m a n vznikne tak tečnová křivka třídy $(m+n)$. Duálně ze dvou racionálních tečnových křivek stupně n, resp. m vznikne z průsečíků korespondujících tečen dvou tečnových křivek třídy n, resp. m bodová křivka stupně $n+m$. Obecné výsledky jsou specializovány pro racionální křivky třetího stupně, resp. třetí třídy a dále pro případ, kdy jsou generující křivky identické. Stupeň, resp. třída výtvoru se tehdy zmenší o 2; kupř. spojnice korespondujících bodů téže kuželosečky neobalují křivku stupně $2+2=4$, nýbrž 2, tedy opět kuželosečku. Znamená to tedy: Racionální rovinná křivka stupně n je (obecně) křivkou třídy $2(n-1)$. Třídu snižuje podle Plückerova vzorce výskyt a povaha singulárních bodů. Duální věty platí pro výtvory generované tečnovými křivkami.

Je-li generující příbuznost bodů bodové křivky stupně n involucí, výtvorem je racionální křivka třídy $(n-1)$. Platí i věta duální.[7]

[6] Viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 6(1874), str. 418; 7(1875), str. 417; 9(1877), str. 502.

[7] Recenze článku nebyla uveřejněna.

Velmi rozsáhlá dvojdílná práce *O krivuljah u ravnini* (O rovinných křivkách) [Z52] je svojí podstatnou částí systematickým výkladem základů teorie rovinných křivek a dalších průvodních křivek tradičně přidružených k základním křivkám. Hrubou informaci o obsahu práce dává přehled paragrafů: Tečnové souřadnice p, α; tečnové souřadnice u, α; Délka tečny, normály, subtangenty, subnormály; Rektifikace; Transformace osy x; Poloměr křivosti; Body vratu křivky; Určení křivky pomocí relací, jež plynou z daného tvaru rovnic křivky; Křivka proměnné křivosti; Radiála; Kvadratura; Úpatnice; Některé vlastnosti úpatnic; Rektifikace úpatnice; Kvadratura úpatnic; Vliv pólu na obsah úpatnice; O pólu nejmenší úpatnice; Posloupnost úpatnic; Další vlastnosti posloupnosti úpatnic; Rektifikace n-té úpatnice; Kvadratura n-té úpatnice; Negativní úpatnice; Kosoúhlé úpatnice; Křivky odvozené inverzí; O křivkách polárně reciprokých; Řídící křivky (direktrisy); Paralelní křivky; Rektifikace paralelních křivek; Kvadratura paralelních křivek; Obsah opsaný poloměrem křivosti; O křivkách zahrnujících paralelní křivky jako zvláštní případy; O evolutách; Kvadratura evoluty; O posloupných evolutách; O evolventách; Věta Bernoulli-Whewellova; O křivkách daných vztahem mezi posloupnými evolutami; O složených křivkách.

Práce, jež je značně rozsáhlým a podrobným zpracováním širokého tématu prezentovaného ve dvou přednáškách na zasedáních matematicko-přírodovědného oddělení Jihoslovanské akademie věd a umění v letech 1882 a 1884, je svou povahou monografií, jejíž úroveň odpovídá přibližně dnešním nárokům na základní příručku doktorandského studia, specializovanou na teorii křivek v euklidovské rovině. Ačkoliv nepřináší nové teoretické výsledky oné historické doby, metodickým zpracováním, pečlivostí a podrobností výkladu a zejména množstvím příkladů, jež skýtají čtenáři důkladné informace o většině rovinných křivek antické doby i počátků novodobé matematiky 16. až 18. století, jakož i o metodách jejich vyšetřování, mohla být ve své době velmi cenným průvodcem v jedné oblasti diferenciální geometrie – v teorii rovinných křivek. Obsahem, pestrostí metod, systemizací i náročnosti textu a stylu práce zajisté značně převyšuje úroveň dobových vysokoškolských učebnic a nehledě na některé archaismy, mohla by i dnešnímu čtenáři poskytnout mnoho zajímavého a hodnotného materiálu.[8]

V krátkém, ale obsahem hutném článku *Über die Krümmungscurve des Basispunktes eines Curvenbüschels n-ter Ordnung* (O křivce křivosti bázového bodu svazků křivek n-tého řádu) [Z39] jsou odvozeny parametrické rovnice a některé vlastnosti křivky, která je množinou všech středů křivosti příslušných k bázovému bodu svazku křivek n-tého stupně vzhledem ke všem křivkám svazku.

Má-li rovnice svazku křivek n-tého stupně ($n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$) tvar

$$f \equiv \varphi - \lambda\psi = 0, \quad \lambda \in \mathbb{R}; \quad f, \varphi, \psi \quad \text{– polynomické funkce v } x, y \text{ stupně } n,$$

souřadnice středu kružnice křivosti $[x, y]$ bodu $[\xi, \eta]$ libovolné křivky svazku jsou hodnoty racionálních funkcí v bodě $[\xi, \eta]$, jejichž čitatel i jmenovatel ob-

[8] Žádná recenze práce není k dispozici.

sahuje první a druhé derivace funkce f; to jsou všechny členy, jež pocházejí z původních členů funkce f stupně ≥ 3. Svazek křivek lze nahradit svazkem kuželoseček, jejichž rovnice mají levé strany rovny součtu lineárních a kvadratických členů v levých stranách rovnic křivek svazku. Pak je počet bázových bodů svazku roven číslu 4 (včetně případné násobnosti).

Výpočtem je dokázáno, že množina všech středů křivosti počátku soustavy souřadnic O (jako bázového bodu svazku kuželoseček) vzhledem ke všem kuželosečkám svazku je racionální křivka třetího stupně, jež má bod O za dvojnásobný bod. Asymptoty této kubiky jsou kolmé na spojnice bodu O s ostatními třemi bázovými body svazku kuželoseček.

Recenzent dr. E. Toeplitz z Breslau (Wrocław, Vratislav)[9] stručně a výstižně informuje o podstatných metodách a výsledcích práce.

Práce *Prilog k teoriji krivulja trečega stupnja i trečega razreda* (Příspěvek k teorii křivky třetího stupně a třetí třídy) [Z71] je v chorvatském jazyce obměnou některých jinojazyčných článků o této tematice. Předmětem výzkumu je kubika s bodem vratu. Nicméně ve srovnání s předchozími pracemi jsou v tomto článku sledována i jiná témata. Jedním z nich je rekurentní konstrukce nekonečné posloupnosti *sdružených* přímek konstruovaných vzestupně následujícím způsobem: Ve třech průsečících přímky p s kubikou jsou sestrojeny tečny kubiky. Třetí průsečíky těchto tečen s kubikou (dotykové body jsou dvojnásobné průsečíky) leží opět na jedné přímce r_1. Opakování postupu na ni vede k přímce r_2 atd. Pro $n \to \infty$ přímka r_n konverguje k tečně v bodě vratu. Přímka r_n se nazývá n-tou sdruženou přímkou s přímkou p. Obráceným postupem lze k přímce p konstruovat posloupnost přímek $s_{-1}, s_{-2}, \dots$, v níž každá přímka je prvou sdruženou přímkou přímky následující. Přímka s_{-n} se nazývá $(-n)$-tou sdruženou přímkou přímky p. Pro $-n \to -\infty$ přímka s_{-n} konverguje k tečně v bodě vratu.

Přiřazení $p \to r_1$ vázané na danou kubiku je regulární projektivní kolineace roviny, jejíž samodružné přímky jsou tečna vratu, inflexní tečna a spojnice bodu vratu s inflexním bodem. Jelikož kolineace je projektivní, je její zúžení na přímku projektivní zobrazení přímky na její obraz, tudíž v případě, že přímka a její obraz v kolineaci jsou různé přímky, projektivní zobrazení dvou nesoumístných bodových řad, jež spojnicemi korespondujících bodů generuje tečnovou kuželosečku. Analogicky, svazek přímek je kolineací zobrazen na svazek projektivní a v případě nesoumístných svazků průsečíky korespondujících přímek vytvářejí bodovou kuželosečku. V obou případech jsou samodružné přímky kolineace tečnami každé takové kuželosečky (tečnové a bodové).

Jsou-li přímky p tečny paraboly Π, platí $p \perp r_1$ a přímky r_1 obalují také parabolu; označme ji Π'. Množina všech vrcholů pravých úhlů, jejichž ramena obalují paraboly Π, Π', je racionální křivka čtvrtého stupně, jež má samodružné body kolineace za dvojnásobné body. (Maximální počet dvojnásobných bodů křivky čtvrtého stupně je roven číslu 3.)

---

[9] Viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 11(1879), str. 494.

Nechť přímka p má přímkové souřadnice ξ, η, přímkové souřadnice přímky r_1 sdružené s přímkou p označme ξ_1, η_1 a bodové souřadnice průsečíku $T = p \cap r_1$ označme x, y; pak souřadnice ξ, η jsou vyjádřeny pomocí kvadratických racionálních funkcí v x, y. Obráceně lze ke každému bodu T přímky p přiřadit přímku t, jež prochází tímto bodem a jeho obrazem T' v kolineaci na přímce r_1. Souřadnice x, y bodu T jsou pomocí přímkových souřadnic ξ, η přímky t vyjádřeny opět racionálními kvadratickými funkcemi v ξ, η. Tyto dvě racionální kvadratické transformace jsou vzájemně reciproké a spolu reprezentují kvadratickou biracionální korespondenci. Korespondující prvky – přímka $[\xi, \eta]$ a bod $[x, y]$ mají souřadnice svázány rovnicí $\xi x + \eta y + 1 = 0$. *Fundamentálními body* této transformace jsou samodružné body uvažované kolineace a následně *iregulárními* (v původní terminologii *hlavními*) varietami jsou samodružné přímky kolineace.

Touto kvadratickou biracionální transformací se přímka zobrazuje na křivku druhé třídy dotýkající se iregulárních přímek, a bodu jako středu svazku přímek odpovídá touto transformací křivka druhého stupně incidující s fundamentálními body.

Jelikož zobrazení $r_{n-1}(A_{n-1}B_{n-1}C_{n-1}\dots) \to r_n(A_nB_nC_n\dots)$ jako zúžení regulární projektivní kolineace je projektivnost bodových řad na r_{n-1}, r_n, je projektivností i zobrazení $p(ABC\dots) \to r_n(A_nB_nC_n\dots)$. Tato projektivnost je zúžením kolineace roviny, v níž jsou obrazy přímek $\{p\}$ přímky $\{r_n\}$. Všechny tyto kolineace pro $n = 1, 2, \dots$ mají tytéž samodružné přímky: tečnu vratu, inflexní tečnu a spojnici inflexního bodu s bodem vratu základní kubiky (s bodem vratu).

Body přiřazené kvadratickou biracionální transformací přímkám $r_1, r_2, \dots,$ $r_n, \dots$ sdruženým k přímce p vzhledem k základní kubice leží na křivce třetího stupně a třetí třídy, tedy opět na křivce vlastností projektivně shodných s vlastnostmi základní kubiky.

V závěru práce je ukázáno, jak lze v homogenních projektivních souřadnicích pomocí $(1, 2)$-korespondence mezi dvěma svazky přímek v projektivní rovině generovat bodovou křivku třetího stupně s bodem vratu.

Po návratu k tématu vztahů přímky p k posloupnosti $r_1, r_2, \dots, r_n, \dots$ jejích sdružených přímek je dokázáno, že všechny přímky sdružené s přímkou p vzhledem k základní kubice se dotýkají kubiky s bodem vratu projektivně ekvivalentní se základní kuželosečkou.

Paragraf je jeden z mála příkladů Zahradníkova rutinně bezvadného ovládání metody homogenních projektivních souřadnic.[10]

Článek *Contribution à la théorie des cubiques cuspidales* (Příspěvek k teorii kubik s bodem vratu) [Z84] je překladem předešlé práce [Z71] do francouzského jazyka. Za zaznamenání stojí označení sdružených přímek výstižnějším přívlastkem *průvodní* (satellite).

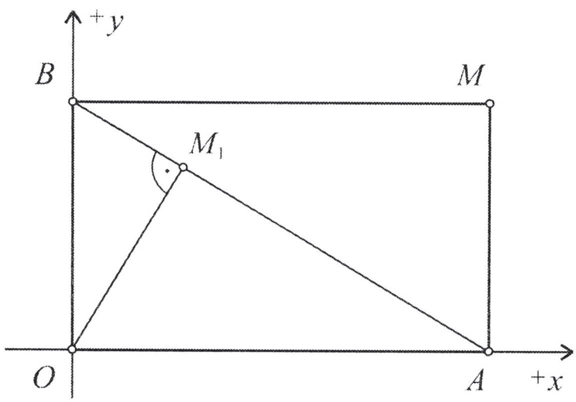
---

[10] Práce není recenzována v žádném ze známých referativních časopisů.

Práci recenzoval profesor E. Wölffing ze Stuttgartu.[11] Jeho recenze uvádí relativně podrobně všechny podstatné informace o obsahu a výsledcích práce.

Práce *Beitrag zur Theorie der rationalen Kurven dritter Ordnung* (Příspěvek k teorii racionálních křivek třetího řádu) [Z87] se zabývá vlastnostmi obrazu přímky v jisté biracionální transformaci třetího stupně, jež je v rozšířené euklidovské rovině definována názorným elementárně-geometrickým způsobem.

Nechť je dána v rozšířené euklidovské rovině pravoúhlá kartézská soustava souřadnic $\{O; x, y\}$. Bodu $M[x, y]$ je přiřazen bod $M_1[x_1, y_1]$ následujícím způsobem: Bod M promítneme kolmo na osu x do bodu $A[x, 0]$ a kolmo na osu y do bodu $B[0, y]$. Pak patu kolmice z bodu O na přímku AB označíme $M_1[x_1, y_1]$. (Obr. 1)[12] Závislost souřadnic x_1, y_1 bodu M_1 na souřadnicích x, y bodu M a obráceně – závislost souřadnic x, y bodu M na souřadnicích x_1, y_1 bodu M_1 – jsou vyjádřeny vztahy (1), (2).



Obr. 1

$$x_1 = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, \qquad y_1 = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, \tag{1}$$

$$x = \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1}, \qquad y = \frac{x_1^2 + y_1^2}{y_1}. \tag{2}$$

Přiřazení $M \mapsto M_1$ definované pro skoro všechny body M, vyjádřené vztahy (1), jež jsou racionální funkce třetího stupně, je racionální zobrazení v (rozšířené) euklidovské rovině; zobrazení k němu inverzní, vyjádřené vztahy (2), jež

[11] Viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 30(1899), str. 525.

[12] Na tomto místě by v duchu moderních požadavků měly být analyzovány všechny speciální polohy bodu M a následně všechny speciální, příp. i nejednoznačné polohy přímky AB. To chybí v analýze všech podobných a analogických situací, v nichž se vždycky uvažuje prvně jakýsi „obecný“ případ.

jsou rovněž racionální funkce třetího stupně, je také racionální zobrazení v (rozšířené) euklidovské rovině. Jedná se tedy o přiřazení $M \leftrightarrow M_1$ pro skoro všechny body M a skoro všechny body M_1, jež je *biracionální korespondencí* třetího stupně v (rozšířené) euklidovské rovině.

Dnešní čtenář si lehce nalezne případy, pro něž dvojice x_1, y_1, resp. x, y není definována. Autorům 19. století tyto případy nečinily potíže, jednoduše je deklarovali jako případy nevlastních bodů, anebo v případě biracionálních transformací jako tzv. hlavní body, v nichž zobrazení nebylo definováno. Upřesněná terminologie konce 19. století a prvních desetiletí 20. století zněla následovně: bod, v němž zobrazení nebylo definováno, se nazýval fundamentální; množina všech vzorů fundamentálního bodu v inverzním zobrazení se nazývala hlavní varietou. Zariského terminologie ze 40. let 20. století zní: bod, v němž zobrazení není definováno, se nazývá *fundamentální*; množina všech vzorů fundamentálního bodu se nazývá *iregulární* varieta; její body (s výjimkou fundamentálních, jež obsahuje) se nazývají iregulární; bod, v němž je definováno zobrazení (přímé) a jenž je obrazem v inverzním zobrazení, se nazývá biregulární; říká se také, že zobrazení je v takovém bodě *biregulární*.

Karel Zahradník vyšetřoval v zobrazení $M_1 \mapsto M$ obraz přímky p dané rovnicí

$$ax_1 + by_1 + c = 0, \quad a \neq 0 \text{ nebo } b \neq 0.$$

Tímto obrazem je křivka daná rovnicí

$$(ax + by)xy + c(x^2 + y^2) = 0, \tag{3}$$

což je racionální křivka třetího stupně s dvojnásobným bodem v počátku soustavy souřadnic, v němž jsou tečny určeny rovnicí

$$x^2 + y^2 = 0.$$

V dobové interpretaci jsou to imaginární tečny určené rovnicemi

$$x + \mathrm{i}y = 0, \qquad x - \mathrm{i}y = 0.$$

Takový bod se nazývá *izolovaným bodem kubiky* (3). Asymptoty kubiky (3) jsou vesměs reálné.

Přímka $m =\leftrightarrow AB$ je určena jednoznačně kterýmkoli bodem z dvojice (M, M_1). Probíhá-li bod M_1 přímku p_1, obaluje přímka $m =\leftrightarrow AB$ parabolu Π, pro niž je ohniskem počátek soustavy souřadnic a řídící přímkou přímka p.

Příklady kubik s $a = 0$ anebo $b = 0$ jsou uvedeny jako zvláštní případy s odvoláním na autorství G. de Longchampsa.

Parametrické vyjádření kubiky ve tvaru

$$x = -\frac{(1 + t^2)c}{(at + b)t}, \qquad y = -\frac{(1 + t^2)c}{at + b}, \quad t \in \mathbb{R},$$

slouží na jednoduché vyjádření asymptot lineárními rovnicemi i parametrickým tvarem jejich přímkových souřadnic.

Autor se potom vrací k oblíbenému tématu trojúhelníků konstantního obsahu nějakým způsobem asociovaných s křivkou. V tomto případě se jedná o tzv. asymptotické trojúhelníky, jejichž strany leží na asymptotách. Jelikož každá kubika je v racionálním kubickém zobrazení obrazem nějaké přímky p, jež přísluší jednoznačně k bodu M, formulace problému má v tomto případě následující znění:

a) Zjistit množinu všech přímek p, jejichž obrazy v daném racionálním kubickém zobrazení mají asymptotické trojúhelníky konstantního obsahu.

b) Zjistit množinu všech bodů M, k nimž příslušné přímky p jsou daným racionálním kubickým zobrazením zobrazeny na kubiky s asymptotickým trojúhelníkem konstantního obsahu.

Odpovědí na problém a) je množina všech tečen racionální křivky šesté třídy, řešením problému b) je lemniskáta s dvojnásobným bodem v počátku soustavy souřadnic.

V tomto paragrafu je ještě uvedeno několik zajímavých křivek, různým způsobem asociovaných se základním tématem. Jedná se vesměs o křivky zmiňované v proslulém Loriově kompendiu [2].

V další části článku je proveden výpočet souřadnic těžiště asymptotického trojúhelníku a zjištěno, že množina všech přímek, jejichž obrazy jsou kubiky, pro něž asymptotické trojúhelníky mají opsané kružnice konstantního poloměru, obaluje křivku osmé třídy. Množina všech bodů příslušných k těmto přímkám je křivka šestého stupně, jejíž rovnice má tvar

$$(x^2 + y^2)^3 - r^2x^2y^2 = 0;$$

to je tzv. čtyřlistá rodonea.[13]

Rozsáhlá část práce je věnována vyšetřování útvarů sdružených s kubikami, jež jsou obrazy svazku přímek vzniklého otáčením přímky p kolem jednoho jejího pevného bodu P. Ke každé přímce tohoto svazku přísluší: vrchol S_1 příslušné paraboly Π (viz text výše); průsečík S asymptot obrazové kubiky rovnoběžných se souřadnicovými osami; třetí asymptota a_3; těžiště T asymptotického trojúhelníku; střed C kružnice opsané asymptotickému trojúhelníku.

Při otáčení přímky p kolem bodu $P \in p$

- vrcholy S_1 parabol Π probíhají kružnici, jejíž průměrem je úsečka PO (O – počátek soustavy souřadnic);
- bod S probíhá hyperbolu, jejíž asymptoty jsou rovnoběžné s osami soustavy souřadnic a jejímž středem je bod P;
- množina všech bodů C je křivka čtvrtého stupně a čtvrté třídy s jedním izolovaným dvojnásobným bodem a souřadnicovými osami jako tečnami vratu v nevlastních bodech os;

[13] Název křivky je odvozen od jména ostrova Rhodos.

- třetí asymptoty a_3 kubik obalují racionální křivku třetí třídy a čtvrtého stupně; tato křivka má tři body vratu, z nichž jeden je reálný a dva jsou sdružené imaginární; tuto křivku lze vytvořit jako množinu všech průsečíků dvojic korespondujících kuželoseček dvou projektivních svazků kuželoseček.
- Je-li S'' bod, jemuž je v základní konfiguraci přiřazena asymptota a_3 jako odpovídající přímka, při otáčení přímky p kolem jejího bodu P mění asymptota a_3 svou polohu, následkem čeho bod S'' opisuje racionální křivku čtvrtého stupně s trojnásobným bodem v počátku soustavy souřadnic.

V dalším paragrafu je uvedena konstrukce kisoidální křivky pomocí kuželosečky a přímky; tato konstrukce, jejíž řídící prvky jsou analyticky závislé na výchozích prvcích základní transformace, dává výsledek identický s kubikou jako obrazem přímky v biracionálním zobrazení.

V závěru článku je popsána kubika jako obraz přímky a několik dalších objektů s ní asociovaných (v polární soustavě souřadnic).

Článek recenzoval profesor R. Müller ze Schönebergu.[14] Stručně popsal hlavní kroky konstrukce a základní výsledky obrazu přímky.

Jedním z prvních témat, jimiž se K. Zahradník zabýval a k nimž se opakovaně vracel v několika obdobích své vědecké tvorby, byla zobecněná idea konstrukce jistého druhu křivek, jejichž předobrazem je Dioklova kisoida. Jedná se o druh křivek souhrnně nazývaných kisoidálami. Jejich tematika je předmětem článku *Cissoidalcurven* (Kisoidální křivky) [Z10].

Zobecnění Dioklovy kisoidy spočívá v nahrazení kružnice libovolnou regulární kuželosečkou a tečny kružnice libovolnou přímkou v rovině kuželosečky. Pevný bod kuželosečky je třetím řídícím prvkem výtvoru křivky. V textu zamlčená podmínka požaduje, aby zvolená přímka neprocházela řídícím pevným bodem.

Nechť tedy je dána kuželosečka c a v její rovině přímka p. Nechť O je pevný bod kuželosečky, kterým přímka p neprochází. Kartézská soustava souřadnic je zvolena tak, že bod O je jejím počátkem. Bod O je středem svazku přímek. Každá přímka tohoto svazku s výjimkou tečny kuželosečky v bodě O protíná kuželosečku c ještě v jednom bodě $M_2[x_2, y_2]$ a přímku p v bodě $M_1[x_1, y_1]$. (Ambientní rovina je rozšířená euklidovská, takže *každá* přímka svazku se středem O přímku p protíná.) Nanese-li se úsečka OM_2 od bodu M_1 ve směru k bodu O, má druhý krajní bod $M_3[x_3, y_3]$, přičemž $OM_2 \cong M_3M_1$ a úsečky s vyznačeným pořadím bodů mají souhlasnou orientaci. Každé přímce svazku (včetně tečny kuželosečky v bodě O) odpovídá jednoznačně bod M_3. Množina všech bodů M_3 se nazývá *kisoidální křivkou.* Po provedení rutinních výpočtů se obdrží parametrické vyjádření křivky ve tvaru

$$x = -\frac{p}{m + nu} + \frac{d + eu}{a + bu + cu^2},$$

[14] Viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 35(1904), str. 601.

$$y = \Big(- \frac{p}{m+nu} + \frac{d+eu}{a+bu+cu^2} \Big) u, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Vyloučením parametru u a úpravou nabývá rovnice křivky tvar

$$a_1x^3 + b_1x^2y + c_1xy^2 + d_1y^3 + e_1x^2 + f_1xy + g_1y^2 = 0, \qquad \text{(I)}$$

odkud je vidět, že se jedná o kubiku s dvojnásobným (uzlovým) bodem. Podle prvního Plückerova vzorce je čtvrté třídy. Analýzou rovnice kisoidální křivky a rovnice kubiky s uzlovým bodem lze zjistit, že každá křivka třetího stupně a čtvrté třídy je kisoidální křivka. Má tři různé reálné asymptoty, dvojnásobnou reálnou asymptotu, jež je vlastní přímkou anebo jednu reálnou asymptotu a dvě sdružené imaginární asymptoty podle toho, je-li řídící kuželosečkou hyperbola, parabola anebo elipsa.

Spojnice bodu O s průsečíky řídící kuželosečky c s řídící přímkou g (existují-li) jsou tečny kisoidální křivky v jejím dvojnásobném bodě O. Kisoidální křivka má bod vratu (a následně tečnu vratu) právě tehdy, je-li přímka g tečnou kuželosečky c.

Kisoidální křivka se stává Dioklovou kisoidou právě tehdy, když v rovnici (I) je $a = 1$, $b = 0$, $c = 1$, $d = -a$, $e = 0$, $n = 0$, $\frac{m}{p} = -a$; rovnice Dioklovy kisoidy má tedy tvar

$$y = x\sqrt{\frac{x}{a-x}},$$

v parametrickém vyjádření

$$x = \frac{au^2}{1+u^2}, \qquad y = \frac{au^3}{1+u^2}.$$

Recenze dr. A. Maynze z Ludwigslustu podává obšírnou informaci o obsahu práce bez jakéhokoliv náznaku hodnocení.[15]

Mírou zobecnění se od mnoha dalších článků liší práce *Einheitliche Erzeugung der bekannten rationalen Kurven dritter Ordnung als Zissoidalen* (Jednotný výtvor známých racionálních křivek třetího řádu jako kisoidál) [Z93]. V jejím úvodu je dán předpis, jímž se v několika krocích zobecňuje konstrukce bodů Dioklovy kisoidy. Křivky zobecněným způsobem sestrojené nesou název *kisoidály*.

Nechť jsou dány regulární kuželosečka c, přímka g a na kuželosečce bod O. Každá přímka m incidující s bodem O je buď tečnou kuželosečky, anebo ji protíná v dalším bodě A. Přímku g protíná přímka m v bodě B. Pro každou přímku m je sestrojen bod, pro který platí: body O, A, B, M jsou kolineární a $OM \cong OB - OA$ (odčítání úseček) (obr. 2). Množina všech bodů M se nazývá kisoidála s řídícími prvky c, g, O. Množina všech bodů M', jež jsou s body O, A, B kolineární a pro něž platí: $OM' \cong OB + OA$ (sčítání úseček), se nazývá *průvodní křivkou kisoidály* (v německém originálu *Begleitkurve*).

[15] Viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 6(1874), str. 443.

Je-li bod O zvolen za počátek pravoúhlé kartézské soustavy souřadnic, má kuželosečka c rovnici

$$c : u_1 + u_2 = 0,$$

kde $u_i(x, y)$ je homogenní polynomická funkce stupně i $(i = 1, 2)$ proměnných x, y.

Nechť rovnice přímky g má tvar

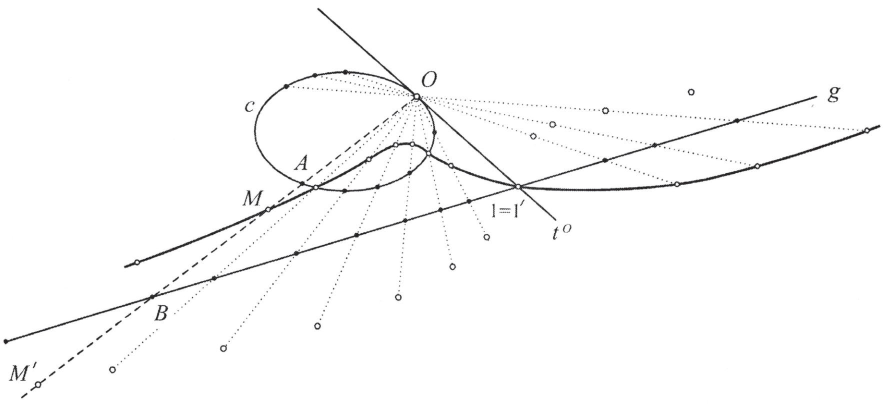
$$g : ax + by + c = 0; \qquad (a, b) \neq (0, 0),\ c \neq 0.$$

Rovnice kisoidály má pak tvar

$$(ax + by + c)u_2 - (ax + by)u_1 = 0 \tag{1}$$

a rovnice průvodní křivky je

$$(ax + by + c)u_2 + (ax + by)u_1 = 0. \tag{2}$$



Obr. 2

Záměna kuželosečky c kuželosečkou c' souměrně sdruženou s kuželosečkou c podle středu O a konstrukce kisoidály z řídících prvků c', g, O dává jako kisoidálu průvodní křivku kisoidály (c, g, O) a jako průvodní křivku kisoidály (c', g, O) kisoidálu (c, g, O). Jsou tedy ve dvojici (kissoidála, průvodní křivka) obě křivky vzájemně rovnocenné a jejich přiřazení lze chápat jako jistý druh *strukturální involuce.*

Kisoidála (c, g, O) a její průvodní křivka jsou racionální křivky třetího stupně s dvojnásobným bodem v bodě O, společným bodem na přímce g, jež je průsečíkem této přímky s tečnou kuželosečky v bodě O, a společnou asymptotou, jíž je přímka g. Další dvě asymptoty této kubiky jsou rovnoběžné s asymptotami základní kuželosečky c.

Uvedeným způsobem lze zkonstruovat všechny racionální křivky třetího stupně ([Z4], [Z10]) kromě těch, jež mají nevlastní přímku za inflexní tečnu.[16]

Je-li přímka g asymptotou kuželosečky c, anebo v případě, že c je parabola, je-li tato přímka osou paraboly, kisoidála i její průvodní křivka se rozpadají na přímku rovnoběžnou s přímkou g a na kuželosečku stejnolehlou s kuželosečkou c.

V dalších částech práce je uveden velký počet příkladů, jak lze z rovnic jistých typů racionálních křivek třetího stupně nalézt generátory, pomocí nichž je kubika vytvořena jako kisoidála. Takovým způsobem jsou vyšetřeny mnohé známé kubiky, o nichž se pak zjišťuje, že jsou kisoidály.

Například racionální kubika o rovnici tvaru

$$u_3(x, y) + u_2(x, y) = 0,$$

kde $u_i(x, y)$ je homogenní funkce stupně i $(i = 2, 3)$ proměnných x, y, s dvojnásobným bodem v počátku pravoúhlé kartézské soustavy souřadnic a asymptotou g o rovnici

$$g : a_n x + b_n y + c_n = 0$$

(nejméně jedna asymptota křivky třetího stupně je reálná), má za generující prvky kisoidály identické s touto kubikou bod O, asymptotu g a kuželosečku $c^{(2)}$ o rovnici

$$\alpha_n x^2 + \beta_n xy + \gamma_n y^2 + \delta_n x + \varepsilon_n y = 0,$$

v níž koeficienty $\alpha_n, \ldots, \varepsilon_n$ jsou určeny z původní rovnice kubiky a z rovnice její asymptoty – za předpokladu, že bod O inciduje s kuželosečkou – metodou „neurčitých“ koeficientů.[17]

Má-li sestrojená kisoidála všechny tři asymptoty reálné, generující kuželosečka je hyperbola, v případě jedné reálné asymptoty a dvou sdružených imaginárních asymptot je generující kuželosečka elipsa, a má-li zkonstruovaná kisoidála jednu vlastní reálnou asymptotu a jako další dvojnásobnou asymptotu nevlastní přímku, je generující kuželosečka parabola.

Jako další typ analyzuje Karel Zahradník *cirkulární racionální křivku třetího stupně*. Rovnice křivky má tvar

$$(ax + by)(x^2 + y^2) + lx^2 + mxy + ny^2 = 0, \quad (a, b) \neq (0, 0),$$

počátek soustavy souřadnic O je dvojnásobným bodem. Generující prvky kisoidály, jež je identická s danou křivkou, jsou bod O, přímka g o rovnici

$$ax + by + c = 0$$

[16] Viz G. de Longchamps: *Sur les cubiques unicursales*, Nouvelle correspondence mathématique, 1878.

[17] Název neodpovídá dnešní terminologii – koeficienty jsou *neznámé*.

a kružnice o rovnici

$$x^2 + y^2 + \alpha x + \beta y = 0,$$

kde α, β jsou určeny metodou neurčitých koeficientů.

Přímka g je reálnou asymptotou kisoidály, další dvě asymptoty jsou sdružené imaginární. Jejich průsečík P se nazývá *pólem* kubiky, také středem neboli zvláštním ohniskem kubiky. Je souměrně sdružený se středem S generující kružnice podle singulárního bodu O.

Je-li $OS \perp g$, vzniká *kolmá* (*přímá*) cirkulární kisoidála, v opačném případě *kosá* (*šikmá*).

Leží-li pól na cirkulární kisoidále, vzniká fokála, a to v tomto případě *kosá* strofoida. Opět, platí-li $OS \perp g$, vzniká *kolmá* strofoida.

Pomocí proměnného parametru v rovnici strofoidy je vytvořena lineární řada strofoid. Je zajímavé vyšetřovat pro tento objekt

a) množinu středů všech generujících kružnic jednotlivých strofoid řady;
b) obálku generujících přímek všech strofoid řady;
c) obálku generujících kružnic všech strofoid řady.

Odpovědi jsou:

a) Kružnice.
b) Křivka čtvrtého stupně a třetí třídy – *Steinerova hypocykloida.*
c) Kardioida.

Mnohé křivky třetího stupně jsou speciálními případy *kolmé cirkulární kisoidály.* Jejími řídícími prvky jsou počátek O soustavy souřadnic, kružnice k se středem S ležícím na ose x soustavy souřadnic a incidující s bodem O a přímka g kolmá na osu x. Nechť rovnice kružnice k a přímky g po řadě jsou

$$k : x^2 + y^2 - 2ax = 0,$$

$$g : x - b = 0.$$

Kisoidála má pak rovnici

$$(x - b)(x^2 + y^2) + 2ax^2 = 0$$

neboli v explicitním tvaru

$$y = x\sqrt{\frac{b - 2a - x}{x - b}}.$$

V duchu dobových zvyklostí není v textu žádná diskuse o podmínkách existence výrazu na pravé straně.

Průvodní křivka kisoidály má rovnici

$$y = x\sqrt{\frac{b + 2a + x}{x - b}}.$$

To je však *Slusova konchoida*; že je opět kolmou cirkulární kisoidálou, plyne z faktu, že její řídící prvky jsou tytéž jako v předchozím případě, pouze kružnice k je nahrazena kružnicí k' souměrně sdruženou s kružnicí k podle počátku O soustavy souřadnic.

Pro $b = a$ je kisoidála kolmou strofoidou o rovnici

$$x(x^2 + y^2) + a(x^2 - y^2) = 0$$

a její průvodní křivka je *Jeřábkova křivka* o rovnici

$$x(x^2 + y^2) - a(3x^2 + y^2) = 0.$$

Jeřábkova křivka je Slusovou konchoidou, v níž přímka g prochází středem S řídící kružnice k a je kolmá k přímce OS.

Je-li $b = 2a$, je kisoidála Dioklovou kisoidou o rovnici

$$y = x\sqrt{\frac{x}{2a - x}}$$

a její průvodní křivka, zvaná průvodní křivkou kisoidy, má rovnici

$$y = x\sqrt{\frac{4a - x}{x - 2a}}.$$

Jsou-li řídící prvky kisoidály počátek O pravoúhlé kartézské soustavy souřadnic, kružnice k o rovnici

$$k : x^2 + y^2 - 4ax = 0$$

a přímka g o rovnici

$$g : x - a = 0$$

vznikne *Maclaurinova trisektrix*, jejíž rovnice má tvar

$$x(x^2 + y^2) = a^2(y^2 - 3x^2);$$

tudíž je tato křivka speciálním případem kolmé cirkulární kisoidály pro $a = 2b$.

Pro

$$k : x^2 + y^2 + 2rx = 0,$$

$$g : x + r - l = 0$$

a pevný bod O vzniká *Cramerova trisektrix* jako příklad kolmé cirkulární kisoidály, jenž zahrnuje Maclaurinovou trisektrix jako speciální případ pro $r = -2a$ a $l = -a$.

Pro kružnici

$$k : x^2 + y^2 + \frac{a}{2}x = 0$$

a přímku

$$g : x - \frac{a}{2} = 0$$

vzniká *Peanova viziéra*, jejíž průvodní křivka má rovnici

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)(x^2 + y^2) - \frac{a}{2}x^2 = 0.$$

To je ovšem taky průvodní křivka Dioklovy kisoidy, v níž průměr řídící kružnice má délku $\frac{a}{2}$.

Z dalších známých křivek, jež jsou kisoidálami, je uvedena *ofiurida* o rovnici

$$x(x^2 + y^2) - y(bx - cy) = 0.$$

Její řídící prvky jako kisoidály jsou kružnice k o rovnici

$$k : x^2 + y^2 + by + cx = 0,$$

přímka g o rovnici

$$g : x + c = 0$$

a samozřejmě – jako ve všech případech – bod O (počátek soustavy souřadnic). Rovnice kisoidály s těmito řídícími prvky má tvar

$$(x + c)(x^2 + y^2) - x(by + cx) = 0,$$

což je rovnice identická s rovnicí výše uvedenou. Patrně je ofiurida kosou cirkulární kisoidálou.

Další zajímavou křivkou této skupiny je *de Longchampsova trisektrix*, jejíž rovnice má tvar

$$x(x^2 - 3y^2) + r(x^2 + y^2) = 0.$$

Konstrukce jejích bodů je následující: Na kružnici k s průměrem AB, kde $|AB| = 2r$, se vyberou dva body D, E tak, že délka oblouku AD je dvojnásobkem délky oblouku BE. Průsečík tečen kružnice v bodech D, E je bodem trisektrisy. Řídícími útvary trisektrisy jsou počátek O soustavy souřadnic, kterákoliv asymptota g_1 ze tří reálných asymptot křivky, například

$$g_1 : x - \frac{r}{3} = 0,$$

a hyperbola h_1 o rovnici

$$x^2 - 3y^2 - \frac{4}{3}rx = 0.$$

Obměnou posledních dvou útvarů řídící trojice jsou dvojice složené z asymptoty g_2, resp. g_3, a příslušné hyperboly h_2, resp. h_3.

Rovnici křivky lze potom psát ve tvaru

$$g_1 g_2 g_3 + \frac{4}{27} r^3 = 0,$$

což mimo jiné znamená, že asymptoty trisektrisy jsou jejími inflexními tečnami v jejích nevlastních bodech.

Descartův list daný rovnicí

$$x^3 + y^3 - 3axy = 0$$

lze konstruovat jako kisoidálu s řídící elipsou o rovnici

$$x^2 - xy - y^2 - a(x + y) = 0$$

a řídící přímkou o rovnici

$$x + y + a = 0.$$

Cesàrova křivka daná rovnicí

$$(x + y)(x^2 - 2kxy + y^2) = 2(1 + k)axy, \quad k \in \mathbb{R},$$

je kolmou strofoidou v případě $k = 0$ a Descartovým listem v případě $k = \frac{1}{2}$. Její řídící útvary (kromě bodu O) jsou přímka g a kuželosečka c, dané rovnicemi

$$g : x + y + a = 0,$$

$$c : x^2 - 2kxy + y^2 + a(x + y) = 0.$$

V případě, že c je hyperbola (tj. $k^2 > 1$), má křivka tři reálné asymptoty, v případě, že je elipsou (tj. $k^2 < 1$), existuje jediná asymptota a tou je přímka g.

Následující kisoidály mají nevlastní přímku roviny za tečnu.

První z nich je uvedena v Loriově monografii [2] rovnicí

$$2y^2(px - [\alpha + \beta]y) = (2px - \alpha y)(2px - \beta y).$$

Je konstruovaná následovně: Nechť jsou dány parabola a přímka r. Libovolná přímka (různá od osy paraboly) incidující s bodem O paraboly protíná parabolu ještě v jednom bodě O' a přímku r v bodě P. Na této přímce je sestrojen ještě další bod P' tak, že úsečky OO', PP' mají společný střed. Množina všech bodů P' je uvedená křivka.

Tvrzení se potvrdí pomocí vhodného zápisu řídících prvků v soustavě souřadnic. Parabola je dána parametricky ve tvaru

$$x = \frac{\lambda^2}{2p}, \qquad y = \lambda, \quad \lambda \in \mathbb{R},$$

a přímka je určena jako spojnice dvou bodů paraboly s parametry α, β. Další výpočty vedoucí k rovnici kisoidály identické s danou rovnicí jsou záležitostí standardní technické rutiny.

Pro $\alpha = \beta$ se uzlový bod křivky mění na bod vratu a rovnice křivky nabývá tvar

$$xy^2 - a(y - mx)^2 = 0.$$

Řídícími prvky křivky jako kisoidály jsou přímka g o rovnici

$$x - a = 0$$

a kuželosečka o rovnici

$$y^2 + am^2x - 2amy = 0.$$

Přímka g je tečna paraboly a její dotykový bod je $[a, am]$. Pro $m = 1$ vzniká *Rollova křivka* o rovnici

$$xy - a(x + y) = 0,$$

neboli v estetickém symetrickém tvaru

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{a};$$

v polárních souřadnicích má tvar

$$r = \frac{a}{\cos\varphi} + \frac{a}{\sin\varphi}.$$

Tím se ukazuje, že křivka je speciálním případem *Lamého křivky.*

Z rovnice Cesàrovy křivky pro $k = 1$ vzniká rovnice speciální křivky o rovnici

$$(x + y)(x - y)^2 = 4axy.$$

Řídícími čárami jsou přímka g a kuželosečka c o rovnicích

$$g : x + y + a = 0,$$

$$c : (x - y)^2 + a(x + y) = 0.$$

Otočením os soustavy souřadnic o úhel velikosti $\frac{\pi}{4}$ a volbou $k = 1$ nabývá Cesàrova křivka rovnici

$$xy^2 = \frac{a}{\sqrt{2}}(x^2 - y^2).$$

Jejími řídícími prvky jako kisoidály jsou přímka g o rovnici

$$x + \frac{a}{\sqrt{2}} = 0$$

a parabola o rovnici
$$y^2 + \frac{a}{\sqrt{2}}x = 0.$$

V závěru práce je uvedena přehledná tabulka všech uvedených kisoidál s údaji o řídících prvcích a s názvy známými z klasické teorie.

Práci recenzoval profesor K. Petr z Prahy.[18] Jeho výstižná recenze zní (překlad): Poté, když autor obecně dokázal pro každou racionální křivku třetího řádu, jejíž tři asymptoty nejsou vesměs vzájemně rovnoběžné, že může být sestrojena jako kisoidála, vyšetřuje speciálně celou řadu křivek, jež se vyskytují v matematické literatuře. Zvláště nachází, že kružnici lze použít jako pomocnou kuželosečku u těchto křivek: kolmá cirkulární kisoidála, Slusova konchoida, kolmá strofoida, Jeřábkova křivka, Dioklova kisoida, Peanova viziéra, Maclaurinova trisektrix, Cramerova trisektrix, ofiurida.

Vyšší úroveň zobecnění ve srovnání s většinou Zahradníkových článků má i práce *Konstruktion der rationalen Kurven dritter und vierter Ordnung, respektive Klasse vermittels der kollinear incidenten Elemente* (Konstrukce racionálních křivek třetího a čtvrtého řádu, resp. třídy prostřednictvím kolineárně incidujících prvků) [Z95]. Problematika vychází z jednoduché geometrické situace: Od regulární kolineace soumístných bodových a přímkových polí v projektivní rovině je zavedeno zobrazení, v němž obrazem libovolného bodu roviny je spojnice tohoto bodu s jeho obrazem v dané kolineaci. Obráceně, libovolné přímce je přiřazen bod, jenž je průsečíkem této přímky s jejím obrazem v kolineaci. O kolineaci se předpokládá, že má tři různé silně samodružné body a tudíž i tři různé silně samodružné přímky – spojnice dvojic silně samodružných bodů.[19]

Zvolí-li se silně samodružné body za vrcholy homogenní projektivní soustavy souřadnic – tudíž osami této soustavy jsou silně samodružné přímky – rovnice kolineace bez dalších podmínek mají tvar
$$\lambda x_i' = a_i x_i, \qquad \mu u_i' = a_i u_i, \quad i = 1, 2, 3;$$
$$\lambda, \mu, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}, \quad \lambda\mu a_1 a_2 a_3 \neq 0,$$
pro bod $(x) = (x_1, x_2, x_3)$ a jeho obraz $(x') = (x_1', x_2', x_3')$, resp. přímku $(u) = (u_1, u_2, u_3)$ a její obraz $(u') = (u_1', u_2', u_3')$.

Rovnice definovaného přiřazení $P(x_1, x_2, x_3) \mapsto p(u_1, u_2, u_3)$ a inverzního zobrazení $p(u_1, u_2, u_3) \mapsto P(x_1, x_2, x_3)$ mají tvar
$$\varrho u_i = \frac{b_i}{x_i}, \qquad \sigma x_i = \frac{b_i}{u_i}, \quad i = 1, 2, 3,$$

[18] Viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 37(1906), str. 612.

[19] Čtenář si zajisté uvědomí, že každý bod silně samodružné přímky s výjimkou jejích dvou silně samodružných bodů je slabě samodružný, a analogicky, každá přímka svazku přímek se středem v silně samodružném bodě s výjimkou dvou silně samodružných přímek je slabě samodružná.

kde $b_i = a_2 - a_3$, $b_2 = a_3 - a_1$, $b_3 = a_1 - a_2$; $\varrho \neq 0$, $\sigma \neq 0$.

V souladu s dobovou terminologií nazývá Karel Zahradník toto zobrazení kvadratickou korelací; v dnešní terminologii bychom mluvili o kvadratické biracionální korespondenci mezi (reálnou) projektivní rovinou a rovinou k ní duální.

Jako zřejmě známé (bez explicitní zmínky) K. Zahradník připomíná (v dnešní formulaci):

Obrazem křivky n-té třídy jako obálky přímek p je bodová křivka stupně (v originálu *řádu*) $2n$ jako množina všech bodů P incidujících v kolineaci s přímkami p.[20] Vrcholy soustavy souřadnic jsou n-násobnými body této křivky. Obráceně, křivka stupně n jako množina všech bodů P má v přímé transformaci za obraz křivku třídy $2n$ jako obálku přímek p transformací přiřazených k bodům P. Pro tuto křivku jsou souřadnicové osy n-násobné tečny.

V dalším jsou vyšetřovány případy různých množin bodů P, resp. přímek p, a obrazy těchto množin. Zvláštní pozornost je v některých případech věnována singularitám, případně případům speciální polohy význačných bodů nebo přímek.

Jako první případ je vyšetřován obraz svazku přímek p se středem svazku S. Je-li $p = (u_1, u_2, u_3)$, $S = (y_1, y_2, y_3)$, incidence přímky p a bodu S je vyjádřena rovnicí

$$\sum u_i y_i = 0.$$

Probíhá-li přímka p svazek přímek se středem S, jsou souřadnice u_1, u_2, u_3 proměnné a je-li $P(x_1, x_2, x_3)$ obraz přímky p v kvadratickém racionálním zobrazení, incidence přímky p a bodu P je vyjádřena rovnicí

$$\sum \frac{b_i}{x_i} y_i = 0,$$

kde b_i, y_i jsou konstanty a x_i proměnné neznámé. Odstraněním jmenovatele vznikne homogenní kvadratická rovnice s neznámými x_1, x_2, x_3 vyjadřující kuželosečku projektivní roviny opsanou všem vrcholům soustavy souřadnic. Bod S je bodem kuželosečky, je roven svému obrazu S' v kolineaci, $\leftrightarrow SS'$ je tečna kuželosečky. Leží-li bod S na ose soustavy souřadnic a je různý od vrcholů soustavy souřadnic na této ose, kuželosečka se rozpadá.

Tvoří-li přímky p množinu všech tečen křivky druhé třídy, je obrazem této množiny v dané racionální kvadratické transformaci křivka čtvrtého stupně, jež má dvojnásobné body ve všech vrcholech soustavy souřadnic.[21] Jelikož maximální počet dvojnásobných bodů křivky čtvrtého stupně je roven číslu 3 (pro křivku stupně n je toto číslo rovno $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, což pro $n = 4$ dává $\frac{3 \cdot 2}{2} = 3$) a toto číslo je v případě dané křivky dosaženo, je rod křivky roven 0 a křivka

[20] V definici tohoto kvadratického zobrazení přímka přiřazena bodu inciduje s bodem a jeho obrazem v kolineaci. Čtenář s hlubším zájmem o biracionální korespondence by se mohl pokusit sám o zjištění fundamentálních bodů a iregulárních variet přímé transformace a fundamentálních přímek a iregulárních variet inverzní transformace.

[21] Tyto body jsou fundamentálními body transformace.

je tudíž *racionální*. V odstavci jsou ještě podrobně analyzovány podmínky, za kterých dvojnásobné body křivky jsou uzlovými body, body vratu nebo izolovanými body.

V závěru této části je poznámka o konstrukcích v případě, když základní kolineace má ze tří silně samodružných bodů dva body sdružené imaginární. Obraz kuželosečky je i v tomto případě křivka čtvrtého stupně.

Prochází-li tečnová kuželosečka, jejíž obraz v kvadratické transformaci je hledán, fundamentálním bodem transformace (v celém článku je to vždy vrchol soustavy souřadnic), tj. je-li dotykovým bodem některé tečny kuželosečky fundamentální bod, je obrazem kuželosečky nadále křivka čtvrtého stupně, jež má fundamentální bod za bod vratu a je páté třídy. Prochází-li tečnová kuželosečka dvěma fundamentálními body, má její obraz – což je opět křivka čtvrtého stupně – v těchto bodech body vratu a je čtvrté třídy. V případě incidence tečnové kuželosečky i s třetím fundamentálním bodem má korespondující křivka čtvrtého stupně tři body vratu a je třetí třídy. Všechny tři tečny vratu se protínají v jednom bodě. Přímka, jež je jeho obrazem ve zkoumané kvadratické transformaci, je Pascalovou přímkou pro redukovaný Pascalův šestiúhelník tvořený tečnami kuželosečky ve vrcholech soustavy souřadnic.

Dále jsou zkoumány případy rozpadu křivky čtvrtého stupně, jež je obrazem tečnové kuželosečky v kvadratické transformaci. Je-li osa o_1 souřadnicové soustavy tečnou tečnové kuželosečky, rozpadá se obraz tečnové kuželosečky na tuto přímku a křivku třetího stupně. Je-li souřadnicový vrchol O_3 dotykovým bodem tečny o_1 s kuželosečkou, je fundamentální bod O_1 uzlovým bodem nebo izolovaným bodem a kubika, jež je spolu s přímkou o_1 obrazem kuželosečky, je křivkou čtvrté třídy.

Prochází-li kuželosečka (jako množina všech dotykových bodů tečen tečnové kuželosečky) navíc bodem O_1, má obraz kuželosečky, tj. křivka třetího stupně (spolu s přímkou o_1) v bodě O_1 bod vratu, a je tudíž křivkou třetí třídy.

Jsou-li dvě osy soustavy souřadnic tečnami tečnové kuželosečky, např. o_1 a o_3, rozpadá se její obraz, jímž je křivka čtvrtého stupně, na dvě přímky o rovnicích $x_1 = 0$, $x_3 = 0$ a kuželosečku.

Nakonec, jsou-li všechny tři osy soustavy souřadnic tečnami tečnové kuželosečky, je obrazem kuželosečky křivka čtvrtého stupně složená ze všech tří os soustavy souřadnic a další přímky.

Z uvedené analýzy plynou konstrukce racionálních křivek čtvrtého a třetího stupně.

Racionální křivka čtvrtého stupně je určena třemi dvojnásobnými a pěti dalšími jednoduchými body. (Počet určujících jednoduchých podmínek pro určení křivky n-tého stupně je roven číslu $N = \frac{n(n+3)}{2}$. Pro $n = 3$, resp. 4, je toto číslo 9, resp. 14. Zadání r-násobného bodu křivky ($r \leq n$) je ekvivalentní se zadáním $\frac{r(r+1)}{2}$ jednoduchých bodů v „obecné“ poloze. Výše uvedená množina bodů pro určení křivky čtvrtého stupně tedy znamená $\frac{3\cdot(2\cdot 3)}{2} + 5 = 14$ jednoduchých podmínek, jimiž je křivka za předpokladu „obecné“ polohy jednoznačně určena.) Myšlenka konstrukce křivky z těchto prvků se zakládá na určení kolineace roviny z těchto prvků, určení tečnové kuželosečky a následné konstrukci jejího obrazu v redukovaném racionálním zobrazení.

Kolineace se určí následovně:

Dvojnásobné body křivky se zvolí za silně samodružné body kolineace (zároveň za vrcholy souřadnicové soustavy) a k libovolnému bodu zvolenému za jednotkový bod soustavy souřadnic se přiřadí libovolný bod jako jeho obraz. Tím je kolineace jednoznačně určena.

Obrazy pěti jednoduchých bodů v kvadratické transformaci je pět přímek nezávislých pro určení regulární tečnové kuželosečky. V inverzní racionální kvadratické transformaci je obrazem této tečnové kuželosečky bodová křivka čtvrtého stupně, jež má danou množinu tří dvojnásobných a pěti jednoduchých bodů za své prvky požadovaných vlastností.

Konstrukce nečiní větší potíže ani v případě, když dva z dvojnásobných bodů jsou sdružené imaginární body.

Třída bikvadratické křivky, jež je obrazem tečnové kuželosečky, se snižuje o hodnotu 1 každou podmínkou dotyku tečny tečnové kuželosečky s kuželosečkou v dvojnásobném bodě.

V této části je ještě zmínka o řešení duální úlohy – konstrukci křivky čtvrté třídy, když jsou dány její tři dvojnásobné tečny a pět jednoduchých tečen.

Hodně pozornosti je v práci věnováno situaci, když dva silně samodružné body jsou nevlastní. Kolineace se v tom případě mění na afinitu a projektivní invarianty jsou nahrazeny invarianty afinními. Analogicky jsou pak vyšetřovány případy s různými incidenčními vztahy určujících prvků k nevlastní přímce a jejich důsledky pro základní číselné invarianty i další vlastnosti obrazové bikvadratické křivky. Rovněž jsou řešeny případy, když vzorová kuželosečka má speciální tvar.

Tedy zvolí-li se osa souřadnicové soustavy o_3 za nevlastní přímku, má dva silné samodružné body $O_{1\infty}$, $O_{2\infty}$, jež byly před volbou silně samodružnými body kolineace. Zvolí-li se bod O_3 za počátek kosoúhlé soustavy souřadnic s osami $x = OO_{1\infty}$, $y = OO_{2\infty}$ a přiřadí-li se libovolnému nespeciálnímu bodu J jako jednotkovému bodu nespeciální bod J' jako jeho obraz, je kolineace soumístných polí jednoznačně určena. Jelikož nevlastní přímka $o_{3\infty}$ je silně samodružná, je tato kolineace afinitou. Obraz P' bodu P se určí z následujících rovností dvojpoměrů čtveřic přímek svazků se středy $O_{1\infty}$, $O_{2\infty}$:

$$(O_{1\infty}O, O_{1\infty}O_{2\infty}, O_{1\infty}J, O_{1\infty}P) = (O_{1\infty}O, O_{1\infty}O_{2\infty}, O_{1\infty}J', O_{1\infty}P'),$$

$$(O_{2\infty}O, O_{2\infty}O_{1\infty}, O_{2\infty}J, O_{2\infty}P) = (O_{2\infty}O, O_{2\infty}O_{1\infty}, O_{2\infty}J', O_{2\infty}P').$$

Označí-li se dolním indexem 1, resp. 2, průmět do osy x rovnoběžně s osou y, resp. průmět do osy y rovnoběžně s osou x, vzniknou čtveřice bodů téhož dvojpoměru, jako byl dvojpoměr promítacích přímek:

$$(OY_\infty J_2 P_2) = (OY_\infty J_2' P_2'),$$

$$(OX_\infty J_1 P_1) = (OX_\infty J_1' P_1'),$$

kde X_∞, resp. Y_∞ označuje nevlastní bod osy x, resp. y. Z toho platí pro dělící poměry

$$(OJ_1P_1) = (OJ_1'P_1'), \qquad (OJ_2P_2) = (OJ_2'P_2'),$$

z čehož

$$OP_i' = \frac{OJ_i'}{OJ_i} \cdot OP_i, \quad i = 1, 2.$$

Položí-li se

$$\frac{OJ_i'}{OJ_i} = \kappa_i, \quad i = 1, 2$$

a $\frac{x_1}{x_3} = x$, $\frac{x_2}{x_3} = y$, $\frac{x_1'}{x_3'} = x'$, $\frac{x_2'}{x_3'} = y'$ $(x_3 \neq 0)$ pro všechny body mimo přímku o_3 o rovnici $x_3 = 0$, objeví se rovnice afinního zobrazení ve tvaru

$$x' = \alpha_1 x, \quad y' = \alpha_2 y; \quad \alpha_1 \neq 0, \quad \alpha_2 \neq 0, \quad \alpha_1 \neq \alpha_2.$$

Přímka $p[u, v]$ přiřazená afinitou k bodu $P[x, y]$ (jako přímka PP') má nehomogenní souřadnice

$$u = \frac{1 - \alpha_2}{\alpha_2 - \alpha_1} \cdot \frac{1}{x}, \qquad v = \frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_2 - \alpha_1} \cdot \frac{1}{y}.$$

Obrazem bodu $J[1, 1]$ v afinitě je bod $J'[\alpha_1, \alpha_2]$.

Když přímka $p[u, v]$ probíhá svazek přímek se středem $S[\alpha, \beta]$, má rovnice každé takové přímky tvar

$$\alpha u + \beta v + 1 = 0$$

a rovnice množiny bodů M incidujících s těmito přímkami, obsahujícími rovněž afinní obrazy bodu M, má tvar

$$2xy - \alpha y - \beta x = 0.$$

Jak je vidět, je to rovnice kuželosečky obsahující počátek soustavy souřadnic a v rozšířené afinní rovině rovněž nevlastní body souřadnicových os x, y. Je to tudíž hyperbola obsahující bod S a mající střed C úsečky SO za svůj střed.

Leží-li bod S na souřadnicové ose, kuželosečka se rozpadá na tuto osu a přímku rovnoběžnou s druhou osou soustavy souřadnic procházející středem úsečky SO.

Jsou-li nevlastní samodružné body kolineace kružnicové body, je příslušná kuželosečka kružnicí.

Zobrazení středové tečnové kuželosečky racionální kvadratickou transformací odvozenou z afinního zobrazení probíhá analogickým způsobem jako v projektivním případě. Jako obrazy vznikají některé známé i méně známé křivky 4. stupně v afinní, resp. euklidovské rovině.

Je-li křivka čtvrtého stupně dána třemi dvojnásobnými body O, X_∞, Y_∞, jež jsou silně samodružnými body kolineace, a dalšími pěti jednoduchými body

A, B, C, D, E v nespeciální poloze vzhledem k určení křivky, představují všechny tyto body spolu $3 \cdot 3 + 5 = 14$ jednoduchých podmínek nezávislých vzhledem k určení křivky čtvrtého stupně. To je právě plný počet podmínek určujících jednoznačně křivku čtvrtého stupně. Křivku lze konstruovat jako obraz tečnové kuželosečky v biracionální kvadratické transformaci: K bodům A, B, C, D, E se přiřadí po řadě přímky a, b, c, d, e incidující s těmito body v důsledku kolineárního zobrazení. (Přímka a je spojnice bodů A, A', kde A' je obraz bodu A v kolineaci atd.) Přímky a, b, c, d, e jednoznačně určují tečnovou kuželosečku. Každé tečně t odpovídá v biracionální kvadratické transformaci bod T křivky čtvrtého stupně, jenž je středem úsečky ohraničené na tečně t jejími průsečíky s osami soustavy souřadnic. Druh dvojnásobného bodu O na křivce čtvrtého stupně (tj. zda je uzlový bod anebo bod vratu) je určen jeho polohou k množině dotykových bodů tečen tečnové kuželosečky. Analytické vyjádření nečiní potíže ani v případě, když jsou dva ze silně samodružných bodů kolineace sdružené imaginární body.

Má-li být křivka čtvrtého stupně ireducibilní, nesmí být žádná souřadnicová osa tečnou tečnové kuželosečky. Je-li souřadnicová osa x jako silně samodružná přímka tečnou tečnové kuželosečky, rozpadá se křivka čtvrtého stupně jako obraz kuželosečky v biracionální kvadratické transformaci na osu x a racionální křivku třetího stupně, jež má nevlastní bod osy x za svůj dvojnásobný bod.

Má-li středová kuželosečka vrchol v počátku O soustavy souřadnic a je-li souřadnicová osa x tečnou kuželosečky v tomto vrcholu, rozpadá se její obraz na osu x a křivku třetího stupně, pro niž dvě asymptoty splývají s osou y jakožto tečnou vratu v nevlastním bodě a jež má osu x za inflexní dotyčnici. Je-li vzorová tečnová kuželosečka hyperbolou, je kubická komponenta jejího obrazu *Schützbogen*, speciálně verziéra anebo pseudoverziéra.[22]

Má-li vzorová tečnová kuželosečka nevlastní přímku za tečnu, tj. je-li parabolou, rozpadá se obrazová křivka čtvrtého stupně na nevlastní přímku a racionální křivku třetího stupně, jež je kisoidálou, která má za generující prvky bod O, hyperbolu incidující s tímto bodem a přímku. Tato křivka má tři reálné asymptoty, z nichž jednou je generující přímka a další dvě jsou rovnoběžné s osou x, resp. y.

Jsou-li nevlastní silně samodružné body sdružené imaginární body, je uvedená kubika cirkulární kisoidálou, jež je v speciálním případě kolmou strofoidou.

Krajně speciální případ nastane, když se nevlastní přímka dotýká tečnové kuželosečky v nevlastním bodě osy y. Generujícími prvky kubické kisoidály, jež je komponentou obrazové kvartiky, jsou parabola a přímka rovnoběžná s osou x.

V závěru práce jsou uvedena parametrická vyjádření vzorové tečnové kuželosečky a všech typů racionálních kvartik, jež vznikají jako obrazy kuželosečky v biracionální kvadratické transformaci.

---

[22] Některé německé názvy křivek nemají odpovídající názvy v češtině, např. *Kreuzkurve*, *Kohlenspitzkurve*, *Schützbogen*.

Práci recenzoval profesor St. Jolles z Hallensee.[23] Po stručné informaci o zavedení kvadratické biracionální korespondence T. Reyem hodnotí Zahradníkův přínos jako analytické odvození konstrukcí racionálních křivek třetího a čtvrtého stupně.

b) Soustavy bodů na křivkách a některé korespondence

V této skupině se nacházejí čtyři práce poněkud různého tematického zaměření, jejichž základní myšlenkou je zkoumání soustav bodů na křivkách charakterizovaných jistou vlastností. V poslední práci je jistá biracionální transformace roviny použita na konstrukci známých rovinných křivek a na odvozování jejich vlastností.

První práce *Ueber harmonische Punktsysteme auf rationalen Curven dritter und vierter Ordnung* (O harmonických soustavách bodů na racionálních křivkách třetího a čtvrtého řádu) [Z8] pojednává následující problém: Je dána rovinná racionální křivka třetího stupně a čtvrté třídy, tj. křivka třetího stupně s uzlovým bodem. Obecně každým bodem roviny procházejí čtyři tečny této křivky. Dotykové body těchto tečen s křivkou se promítají z dvojnásobného bodu čtveřicí přímek svazku přímek se středem v dvojnásobném bodě. Co je množinou všech bodů roviny, pro něž uvedená *čtveřice přímek je harmonická*?

Úloha je řešena vyhledáním parametrů dotykových bodů hledaných tečen pro dané parametrické vyjádření kubiky. Hledanou množinou bodů je křivka třetího stupně incidující se třemi inflexními body dané racionální kubiky; tyto body jsou kolineární. Z devíti průsečíků dané racionální kubiky s odvozenou kubikou tři jsou uvedené kolineární inflexní body, tudíž zbylých šest leží na kuželosečce.

Úloha je pak pozměněna pro případ ekvianharmonické čtveřice přímek promítajících z uzlového bodu dané racionální kubiky dotykové body křivky s tečnami procházejícími jedním bodem roviny. Množina všech bodů roviny s touto vlastností je singulární kuželosečka reprezentována dvojnásobnou přímkou.

Dále je úloha dualizována pro tečnovou křivku vyjádřenou v přímkových souřadnicích rovnicí třetího stupně. Pro tuto křivku je nevlastní přímka dvojnou tečnou a další tečny v jejích bodech dotyku (kromě dvojné tečny) jsou souřadnicové osy; jejich průsečík je počátek soustavy souřadnic. Po této úpravě není složité dualizovat pro tečnovou kubiku oba předešlé výsledky zformulované pro bodovou kubiku. – V článku jsou uvedeny s plným zdůvodněním.

Jako poslední je analyzován případ duální křivky čtvrtého stupně a třetí třídy incidující s kružnicovými body roviny. Je ukázáno, že paty normál z každého bodu jisté přímky leží na jedné kružnici. Pak platí:

I. Množina všech bodů, jejichž paty normál tvoří harmonickou čtveřici, je křivka třetího stupně.
II. Množina všech bodů, pro něž paty normál tvoří ekvianharmonickou čtveřici, je křivka třetího stupně.

[23] Viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 39(1908), str. 616.

Práci recenzoval dr. A. Maynz z Ludwigslustu.[24] Výstižně charakterizuje formulaci úloh i výsledky včetně posledních dvou pro paty normál.

Článek *Harmonische Punktsysteme auf rationalen Curven dritter und vierter Ordnung* (Harmonické soustavy bodů na racionálních křivkách třetího a čtvrtého řádu) [Z14] je identickou verzí (až na několik zanedbatelných jazykových odchylek) předešlé práce. Recenzent dr. H. Schubert z Hamburgu cituje v časopisu *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*[25] první větu o množině bodů, pro něž dotykové body tečen jimi vedených jsou z dvojnásobného bodu křivky promítány harmonickými čtveřicemi přímek. O dalších výsledcích kuse konstatuje, že jsou na tento výsledek navázány.

V práci *O jistém geometrickém vztahu vznikajícím křivkami třetího stupně a třetí třídy* [Z19] je řešen problém, často se opakující v několika Zahradníkových pracích v různých úrovních obecnosti, pro konkrétní křivku – kisoidu (Dioklovu). Jelikož tato křivka třetího stupně má bod vratu, je křivkou třetí třídy, a tudíž každým bodem v „obecné" poloze vzhledem ke křivce procházejí tři tečny křivky. Jejich dotykové body s křivkou tvoří tzv. trojúhelník styku. Přiřazení „bod" $\mapsto$ „trojúhelník styku" je obecně jednoznačné a tudíž je jednoznačné i přiřazení „bod" a „těžiště trojúhelníku styku". Hlavní výsledek práce (mírně upraven podle dnešní terminologie) zní: *Probíhá-li těžiště S trojúhelníku styku při kisoidě křivku stupně n, probíhá příslušný pól P (tj. průsečík tří tečen kisoidy ve vrcholech trojúhelníku styku) křivku stupně $2n$, která má v kružnicových bodech roviny n-násobné body.*

Eduard Weyr v referativním časopisu *Bulletin des science mathématiques (et astronomiques)* uvedl pouze překlad názvu práce; žádnou recenzi však nenapsal.[26]

Článek *Über eine geometrische Verwandtschaft in Bezug auf Curven dritter Ordnung und dritter Classe* (O jisté geometrické příbuznosti vzhledem ke křivkám třetího řádu a třetí třídy) [Z30] je německou verzí předešlého článku [Z19]. Jeho název byl uveden v referativním časopisu *Bulletin des sciences mathématiques (et astronomiques)*, ale skutečná recenze nebyla otištěna.[27]

V rozsáhlé práci *O jisté birationální kubické transformaci a jejím upotřebení v theorii křivek* [Z89] se K. Zahradník vrací k biracionální kubické transformaci rozšířené euklidovské roviny definované v článku *Beitrag zur Theorie der rationalen Kurven dritter Ordnung* [Z87]. V přiřazení $M[x, y] \mapsto M_1[x_1, y_1]$ podle obr. 3, jež má analytické vyjádření

$$x_1 = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, \qquad y_1 = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2},$$

inverzně

$$x = \frac{x_1^2 + y_1^2}{x_1}, \qquad y = \frac{x_1^2 + y_1^2}{y_1},$$

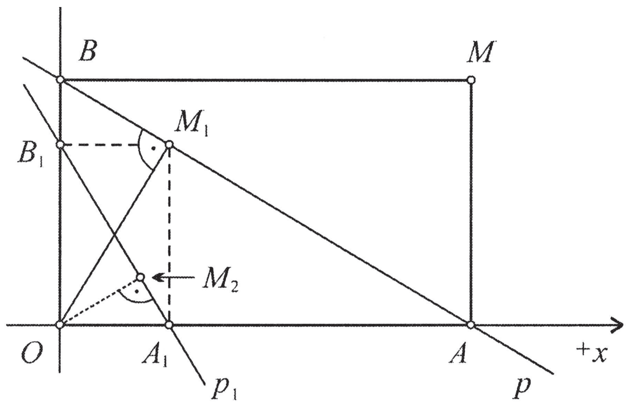
[24] Viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 7(1875), str. 357.

[25] Viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 6(1874), str. 439.

[26] Viz Bulletin des science mathématiques (et astronomiques) II-3 (1879), 2. část, str. 160.

[27] Viz Bulletin des science mathématiques (et astronomiques) II-2 (1878), 2. část, str. 234.

lze pokračovat přiřazením $M_1[x_1, y_1] \mapsto M_2[x_2, y_2]$ shodnou geometrickou konstrukcí.



Obr. 3

Z prvních rovnic plyne

$$xx_1 = yy_1,$$

neboli

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{x}{y}$$

a z přiřazení $M_1 \mapsto M_2$ stejným způsobem

$$\frac{y_2}{x_2} = \frac{x_1}{y_1},$$

tudíž

$$\frac{x_2}{y_2} = \frac{x}{y}.$$

Dalším pokračováním se zjistí, že

$$\frac{x}{y} = \frac{x_{2n}}{y_{2n}}, \qquad n = 1, 2, \ldots;$$

$$\frac{x_1}{y_1} = \frac{x_{2n+1}}{y_{2n+1}}, \qquad n = 1, 2, \ldots.$$

Je-li $p = \leftrightarrow AB$ a $p_1 = \leftrightarrow A_1B_1$ a mají-li přímky přímkové souřadnice $p[u, v]$, $p_1[u_1, v_1]$, platí pro jejich vzájemné vyjádření indukované přiřazením $M \mapsto M_1$ vztahy

$$u_1 = \frac{u^2 + v^2}{u}, \qquad v_1 = \frac{u^2 + v^2}{v},$$

$$u = \frac{u_1 v_1^2}{u_1^2 + v_1^2}, \qquad v = \frac{u_1^2 v_1}{u_1^2 + v_1^2}.$$

Jak je vidět, přiřazení $M \mapsto M_1$ indukuje zobrazení $p_1 \mapsto p$, které je formálně shodné s předešlým zobrazením pro *bodové* souřadnice.

Posloupnost zobrazení $M[x, y] \to M_1[x_1, y_1] \to M_2[x_2, y_2] \to \dots$ má analytické vyjádření

$$x_1 = \frac{xy^2}{x^2 + y^2}, \qquad y_1 = \frac{x^2 y}{x^2 + y^2},$$

$$x_2 = \frac{x_1 y_1^2}{x_1^2 + y_1^2} = \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} x, \qquad y_2 = \frac{x_1^2 y_1}{x_1^2 + y_1^2} = \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2} y,$$

$$\dots\dots\dots\dots$$

$$x_{n+2} = \lambda x_n, \quad y_{n+2} = \lambda y_n, \text{ kde } \lambda = \frac{x^2 y^2}{(x^2 + y^2)^2}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

V dalším jsou vyšetřovány vlastnosti těchto transformací a obrazy algebraických křivek získané těmito transformacemi. Nejprve však jsou vyšetřeny množiny bodů určitých vlastností.

a) *Množina všech bodů M, jež mají od svých obrazů M_1 konstantní vzdálenost c.*

   Krátkým výpočtem je zjištěno, že touto množinou je algebraická křivka čtvrtého stupně daná rovnicí

$$x^4 - x^2 y^2 + y^4 - c^2(x^2 + y^2) = 0.$$

   Lehce se nahlédne, že tato křivka je souměrná podle souřadnicových os i podle os úhlů souřadnicových os. Je to čtyřlístek bez počátku soustavy souřadnic, jenž je na úplné křivce dvojnásobným bodem.

b) *Množina všech bodů M, jež mají konstantní vzdálenost $\underline{a}$ od přímek $\underline{p}$ k nim přiřazených.*

   Přímka p přiřazena zobrazením $M[x, y] \mapsto M_1$ prochází body $A[x, 0]$, $B[0, y]$ a vzdálenost bodu M od přímky p je rovna

$$\frac{|xy|}{\sqrt{x^2 + y^2}} = a.$$

   Množina bodů M dané vlastnosti je tedy algebraická křivka čtvrtého stupně definovaná rovnicí

$$x^2 y^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0$$

   bez počátku soustavy souřadnic; na úplné křivce je tento bod izolovaným dvojnásobným bodem. Tato křivka je obrazem čtyřlisté rodoney v kružnicové inverzi. Německý název *Kreuzkurve* nebyl překládán.

c) Nechť OM, resp. OM_1 je průvodič bodu M, resp. bodu M_1, jenž je obrazem bodu M v zobrazení $M \mapsto M_1$. *Najít množinu všech bodů M, pro něž*

$$|OM| \cdot |OM_1| = a^2, \quad a \neq 0, \quad a - \text{konstanta}.$$

Krátký výpočet pro všechny hledané body $[x, y]$ dává výsledek

$$xy - a^2 = 0,$$

což je rovnice rovnoosé hyperboly, jejímiž asymptotami jsou osy soustavy souřadnic.

Množina obrazů M_1 všech bodů M této hyperboly v přiřazení $M \mapsto M_1$ je obraz hyperboly v kružnicové inverzi, což je lemniskáta.

d) Složením zobrazení $M \mapsto M_1$ a $M_1 \mapsto M_2$ vznikne zobrazení $M \mapsto M_2$. *Kdy je množina všech bodů $\{M_2\}$ obrazem množiny bodů $\{M\}$ v kružnicové inverzi?*

Je-li a poloměr základní kružnice kružnicové inverze, platí pro průvodiče OM, resp. OM_2 bodů M, resp. M_2

$$|OM| \cdot |OM_2| = a^2,$$

což po použití souřadnic x, y a souřadnic x_2, y_2 vyjádřených pomocí x, y dává

$$x^2y^2 - a^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Tato křivka se už objevila v případě b) pod názvem „Kreuzkurve“. (Ovšem počátek O soustavy souřadnic, ačkoliv jeho souřadnice vyhovují rovnici křivky, nepatří do množiny $\{M\}$ hledaných bodů M.) Množina všech hledaných bodů M_2 je čtyřlistá rodonea (s výjimkou počátku soustavy souřadnic). Je úpatnicí asteroidy pro pól ve středu asteroidy.

e) Uvažujme množinu trojúhelníků MM_1O, kde bod O je počátek soustavy souřadnic a M_1 je obraz bodu M v zobrazení $M \mapsto M_1$. Co je *množinou všech bodů M, pro něž trojúhelníky MM_1O mají konstantní obsah?*

Úloha má smysl pro nenulový obsah. Je-li tedy a^2 ($a \neq 0$) dvojnásobek obsahu trojúhelníků MM_1O, platí, že množinou všech hledaných bodů $M[x, y]$ je algebraická křivka čtvrtého stupně (s výjimkou počátku soustavy souřadnic) určená rovnicí

$$xy(x^2 - y^2) - a^2(x^2 + y^2) = 0.$$

Množina všech přidružených bodů $M_1[x_1, y_1]$ vyhovuje rovnici

$$y_1^4 - x_1^4 - a^2x_1y_1 = 0,$$

což opět vyjadřuje křivku čtvrtého stupně s uzlovým bodem O. (Tento bod, ovšem, nepatří do množiny $\{M_1\}$.)

f) *Množina všech bodů M, pro něž spojnice MM_1 incidují s pevným bodem P.* (M_1 je obraz bodu M v přiřazení $M \mapsto M_1$.)

Je-li $P[x_0, y_0]$ pevný bod a $M[x, y]$ proměnný bod hledané množiny, množina všech bodů M je křivka čtvrtého stupně o rovnici

$$xy(y^2 - x^2) + y_0x^3 + x_0y^3 = 0$$

s výjimkou počátku O soustavy souřadnic. Množina obrazů $M_1[x_1, y_1]$ je křivka čtvrtého stupně o rovnici

$$x_1^4 - y_1^4 - (x_0x_1^3 - y_0y_1^3) = 0$$

s výjimkou bodu O. Není nutno připomínat, že v Zahradníkově podání o výjimečnosti bodu O v žádném případě není zmínka.

Nejprve je transformace $M \mapsto M_1$ aplikována na přímku jakožto množinu bodů $\{M\}$ určenou rovnicí

$$ax + by + c = 0.$$

Obrazem přímky je množina bodů $\{M_1[x_1, y_1]\}$ vyhovujících rovnici

$$(x_1^2 + y_1^2)(ay_1 + bx_1) + cx_1y_1 = 0.$$

To je rovnice cirkulární racionální kubiky s dvojnásobným bodem v počátku O soustavy souřadnic, v němž jsou tečnami křivky souřadnicové osy. Tato křivka se nazývá *zobecněná strofoida* neboli *strofoidála.*

Dále následuje popis tří konstrukcí strofoidály:

1. Konstrukce strofoidály jako obrazu přímky v biracionální kubické transformaci určené přiřazením $M \mapsto M_1$.
2. Konstrukce strofoidály jako obrazu hyperboly v jisté kružnicové inverzi.
3. Konstrukce strofoidály jako úpatnice paraboly, jež je obálkou přímek p přiřazených ke všem bodům M přímky m zobrazením $M \mapsto M_1$.

Zajímavá je konstrukce strofoidály jako kisoidální křivky. K určujícím prvkům strofoidály jako obrazu přímky v racionální kubické transformaci se odvozeně vyhledají řídící prvky kisoidály – totiž kružnice, její bod a průměrová přímka – tak, aby kisoidála pomocí nich sestrojena byla totožná se strofoidálou určenou svým způsobem.

Konstrukci tečny strofoidály v daném bodě lze provést na základě konstrukce 3 strofoidály jako úpatnice paraboly. Pomocí vlastností tečen paraboly a Pascalovy věty pro kuželosečky lze pro daný bod strofoidály zkonstruovat normálu strofoidály v něm, a tudíž i tečnu strofoidály v tomto bodě.

První část práce je uzavřena konstrukcí reálné asymptoty strofoidály na základě jejího vztahu k přímce m, která je vzorem strofoidály v racionální kubické transformaci. Mezi přímkovými souřadnicemi přímky m a reálné asymptoty h strofoidály platí po jisté úpravě obdobné analytické vztahy jako mezi bodovými souřadnicemi bodů M_1 a M. Poslední úvaha se týká změn strofoidály indukovaných otáčením přímky m kolem pevného bodu.

Druhá část práce, uveřejněná v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* v roce 1905, je českou verzí článku *Beitrag zur Theorie der rationalen Kurven dritter Ordnung* [Z87]. Podrobná informace o této práci včetně zmínky o recenzi dr. A. Maynze se nachází v druhém paragrafu této kapitoly.

Třetí část této práce vyšla jako druhé pokračování (dokončení) v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* v roce 1909. V poměrně dlouhé době mezi uveřejněním pokračování (1905) a dokončení (1909) práce v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky* byl identický německý text této třetí části publikován pod názvem *Über eine birationale kubische Verwandschaft und deren Anwendung* (O jisté biracionální kubické příbuznosti a jejím použití) [Z91] v časopisu *Sitzungsberichte der mathematisch-naturwissenschaftlichen Klasse der kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien.* O obsahu bude podána informace s využitím českého textu. Recenze různých autorů budou uvedeny v závěru hodnocení.

Základním tématem třetí části práce je vyšetřování křivek, které vznikají jako obrazy křivek stupně n a speciálně kuželoseček v biracionální kubické transformaci, jež je analytickým vyjádřením geometrického přiřazení $M \mapsto M_1$. Pro větší přehlednost analytického vyjádření bodů M a jejich obrazů M_1 je zavedena následující úprava: Je-li $u_h(x, y)$ homogenní funkce stupně h proměnných x, y (týkající se bodů M), bude $v_h(x_1, y_1)$ homogenní funkce stupně h proměnných x_1, y_1, jež vznikne z $u_h(x, y)$ záměnou $x \to y_1$ a $y \to x_1$.

Křivka stupně n, jejíž rovnice je zapsána jako součet homogenních částí polynomické funkce proměnných x, y sestupně podle stupně homogenních částí ve tvaru

$$(M): u_n + u_{n-1} + \cdots + u_0 = 0; \quad u_n \neq 0, \tag{1}$$

jakožto vyjádření množiny bodů M křivky, se racionální kubickou transformací $M \mapsto M_1$ zobrazuje do křivky stupně $3n$, určené rovnicí

$$(M_1): (x_1^2 + y_1^2)^n v_n + (x_1^2 + y_1^2)^{n-1} x_1 y_1 v_{n-1} + \cdots +$$

$$+ (x_1^2 + y_1^2) x_1^{n-1} y_1^{n-1} v_1 + x_1^n y_1^n v_0 = 0 \tag{2}$$

jakožto křivky obsahující obrazy M_1 všech bodů M dané křivky n-tého stupně. Rovnice (2) transformované křivky nabývá tento tvar za předpokladu, že fundamentální bod transformace (v originálu nazýván *pólem* transformace) je zvolen za počátek O soustavy souřadnic.

Z rovnice (2) je patrno, že

a) transformace křivky n-tého stupně je křivka stupně $3n$;

b) fundamentální bod O je $2n$-násobným bodem této křivky;

c) souřadnicové osy y_1, x_1 (rovnice $x_1 = 0$, resp. $y_1 = 0$) jsou n-násobnými tečnami této křivky.

Je-li fundamentální bod O k-násobným bodem křivky (M), jsou v rovnici (1)

$$u_h(x,y) = 0; \quad h = 0, 1, \dots, k-1, \tag{3}$$

a člen nejnižšího stupně v rovnici (2) křivky (M_1) má tvar

$$(x_1^2 + y_1^2)^k x_1^{n-k} y_1^{n-k} v_k(x_1, y_1);$$

tudíž činitel $(x_1^2 + y_1^2)^k$ se vyskytuje ve všech členech rovnice (2) po dosazení podmínek (3). Po zkrácení rovnice (2) tímto činitelem nabývá rovnice (2) tvar

$$(M_1)' : (x_1^2 + y_1^2)^{n-k} v_n + (x_1^2 + y_1^2)^{n-k-1} x_1 y_1 v_{n-1} + \dots +$$
$$+ (x_1^2 + y_1^2) x_1^{n-k-1} y_1^{n-k-1} v_{k+1} + x_1^{n-k} y_1^{n-k} v_k = 0. \tag{2'}$$

Z rovnice (2') je zřejmé, že

a) křivka $(M_1)'$ je stupně $3n - 2k$;

b) bod O je $(2n-k)$-násobným bodem křivky $(M_1)'$;

c) souřadnicové osy y_1, x_1 jsou $(n-k)$-násobnými tečnami v bodě O; dalších k tečen v tomto bodě je určených rovnicí $v_k(x_1, y_1) = 0$.

Další snížení stupně křivky $(M_1)'$ nastává v případech, když jsou nevlastní body souřadnicových os x, y násobnými body křivky (M). Je-li nevlastní bod osy x l-násobným bodem a nevlastní bod osy y m-násobným bodem křivky (M), vyskytuje se činitel $x^l y^m$ ve všech členech rovnice (2) a lze jím rovnici krátit.

Má-li tudíž křivka (M) stupně n fundamentální bod O za k-násobný a nevlastní bod souřadnicové osy x, resp. souřadnicové osy y za bod l-násobný, resp. m-násobný, má její racionální obraz $(M_1)'$

a) stupeň $3n - 2k - l - m$;

b) bod O za bod $(2n - k - l - m)$-násobný.

Jsou-li kromě toho izotropické přímky v bodě O tečnami křivky (M) v tomto bodě, snižuje se stupeň křivky $(M_1)'$ o číslo 2.

Příklady

1. Přímka v „obecné“ poloze se transformuje do cirkulární kubiky s dvojnásobným bodem v pólu transformace O; křivka (M_1) je tudíž kisoidálou.

   Je-li přímka rovnoběžná s osou soustavy souřadnic, je jejím obrazem v transformaci kružnice.

   Prochází-li přímka bodem O, je jejím obrazem v transformaci přímka procházející bodem O.

2. Longchampsova kubická duplikatrix (viz [2]) o rovnici

$$x^3 = 2p(x^2 + y^2)$$

se transformuje do křivky druhého stupně, neboť je zde $n = 3$, $k = 2$, $m = 1$ a izotropické přímky v bodě O jsou tečnami křivky v tomto bodě. Obraz křivky má rovnici

$$y_1^2 = 2px_1,$$

což je rovnice paraboly.

Obraz této paraboly transformací má rovnici

$$y_2 = x_2\sqrt{\frac{x_2}{2p - x_2}},$$

což je rovnice kisoidy. Obraz kisoidy v transformaci má rovnici

$$y = x\sqrt{\frac{x}{a - x}},$$

neboli

$$(x^2 + y^2)^2 = ax^3,$$

což je rovnice křivky nazývané „*folium simple*“ (jednoduchý list) (viz [2]).

Velmi podrobně jsou prozkoumány jednotlivé případy transformace kuželoseček.

Je-li kuželosečka daná rovnicí

$$(M) : u_2 + u_1 + u_0 = 0;\ u_i = u_i(x, y),$$

kde u_i je homogenní funkce stupně i, $i = 0, 1, 2$, má její obraz transformací rovnici

$$(M_1) : (x^2 + y^2)^2 v_2 + (x^2 + y^2)xyv_1 + x^2y^2v_0 = 0,$$

$v_i = v_i(x, y)$ je homogenní funkce stupně i, $i = 0, 1, 2$.

a) Neleží-li pól transformace O na kuželosečce, je $u_0 \neq 0$ i $v_0 \neq 0$ a obraz (M_1) kuželosečky je bicirkulární racionální křivka šestého stupně, jež má v bodě O čtyřnásobný bod a souřadnicové osy má za dvojnásobné tečny. Je-li křivka (M) elipsa, která protíná jednu osu nebo obě osy soustavy souřadnic, má křivka $(M_1)'$ tvar čtyřlístku. Dotýká-li se kuželosečka (M) jedné osy nebo obou os soustavy souřadnic, redukují se jeden list nebo dva listy na bod O.

Jsou-li průsečíky elipsy (M) s oběma osami soustavy souřadnic imaginární, je obrazem elipsy *ovál*, jež má v pólu transformace O izolovaný čtyřnásobný bod a osy soustavy souřadnic jsou v něm dvojnásobné tečny.

b) Je-li daná kuželosečka kružnicí, její obraz je rodonea.

c) Obsahuje-li kuželosečka (M) pól transformace, je $u_0 = v_0 = 0$ a obrazem (M_1) je trojlist, jež je racionální cirkulární křivkou čtvrtého stupně s trojnásobným bodem v pólu transformace.

Je-li (M) kružnicí, (M_1) je bicirkulární.

d) Je-li (M) kružnice dotýkající se osy y v pólu transformace O, je křivka (M_1) *kolmý (přímý) dvojlist.*

e) Je-li (M) hyperbola a jedna její asymptota je rovnoběžná s osou soustavy souřadnic, je (M_1) racionální bicirkulární křivka pátého stupně s trojnásobným bodem v pólu transformace. Jedna souřadnicová osa je dvojnásobná tečna, druhá souřadnicová osa je jednoduchá tečna v trojnásobném bodě.

f) Jsou-li obě asymptoty hyperboly (M) rovnoběžné s osami soustavy souřadnic, je (M_1) bicirkulární racionální kvartika s dvojnásobným bodem v pólu transformace, v němž tečnami jsou osy soustavy souřadnic.

g) Jsou-li asymptotami hyperboly (M) osy soustavy souřadnic, křivkou (M_1) je *lemniskáta.*

h) Obsahuje-li hyperbola (M) pól transformace O, je křivkou (M_1) cirkulární racionální kvartika s trojnásobným bodem v pólu transformace.

i) Obsahuje-li hyperbola (M) pól transformace O a jedna její asymptota je rovnoběžná s osou soustavy souřadnic, křivka (M_1) je *kisoidálou.*

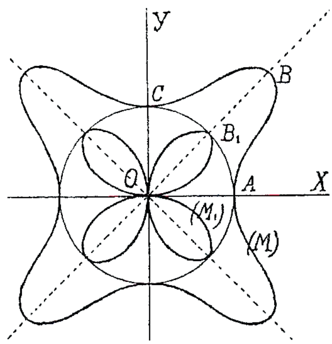
j) Obsahuje-li hyperbola (M) pól transformace O a obě její asymptoty jsou rovnoběžné s osami soustavy souřadnic, křivka (M_1) je *kružnice.*

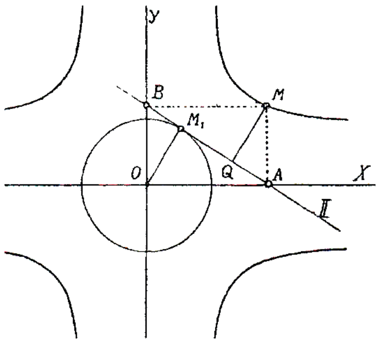
k) Je-li křivka (M) parabolou a její osa je rovnoběžná s osou soustavy souřadnic, je křivka (M_1) bicirkulární racionální křivka pátého stupně s trojnásobným bodem v pólu transformace. Dvojnásobnou tečnou v něm je souřadnicová osa rovnoběžná s osou paraboly (M) a jednoduchou tečnou druhá souřadnicová osa.

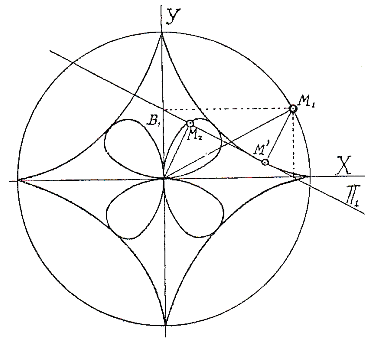
l) Prochází-li mimo to parabola (M) pólem transformace O, je křivkou (M_1) cirkulární racionální kubika, tudíž *kisoidála.*

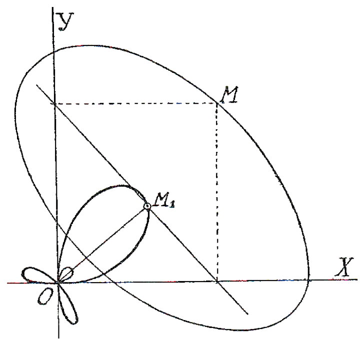
m) Je-li osou paraboly (M) osa soustavy souřadnic a vrcholem paraboly je bod O, je křivkou (M_1) *kisoida.*

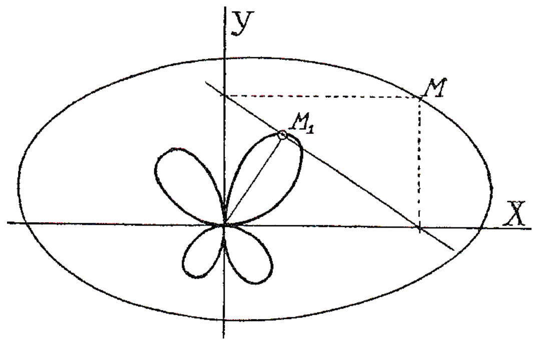
Na obrázcích 4 až 14 jsou znázorněny obrazy kuželoseček v dané transformaci s respektováním typu kuželosečky a její polohy vzhledem k počátku a osám soustavy souřadnic.

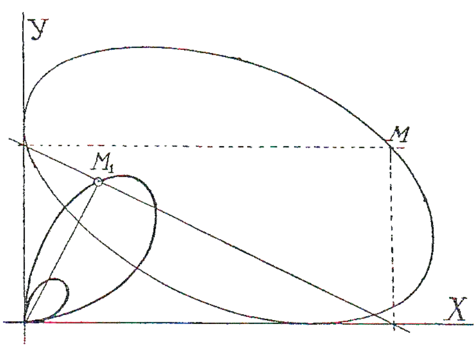

y
B
C
B_1
O
A
X
(M_1)
(M)

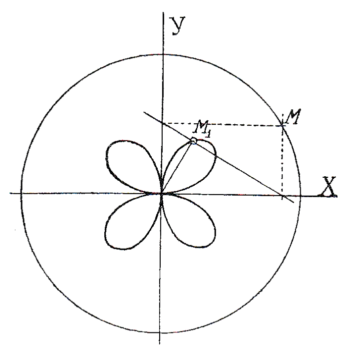

y
B
M
M_1
O
Q
A
X
II

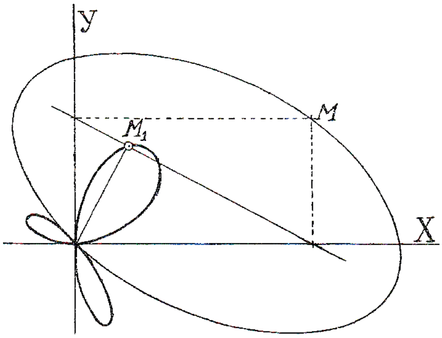

y
M_1
B_1
M_2
M'
X
Π_1

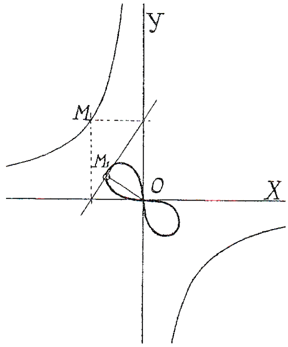

y
M
M_1
X
O

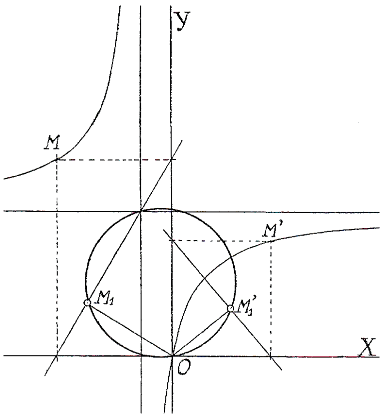

y
M
M_1
X

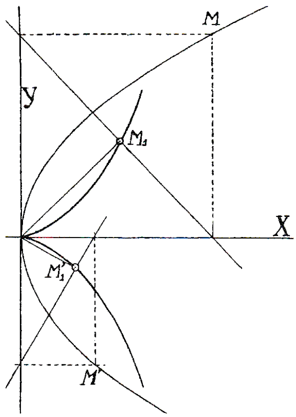

y
M
M_1
X


y
M
M_1
X









Jako aplikaci vztahů mezi křivkou (M) a jejím obrazem (M_1) v racionální kubické transformaci uvádí K. Zahradník zjednodušené konstrukce tečen v bodech některých známých křivek, obdržených jako obrazy (M_1) jiných známých křivek (M) v uvedené transformaci. Konstrukci lze provést i zcela obecně pro libovolnou křivku (M).

Jelikož „inverzní" transformace k racionální kubické transformaci určené přiřazením $M \mapsto M_1$ je rovněž racionální kubická transformace, platí o obrazu (M) křivky (M_1) v této „inverzní" transformaci totéž, co bylo zjištěno o obrazu (M_1) křivky (M) v přímé transformaci. Stupeň obrazové křivky (M) se snižuje a její vlastnosti se specializují v závislosti na incidenci a dotyku křivky (M_1) s význačnými body a přímkami transformace (pól transformace O, nevlastní body souřadnicových os, kružnicové body, souřadnicové osy). Rovněž se uvádějí některé konstrukce tečen v bodech křivky (M) na základě jejích vlastností jako obrazu křivky (M_1) v „inverzní" racionální kubické transformaci.

V závěru práce jsou ještě použity přímky $p = \leftrightarrow AB$, vystupující v odvození biracionální kubické transformace $M \mapsto M_1$, na vyjádření křivek jako obálek soustav přímek. Toto vyjádření je provedeno v polárních souřadnicích a jsou jím zachyceny různé vztahy a souvislosti mezi známými i méně známými křivkami.

Konkrétně jsou uvedeny asteroida, čtyřlistá rodonea, třílistá rodonea, kružnice, kisoida, kisoidála, folium simple, přímý dvojlist a Steinerova hypocykloida.

Text nepřináší nové podstatné informace o křivkách, zajímavé jsou nové pohledy na neobvyklé souvislosti mezi nimi. První dvě části práce recenzoval profesor K. Petr z Prahy.[28] Z první části uvádí rovnice biracionální transformace a poznamenává, že transformace je aplikována na výtvor různých racionálních křivek. O druhém oddílu se zmiňuje poznámkou, že se jedná o reprodukci pojednání *Beitrag zur Theorie der rationalen Kurven dritter Ordnung* [Z87] (uvedeno v paragrafu 2 této kapitoly).

Jako recenzent třetí části práce v časopisu *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* je opět uveden profesor K. Petr.[29] Žádný text recenze kromě klíčových slov není uveden, práce je pouze „evidována".

K dispozici je však obsáhlá recenze německé verze této části uveřejněné pod názvem *Über eine birationale kubische Verwandschaft und deren Anwendung* [Z91] od dr. E. Meyera ze Charlottenburgu.[30] Uvádí souvislosti se Zahradníkovou prací [Z87], popisuje syntetickou konstrukci přiřazení $M \mapsto M_1$ a zabývá se poměrně podrobně vlastnostmi křivky, jež je obrazem dané křivky v uvažované transformaci. Referuje pak detailně o obrazech kuželoseček v závislosti na jejich poloze k určujícím prvkům souřadnicové soustavy, o konstrukci tečen křivek pomocí přímé i inverzní transformace a o souvislosti křivek (M) a (M_1) v závislosti na proměnné přímce p a na její poloze vzhledem k pólu transformace O. Recenze je prosta jakýchkoliv hodnotících postojů.

Kratší práce s různou tematikou

V této skupině se nacházejí čtyři kratší práce a jedna práce středního rozsahu s tematikou převážně elementárně-geometrickou, nicméně v některých ohledech obtížností přesahující vysokoškolský standard a vyžadující značnou zručnost v ovládání technických prostředků analytické metody. Různorodost témat článků neumožňuje nějaké jejich tematické seskupení, proto budou uvedeny v chronologickém pořadí.

První sledovanou prací je *Ein geometrischer Lehrsatz* (O jisté geometrické větě) [Z11]. Záměrem práce je jednoduchý důkaz tvrzení: Pohybují-li se dva vrcholy trojúhelníku po dvou pevných přímkách, přičemž se strany tohoto trojúhelníku otáčejí kolem tří pevných bodů ležících na jedné přímce, popisují i třetí vrcholy tohoto trojúhelníku přímku procházející průsečíkem prvních dvou pevných přímek. Při tomto pohybu popisuje těžiště proměnného trojúhelníku racionální křivku třetího stupně se třemi reálnými asymptotami.

První část věty uvedl již Pappos (3. až 4. století) ve své *Matematické sbírce.* Je jistou obměnou Desarguesova výroku, jenž patřil k základním tvrzením projektivní geometrie 19. století.[31]

[28] Viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 36(1905), str. 649.

[29] Viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 40(1909), str. 730.

[30] Viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 36(1905), str. 731.

[31] Jeho povaha v axiomatice projektivní geometrie se vyjasnila až ve 20. století.

Karel Zahradník dokázal Pappovo tvrzení analytickou metodou při vhodné volbě soustavy souřadnic v rozšířené euklidovské rovině. Vázaný pohyb třetího vrcholu trojúhelníku po jedné přímce lze zachytit vyjádřením pomocí jednoho parametru. Souřadnice těžiště jsou vyjádřeny jako racionální funkce třetího stupně tohoto parametru. To znamená, že množina těžišť všech poloh toho proměnného trojúhelníku je racionální křivka třetího stupně, tj. kubika s dvojnásobným bodem. Tři nevlastní body této kubiky (tj. její průsečíky s nevlastní přímkou rozšířené euklidovské roviny) jsou určeny reálnými parametry, jsou tudíž reálné a reálné jsou i tečny v těchto bodech, tj. asymptoty.

Označíme-li vrcholy trojúhelníku, o nichž mluví věta, A_1, A_2, A_3, a body přímky, v nichž protínají strany trojúhelníku pevnou přímku, B_1, B_2, B_3, lze tvrzení vyjádřit slovy: Bod A_3 probíhá přímku incidující s průsečíkem přímek obsahujících body A_1, resp. A_2.

Zobecnění výroku zní: Vypustí-li se v předpokladech věty podmínka kolineárnosti bodů B_1, B_2, B_3, probíhá bod A_3 regulární kuželosečku a těžiště všech proměnných trojúhelníků $A_1A_2A_3$ probíhá racionální křivku čtvrtého stupně. – Tvrzení je opět dokázáno analyticky pomocí vhodné volby určujících prvků soustavy souřadnic.

Práci recenzoval dr. H. Schubert z Hamburgu.[32] Výstižně shrnuje obsah práce slovy: Autor dokazuje ještě jednou analyticky větu uvedenou už Pappem: „Když se v trojúhelníku pohybují dva vrcholy po dvou pevných přímkách, zatím co strany procházejí po řadě třemi body nacházejícími se na přímce, popisuje třetí vrchol přímku procházející průsečíkem obou pevných přímek“ a rovněž známou Maclaurinovu větu: „Množina třetích vrcholů je kuželosečka, neleží-li ony tři body na jedné přímce“ a dodává, že „těžiště proměnného trojúhelníku popisuje v prvním případě racionální křivku třetího řádu, v druhém případě racionální křivku čtvrtého řádu.“

Druhá práce *Welches ist die Bedingungsgleichung, unter welcher vier Punkte in einem Kreise liegen?* (Jaká je rovnice podmínky, za které čtyři body leží na jedné kružnici?) [Z12] hledá analytické vyjádření pro souřadnice čtyř bodů ležících na jedné kružnici. Vhodnou volbou určujících prvků soustavy souřadnic a použitím Ptolemaiovy věty pro čtyřúhelník vepsaný kružnici (tj. tětivový čtyřúhelník) autor dospívá k výsledku: Pro tětivový čtyřúhelník $A_1A_2A_3A_4$ platí:

$$|A_1A_2| \cdot |\sin|\angle A_3A_1A_4|| + |A_1A_4| \cdot |\sin|\angle A_3A_1A_2|| =$$
$$= |A_1A_3| \cdot |\sin|\angle A_2A_1A_4||.$$

Další vazby mezi délkami stran, délkami úhlopříček a absolutními hodnotami funkce sinus, pro velikosti úhlů stran a úhlů stran s úhlopříčkami vzniknou cyklickými záměnami $A_1 \to A_2 \to A_3 \to A_4 \to A_1$.

Název práce byl uveden v referativní časopisu *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik*; žádný text recenze však nebyl otištěn.[33]

---

[32] Viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 6(1874), str. 438.
[33] Viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 6(1874), str. 427.

Kratičká práce *Aufgabe über berührende Kreise* (Úloha o dotýkajících se kružnicích) [Z17] se zabývá určením poloměrů tří kružnic opsaných z vrcholů daného trojúhelníku a vzájemně se po dvou dotýkajících. Má-li daný trojúhelník $A_1A_2A_3$ délky stran $|A_1A_2| = a_3$, $|A_2A_3| = a_1$, $|A_3A_1| = a_2$ a poloměr kružnice opsané z bodu A_1, resp. A_2, resp. A_3 má délku r_1, resp. r_2, resp. r_3, platí

$$r_1 + c_2r_2 = a_3,$$

$$r_2 + c_3r_3 = a_1,$$

$$r_3 + c_1r_1 = a_2,$$

kde $c_i = \pm 1$, $i = 1, 2, 3$, podle toho, dotýkají-li se příslušné kružnice zevně nebo zevnitř. Například při vnějším dotyku všech dvojic kružnic je

$$r_1 = \frac{a_3 + a_2 - a_1}{2}$$

a r_2, r_3 se dostanou cyklickou záměnou indexů $1 \to 2 \to 3 \to 1$ u všech stran i poloměrů. Korektnost výsledků pak plyne z trojúhelníkových nerovností.

Práce nebyla recenzována v žádném ze známých referativních časopisů; její název byl pouze zmíněn v časopisu *Bulletin des sciences mathématiques (et astronomiques)*.[34]

Další práce *Ort der Punkte constanter Berührungssehnen in Bezug auf einen Kegelschnitt* (Místo bodů s konstantní tětivou dotyku vzhledem ke kuželosečce) [Z34] je německou verzí článku *O místě bodu, jehož tětiva styku má pro danou kuželosečku stálou délku* [Z25] uveřejněného v *Časopisu pro pěstování mathematiky a fysiky*.[35]

Ani česká ani německá verze nejsou recenzovány ve známých referativních časopisech. Názvy obou jsou uvedeny v referativním časopisu *Bulletin des science mathématiques (et astronomiques)*.[36]

Poslední prací této skupiny, jakož i celého hodnoceného vědecko-odborného díla Karla Zahradníka v oblasti geometrie je spis *Ueber einige Winkel- und Längenrelationen am Dreiecke* (O některých vztazích úhlů a délek v trojúhelníku)) [Z61]. Článek je německou verzí práce v chorvatském jazyku *Geometrijske opazke* (Geometrické poznámky) [Z57].[37] Texty obou prací se liší na několika málo místech nepatrnými stylistickými odchylkami.

Zatím co o práci [Z57] není v referativních časopisech nejmenší zmínky, práci [Z61] je věnována v časopisu *Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik* vzhledem k rozsahu článku poměrně obsáhlá a výstižná recenze dr. A. Maynze

[34] Viz Bulletin des sciences mathématiques (et astronomiques) I-11 (1876), str. 216.

[35] Viz předchozí kapitola této monografie nazvaná *Geometrické práce Karla Zahradníka I.*

[36] Česká práce v části II-2 (1878), 2. část, str. 70, německá tamtéž, str. 7.

[37] Viz část *Speciální křivky* v předchozí kapitole této monografie nazvané *Geometrické práce Karla Zahradníka I.*

z Ludwigslustu.[38] Pro ilustraci je zde uvedena (v překladu) v plném znění: „Pan autor uvažuje kružnici a v ní tětivu A_1A_2. Jsou dány dvě kružnice, z nichž každá se dotýká dané kružnice a tětivy A_1A_2 v jejím středu. Po stanovení některých stávajících vztahů se zavádí předpoklad, že tětiva A_1A_2 je funkcí svého směru; jsou pak vyšetřovány křivky, jež za této podmínky popisují středy obou výše zmíněných kružnic. Nato je kružnici na počátku zmíněné vepsán trojúhelník $A_1A_2A_3$; vzniknou tři tětivy A_1A_2, A_1A_3, A_2A_3 a tři dvojice dotykových kružnic, jak bylo uvedeno výše. Vzniká tak poněkud komplikovaný obrazec, jenž je podrobněji vyšetřován. Jsou přitom uvedeny i některé již dříve známé věty o trojúhelníku.“

Závěr

Geometrické práce tvoří podstatnou část výsledků vědecko-odborné publikační činnosti Karla Zahradníka. Ve výčtu uvedeném v těchto dvou kapitolách o vědeckém díle K. Zahradníka je zachycených 47 publikací vesměs geometrické povahy, z nichž zejména práce o racionálních křivkách třetího stupně reprezentují Zahradníkovy vrcholné vědecké výsledky. Nejsou to, zajisté, vědecké výdobytky, jež by se stávaly součástí bázové teorie příslušné disciplíny na dlouhá desetiletí nebo století. Nicméně ve své době byly složkou silného proudu evropské a zejména středoevropské geometrie, která vycházela z poměrně nové tradice spojení syntetické a analytické metody v projektivní geometrii. Aktuální tematikou bylo často zkoumání objektů a jejich vlastností, jež v rychlém vývoji disciplíny unikaly pozornosti hlavních tvůrců teorie a zůstávaly poněkud opomíjeny v bočních liniích vývoje. Řešení problémů z těchto oblastí obohacovalo sumu poznatků a nezřídka přerůstalo i v samostatnou část základní teorie. Racionální křivky třetího a čtvrtého stupně v projektivní rovině reprezentované rozšířenou euklidovskou rovinou – tedy oblast, v níž je Zahradníkův přínos nepřehlédnutelný – jsou příkladem procesu, jak se ze separovaných příkladů zajímavých objektů rodí ucelená teorie.

Přes absolutní dominanci analytické metody v Zahradníkově vědeckém díle nemůže být pochyb o jeho důkladném ovládání syntetické metody. Tento fakt je zjevný zejména z jeho konstrukčního přístupu při generování řady konkrétních racionálních kubik a při jejich klasifikaci v zobecněné teorii.

Hodnotu Zahradníkových prací v evropském, obzvláště v středoevropském kontextu výrazně potvrzuje registrace i recenzování jeho publikací v známých referativních časopisech, kde zejména jeho teoreticky nejvýznamnějším článkům byla věnována náležitá pozornost. Sám Karel Zahradník pro to jistě udělal hodně, neboť většinu svých prací publikoval v německém jazyku, což byl jeden z nejzávažnějších faktorů jejich dostupnosti širšímu (nejen) evropskému publiku. Výmluvným potvrzením hodnoty Zahradníkova geometrického díla v evropských relacích jsou relativně početné citace jeho prací v nejúplnějším dobovém kompendiu rovinných algebraických i transcendentních křivek [2], jež

[38] Viz Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 20(1888), str. 556.

na přelomu 19. a 20. století sestavil a vydal Gino Loria a jež bylo evropské veřejnosti šíře zpřístupněno v německém jazyku Fritzem Schüttem. Zahradníkovy práce jsou v něm citovány celkem osmkrát. Na porovnání – práce Emila Weyra jsou v něm citovány šestkrát, a to ještě dvě citace se týkají geometricko-fyzikální tematiky.

V Loriově knize [2] je na straně 28 citována Zahradníkova práce [Z84], na straně 40 práce [Z5]. V obou případech je K. Zahradníkovi připsáno autorství parametrických rovnic uvažovaných křivek. Na straně 41 je z práce [Z22] citována věta: *Obálka tětiv, jež má kisoida společné se svými kružnicemi křivosti, je křivka afinní s danou kisoidou.* Na straně 46 je z práce [Z10] citován syntetický výtvor kisoidální křivky. Na straně 142 jsou citovány práce [Z23], [Z15] a [Z46], vesměs v souvislosti s parametrickým vyjádřením kardioidy. Poslední citace práce [Z79] na straně 204 se týká vyjádření lemniskáty. Souhrnně lze všechny citace hodnotit jako uznání Zahradníkova přínosu zejména v analytickém vyjadřování významných rovinných křivek a jejich zobecnění.

Zahradníkovo geometrické dílo ve své době nepochybně patřilo svými vrcholnými příspěvky k nadprůměrnému standardu české geometrické školy. Zručnost a obratnost v ovládání analytické metody možno, ba nutno u Karla Zahradníka obdivovat i dnes. Aktuálnost tematiky, jíž se zabýval, zákonitě překonal čas a teorie oblastí, jež stojí v centru pozornosti v jeho díle, se dnes pohybuje na jiných úrovních. V dobových relacích však jeho dílo mělo svoje čestné místo a to by mu měla přisoudit i historie.

LITERATURA:

[1] Bydžovský B., *Úvod do algebraické geometrie*, JČMF, Praha, 1948.

[2] Loria G., *Spezielle algebraische und transscendente ebene Kurven*, Teubner, Leipzig, 1902.