Integrální počet I

Kapitola XI. Integrály tvaru $\int R(x, \sqrt{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \cdots + a_n})dx$

In: Vojtěch Jarník (author): Integrální počet I. (Czech). Praha: Academia, 1984. pp. 208--234.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402116

Terms of use:

© Vojtěch Jarník, 1963

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Kapitola XI

INTEGRÁLY TVARU $\int R(x, \sqrt{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n})\,dx$

§ **1. Doplňky k rozkladu a integraci racionálních funkcí**[1]. V tomto paragrafu podám především další dvě metody k výpočtu součinitelů

(1) $$A_r, A_{r-1}, \ldots, A_1, A'_{r'}, A'_{r'-1}, \ldots, A'_1, \ldots$$

ve větě 57 a reálných součinitelů

(2) $$A_r, \ldots, A_1, A'_{r'}, \ldots, A'_1, \ldots, M_s, N_s, \ldots, M_1, N_1, M'_{s'}, N'_{s'}, \ldots$$

ve větě 59; podotýkám, že věta 59 se týkala reálných racionálních funkcí, kdežto ve větě 57 připouštíme i nereálné racionální funkce. Začněme s větou 59; metoda, kterou nyní vyložím, a která též vždy vede k cíli, spočívá na druhé formulaci (II) na str. 97; víme, že existují reálná čísla (2) taková, že rovnice (29) z kap. IV platí pro všechna x vůbec; jak tato čísla (2) nalezneme? Především snadno najdeme číslo A_r; dosaďme do rovnice (29)[2] $x = \alpha$; levá strana je $P(\alpha) : a_0$, na pravé straně všichni sčítanci vyjma první obsahují činitele $x - \alpha$, jenž pro $x = \alpha$ se rovná nule; zbude nám tedy rovnice

(3) $$P(\alpha) : a_0 = A_r(\alpha - \alpha')^{r'} \ldots (\alpha^2 + p\alpha + q)^s (\alpha^2 + p'\alpha + q')^{s'} \ldots ;$$

ježto číslo α není kořenem žádného činitele v rovnici (24) (v kap. IV) vpravo s výjimkou činitele $x - \alpha$, je součinitel při A_r v rovnici (3) různý od nuly a dělíme-li jím, dostaneme A_r.[3] Předpokládejme, že už známe čísla $A_r, A_{r-1}, \ldots, A_{r-(k-1)}$ a že chceme počítat následující číslo A_{r-k}. Rovnice (29) platí pro všechna x, tedy speciálně také pro všechna reálná x; derivujeme-li tedy obě strany rovnice (29) k-kráte, dostáváme vlevo i vpravo mnohočlen a tyto dva mnohočleny se ovšem sobě rovnají pro všechna reálná x,[4] tedy pro nekonečně mnoho hodnot x a tedy podle věty C) v kap. IV, § 1 rovnají se sobě tyto mnohočleny *vůbec* pro všechna (komplexní) x. Tedy: derivujeme-li obě strany rovnice (29) k-kráte, dostaneme rovnici, která platí nejen

---

[1]) Tento paragraf může číst i začátečník, jestliže si přečetl § 1 z kap. X.

[2]) V celém tomto paragrafu míním stále rovnici (29) z kap. IV.

[3]) Zároveň je vidět, že číslo A_r je jednoznačně stanoveno.

[4]) Neboť jsou-li si dvě funkce rovny pro všechna reálná x a mají-li všude derivaci, jsou si i jejich derivace rovny pro všechna reálná x.

pro všechna reálná, nýbrž i pro všechna komplexní x. Jak vypadá rovnice (29)? Známe-li čísla $A_r, A_{r-1}, \ldots, A_{r-(k-1)}$, tvoří prvních k členů pravé strany rovnice (29) mnohočlen již úplně známý, jejž označme třeba $R(x)$; potom přijde člen $A_{r-k}(x-\alpha)^k(x-\alpha')^{r'} \ldots (x^2+px+q)^s(x^2+p'x+q')^{s'} \ldots$ a po něm další členy, z nichž se dá vytknout $(x-\alpha)^{k+1}$, takže rovnice (29) má tento tvar:

$$\frac{1}{a_0} P(x) = R(x) + A_{r-k}(x-\alpha)^k(x-\alpha')^{r'} \ldots$$

$$\ldots (x^2+px+q)^s(x^2+p'x+q')^{s'} \ldots + (x-\alpha)^{k+1} S(x), \tag{4}$$

kde mnohočleny P, R již úplně známe; mnohočlen $S(x)$ ovšem obsahuje popř. součinitele ještě neznámé. Derivujeme-li poslední rovnici k-kráte, dostaneme — jak čtenář snadno zjistí — tento výsledek:

$$\frac{1}{a_0} P^{(k)}(x) = R^{(k)}(x) + k!\, A_{r-k}(x-\alpha')^{r'} \ldots$$

$$\ldots (x^2+px+q)^s(x^2+p'x+q')^{s'} \ldots. + (x-\alpha)\, T(x), \tag{5}$$

kde $T(x)$ je opět mnohočlen.[5]) Dosaďme do rovnice (5) $x = \alpha$; dostaneme

$$\frac{1}{a_0} P^{(k)}(\alpha) - R^{(k)}(\alpha) =$$

$$= k!\, A_{r-k}(\alpha-\alpha')^{r'} \ldots (\alpha^2+p\alpha+q)^s(\alpha^2+p'\alpha+q')^{s'} \ldots \tag{6}$$

Levá strana je známa; činitel u A_{r-k} je různý od nuly, jak jsme už při rovnici (3) zjistili, a tedy můžeme A_{r-k} z rovnice (6) vypočíst (opět je A_{r-k} jednoznačně stanoveno). Tímto způsobem vypočteme tedy po řadě $A_r, A_{r-1}, \ldots, A_1$ a obdobně $A'_{r'}$, $A'_{r'-1}, \ldots, A'_1, \ldots$

Zbývá vypočíst čísla $M_s, N_s, M_{s-1}, N_{s-1}, \ldots, M_1, N_1, \ldots$ Postup je obdobný, jen o něco složitější. Mnohočlen x^2+px+q má dva kořeny $\sigma = \gamma + \delta i$, $\tau = \gamma -$

[5]) Stačí uvážit toto: je

$$((x-\alpha)^m f(x))' = m(x-\alpha)^{m-1} f(x) + (x-\alpha)^m f'(x);$$

derivováním takového součinu $(x-\alpha)^m f(x)$ tedy dostaneme dva členy; v jednom se mocnitel u $x-\alpha$ o jednotku sníží, v druhém se nesníží. Tedy: derivuji-li k-kráte výraz $(x-\alpha)^{k+1} S(x)$, zůstane tam jistě činitel $x-\alpha$. Derivuji-li pak k-kráte výraz

$$A_{r-k}(x-\alpha)^k (x-\alpha')^{r'} \ldots (x^2+px+q)^s (x^2+p'x+q')^{s'} \ldots,$$

dostanu jednak druhý člen pravé strany rovnice (5) (když totiž po k-kráte derivuji mocninu činitele $x-\alpha$), jednak řadu dalších členů, v nichž se však mocnitel u $x-\alpha$ snížil o méně než k, takže ze všech těchto členů lze ještě $x-\alpha$ vytknout.

$- \delta i$ (γ, δ reálná, $\delta \neq 0$); pro $x = \sigma$ a pro $x = \tau$ je tedy $x^2 + px + q = 0$, ale žádný jiný činitel na pravé straně rovnice (24) v kap. IV se nerovná nule ani pro $x = \sigma$ ani pro $x = \tau$. Dosaďme do rovnice (29) $x = \sigma$; ježto všichni členové vpravo, obsahující činitel $x^2 + px + q$, se rovnají nule pro $x = \sigma$, dostaneme

$$\frac{1}{a_0} P(\sigma) = (M_s\sigma + N_s)(\sigma - \alpha)^r (\sigma - \alpha')^{r'} \ldots (\sigma^2 + p'\sigma + q')^{s'} \ldots ; \tag{7}$$

činitel u $M_s\sigma + N_s$ je známé číslo různé od nuly, takže můžeme z rovnice (7) vypočíst $M_s\sigma + N_s = C$, kde C je jisté známé komplexní číslo, $C = D + Ei$ (D, E reálná). My chceme však stanovit reálná čísla M_s, N_s; k tomu cíli dosaďme do poslední rovnice $\sigma = \gamma + \delta i$ a dostaneme $M_s(\gamma + \delta i) + N_s = D + Ei$; tato rovnice bude správná tehdy a jen tehdy, budou-li si rovny reálné i imaginární části na obou stranách, tj. bude-li $M_s\delta = E$, $M_s\gamma + N_s = D$; tyto dvě rovnice mají skutečně řešení, a to jediné: $M_s = E : \delta$ (pamatujme, že je $\delta \neq 0$), $N_s = D - M_s\gamma = D - E\gamma : \delta$. Tím je M_s, N_s vypočteno.[6]) Předpokládejme nyní, že známe již čísla $M_s, N_s, M_{s-1}, N_{s-1}, \ldots, M_{s-(k-1)}, N_{s-(k-1)}$ a že chceme vypočíst čísla M_{s-k}, N_{s-k}. Rovnice (29) vypadá nyní takto: oněch k členů, v nichž se vyskytují koeficienty $M_s, N_s, M_{s-1}, N_{s-1}, \ldots, M_{s-(k-1)}, N_{s-(k-1)}$, tvoří jistý mnohočlen $R(x)$ již úplně známý; potom přijde člen

$$(M_{s-k}x + N_{s-k})(x - \alpha)^r (x - \alpha')^{r'} \ldots$$
$$\ldots (x^2 + px + q)^k (x^2 + p'x + q')^{s'} \ldots$$

a potom další členy, z nichž se dá vytknout $(x^2 + px + q)^{k+1}$, takže rovnice (29) vypadá takto:

$$\frac{1}{a_0} P(x) = R(x) +$$
$$+ (M_{s-k}x + N_{s-k})(x - \alpha)^r (x - \alpha')^{r'} \ldots$$
$$\ldots (x^2 + px + q)^k (x^2 + p'x + q')^{s'} \ldots +$$
$$+ (x^2 + px + q)^{k+1} S(x),$$

kde mnohočleny P, R již úplně známe; mnohočlen $S(x)$ ovšem obsahuje popř. součinitele ještě neznámé. Derivujeme-li poslední rovnici k-kráte, dostaneme — jak čtenář snadno zjistí — tento výsledek (platný, jak víme, pro všechna komplexní x):

$$\frac{1}{a_0} P^{(k)}(x) = R^{(k)}(x) + (M_{s-k}x + N_{s-k}) \,.\, k!\,(2x + p)^k \,.\, (x - \alpha)^r \,.$$
$$. (x - \alpha')^{r'} \ldots (x^2 + p'x + q')^{s'} \ldots + (x^2 + px + q)\, T(x), \tag{8}$$

[6]) Opět je vidět, že čísla M_s, N_s jsou jednoznačně stanovena.

kde $T(x)$ je opět mnohočlen.[7]) Dosaďme do rovnice (8) $x = \sigma = \gamma + \delta i$; činitel $2x + p$ nemá kořen σ (neboť má jediný kořen $x = -\frac{1}{2}p$, a ten je reálný) a ostatní činitelé $x - \alpha$, $x - \alpha', \ldots, x^2 + p'x + q', \ldots$ také nemají kořen σ, kdežto ovšem $\sigma^2 + p\sigma + q = 0$. Dostaneme tedy

$$\frac{1}{a_0} P^{(k)}(\sigma) = R^{(k)}(\sigma) + (M_{s-k}\sigma + N_{s-k})\, G\,,$$

kde $P^{(k)}(\sigma)$, $R^{(k)}(\sigma)$, G jsou známá čísla (obecně komplexní), $G \neq 0$. Ježto $G \neq 0$, lze z poslední rovnice vypočíst $M_{s-k}\sigma + N_{s-k} = C$, kde C je jisté známé komplexní číslo, $C = D + Ei$ (D, E reálná). Z rovnice $M_{s-k}(\gamma + \delta i) + N_{s-k} = D + Ei$ stanovíme pak – jako dříve – reálná čísla M_{s-k}, N_{s-k}; musí totiž být $M_{s-k}\gamma + N_{s-k} = D$, $M_{s-k}\delta = E$, tedy $M_{s-k} = E : \delta$, $N_{s-k} = D - E\gamma : \delta$.[8]) Dovedeme tedy stanovit čísla $M_s, N_s, M_{s-1}, N_{s-1}, \ldots, M_1, N_1$ a obdobně ovšem čísla $M'_{s'}, N'_{s'}, \ldots$

Máme tedy celkem tento předpis: do rovnice (29) dosadíme za x po řadě všechny kořeny mnohočlenu $Q(x)$ (přičemž zde i při dalších krocích stačí, když ze dvou komplexně sdružených kořenů dosadíme vždy jen jeden); tím vypočteme čísla $A_r, A'_{r'}, \ldots$ $\ldots, M_s, N_s, M'_{s'}, N'_{s'}, \ldots$ Jsou-li všechny kořeny jednoduché, je tím výpočet hotov. Nejsou-li všechny kořeny jednoduché, derivujeme rovnici (29) (do níž jsme za A_r, $A'_{r'}, \ldots, M_s, N_s, M'_{s'}, N'_{s'}, \ldots$ dosadili hodnoty již vypočtené) a do této derivované rovnice dosadíme po řadě za x všechny aspoň *dvojnásobné* kořeny mnohočlenu $Q(x)$ a vypočteme čísla $A_{r-1}, A'_{r'-1}, \ldots, M_{s-1}, N_{s-1}, M'_{s'-1}, N'_{s'-1}, \ldots$ (pokud se ovšem vůbec vyskytují; je-li např. $r = 1$, odpadá A_{r-1}). Potom derivujeme rovnici (29) po druhé a do rovnice tak vzniklé dosadíme po řadě za x všechny aspoň *trojnásobné* kořeny mnohočlenu $Q(x)$ atd., až všechny hledané koeficienty (2) jsou vypočteny. Zároveň máme tento vedlejší výsledek: čísla (2) jsou jednoznačně stanovena; tj. reálná čísla (2) lze určit *jen* jedním způsobem tak, aby rovnice (25) ve větě 59 platila pro všechna x, pro něž je $Q(x) \neq 0$.

Příklad 1.

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^2(x^2 + 2)^3} = \frac{a}{x^2} + \frac{b}{x} + \frac{cx + d}{(x^2 + 2)^3} + \frac{ex + f}{(x^2 + 2)^2} + \frac{gx + h}{x^2 + 2}$$

[7]) Stačí uvážit toto: je
$((x^2 + px + q)^m f(x))' = (x^2 + px + q)^{m-1}\, m(2x + p) f(x) + (x^2 + px + q)^m f'(x)$; derivováním takového součinu dostanu tedy dva členy: v jednom se mocnitel m o jednotku snížil (a přibyl ještě činitel $m(2x + p)$), v druhém se nesnížil. Tedy: derivuji-li k-kráte výraz $(x^2 + px + q)^{k+1} S(x)$, zůstane tam ještě činitel $x^2 + px + q$. Derivuji-li pak k-kráte výraz

$$(M_{s-k}x + N_{s-k})(x - \alpha)^r (x - \alpha')^{r'} \ldots (x^2 + px + q)^k (x^2 + p'x + q')^{s'} \ldots,$$

dostanu jednak druhý člen pravé rovnice (8) (když totiž po k-kráte derivuji vždy mocninu činitele $x^2 + px + q$), jednak řadu dalších členů, v nichž se však mocnitel u $x^2 + px + q$ snížil o méně než k, takže ze všech těchto členů lze ještě $x^2 + px + q$ vytknout.

[8]) Opět vidíme, že čísla M_{s-k}, N_{s-k} jsou jednoznačně stanovena.

a tedy

$$x^2 + x - 1 = a(x^2 + 2)^3 + bx(x^2 + 2)^3 + (cx + d)\,x^2 +$$
$$+ (ex + f)\,x^2(x^2 + 2) + (gx + h)\,x^2(x^2 + 2)^2\,.$$

Kořeny jsou 0 (dvojnásobný), $\pm\, i\sqrt{2}$ (trojnásobné). Dosaďme $x = 0$; dostaneme $-1 = 8a$, $a = -\frac{1}{8}$. Dosaďme $x = i\sqrt{2}$; dostaneme $-2 + i\sqrt{2} - 1 = -2(ci\sqrt{2} + d)$, $c = -\frac{1}{2}$, $d = \frac{3}{2}$. Nyní budeme 0 dosazovat ještě do rovnice jednou derivované, $i\sqrt{2}$ do rovnice jednou a dvakráte derivované. Derivujme, dosazujíce za a, c, d:

$$2x + 1 = -\tfrac{1}{8}\,.\,3(x^2 + 2)^2\,.\,2x + b(x^2 + 2)^3 + b\,.\,3(x^2 + 2)^2\,.\,2x^2 -$$
$$- \tfrac{3}{2}x^2 + 3x + ex^2(x^2 + 2) + (ex + f)\,(4x^3 + 4x) +$$
$$+ gx^2(x^2 + 2)^2 + (gx + h)\,.\,2x\,.\,(x^2 + 2)^2 +$$
$$+ (gx + h)\,.\,2x^3\,.\,2(x^2 + 2)\,.$$

Dosaďme $x = 0$: $1 = 8b$, $b = \frac{1}{8}$; dosaďme $x = i\sqrt{2}$ (tedy $x^2 + 2 = 0$): $2i\sqrt{2} + 1 = 3 + 3i\sqrt{2} + (ei\sqrt{2} + f)\,(-8i\sqrt{2} + 4i\sqrt{2})$; tedy $1 = 3 + 8e$, $e = -\frac{1}{4}$; $2\sqrt{2} = 3\sqrt{2} - 4f\sqrt{2}$, $f = \frac{1}{4}$.

Derivujme ještě jednou (dosazujíce za b, e, f) pamatujíce, že do výsledku budeme dosazovat jen $x = i\sqrt{2}$ (tedy $x^2 + 2 = 0$), takže členy násobené činitelem $x^2 + 2$ nevypisuji:

$$2 = -3x + 3 - \tfrac{1}{4}\,.\,2x^3 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1 + 8(gx + h)\,.\,x^4 + \ldots\,;$$

pro $x = i\sqrt{2}$ vyjde

$$2 = -3i\sqrt{2} + 3 + i\sqrt{2} + 8i\sqrt{2} - 6 - 2i\sqrt{2} + 1 +$$
$$+ 32(gi\sqrt{2} + h)\,;$$

tedy

$$2 = 3 - 6 + 1 + 32h,\ h = \tfrac{1}{8}\,;$$

$$0 = -3\sqrt{2} + \sqrt{2} + 8\sqrt{2} - 2\sqrt{2} + 32g\sqrt{2},\ g = -\tfrac{1}{8}\,.$$

Tedy celkem

$$\frac{x^2 + x - 1}{x^2(x^2 + 2)^3} = -\frac{1}{8x^2} + \frac{1}{8x} + \frac{-x + 3}{2(x^2 + 2)^3} + \frac{-x + 1}{4(x^2 + 2)^2} + \frac{-x + 1}{8(x^2 + 2)}\,.$$

Příklad 2. Metoda právě vyložená je zvláště jednoduchá, jsou-li kořeny mnohočlenu $Q(x)$ vesměs jednoduché; potom totiž není třeba derivovat. Např.

$$\frac{x^2 + x + 1}{x(x - 1)(x + 1)(x - 2)(x^2 + 1)} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x - 1} + \frac{c}{x + 1} + \frac{d}{x - 2} + \frac{ex + f}{x^2 + 1}\,.$$

$$\begin{aligned} x^2 + x + 1 = a(x-1)(x+1)(x-2)(x^2+1) + \\ + bx(x+1)(x-2)(x^2+1) + \\ + cx(x-1)(x-2)(x^2+1) + \\ + dx(x-1)(x+1)(x^2+1) + \\ + (ex+f)\,x(x-1)(x+1)(x-2)\,. \end{aligned}$$

Dosazuji po řadě $x = 0, 1, -1, 2, i$ a dostanu: $1 = 2a$, $a = \frac{1}{2}$; $3 = -4b$, $b = -\frac{3}{4}$; $1 = -12c$, $c = -\frac{1}{12}$; $7 = 30d$, $d = \frac{7}{30}$; $-1 + i + 1 = (ei + f)\,i\,.\,(-2)(i-2)$, $i = 2ei - 4e + 2f + 4fi$; $-4e + 2f = 0$, $2e + 4f = 1$, $f = 2e$, $10e = 1$, $e = \frac{1}{10}$, $f = \frac{1}{5}$.

Téže metody, kterou jsme právě vyložili, můžeme použít k stanovení součinitelů

$$A_r, A_{r-1}, \ldots, A_1, A'_{r'}, A'_{r'-1}, \ldots, A'_1, \ldots$$

z věty 57; vynásobíme-li rovnici (19) z věty 57 výrazem $Q(x) : a_0$, dostaneme rovnici

$$\frac{P(x)}{a_0} = A_r(x-\alpha')^{r'} \ldots + A_{r-1}(x-\alpha)(x-\alpha')^{r'} \ldots +$$

$$+ \ldots + A_1(x-\alpha)^{r-1}(x-\alpha')^{r'} \ldots + \ldots,$$

zcela obdobnou rovnici (29) z kap. IV, ovšem o to jednodušší, že v ní členové s M_j, N_j, M'_j, $N'_j, \ldots$ odpadají; čísla A_j, $A'_j, \ldots$ ovšem nemusí nyní být reálná.

Čtenáři, kterému nejsou běžná pravidla o derivování komplexních funkcí jedné reálné proměnné, není ovšem možná na první pohled jasno, zda pravidla, podle nichž jsme derivovali rovnici (29) z kap. IV, platí i pro komplexní A_j, $A'_j, \ldots, \alpha, \alpha', \ldots$[9]) Abychom se přesvědčili, že tato pravidla platí, uvažme toto (zkušenějšího čtenáře prosím za prominutí): Pravidla o derivování součtu, rozdílu, součinu a podílu platí i pro komplexní funkce; také pravidlo $(c\,f(x))' = c\,f'(x)$ (viz kap. X, § 1, poznámka 3). Odtud je především patrno, že vzorec

$$(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n)' = na_0x^{n-1} +$$

$$+ (n-1)\,a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}$$

(n celé kladné) platí i pro komplexní a_j. Z pravidla o derivaci součinu plyne indukcí

$$(u_1u_2\ldots u_n)' = u'_1u_2\ldots u_n + u_1u'_2u_3\ldots u_n + \ldots + u_1u_2\ldots u_{n-1}u'_n\,,$$

existují-li ve vyšetřovaném bodě vlastní derivace u'_j. Položíme-li zde všechna u_j rovná téže funkci u, obdržíme vzorec $(u^n)' = nu^{n-1}u'$, platný pro celé kladné n (v každém bodě, v němž existuje vlastní derivace u'). Jestliže však ve vyšetřovaném bodě je mimoto $u \neq 0$, platí tento vzorec i pro celá záporná n, což je patrno takto:

[9]) Přičemž činitelé tvaru $x^2 + px + q$, $x^2 + p'x + q'$, ... nyní odpadají.

Budiž $n = -m$, m celé kladné a užijeme vzorce $\left(\frac{1}{v}\right)' = \frac{-v'}{v^2}$ (viz kap. X, § 1, poznámku 3); vyjde

$$(u^n)' = (u^{-m})' = \left(\frac{1}{u^m}\right)' = -\frac{(u^m)'}{(u^m)^2} = -m\frac{u^{m-1}u'}{u^{2m}} = nu^{n-1}u'.$$

Speciálně: též pro nereálné α jest $(x-\alpha)' = 1$, tedy je pro každé reálné x a pro každé celé n (kladné, záporné i nule rovné) $((x-\alpha)^n)' = n(x-\alpha)^{n-1}$ (při reálném α a záporném n jsme musili vylučovat hodnotu $x = \alpha$; ale při nereálném α není $x = \alpha$ pro žádné reálné x). Tím jsme však i pro komplexní $P(x)$, a_0, α, α', ... dokázali všechny derivační vzorce, jichž jsme při hledání čísel (2) užili (viz poznámku[5])).

Poznámka 1. Zdůrazněme ještě, že jsme dokázali, že součinitelé (1) (týkající se věty 57) a součinitelé (2) (týkající se věty 59) jsou jednoznačně určeni, tj. existuje *jen* jeden systém čísel (1) popř. (2), jenž vyhovuje podmínkám udaným ve větě 57, popř. 59.

Poznámka 2. Uveďme tuto maličkost: Platí-li nějaká rovnice mezi racionálními funkcemi pro nekonečně mnoho x, platí pro všechna komplexní x, jež nejsou kořeny jmenovatelů; podrobněji: Jsou-li $P_1, Q_1, \ldots, P_r, Q_r$ mnohočleny, a platí-li rovnice

$$\frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \ldots + \frac{P_r(x)}{Q_r(x)} = 0 \tag{9}$$

pro nekonečně mnoho hodnot x, platí tato rovnice pro všechna x, vyjma pro kořeny rovnice $Q_1(x)\,Q_2(x)\ldots Q_r(x) = 0$.

Důkaz: Násobím-li rovnici (9) mnohočlenem $Q_1 \ldots Q_r$, změní se levá strana v mnohočlen, jenž se rovná nule pro nekonečně mnoho x, tedy (věta C na str. 83) pro všechna x. Dělím-li nyní opět mnohočlenem $Q_1 \ldots Q_r$, dostanu tvrzení.

Poznámka 3. Z jednoznačnosti rozkladu (19) ve větě 57 plyne v případě *reálných* mnohočlenů P, Q: *Je-li* α *reálné, jsou čísla* A_j $(j = 1, \ldots, r)$ *reálná*; *je-li* $\alpha' = \bar{\alpha}$ (a tedy $r' = r$), *jest* $A'_j = \bar{A}_j$ *pro* $j = 1, \ldots, r$.

Důkaz. Pro všechna komplexní x[10]) jest

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{\bar{A}_r}{(x-\bar{\alpha})^r} + \ldots + \frac{\bar{A}_1}{x-\alpha} + \frac{\bar{A}'_r}{(x-\bar{\alpha}')^r} + \ldots + \frac{\bar{A}'_1}{x-\bar{\alpha}'} + \ldots \tag{10}$$

Neboť pro reálná x[10]) je pravá strana v (10) komplexně sdružená s pravou stranou v rovnici (19) z kap. IV, tj. je komplexně sdružená s reálným číslem $P(x) : Q(x)$ a tedy se rovná tomuto číslu. Podle poznámky 2 platí tedy (10) pro všechna komplexní x.[10]) Je-li α reálné, tedy $\bar{\alpha} = \alpha$, je v rovnici (19)[11]) vpravo člen $A_j(x-\alpha)^{-j}$, v rovnici

[10]) S výjimkou kořenů rovnice $Q(x) = 0$.

[11]) Až do konce tohoto paragrafu míním stále rovnici (19) z kap. IV.

(10) pak člen $\bar{A}_j(x - \alpha)^{-j}$; tedy (jednoznačnost, viz poznámku 1) $\bar{A}_j = A_j$. Je-li $\alpha' = \bar{\alpha}$, je v rovnici (19) člen $A'_j(x - \bar{\alpha})^{-j}$, v rovnici (10) pak člen $\bar{A}_j(x - \bar{\alpha})^{-j}$, tedy $A'_j = \bar{A}_j$. Tato poznámka nám často (ovšem pro *reálné* mnohočleny P, Q) zkrátí výpočty.

Vyložím ještě jeden způsob, jak vypočíst součinitele $A_r, A_{r-1}, \ldots, A_1, A'_r, \ldots$ ve větě 57. Pišme $Q(x) = (x - \alpha)^r Q_1(x)$, takže $Q_1(\alpha) \neq 0$, a počítejme $A_r, A_{r-1}, \ldots$ $\ldots, A_1$. K tomu cíli stačí stanovit čísla $A_r, \ldots, A_1$ tak, aby bylo[12])

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_r}{(x-\alpha)^r} + \frac{A_{r-1}}{(x-\alpha)^{r-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}, \tag{11}$$

kde $P_1(x)$ je mnohočlen;[13]) neboť kdybych potom dále rozkládal zlomek $P_1 : Q_1$, dostal bych právě rovnici tvaru (19); naopak, z rovnice (19) plyne okamžitě rovnice tvaru (11). Abychom stanovili čísla $A_r, \ldots, A_1$, položme $x = \alpha + y$, $x - \alpha = y$, takže (11) má tvar

$$\frac{P(\alpha+y)}{Q(\alpha+y)} = \frac{P(\alpha+y)}{y^r Q_1(\alpha+y)} = \frac{A_r}{y^r} + \frac{A_{r-1}}{y^{r-1}} + \ldots + \frac{A_1}{y} + \frac{P_1(\alpha+y)}{Q_1(\alpha+y)}. \tag{12}$$

Pišme $P(\alpha + y) = b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots$, $Q_1(\alpha + y) = c_0 + c_1 y + c_2 y^2 + \ldots$ ($c_0 = Q_1(\alpha) \neq 0$), takže nám jde o to, stanovit $A_r, \ldots, A_1$ tak, aby platila (pro $y \neq 0$) rovnice

$$b_0 + b_1 y + b_2 y^2 + \ldots = \left(\frac{A_r}{y^r} + \ldots + \frac{A_1}{y}\right)(c_0 y^r + c_1 y^{r+1} + \\ + c_2 y^{r+2} + \ldots) + y^r P_2(y), \tag{13}$$

kde $P_2(y) = P_1(\alpha + y)$ je mnohočlen. K tomu cíli postupuji způsobem obvyklým při dělení: stanovím napřed A_r tak, aby ve výrazu

$$b_0 + b_1 y + \ldots - \frac{A_r}{y^r}(c_0 y^r + c_1 y^{r+1} + \ldots) \tag{14}$$

byl prostý člen roven nule, tj. $A_r = b_0 : c_0$; tím výraz přejde ve výraz tvaru $b'_1 y + b'_2 y^2 + \ldots$ a nyní stanovím A_{r-1} tak, aby součinitel při y^1 ve výrazu

$$b'_1 y + b'_2 y^2 + \ldots - \frac{A_{r-1}}{y^{r-1}}(c_0 y^r + c_1 y^{r+1} + \ldots) \tag{15}$$

byl roven nule (tj. $A_{r-1} = b'_1 : c_0$); výraz (15) má potom tvar $b''_2 y^2 + b''_3 y^3 + \ldots$ Tak postupuji dále; po r krocích dospěji k mnohočlenu tvaru $b^{(r)}_r y^r + b^{(r)}_{r+1} y^{r+1} + \ldots$, tj. k výrazu tvaru $y^r P_2(y)$, kde P_2 je mnohočlen.

---

[12]) Omezuji se ovšem na ona x, pro něž $Q(x) \neq 0$.

[13]) Ježto ve všech ostatních zlomcích v (11) má čitatel nižší stupeň než jmenovatel (nebo je nula), má též P_1 nižší stupeň než Q_1 (není-li P_1 nula).

Početní mechanismus jest úplně stejný jako při dělení mnohočlenů; pouze se mnohočleny místo podle klesajících mocnin y srovnají podle rostoucích mocnin y. Zároveň je postupně patrno: A_r závisí jen na b_0, c_0; A_{r-1} jen na b_0, b_1, c_0, c_1 atd.; konečně A_1 jen na $b_0, b_1, \ldots, b_{r-1}, c_0, c_1, \ldots, c_{r-1}$.

Stačí tedy, vypíšeme-li při dělení v $P(\alpha + y)$ pouze členy až do mocniny y^{r-1}, v $Q(\alpha + y)$ pouze členy až do mocniny y^{2r-1}, v obou případech tedy r členů. Chci-li dále počítat součinitele (jednoznačně stanovené) $A'_{r'}, \ldots, A'_1$, vyšetřuji podobným způsobem zlomek $P(\alpha' + y) : Q(\alpha' + y)$ atd. Příslušný početní mechanismus zajisté nejlépe objasníme příkladem.

Příklad 3. Podle věty 57 a podle poznámky 3 je

$$\frac{x^8 - x^5 - x^4 + x^2 + 1}{(x-1)^3\, x^2(x^2+1)^2} = \frac{a}{(x-1)^3} + \frac{b}{(x-1)^2} +$$

$$+ \frac{c}{x-1} + \frac{d}{x^2} + \frac{e}{x} + \frac{f}{(x-i)^2} + \frac{g}{x-i} + \frac{\bar{f}}{(x+i)^2} + \frac{\bar{g}}{x+i}.$$

K určení čísel a, b, c kladme $x = 1 + y$, ponechme v čitateli i ve jmenovateli tři členy a dělme:

$$(1+y)^8 - (1+y)^5 - (1+y)^4 + (1+y)^2 + 1 = 1 + y + 13y^2 + \ldots,$$

$$y^3(1+y)^2(1 + 1 + 2y + y^2)^2 = 4y^3 + 16y^4 + 28y^5 + \ldots,$$

$$(1 + y + 13y^2 + \ldots) : (4y^3 + 16y^4 + 28y^5 + \ldots) = \frac{1}{4y^3} - \frac{3}{4y^2} + \frac{9}{2y} + \ldots$$

$$\begin{array}{l} 1 + 4y + 7y^2 + \ldots \\ - \quad - \quad - \\ \hline \quad - 3y + 6y^2 + \ldots \\ \quad - 3y - 12y^2 + \ldots \\ \quad + \quad + \\ \hline \qquad 18y^2 + \ldots . \end{array}$$

$$a = \tfrac{1}{4},\ b = -\tfrac{3}{4},\ c = \tfrac{9}{2}.$$

Abychom stanovili d, e, provedeme přímo dělení (měli bychom totiž klást $x = 0 + y$), ponechávajíce dva členy:

$$(1 + 0 \,.\, x + \ldots) : (-x^2 + 3x^3 + \ldots) = -\frac{1}{x^2} - \frac{3}{x} + \ldots;$$

$$\begin{array}{l} 1 - 3 \,.\, x + \ldots \\ - \quad + \\ \hline \quad 3 \,.\, x + \ldots \end{array}$$

$$d = -1,\ e = -3.$$

Konečně klaďme $x = i + y$ ponechávajíce dva členy:

$$(i + y)^8 - (i + y)^5 - (i + y)^4 + (i + y)^2 + 1 = - i - (5 + 2i)\, y + \dots,$$
$$(y - 1 + i)^3 (i + y)^2 (2i + y)^2 y^2 = (8 + 8i)\, y^2 + (24 - 48i)\, y^3 + \dots,$$

$$\begin{aligned}(- i - (5 + 2i)\, y + \dots) : ((8 + 8i)\, y^2 + (24 - 48i)\, y^3 + \dots) = \\ - i + (- \tfrac{9}{2} + \tfrac{3}{2}i)\, y + \dots \\ + \quad - \\ \hline (- \tfrac{1}{2} - \tfrac{7}{2}i)\, y + \dots \\ = - \frac{1 + i}{16y^2} - \frac{4 + 3i}{16y} + \dots,\end{aligned}$$ [14])

$$f = - \frac{1 + i}{16}, \quad g = - \frac{4 + 3i}{16}, \quad \bar{f} = - \frac{1 - i}{16}, \quad \bar{g} = - \frac{4 - 3i}{16}.$$

Po předcházejících poznámkách týkajících se *rozkladu* racionálních funkcí připojme ještě několik poznámek o jejich *integraci*.

V kap. IV, § 3 jsme se zabývali výhradně integrací *reálných* racionálních funkcí a vycházeli jsme při tom z rozkladu věty 59; nyní promluvíme o integraci *libovolných* racionálních funkcí, vycházejíce ovšem z věty 57. Na str. 213 jsme zjistili (píšeme nyní $n + 1$ místo n): pro každé celé n a každé reálné $x \neq \alpha$ platí rovnice

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (x - \alpha)^{n+1} = (n + 1)(x - \alpha)^n, \quad \text{tedy} \int (x - \alpha)^n \,\mathrm{d}x = \frac{(x - \alpha)^{n+1}}{n + 1},$$

není-li $n = -1$, a to ať je α reálné nebo ne.[15])

Tím je provedena integrace všech zlomků v (19) vpravo, s výjimkou zlomků tvaru $\dfrac{1}{x - \alpha}$. Pro reálné α je, jak víme, $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{x - \alpha} = \lg |x - \alpha|$ v intervalu $(-\infty, \alpha)$ i v intervalu $(\alpha, +\infty)$. Pro nereálné $\alpha = \gamma + \delta i$ (γ, δ reálná, $\delta \neq 0$) lze pak psát

$$\frac{1}{x - \alpha} = \frac{1}{x - (\gamma + \delta i)} = \frac{x - \gamma + \delta i}{(x - \gamma)^2 + \delta^2};$$

ale integrály

$$\int \frac{x - \gamma}{(x - \gamma)^2 + \delta^2} \,\mathrm{d}x, \quad \int \frac{\delta}{(x - \gamma)^2 + \delta^2} \,\mathrm{d}x$$

---

[14]) Počítám ovšem:

$$\frac{-i}{8 + 8i} = \frac{-i}{8(1 + i)} = \frac{-i(1 - i)}{8(1 + i)(1 - i)} = \frac{-1 - i}{16}$$

a podobně

$$(-\tfrac{1}{2} - \tfrac{7}{2}i) : (8 + 8i) = - \frac{4 + 3i}{16}.$$

[15]) Pro nereálné α není tedy třeba vylučovat žádné reálné x; pro reálné α je třeba vyloučit hodnotu $x = \alpha$ jen tehdy, je-li n záporné, tj. $n = -2, -3, \dots$

dovedeme počítat $\left(\text{vyjdou jednak členy s } \lg\left((x-\gamma)^2+\delta^2\right), \text{ jednak členy obsahující}\right.$ $\left.\operatorname{arctg}\frac{x-\gamma}{\delta}\right)$.

Poznámka 4. Ten, kdo zná logaritmus komplexního čísla a jeho derivaci, může ostatně přímo psát $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\alpha} = \lg(x-\alpha)$ a rozepsat potom logaritmus na reálnou a imaginární část.[16])

Poznámka 5. Způsobu právě vylíčeného lze ovšem užít i k integraci *reálných* racionálních funkcí, a to často výhodněji než způsobu vylíčeného v kap. IV, § 3. Poznamenejme: Jsou-li P, Q v (19) reálné, a je-li např. $\alpha' = \bar{\alpha}$, sdružují se integrály příslušné k těmto kořenům v dvojice tvaru

$$\int \frac{A_j}{(x-\alpha)^j}\,\mathrm{d}x + \int \frac{\bar{A}_j}{(x-\bar{\alpha})^j}\,\mathrm{d}x\,. \tag{16}$$

Ježto integrované funkce jsou (pro reálná x) komplexně sdružené, jsou též oba integrály při vhodné volbě integračních konstant komplexně sdružené (neboť $\int(g(x) \pm \pm i\,h(x))\,\mathrm{d}x = \int g(x)\,\mathrm{d}x \pm i\int h(x)\,\mathrm{d}x$); součet obou integrálů v (16) rovná se tedy dvojnásobku reálné části prvního z nich; to vede k úspoře výpočtu.

Příklad 4. Počítejme integrál

$$J = \int \frac{x^8 - x^5 - x^4 + x^2 + 1}{(x-1)^3\,x^2(x^2+1)^2}\,\mathrm{d}x\,.$$

Rozklad jsme provedli v příkl. 3. Prvních pět členů dovedeme okamžitě integrovat; šestý dává

$$-\frac{1}{16}\int \frac{1+i}{(x-i)^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{16}\cdot\frac{1+i}{x-i} = \frac{(1+i)(x+i)}{16(x^2+1)} = \frac{x-1}{16(x^2+1)} + \ldots$$

(imaginární část nevypisuji). Sedmý člen dává

$$-\frac{1}{16}\int \frac{4+3i}{x-i}\,\mathrm{d}x = -\frac{1}{16}\int \frac{(4+3i)(x+i)}{x^2+1}\,\mathrm{d}x =$$

$$= -\frac{1}{16}\int \frac{4x-3}{x^2+1}\,\mathrm{d}x + \ldots = -\frac{1}{8}\lg(x^2+1) + \frac{3}{16}\operatorname{arctg} x + \ldots$$

[16]) Čtenáře jistě nezarazí, že pro reálné α dostaneme tímto způsobem v intervalu $(-\infty, \alpha)$ vzorec $\int \frac{\mathrm{d}x}{x-\alpha} = \lg(x-\alpha) = \lg|x-\alpha| + \pi i$ lišící se od obvyklého reálného vzorce integrační konstantou πi.

Celkem tedy

$$J = -\frac{1}{8(x-1)^2} + \frac{3}{4(x-1)} + \frac{9}{2}\lg|x-1| + \frac{1}{x} - 3\lg|x| +$$
$$+ \frac{x-1}{8(x^2+1)} - \frac{1}{4}\lg(x^2+1) + \frac{3}{8}\operatorname{arctg} x\,.$$

Výsledek platí v intervalech $(-\infty, 0)$, $(0, 1)$, $(1, +\infty)$.

Cvičení

1. Vypočtěte

$$\int \frac{dx}{x^4+1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}(\operatorname{arctg}(x\sqrt{2}+1) + \operatorname{arctg}(x\sqrt{2}-1) +$$
$$+ \tfrac{1}{2}\lg(x^2+\sqrt{2}x+1) - \tfrac{1}{2}\lg(x^2-\sqrt{2}x+1))\,;$$

přitom postupujte tak, že rozložíte

$$\frac{1}{x^4+1} = \frac{a_1}{x-\alpha_1} + \ldots + \frac{a_4}{x-\alpha_4}$$

(kde $\alpha_1, \ldots, \alpha_4$ jsou komplexní kořeny rovnice $x^4 + 1 = 0$) a potom integrujete přímo tyto komplexní funkce $a_j : (x - \alpha_j)$. (Buďto tak, jak to bylo provedeno v příkl. 4 nebo — znáte-li logaritmus komplexního čísla — tak, jak bylo naznačeno v poznámce 4.) Touž „komplexní“ metodou počítejte i následující cvičení.

2. $$\int \frac{dx}{(x^2+2x+2)^2} = \frac{x+1}{2(x^2+2x+2)} + \frac{1}{2}\operatorname{arctg}(x+1)\,.$$

3. $$\int \frac{dx}{(x^2+x+2)(x+1)} = \frac{1}{2}\lg|x+1| - \frac{1}{4}\lg(x^2+x+2) +$$
$$+ \frac{1}{2\sqrt{7}}\operatorname{arctg}\frac{2x+1}{\sqrt{7}}\,.$$

4. Uvedenou metodou vypočtěte ještě jednou integrály z kap. IV, cvičení 4 (druhý integrál), 8.

Mnohé vzorce týkající se mnohočlenů (a obecněji racionálních funkcí) lze psát v přehledném tvaru, zavedeme-li pojem derivace funkce $f(x)$ podle *komplexní* proměnné x. Ta se zavádí v teorii tzv. analytických funkcí definicí

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h) - f(x)}{h}\,,$$

přičemž h značí *komplexní* proměnnou. Tato definice by tedy vyžadovala definici limity v komplexním oboru, kterou jsme v této knize nezavedli. Čtenář ji může nalézt např. v mém Diferenciálním počtu II, viz počáteční úvahy v kap. XI a definici 41 v kap. XI, § 1. Pokud jde však o *polynomy* (a obecněji o racionální funkce), je možno tuto derivaci zavést též čistě algebraicky, bez užití pojmu limity. To provedeme v následujícím cvičení; v dalších cvičeních pak odvodíme pravidla pro počítání s derivací takto zavedenou.

5. Derivací polynomu

$$X(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \tag{17}$$

(a_j komplexní čísla, x komplexní proměnná) nazýváme polynom

$$X'(x) = na_0x^{n-1} + (n-1)\,a_1x^{n-2} + \ldots + a_{n-1}\,.$$ [17])

Derivaci polynomu X' značíme X'' atd. Stanovte obecně $X^{(k)}(x)$.

6. Dokažte: Jsou-li X, Y dva polynomy, jest $(X + Y)' = X' + Y'$, $(XY)' = X'Y + XY'$. Indukcí odvoďte odtud pravidla pro $(X_1 + X_2 + \ldots + X_k)'$, $(X_1 . X_2 \ldots X_k)'$ (speciálně pro $(X^k)'$), $(XY)^{(k)}$.

7. Budiž X polynom stupně nejvýše n-tého, daný rovnicí (17); budiž α komplexní číslo. Píšete-li v (17) $x^k = ((x - \alpha) + \alpha)^k$ a rozvinete podle binomické poučky, obdržíte po úpravě vzorec

$$X(x) = X(\alpha) + X'(\alpha)\frac{x-\alpha}{1!} + X''(\alpha)\frac{(x-\alpha)^2}{2!} + \ldots + X^{(n)}(\alpha)\frac{(x-\alpha)^n}{n!}\,. \tag{18}$$

Užitím tohoto vzorce na polynom X' obdržíte

$$X'(x) = X'(\alpha) + X''(\alpha)\frac{x-\alpha}{1!} + \ldots + X^{(n)}(\alpha)\frac{(x-\alpha)^{n-1}}{(n-1)!}\,. \tag{19}$$

Podobně pro $X^{(k)}(x)$.

8. Z (18) ihned plyne: Budiž $k > 0$ celé. Potom číslo α je k-násobným kořenem polynomu X tehdy a jen tehdy, je-li $X(\alpha) = X'(\alpha) = \ldots = X^{(k-1)}(\alpha) = 0$, $X^{(k)}(\alpha) \neq 0$.

9. Buďte $P(x)$, $Q(x)$ mnohočleny; nechť $Q(x)$ má vesměs jednoduché kořeny $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$, takže

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{j=1}^{n} \frac{A_j}{x - \alpha_j} + H(x)\,, \tag{20}$$

kde A_j jsou konstanty, $H(x)$ polynom.

Potom jest

$$A_j = \frac{P(\alpha_j)}{Q'(\alpha_j)}\,.$$

Návod: Stačí provést pro $j = 1$. Násobím-li rovnici (20) polynomem $Q(x) = b_0(x - \alpha_1) \ldots \ldots (x - \alpha_n)$, dostanu rovnici, která platí pro všechna x (i pro $x = \alpha_1$ — proč?). Dosazením $x = \alpha_1$ vyjde

$$P(\alpha_1) = A_1b_0(\alpha_1 - \alpha_2) \ldots (\alpha_1 - \alpha_n) = A_1Q'(\alpha_1)\,.$$

10. Derivaci racionální funkce $P(x) : Q(x) = R(x)$ (P, Q polynomy) definujeme rovnicí

$$\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)' = \frac{P'(x)\,Q(x) - P(x)\,Q'(x)}{Q^2(x)}\,;$$

[17]) Tato definice má význam hlavně v algebře, které je pojem limity celkem cizí. Také ji asi mnohý čtenář z algebry zná. Čtenář, který ji nezná, naučí se v těchto cvičeních některým vzorcům, které budeme v dalším potřebovat.

je-li $Q = 1$ (tedy $R = P$ polynom), je to ve shodě s definicí v cvičení 5. Ale k oprávněnosti této definice je třeba ještě dokázat, že nezávisí na tvaru, v jakém píšeme racionální funkci $R(x)$ $\Bigl($např. funkci $\dfrac{x}{x-1}$ lze psát též ve tvaru $\dfrac{x^2 - x}{x^2 - 2x + 1}$ apod.$\Bigr)$. Přesně vyjádřeno, máme dokázat toto: Jsou-li P, Q, T, S polynomy, a platí-li rovnice

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{T(x)}{S(x)} \tag{21}$$

pro všechna x, pro něž je $Q(x) \neq 0$, $S(x) \neq 0$, potom pro všechna tato x platí též rovnice

$$\frac{P'(x)\,Q(x) - P(x)\,Q'(x)}{Q^2(x)} = \frac{T'(x)\,S(x) - T(x)\,S'(x)}{S^2(x)}\,. \tag{22}$$

Návod: Z (21) plyne $PS = QT$ pro všechna x bez výjimky a tedy (derivuji) $P'S + PS' = Q'T + QT'$. Násobím-li tuto rovnici polynomem QS a užiji rovnice $PS = QT$, snadno obdržím (22).

11. Buďte $R_1 = P_1 : Q_1$, $R_2 = P_2 : Q_2$, kde P_1, P_2, Q_1, Q_2 jsou polynomy. Dokažte (s použitím cvičení 6) vzorce

$$(R_1 + R_2)' = R_1' + R_2'\,, \quad (R_1R_2)' = R_1'R_2 + R_1R_2'\,, \quad \left(\frac{R_1}{R_2}\right)' = \frac{R_1'R_2 - R_1R_2'}{R_2^2}\,.$$

(První rovnici dokážete ovšem tak, že pomocí cvičení 10 a 6 sestrojíte derivaci funkce $\dfrac{P_1Q_2 + P_2Q_1}{Q_1Q_2}$ a ukážete, že se rovná součtu derivací funkcí $P_1 : Q_1$ a $P_2 : Q_2$, sestrojených podle cvičení 10; podobně u dalších dvou rovnic.)

12. Vzorec v cvičení 9 se týkal pouze případu, že mnohočlen Q měl vesměs jednoduché kořeny. Odvodíme nyní obecný vzorec. Buďte P, Q polynomy; nechť Q má k-násobný kořen α, takže $Q(x) = (x - \alpha)^k\, Q_1(x)$, $Q_1(\alpha) \neq 0$ $(k > 0)$. Rozklad funkce $P : Q$ má tvar

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}} + \ldots + \frac{A_1}{x-\alpha} + \ldots.,$$

přičemž ostatní členové neobsahují již $x - \alpha$ ve jmenovateli. Odtud

$$\frac{P(x)}{Q_1(x)} = A_k + A_{k-1}(x-\alpha) + \ldots + A_1(x-\alpha)^{k-1} + (x-\alpha)^k\,\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}\,,$$

kde P_1 je polynom. Derivuji-li r-kráte $(0 \leqq r \leqq k-1)$ a dosadím pak $x = \alpha$, vypadnou vpravo všechny členy až na člen s A_{k-r} a vyjde

$$r!\,A_{k-r} = \left[\frac{\mathrm{d}^r}{\mathrm{d}x^r}\,\frac{P(x)}{Q_1(x)}\right]_{x=\alpha}.$$

Přitom ovšem $\dfrac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}x^0}\,f(x)$ — právě tak jako $f^{(0)}(x)$ — značí $f(x)$.

Pro $k = 1$ lze tento vzorec psát též ve tvaru

$$A_1 = \frac{P(\alpha)}{Q'(\alpha)}$$

— tedy týž vzorec jako v cvičení 9.

§ 2. Redukce integrálů tvaru $\int R(x, \sqrt{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n})\,dx$.

V tomto paragrafu budiž dána racionální funkce dvou proměnných $R(x, y)$ (obecně s komplexními koeficienty) a mnohočlen $X(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ $(a_0 \neq 0, n \geqq 0)$. Pojem racionální funkce dvou proměnných byl zaveden na začátku § 4 v kap. IV. O mnohočlenu X budeme předpokládat, že má *reálné* součinitele; budeme však připouštět i takové reálné hodnoty x, pro něž jest $X(x) < 0$. Abychom i pro takové hodnoty x měli definován $\sqrt{X(x)}$, definujme obecně $\sqrt{a}$ pro $a < 0$ vzorcem $\sqrt{a} = i\sqrt{-a}$, tedy např. $\sqrt{-4} = 2i$ (a nikoliv $-2i$). Pro $X(x) < 0$ klademe tedy $\sqrt{X(x)} = i\sqrt{-X(x)}$.[18])

Poznámka 1. (Jen pro ty čtenáře, kteří znají základy teorie analytických funkcí jedné komplexní proměnné). Omezení na reálné polynomy X jsme učinili pouze proto, abychom se nepouštěli příliš hluboko do teorie komplexních funkcí. Mimoto se omezujeme na reálné hodnoty x. Ale čtenář, který zná poněkud teorii analytických funkcí jedné komplexní proměnné, nemusil by činit ani první ani druhé omezení. V celém zbytku této kapitoly jde pouze o primitivní funkce (tj. o funkce s danou derivací). Všechny tyto úvahy — vyjma ty, v nichž se přímo mluví o reálnosti některých čísel nebo funkcí — by platily i tehdy, kdybychom pro koeficienty polynomu X i pro proměnnou x připouštěli též komplexní hodnoty (rozumějíce potom ovšem slovem „derivace" derivaci podle komplexní proměnné). Při komplexních hodnotách proměnné x by ovšem čtenář musil dát pozor na „větve mnohoznačných funkcí", které se přitom vyskytují. — Celá tato poznámka vlastně překračuje rámec této knihy; čtenář si nemusí nic dělat z toho, jestliže jí neporozuměl.

Cílem tohoto paragrafu jest odvodit vzorce převádějící („redukující") integrál

$$\int R(x, \sqrt{X(x)})\,dx \tag{23}$$

na několik jednoduchých integrálů tohoto druhu. Je-li $n = 0$, je integrál (23) prostě integrál racionální funkce; je-li $n = 1$ nebo $n = 2$, je to integrál typu vyšetřovaného

[18]) Poznamenejme, že i pro ty reálné hodnoty x, pro něž je $X < 0$, platí vzorec

$$\frac{d}{dx}(\sqrt{X}) = \frac{X'}{2\sqrt{X}},$$

neboť

$$\frac{d}{dx}(i\sqrt{-X}) = i \cdot \frac{1}{2\sqrt{-X}} \cdot (-X)' = \frac{X'}{2i\sqrt{-X}}$$

(derivuje se zde komplexní funkce *reálné* proměnné x).

v kap. IV, § 4, 5; je-li $n = 3$ nebo $n = 4$, říkáme integrálu (23) integrál *eliptický*, je-li $n > 4$, říkáme mu integrál *hypereliptický*. Poznamenejme, že můžeme předpokládat, že mnohočlen X má pouze jednoduché kořeny, neboť druhou mocninu každého kořenového činitele lze odmocnit,[19]) čímž docílíme konečně toho, že pod odmocninou zůstane každý kořenový činitel pouze jedenkráte. Ježto $(\sqrt{X})^2 = X$ je mnohočlen, lze psát ($P_1, P_2, \ldots$ jsou mnohočleny)

$$R(x, \sqrt{X}) = \frac{P_1 + P_2\sqrt{X}}{P_3 + P_4\sqrt{X}} = \frac{(P_1 + P_2\sqrt{X})(P_3 - P_4\sqrt{X})}{P_3^2 - XP_4^2} = \frac{P_5}{P_6} + \frac{P_7\sqrt{X}}{P_6};$$

poslední zlomek má pak tvar

$$\frac{P_7 X}{P_6\sqrt{X}} = \frac{P}{Q\sqrt{X}}.$$

Vyšetřovaný integrál lze tedy převést na součet integrálu funkce racionální a integrálu tvaru

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X(x)}} \quad (P, Q \text{ mnohočleny, } Q \text{ není } 0)\,. \tag{24}$$

Rozložíme-li $P : Q$ na částečné zlomky podle věty 57 a položíme-li pro krátkost

$$I_m(\alpha) = \int (x - \alpha)^m \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X(x)}} \tag{25}$$

$$(m = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots), I_m(0) = I_m,$$

je patrno, že integrál (24) je lineární kombinací integrálů tvaru

$$I_0, I_1, I_2, \ldots; I_{-1}(\alpha), I_{-2}(\alpha), \quad I_{-3}(\alpha), \ldots, \tag{26}$$

kde α probíhá kořeny mnohočlenu Q.

Pro integrály (26) sestrojíme vzorce redukční. Pro libovolné celé r je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}((x - \alpha)^r \sqrt{X}) = \frac{r(x - \alpha)^{r-1} X + \frac{1}{2}(x - \alpha)^r X'}{\sqrt{X}}; \tag{27}$$

abychom dostali vztah mezi integrály (26), rozviňme čitatele podle mocnin $x - \alpha$ a potom integrujme. Jest, jak známo např. z algebry[20]),

$$X(x) = X(\alpha) + \frac{1}{1!} X'(\alpha) . (x - \alpha) + \ldots + \frac{1}{n!} X^{(n)}(\alpha)(x - \alpha)^n,$$

[19]) U nereálných kořenů vezmu současně s každým kořenovým činitelem též kořenového činitele komplexně sdruženého.

[20]) Není-li α reálné, značí symboly $X'(\alpha)$, $X''(\alpha)$, ... derivace polynomu $X(x)$ podle *komplexní* proměnné x v bodě α. Komu tyto věci nejsou běžné, nechť si probere cvičení 5—12 v § 1; viz hlavně cvičení 7.

$$X'(x) = X'(\alpha) + \frac{1}{1!} X''(\alpha) . (x - \alpha) + \ldots + \frac{1}{(n-1)!} X^{(n)}(\alpha) (x - \alpha)^{n-1} .$$

Položíme-li pro krátkost

$$(28) \qquad X(\alpha) = A_n, \frac{1}{1!} X'(\alpha) = A_{n-1}, \ldots, \frac{1}{n!} X^{(n)}(\alpha) = A_0 \ (A_0 = a_0) ,$$

plyne z (27)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} ((x - \alpha)^r \sqrt{X}) = \frac{1}{\sqrt{X}} ((r + \tfrac{1}{2}n) A_0(x - \alpha)^{n+r-1} +$$
$$+ (r + \tfrac{1}{2}(n - 1)) A_1(x - \alpha)^{n+r-2} + \ldots + (r + \tfrac{1}{2}) A_{n-1}(x - \alpha)^r +$$
$$+ rA_n(x - \alpha)^{r-1}) ,$$

načež integrací

$$(29) \qquad (r + \tfrac{1}{2}n) A_0 I_{n+r-1}(\alpha) + (r + \tfrac{1}{2}(n - 1)) A_1 I_{n+r-2}(\alpha) +$$
$$+ \ldots + (r + \tfrac{1}{2}) A_{n-1} I_r(\alpha) + rA_n I_{r-1}(\alpha) = (x - \alpha)^r \sqrt{X} .$$

Předpokládejme nyní $n > 0$. Z (29) je pak předně patrno: Je-li $r > 0$, lze $I_{n+r-1}(\alpha)$ vyjádřit pomocí integrálů $I_k(\alpha)$ s nižšími nezápornými indexy k (neboť $A_0 = a_0 \neq 0$). Tím se dají všechny integrály $I_m(\alpha)$ s nezápornými m převést na integrály $I_0(\alpha)$, $I_1(\alpha), \ldots, I_{n-1}(\alpha)$. Položíme-li dále $r = 0$, odpadne v (29) poslední člen vlevo a dostáváme ještě $I_{n-1}(\alpha)$ vyjádřen pomocí integrálů $I_k(\alpha)$ s indexy $k = 0, 1, \ldots, n - 2$. (Pro $n = 1$ jest ovšem $I_{n-1}(\alpha) = I_0(\alpha)$ rovnicí (29) přímo určeno; ostatně jde v tomto případě o triviální integrál.)

Všimněme si za druhé integrálů $I_k(\alpha)$ se *záporným* k. Jestliže α *není kořenem* mnohočlenu X, jest $A_n = X(\alpha) \neq 0$ a rovnice (29) vyjadřuje každý integrál $I_{r-1}(\alpha)$ se záporným r (tedy $r - 1 \leqq -2$) pomocí integrálů $I_k(\alpha)$ s většími indexy; tím se dá každý integrál $I_m(\alpha)$ ($m < 0$) převést na integrály $I_k(\alpha)$ s indexy $k = -1, 0, 1, 2, 3, \ldots$ *Je-li však* α *kořenem* (a tedy jednoduchým kořenem) mnohočlenu X, jest $A_n = X(\alpha) = 0$, $A_{n-1} = X'(\alpha) \neq 0$ a rovnice (29) dovoluje vyjádřit $I_r(\alpha)$ pomocí integrálů $I_k(\alpha)$ s většími indexy (neboť $(r + \frac{1}{2}) A_{n-1} \neq 0$); tím se dá každý integrál $I_m(\alpha)$ (pro $X(\alpha) = 0$) převést na integrály $I_k(\alpha)$ s nezápornými indexy.

Všimněme si konečně, že pro $m \geqq 0$ lze integrál $I_m(\alpha)$ vyjádřit integrály $I_0, I_1, \ldots, \ldots, I_m$ (stačí, rozvineme-li v (25) činitele $(x - \alpha)^m$ podle binomické poučky). Máme tedy celkem tento výsledek: Budiž X reálný mnohočlen stupně $n > 0$ s kořeny vesměs jednoduchými; potom nám vzorec (29) umožňuje vyjádřit integrál (24) pomocí integrálů

$$(30) \qquad I_0, I_1, \ldots, I_{n-2},^{21)} I_{-1}(\alpha) ,$$

kdež α probíhá ony kořeny mnohočlenu Q, jež nejsou kořeny mnohočlenu X.

[21]) Tyto integrály odpadnou pro $n = 1$.

Poznámka 2. Je-li $n = 1$ nebo $n = 2$, dovedeme integrály (30) vypočíst podle metod vyložených v kap. IV, § 4, 5. Tím získáváme nový způsob pro výpočet integrálů (23) v případech $n = 1, 2$. Místo abychom hned užili metod z kap. IV, § 4, 5, rozložíme integrál (23) na integrál racionální funkce a integrály tvaru (30) a teprve na tyto integrály užijeme substituce z kap. IV, § 4, 5, kterou popř. ještě nějakým vhodným způsobem pozměníme. V následujících dvou příkladech to ukážeme trochu podrobněji.

Příklad 1 ($n = 1$). V případě $n = 1$ jde pouze o integrály tvaru

$$\int \frac{dx}{(x - \alpha)\sqrt{a_0x + a_1}} \quad (a_0\alpha + a_1 \neq 0, a_0 \neq 0). \tag{31}$$

Je-li α reálné, klaďme $a_0x + a_1 = t^2$, $t > 0$ (pokud $a_0x + a_1 > 0$; jde-li o interval, v němž jest $a_0x + a_1 < 0$, píši $\sqrt{a_0x + a_1} = i\sqrt{- a_0x - a_1}$, $- a_0x - a_1 = t^2$, $t > 0$); tím dostaneme integrál

$$\int \frac{2dt}{t^2 - a_0\alpha - a_1},$$

jehož výpočet je snadný. Je-li α nereálné ($\alpha = \gamma + \delta i$, $\delta \neq 0$, γ, δ reálná), pišme

$$\frac{1}{x - \alpha} = \frac{x - \gamma + \delta i}{(x - \gamma)^2 + \delta^2},$$

takže jde o integrály typu

$$\int \frac{(Ax + B)\,dx}{(x^2 + px + q)\sqrt{a_0x + a_1}}, \tag{32}$$

kde $\frac{1}{4}p^2 - q < 0$ (p, q, A, B reálná). Stejná substituce jako svrchu vede k integrálům tvaru

$$\int \frac{Ct^2 + D}{t^4 + Pt^2 + Q}\,dt \quad (\tfrac{1}{4}P^2 - Q < 0;\ C, D, P, Q \text{ reálná}). \tag{32a}$$

Metodou neurčitých součinitelů snadno získáte reálný rozklad $t^4 + Pt^2 + Q = (t^2 + \lambda t + \mu)(t^2 + \lambda' t + \mu')$, kde $\mu = \mu' = \sqrt{Q}$, $\lambda = - \lambda' = \sqrt{2\sqrt{Q} - P}$, načež počítáte integrál (32a) obvyklým způsobem.

Příklad 2 ($n = 2$). V případě $n = 2$ jsme integrál I_0 již počítali; jde ještě o integrál

$$I_{-1}(\alpha) = \int \frac{dx}{(x - \alpha)\sqrt{ax^2 + bx + c}} \quad (a \neq 0, a\alpha^2 + b\alpha + c \neq 0) \tag{33}$$

(píši a, b, c místo a_0, a_1, a_2). Je-li α reálné, vede substituce $x = \frac{1}{t} + \alpha$ k integrálu tvaru

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{At^2 + Bt + C}}\,.$$

Není-li α reálné, převedeme integrál (33) jako v příkl. 1 na integrály typu

$$\int \frac{(Ax + B)\,\mathrm{d}x}{(mx^2 + px + q)\sqrt{ax^2 + bx + c}}\,, \tag{34}$$ [22]

kde $\frac{1}{4}p^2 - qm < 0$ (m, p, q, A, B reálné). Abychom tento integrál zjednodušili, pokusíme se převést jej vhodnou substitucí na integrál téhož typu

$$\int \frac{(A'y + B')\,\mathrm{d}y}{(m'y^2 + p'y + q')\sqrt{a'y^2 + b'y + c'}}\,, \tag{35}$$

v němž však $p' = b' = 0$. Podaří-li se to, bude integrál (34) převeden na integrály typu

$$\int \frac{A'y\,\mathrm{d}y}{(m'y^2 + q')\sqrt{a'y^2 + c'}}\,, \qquad \int \frac{B'\,\mathrm{d}y}{(m'y^2 + q')\sqrt{a'y^2 + c'}}\,. \tag{36}$$

První z těchto integrálů se substitucí[23] $a'y^2 + c' = \pm t^2$ ($t > 0$) převádí na integrál typu $\int \frac{\mathrm{d}t}{Ht^2 + K}$; druhý se substitucí $y = \frac{1}{z}$ převádí v podstatě na první.

Jde ještě o substituci převádějící integrál (34) v integrál (35), kde $p' = b' = 0$. Je-li $\frac{b}{a} = \frac{p}{m}$, stačí substituce $x + \frac{b}{2a} = x + \frac{p}{2m} = y$, jak je ihned patrno. Budiž tedy $ap - bm \neq 0$; substituce

$$x = \frac{ry + s}{y + 1} \tag{37}$$

převádí integrál (34) zřejmě v integrál typu (35), přičemž

$$p' = 2mrs + p(r + s) + 2q\,, \qquad b' = 2ars + b(r + s) + 2c\,. \tag{38}$$

Jde tedy o to, zda lze nalézt reálná čísla r, s tak, aby bylo $p' = b' = 0$, $r \neq s$ (podmínka $r \neq s$ je nutná k tomu, aby se z (37) dalo naopak vypočíst y pomocí x; pro

[22]) Vlastně vyjde $m = 1$; píši obecně m pro větší symetrii.

[23]) Pro $a' \neq 0$; případ $a' = 0$ by byl triviální.

$r = s$ a pro všechna $y \neq -1$ by totiž (37) dávalo $x = r$). Rovnice $p' = 0$, $b' = 0$ jsou podle (38) dvě rovnice pro $r + s$, rs, jejichž řešení jest

$$r + s = 2\frac{-aq + cm}{ap - bm}, \qquad rs = \frac{bq - cp}{ap - bm};$$

tj. r, s mají být kořeny kvadratické rovnice $(ap - bm)\xi^2 + 2(aq - cm)\xi + (bq - cp) = 0$ a jde o to, zda tyto kořeny jsou reálné a různé, tj. zda výraz

$$\Delta = (aq - cm)^2 - (ap - bm)(bq - cp) \tag{39}$$

je kladný. Kořeny mnohočlenu $mx^2 + px + q$ jsou $\alpha, \bar{\alpha}$; kořeny mnohočlenu $ax^2 + bx + c$ označme λ, μ; podle předpokladu jsou čísla λ, μ různá a též různá od čísel $\alpha, \bar{\alpha}$. Ježto $p = -m(\alpha + \bar{\alpha})$, $q = m\alpha\bar{\alpha}$, $b = -a(\lambda + \mu)$, $c = a\lambda\mu$, vyjde dosazením do (39)

$$\Delta = a^2m^2((\alpha\bar{\alpha} - \lambda\mu)^2 + (\lambda + \mu - \alpha - \bar{\alpha})((\lambda + \mu)\alpha\bar{\alpha} - \lambda\mu(\alpha + \bar{\alpha}))).$$

Snadno zkontrolujeme, že

$$\Delta = a^2m^2(\alpha - \lambda)(\bar{\alpha} - \lambda)(\alpha - \mu)(\bar{\alpha} - \mu). \tag{40}$$

Jsou-li λ, μ reálná, je zde první závorka komplexně sdružená s druhou, třetí s čtvrtou; jsou-li však λ, μ komplexně sdružená, je první závorka komplexně sdružená s čtvrtou, druhá s třetí. Ježto součin komplexně sdružených čísel $(\xi + i\eta)(\xi - i\eta) = \xi^2 + \eta^2 \geq 0$ je nezáporné číslo a ježto žádná závorka v (40) není rovna nule, je vskutku $\Delta > 0$.

Při konkrétních výpočtech dávejte pozor na znamení při odmocňování.

Cvičení

1. Budiž $0 < k < 1$. Vyjádřete

$$(1 - k^2)\int \frac{dx}{(1 - k^2x^2)\sqrt{(1 - x^2)(1 - k^2x^2)}}$$

integrály I_0, I_1, I_2.[24]) Výsledek: výraz se rovná $I_0 - k^2I_2 - k^2x\sqrt{1 - x^2} : \sqrt{1 - k^2x^2}$.

2. $$\int \frac{dx}{x^2\sqrt{x^4 + 2x - 1}} = \frac{1}{x}\sqrt{x^4 + 2x - 1} + \int \frac{dx}{x\sqrt{x^4 + 2x - 1}} - \int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{x^4 + 2x - 1}}.$$

3. $$\int \frac{x^4}{\sqrt{x^4 + 1}}\,dx = \tfrac{1}{3}x\sqrt{x^4 + 1} - \tfrac{1}{3}\int \frac{dx}{\sqrt{x^4 + 1}}.$$

[24]) Integrál I_1 by se ovšem substitucí $x^2 = t$ dal převést na integrál typu vyšetřovaného v cvičení 16, 17 ke kap. IV.

4. $$\int \frac{\mathrm{d}x}{(x^2+1)^2\sqrt{x^2+2x+2}} = \frac{1}{10}\frac{x+2}{x^2+1}\sqrt{x^2+2x+2} + \frac{3}{10}\int \frac{(x+2)\,\mathrm{d}x}{(x^2+1)\sqrt{x^2+2x+2}}.$$

5. Poslední integrál v cvičení 4 vypočtěte metodou, udanou v příkl. 2; derivováním se přesvědčte o správnosti výpočtu.

§ 3. **Redukce vyšetřovaných integrálů racionálními operacemi.** Metody kapitoly IV a prvních dvou paragrafů této kapitoly spočívaly především na rozkladu racionální funkce $P(x) : Q(x)$ podle věty 59 nebo 57. Ale tyto rozklady dovedeme provést jen tehdy, dovedeme-li řešit rovnici $Q(x) = 0$, což je úkol, který při rovnicích vyššího stupně může působit obtíže jak početního, tak i zásadního rázu, jak je známo z algebry. Je proto vhodno všimnout si, jak daleko je možno se dostat v rozkladu racionálních funkcí a v otázkách integrálního počtu s tím spojených (viz první dva paragrafy této kapitoly) bez řešení rovnice $Q = 0$, pouze s použitím racionálních operací. (Racionálními operacemi rozumím sčítání, odčítání, násobení a dělení.) To nyní učiníme, musíme však předtím připomenout některé věci z algebry. Čtenář je asi zná; proto je většinou nebudu zde odvozovat, nýbrž předkládám je čtenáři jako cvičení (s dostatečně obšírným návodem), takže si je čtenář může zopakovat, popř. – pokud je nezná – se jim naučit.

Buďte $F_1(x)$, $F_2(x)$ dva mnohočleny, z nichž žádný není 0.[25]) Podle věty G v kap. IV, § 2 existují mnohočleny G_2, F_3 tak, že $F_1 = G_2F_2 + F_3$, kde F_3 je buďto 0 nebo má stupeň nižší než F_2. Není-li F_3 nula, jest obdobně $F_2 = G_3F_3 + F_4$, kde F_4 je buďto nula nebo má stupeň nižší než F_3; tak můžeme pokračovat dále; ježto stupně mnohočlenů $F_2, F_3, F_4, \ldots$ klesají, musí se postup jednou zastavit, tj. nakonec dojdeme k mnohočlenu F_{k+1} $(k + 1 \geqq 3)$, jenž je 0. Dostáváme tedy soustavu rovnic

$$F_1 = G_2F_2 + F_3,\quad F_2 = G_3F_3 + F_4, \ldots, F_{k-2} = G_{k-1}F_{k-1} + F_k,\quad F_{k-1} = G_kF_k. \tag{41}$$

Odtud je předně patrno, že F_k je dělitelem mnohočlenu F_{k-1}, tedy (podle předposlední rovnice) dělitelem F_{k-2} atd., až konečně vychází, že F_k je *společným dělitelem mnohočlenů* F_1, F_2. Naopak, *každý společný dělitel mnohočlenů* F_1, F_2 je (podle první rovnice) dělitelem mnohočlenu F_3, tedy (podle druhé) dělitelem F_4 atd., až konečně vychází, že *je dělitelem mnohočlenu* F_k. Každý mnohočlen mající tyto dvě vlastnosti (vytištěné ležatě) se nazývá největším společným dělitelem nebo největší společnou měrou mnohočlenů F_1, F_2 (viz cvičení 1). Tento největší společný dělitel je až na konstantního činitele jednoznačně určen; stanovím-li např., že součinitel při nejvyšší mocnině x má být roven 1, je tím již největší společný dělitel úplně stanoven; tohoto největšího společného dělitele mnohočlenů F_1, F_2 označme (F_1, F_2). Mnohočleny

[25]) Nevadilo by, kdyby F_1 byl polynom 0. Podrobněji viz cvičení 1.

F_1, F_2 se nazývají nesoudělné, je-li jejich největší společný dělitel roven 1. V tomto případě lze nalézt mnohočleny H_1, H_2 tak, že je identicky

$$1 = H_1(x) F_2(x) + H_2(x) F_1(x) \tag{42}$$

(viz cvičení 2, 3). Mnohočleny H_1, H_2 lze stanovit buďto z rovnic (41) nebo metodou neurčitých součinitelů.

Je-li

$$F_1(x) = a_0(x - \alpha_1)^{r_1} (x - \alpha_2)^{r_2} \ldots,$$
$$F_2(x) = b_0(x - \alpha_1)^{s_1} (x - \alpha_2)^{s_2} \ldots$$

(kde r_j, s_j jsou celá nezáporná čísla, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ navzájem různá čísla, $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$), je $(F_1, F_2) = (x - \alpha_1)^{t_1} (x - \alpha_2)^{t_2} \ldots$, kde $t_1 = \text{Min}(r_1, s_1)$, $t_2 = \text{Min}(r_2, s_2), \ldots$ Rovnice $(F_1, F_2) = 1$ značí, že rovnice $F_1(x) = 0$, $F_2(x) = 0$ nemají společného kořenu (viz cvičení 4).

Je-li $(F_j, G_k) = 1$ pro všechna j $(1 \leqq j \leqq m)$ a všechna k $(1 \leqq k \leqq n)$, je též

$$(F_1 F_2 \ldots F_m, G_1 G_2 \ldots G_n) = 1 \text{ (cvičení 5)}.$$

Má-li rovnice $F(x) = 0$ kořen α právě r-násobný $(r > 0)$, má rovnice $F'(x) = 0$ kořen α právě $(r - 1)$-násobný (cvičení 8 v § 1; slova „rovnice $F' = 0$ má kořen α nulnásobný" značí ovšem, že rovnice $F' = 0$ vůbec nemá kořen α). Mnohočlen $F_1 = (F, F')$ má tedy za kořeny právě všechny aspoň dvojnásobné kořeny mnohočlenu F, a to každý s násobností právě o jednotku nižší; mnohočlen $G_1 = F : F_1$ má tedy tytéž kořeny jako F, ale vesměs jednoduché. Dále: Mnohočlen $F_2 = (F_1, F_1')$ má za kořeny právě všechny aspoň trojnásobné kořeny mnohočlenu F, a to každý s násobností o dvě menší než F, mnohočlen $G_2 = F_1 : F_2$ má tedy za kořeny — a to vesměs jednoduché — právě všechny aspoň dvojnásobné kořeny mnohočlenu F. Mnohočlen $X_1 = G_1 : G_2$ má tedy za kořeny — a to vesměs jednoduché — právě všechny jednoduché kořeny mnohočlenu F. Postupujeme-li takto dále, můžeme rozložit F ve tvar $F = X_1 . X_2^2 . X_3^3 \ldots$, kde X_j je mnohočlen mající za kořeny (a to jednoduché) všechny j-násobné kořeny mnohočlenu F; jest ovšem $(X_j, X_m) = 1$ pro $j \neq m$ (viz podrobněji cvičení 8).

Poznamenejme ještě: Z rovnice (42) plyne

$$\frac{1}{F_1 F_2} = \frac{H_1}{F_1} + \frac{H_2}{F_2},\text{[26]}$$

tedy

$$\frac{P}{F_1 F_2} = \frac{PH_1}{F_1} + \frac{PH_2}{F_2}$$

[26]) Napíši-li takovou rovnici mezi racionálními funkcemi, rozumím tím, že je splněna pro všechna x, jež nejsou kořeny jmenovatelů; k tomu stačí (viz pozn. 2 v § 1), je-li splněna pro nekonečně mnoho x.

pro každý mnohočlen P. Odtud úplnou indukcí: Je-li $(F_j, F_k) = 1$ pro $1 \leqq j < k \leqq \leqq m$, existují ke každému mnohočlenu P mnohočleny $P_1, \ldots, P_m$ tak, že je

$$(43) \qquad \frac{P}{F_1 F_2 \ldots F_m} = \frac{P_1}{F_1} + \frac{P_2}{F_2} + \ldots + \frac{P_m}{F_m}$$

(viz podrobněji cvičení 6, 7).

Nyní přistoupíme k vlastnímu předmětu tohoto paragrafu. *Buďte dány mnohočleny* $P(x)$, $Q(x)$, $X(x)$[27]) (vesměs stupně $\geqq 0$); *ptáme se, na jaké jednodušší integrály je možno redukovat integrál*

$$(44) \qquad \int \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X(x)}}$$

pouhými racionálními operacemi (tedy bez řešení rovnic $Q = 0$, $X = 0$). Především chceme z X odstranit mnohonásobné kořeny; to dovedeme provést: Rozložíme $X = U_1 U_2^2 U_3^3 \ldots$, kde $(U_j, U_k) = 1$ pro $j \neq k$ a mnohočleny U_j mají pouze jednoduché kořeny; to lze psát též

$$X = (U_1 U_3 U_5 U_7 \ldots) . (U_2^2 U_3^2 U_4^4 U_5^4 U_6^6 U_7^6 \ldots),$$

a druhá závorka se dá odmocnit. *Budeme předpokládat*, že jsme tuto úpravu již provedli, tj. *že X nemá mnohonásobné kořeny*. Potom rozložíme obdobně

$$Q(x) = T_1 T_2^2 T_3^3 \ldots, \; (T_j, T_k) = 1 \quad \text{pro} \quad j \neq k.^{28})$$

U každého T_j najdeme $Y_j = (X, T_j)$ a píšeme $T_j = Y_j . Z_j$; jest pak již $(Z_j, X) = 1$ (neboť T_j má vesměs různé kořenové činitele, a ty, které má společné s X, jsme dali do Y_j). Tak máme $Q(x) = Y_1 Z_1 Y_2^2 Z_2^2 Y_3^3 Z_3^3 \ldots$ a kterékoliv dva z mnohočlenů $Y_1, Z_1, Y_2^2, Z_2^2, \ldots$ jsou nesoudělné. Podle rozkladu (43) lze tedy náš integrál převést na součet integrálů tvaru

$$(45) \qquad \int \frac{P_j}{Z_j^j} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}, \qquad \int \frac{R_j}{Y_j^j} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} \; (P_j, R_j \text{ mnohočleny}),$$

kde $(X, Z_j) = 1$, kdežto Y_j je dělitelem mnohočlenu X.

Jde tedy o integrály tvaru

$$\int \frac{A}{B^j} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} \; (A, B, X \text{ mnohočleny, } j \text{ celé kladné}),$$

kde B, X mají pouze jednoduché kořeny, a vedle toho buďto I. jest $(B, X) = 1$ nebo II. B je dělitelem mnohočlenu X.

[27]) Předpokládám, že X je reálný mnohočlen.

[28]) Předpokládejme, že stupeň Q je kladný. Kdyby byl roven nule, dal by se integrál (44) ihned vyjádřit integrály $I_0, I_1, I_2, \ldots$ z § 2.

V případě I jest $(B, X) = 1$, $(B, B') = 1$, tedy $(B'X, B) = 1$. Tedy existují mnohočleny M, N tak, že $MB + NB'X = 1$, načež

$$\frac{A}{B^j\sqrt{X}} = \frac{AM}{B^{j-1}\sqrt{X}} + \frac{AN\sqrt{X}B'}{B^j}.$$

Pro $j > 1$ je však

$$\left(\frac{AN\sqrt{X}}{(1-j)\,B^{j-1}}\right)' = \frac{AN\sqrt{X}B'}{B^j} + \frac{(AN)'X + \frac{1}{2}ANX'}{(1-j)\,B^{j-1}\sqrt{X}},$$

a tedy

$$\frac{A}{B^j\sqrt{X}} = \left(\frac{AN\sqrt{X}}{(1-j)\,B^{j-1}}\right)' + \frac{A_1}{B^{j-1}\sqrt{X}}, \tag{46}$$

kde A_1 je mnohočlen, takže

$$\int \frac{A}{B^j}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} = \frac{AN\sqrt{X}}{(1-j)\,B^{j-1}} + \int \frac{A_1}{B^{j-1}}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} \quad (\text{pro } j > 1).$$

Postupujeme-li podobně dále, dostaneme konečně rovnici tvaru

$$\int \frac{A}{B^j}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} = \frac{C\sqrt{X}}{B^{j-1}} + \int \frac{D}{B}\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}, \tag{47}$$

kde C, D jsou mnohočleny.

V případě II jest $X = BY$, kde $(Y, B) = 1$ (ježto X má jen jednoduché kořeny); ježto též $(B, B') = 1$ a tedy $(B, YB') = 1$, existují mnohočleny M, N tak, že $MB + {}$ ${} + NYB' = 1$, načež

$$\frac{A}{B^j\sqrt{X}} = \frac{AM}{B^{j-1}\sqrt{X}} + \frac{ANB'Y}{B^j\sqrt{X}}. \tag{48}$$

Jest však[29])

$$\left(\frac{ANY}{B^{j-1}\sqrt{X}}\right)' = (1-j)\frac{ANB'Y}{B^j\sqrt{X}} - \frac{1}{2}\frac{ANYX'}{B^{j-1}X\sqrt{X}} + \frac{(ANY)'}{B^{j-1}\sqrt{X}}.$$

V druhém členu vpravo dosadíme $X = BY$, $X' = B'Y + BY'$ a obdržíme

$$\left(\frac{ANY}{B^{j-1}\sqrt{X}}\right)' = \left(\frac{1}{2} - j\right)\frac{ANB'Y}{B^j\sqrt{X}} + \frac{A_1}{B^{j-1}\sqrt{X}},$$

---

[29]) I pro záporné X platí vzorec $\left(\frac{1}{\sqrt{X}}\right)' = -\frac{1}{2}\frac{X'}{X\sqrt{X}}$, neboť

$$\left(\frac{1}{i\sqrt{-X}}\right)' = \frac{1}{i}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\frac{-X'}{-X\cdot\sqrt{-X}} = -\frac{1}{2}\frac{X'}{X\cdot i\cdot\sqrt{-X}}.$$

kde A_1 je mnohočlen, načež z (48) plyne (A_2 je rovněž mnohočlen)

$$\frac{A}{B^j\sqrt{X}} = \left(\frac{ANY}{(\frac{1}{2} - j)\, B^{j-1}\sqrt{X}}\right)' + \frac{A_2}{B^{j-1}\sqrt{X}}. \tag{49}$$

Na rozdíl od vzorce (46) platí (49) i pro $j = 1$. Integrací obdržíme redukční vzorec a opakováním tohoto postupu dospějeme k vzorci

$$\int \frac{A}{B^j} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} = \frac{CY}{B^{j-1}\sqrt{X}} + \int D \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}, \tag{50}$$

kde C, D jsou mnohočleny. Násobíme-li v prvním členu vpravo čitatele i jmenovatele $\sqrt{X}$ a dosadíme pak do jmenovatele $X = BY$, můžeme místo (50) psát též

$$\int \frac{A}{B^j} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} = \frac{C\sqrt{X}}{B^j} + \int D \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}.$$

Integrály (45) lze tedy převést na tvar (C_j, D_j, F_j, G_j jsou mnohočleny)

$$\frac{C_j\sqrt{X}}{Z_j^{j-1}} + \int \frac{D_j}{Z_j} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}, \qquad \frac{F_j\sqrt{X}}{Y_j^j} + \int G_j \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}}. \tag{51}$$

Sestrojíme-li součet těchto výrazů a uvedeme jednak členy integrované, jednak funkce za znamením integračním na společného jmenovatele, vidíme, že integrál (44) lze převést racionálními operacemi na tento tvar:[30])

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} = \frac{P_1(x)\sqrt{X}}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{X}} \tag{52}$$

(P_1, P_2, Q_1, Q_2 jsou polynomy). Přitom Q_2 má kořeny vesměs jednoduché; kořeny Q_2 jsou ony kořeny Q, jež nejsou kořeny X.[31]) Mnohočlen Q_1 má tyto kořeny: Předně ony kořeny mnohočlenu Q (a to ve stejné násobnosti), jež jsou též kořeny X; za druhé ony mnohonásobné kořeny Q, jež nejsou kořeny X, a to s násobností o jednotku nižší.

V celém tomto paragrafu jsme připouštěli též případ, že X má stupeň 0; tak dostáváme pro integrál racionální funkce $P : Q$ tento rozklad:

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} \mathrm{d}x = \frac{P_1(x)}{Q_1(x)} + \int \frac{P_2(x)}{Q_2(x)} \mathrm{d}x; \tag{53}$$

---

[30]) Předpokládám, že X nemá mnohonásobné kořeny.

[31]) Některé z těchto kořenů mohou chybět (je-li např. v (51) některý mnohočlen D_j nula), ale mohu je tam dostat tím, že zlomek $P_2 : Q_2$ vhodně rozšířím.

zde ovšem jest $Y_j = 1$. Tedy: Q_1 má za kořeny právě všechny mnohonásobné kořeny Q, a to s násobností o jednotku nižší; Q_2 má pak tytéž kořeny jako Q, ale vesměs jednoduché. Provedeme-li dělení

$$\frac{P_2}{Q_2} = R + \frac{S}{Q_2}$$

a integrujeme-li polynom R, vidíme, že v (53) smíme předpokládat, že P_2 je buďto nula nebo má stupeň nižší než Q_2. Rovnice (53) dává rozklad integrálu na „racionální část“ $P_1 : Q_1$ a na integrál funkce $P_2 : Q_2$, který – kdybychom provedli rozklad na částečné zlomky – by se vesměs skládal z členů tvaru $\int \frac{c\,dx}{x - \alpha}$ (užívám rozkladu z věty 57).

Rozklad daný rovnicí (53) dovedeme – jak bylo obecněji zdůrazněno při rovnici (52) – provést použitím racionálních operací na polynomy P, Q (k nimž při rovnici (52) ještě přistupuje polynom X) – tedy speciálně *bez* řešení rovnice $Q = 0$. Věc se čtenáři jistě ještě přiblíží, probere-li připojená cvičení.

Cvičení

Cvičení 1–8 jsou určena k tomu, aby si čtenář zopakoval z algebry to, co jsme v tomto paragrafu potřebovali. Jsou stylizována tak obšírně, že ten, kdo tyto věci nezná, se jim zde může naučit. Mluvím-li v těchto cvičeních o rovnici mezi mnohočleny nebo obecněji mezi racionálními funkcemi, rozumím tím rovnici identicky platnou, i když to výslovně neřeknu.[32])

1. Společným dělitelem dvou mnohočlenů F_1, F_2 nazývám každý mnohočlen G, který je dělitelem mnohočlenu F_1 i mnohočlenu F_2 (tj. G není mnohočlen 0 a platí rovnice tvaru $F_1 = GH_1$, $F_2 = GH_2$, kde H_1, H_2 jsou mnohočleny; viz definici pojmu „dělitel“ v kap. IV, § 2, poznámka 2). Mnohočlen G nazýváme *největším společným dělitelem* nebo *největší společnou měrou* mnohočlenů F_1, F_2, má-li tyto vlastnosti: Předně je společným dělitelem mnohočlenů F_1, F_2; za druhé každý společný dělitel mnohočlenů F_1, F_2 je dělitelem G. Jsou-li G, G_1 dva největší společní dělitelé mnohočlenů F_1, F_2, je G dělitelem G_1 a též naopak, odkud $G = cG_1$, kde c je konstanta. Existuje tedy až na konstantního činitele nejvýše jeden největší společný dělitel mnohočlenů F_1, F_2. Že pak jeden takový největší společný dělitel existuje, pokud není F_1 ani F_2 identicky roven nule, plyne z rovnic (41), jak bylo ukázáno na str. 228. Je-li pak např. F_1 rovno identicky nule, F_2 pak nikoliv, je zřejmě F_2 největším společným dělitelem. Je-li $F_1 = F_2 = 0$, neexistuje ovšem největší společný dělitel (proč?). Onoho největšího společného dělitele, v němž součinitel při nejvyšší mocnině x je roven 1, označme jako na str. 228 znakem (F_1, F_2).

2. Z rovnic (41) odvoďte: Existují mnohočleny $H_1(x)$, $H_2(x)$ tak, že je identicky $(F_1, F_2) = H_1F_1 + H_2F_2$. Buďte nyní dány F_1, F_2, K. Ptáme se: kdy je možno nalézt mnohočleny H_1, H_2 tak, aby bylo identicky $K = H_1F_1 + H_2F_2$? Odpověď: tehdy a jen tehdy, je-li K násobkem mnohočlenu (F_1, F_2) (tj. je-li (F_1, F_2) dělitelem K).

3. Speciálně: K mnohočlenům F_1, F_2 existují mnohočleny H_1, H_2 tak, že je identicky $1 = H_1F_1 + H_2F_2$, tehdy a jen tehdy, je-li $(F_1, F_2) = 1$. Mají-li F_1, F_2 kladný stupeň, lze

[32]) O mnohočleneech F_0, F_1, F_2, …, K, L, K_1, K_2, …, daných v cvičeních 2 až 8, předpokládám, že nejsou identicky rovny nule.

(tím, že od H_1 odečteme vhodný násobek F_2 a k H_2 přičteme týž násobek F_1) docílit toho, že H_1 má stupeň nižší než F_2 a H_2 má stupeň nižší než F_1.

4. Mnohočlen K je dělitelem mnohočlenu L tehdy a jen tehdy, platí-li toto: Každý kořen mnohočlenu K (r-násobný) je též kořenem mnohočlenu L, a to *aspoň* r-násobným. Odtud plyne vyjádření největšího společného dělitele podané na str. 229, ř. 10 shora. Speciálně: Je $(F_1, F_2) = 1$ tehdy a jen tehdy, nemají-li F_1, F_2 společného kořenu.

5. Je-li $(F_i, K_j) = 1$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$; $j = 1, 2, \ldots, m$, je též $(F_1 F_2 \ldots F_n, K_1 K_2 \ldots K_m) = 1$.

6. Buďte F_1, F_2, K mnohočleny, $(F_1, F_2) = 1$. Potom existují mnohočleny K_1, K_2 tak, že jest identicky

$$\frac{K}{F_1 F_2} = \frac{K_1}{F_1} + \frac{K_2}{F_2}, \quad \text{tj.} \quad K = K_1 F_2 + K_2 F_1$$

(to plyne z cvičení 3). Mají-li F_1, F_2 kladný stupeň a má-li K nižší stupeň než $F_1 F_2$, lze dosáhnout toho, že pro $j = 1, 2$ je K_j buďto nula nebo má nižší stupeň než F_j.

7. Úplnou indukcí odvoďte: Je-li $(F_i, F_j) = 1$ pro $1 \leqq i < j \leqq n$ a je-li K mnohočlen, existují mnohočleny $K_1, \ldots, K_n$ tak, že jest identicky

$$\frac{K}{F_1 F_2 \ldots F_n} = \frac{K_1}{F_1} + \frac{K_2}{F_2} + \ldots + \frac{K_n}{F_n}.$$

Mají-li všechny F_j kladný stupeň a má-li K nižší stupeň než $F_1 F_2 \ldots F_n$, lze ještě dosáhnout toho, že pro $j = 1, 2, \ldots, n$ je K_j buďto nula nebo má stupeň nižší než F_j.

8. Budiž dán mnohočlen F_0; definujme $F_1 = (F_0, F_0')$, $F_2 = (F_1, F_1'), \ldots, F_k = (F_{k-1}, F_{k-1}'), \ldots$ Z cvičení 8 v § 1 plyne: F_1 má za kořeny právě všechny aspoň dvojnásobné kořeny mnohočlenu F_0, a to s násobností o 1 menší. Indukcí: F_k má za kořeny právě všechny aspoň $(k + 1)$-násobné kořeny mnohočlenu F_0, a to s násobností o k menší. Odtud: $G_k = F_{k-1} : F_k$ má za kořeny právě všechny aspoň k-násobné kořeny mnohočlenu F_0, a tyto kořeny jsou jednoduchými kořeny mnohočlenu G_k. A konečně: $X_k = G_k : G_{k+1}$ $(k = 1, 2, \ldots)$ má vesměs jednoduché kořeny, a jsou to právě všechny k-násobné kořeny mnohočlenu F_0. Existuje ovšem číslo m tak, že $G_{m+1} = 1$; potom jest ovšem $X_k = 1$ pro $k > m$. Mnohočlen F_0 lze pak psát ve tvaru $F_0 = X_1 X_2^2 X_3^3 \ldots X_m^m$. Mnohočleny X_j jsou po dvou nesoudělné (tj. $(X_i, X_j) = 1$ pro $1 \leqq i < j \leqq m$) a mají vesměs jednoduché kořeny.

9. Podle návodu cvičení 8 rozložte mnohočlen $x^9 - 2x^8 + 5x^7 - 9x^6 + 10x^5 - 13x^4 + 12x^3 - 8x^2 + 8x - 4$. Vyjde $(x^2 + x + 1)(x^2 + 2)^2 (x - 1)^3$.

10. Podle návodu tohoto paragrafu (a s užitím cvičení 9) proveďte rozklad (kladouce $X = (x^2 + 2)(x^2 + 1)$)

$$\int \frac{6x^8 + 7x^7 + 17x^5 - 3x^4 + 19x^3 - 8x^2 + 2x - 4}{x^9 - 2x^8 + 5x^7 - 9x^6 + 10x^5 - 13x^4 + 12x^3 - 8x^2 + 8x - 4} \cdot \frac{dx}{\sqrt{X}} =$$

$$= \frac{(2 - 3x^2)\sqrt{X}}{(x - 1)^2 (x^2 + 2)^2} + \int \frac{x + 1}{x^3 - 1} \cdot \frac{dx}{\sqrt{X}}.$$

11. Položme $Q(x) = x^6 - 2x^5 + x^4 - 2x^3 + 6x^2 - 6x + 2$; zjistěte, že $Q(x) = (x - 1)^2 \cdot (x^4 - 2x + 2)$ (podle návodu cvičení 8) a proveďte rozklad

$$\int \frac{-2x^4 + x^2 + 3x - 4}{Q(x)} \, dx = \frac{x + 1}{x - 1} + \int \frac{x \, dx}{(x - 1)(x^4 - 2x + 2)}.$$