Integrální počet I

Kapitol VII. Užití integrálního počtu k zavedení elementárních funkcí

In: Vojtěch Jarník (author): Integrální počet I. (Czech). Praha: Academia, 1984. pp. 138--164.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402112

Kapitola VII

UŽITÍ INTEGRÁLNÍHO POČTU K ZAVEDENÍ ELEMENTÁRNÍCH FUNKCÍ[1])

§ **1. Úvod.** Než přistoupím k vlastnímu předmětu této kapitoly, učiním několik poznámek obecného rázu. Poohlédněme se trochu po tom, co jsme až dosud vykonali, přičemž si budeme všímat pouze kapitol I–XIV v **DI** a kapitol I–IV v této knize (nepřihlížíme tedy zatím ke komplexním číslům, o nichž byla řeč v **DI**, kap. XV). Obsah těchto kapitol je možno roztřídit ve tři části:

A) V přípravné části (kap. I, II, IV, V v **DI**) jsme vybudovali základy potřebné k vlastnímu vybudování diferenciálního a integrálního počtu: Vybudovali jsme aritmetiku reálných čísel (čtyři základní výkony početní a uspořádání reálných čísel podle velikosti); odvodili jsme základní větu o supremu a infimu, dále jsme vybudovali teorii posloupností a nekonečných řad a konečně jsme zavedli pojmy funkce, limita funkce, spojitost funkce a odvodili nejjednodušší věty o nich (sem patří též základní věty 127–130 o spojitých funkcích z **DI**, kap. IX a věta 114 o inverzní funkci z **DI**, kap. VII).

B) V kapitolách VIII–XIV v **DI** a v kap. II, III této knihy jsme vybudovali obecné základy diferenciálního a integrálního počtu opřené o výsledky uvedené v **A)**.

C) Mimo *obecné* základy diferenciálního a integrálního počtu jsme zavedli v **DI** některé funkce speciální: Především funkce racionální;[2]) dále jsme zavedli již v **DI**, kap. III obecnou mocninu a logaritmus (sem patří též věta 43 z **DI**, kap. I o existenci q-té odmocniny), což nás vedlo k zavedení funkcí

$$e^x,\ \lg x \text{ (obecněji } a^x,\ \log_a x),\ x^a\ ; \tag{1}$$

v kap. VI, VII jsme pak zavedli funkce goniometrické

$$\sin x,\ \cos x,\ \operatorname{tg} x,\ \operatorname{cotg} x \tag{2}$$

[1]) Tak nazýváme obecnou mocninu, exponenciální funkci, logaritmus, funkce goniometrické a cyklometrické, jakož i funkce, jež z nich lze odvodit čtyřmi základními výkony početními a tvořením funkcí složených, jako je např. funkce $\lg\left(\lg\left(\operatorname{arctg}(e^{x^2}) + \sin\sqrt{\dfrac{x}{x+1}}\right)\right)$.

[2]) K těm jsme přímo vedeni tím, že na konstanty a na proměnnou x užijeme čtyř základních výkonů početních.

a k nim inverzní funkce cyklometrické

$$\text{(3)}\qquad \arcsin x,\ \arccos x,\ \operatorname{arctg} x,\ \operatorname{arccotg} x\,.$$

Studovali jsme pak spojitost a průběh těchto funkcí, naučili jsme se tyto funkce derivovat a některé z nich integrovat (viz kap. IV a některé příklady a cvičení v kap. III), některé z těchto funkcí jsme pak rozvinuli v Taylorovu řadu a získali též prostředky k jejich numerickému výpočtu.

Všimneme-li si, jak jsme postupovali v **DI** i v této knize, shledáme, že jsme věty uvedené v **A**), **B**) dokázali vesměs bez jakéhokoliv použití funkcí (1), (2), (3). Mohl jsem proto postupovat také tak, že bych byl napřed vyložil obecnou teorii uvedenou v **A**), **B**), a potom bych byl teprve zavedl funkce (1), (2), (3) a studoval jejich vlastnosti s použitím obecných vět již odvozených. Tento způsob by byl snad dokonce metodicky vhodnější než způsob, kterého jsem užil.[3] Ale funkce (1), (2), (3) poskytují mnoho příkladů k procvičení látky a tím vhodnou příležitost k oživení obecných úvah, což je hlavně pro začátečníka důležité; proto jsem si se zavedením těchto funkcí pospíšil.

Ale nyní, kdy již celou látku ovládáme, můžeme se na ni podívat z hlediska právě uvedeného. Připomeňme napřed, že k zavedení funkcí (1), (2), (3) jsme v **DI** a v této knize nebyli přivedeni z vnitřní potřeby diferenciálního a integrálního počtu, nýbrž spíše z vnějšího popudu, vyšlého odjinud. Tak popud k zavedení geniometrických funkcí (2) a k nim inverzních funkcí (3) vyšel z geometrie (řešení pravoúhlých trojúhelníků). Kdyby nebylo tohoto popudu, sotva bychom pochopili, proč nás tolik zajímají funkce mající čtyři základní vlastnosti z **DI**, kap. VI, § 1, nebo proč nás tolik zajímají funkce definované řadami

$$\text{(4)}\qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots,\ \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

Zrovna tak bychom se přece mohli zajímat třeba o funkci definovanou řadou

$$\text{(5)}\qquad f(x) = 1 - \frac{x^2}{(1!)^2} + \frac{x^4}{(2!)^2} - \frac{x^6}{(3!)^2} + \ldots;$$

tato řada není o mnoho složitější než řady (4) a konverguje také značně rychle.[4]) Také popud k zavedení q-té odmocniny vyšel z algebry (řešení rovnice $x^q = a$); jakmile pak máme $\sqrt[q]{x}$ a obecněji $x^{p/q} = \sqrt[q]{x^p}$, vede nás limitní úvaha k mocnině a^b

[3]) Vzpomeňme si, že jsme o goniometrických funkcích začali mluvit již v **DI**, kap. VI, že jsme však jejich teorii postavili na pevný základ až v **DI**, kap. XII, když jsme v obecné teorii získali potřebné pomůcky.

[4]) Skutečně je také tato funkce důležitá v matematice i v jejích aplikacích: je to v podstatě jedna z tzv. funkcí Besselových.

s libovolným (též iracionálním) mocnitelem b; mimoto potřebujeme a^x pro libovolné x též k zavedení logaritmů, jejichž užitečnost známe odjinud.[5])

Zde je snad na místě tato poznámka.

Začátečník je často nakloněn tomu, dívat se na funkce racionální, na funkce (1), (2), (3) a na funkce, jež se dají jednoduše těmito funkcemi vyjádřit, jako na funkce „známé“ a na ostatní funkce jako na „neznámé“. Tento ne zcela správný postoj vzniká patrně tím, že se tyto funkce uvádějí již v úvodních partiích vyšší matematiky a že se do jisté míry probírají již na škole (což obojí jest ospravedlněno jejich důležitostí a poměrnou jednoduchostí jejich vlastností), kdežto jiné funkce se vyšetřují obyčejně až ve vyšších partiích matematiky. Co to vlastně znamená, řekne-li čtenář, že *zná* funkci e^x? Tím míní patrně asi tolik: Předně, že zná některé jednoduché vlastnosti funkce e^x (např. $e^{x+y} = e^x e^y$, $(e^x)' = e^x$ apod.) a za druhé, že řada

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots \tag{6}$$

dává výhodné možnosti k numerickému výpočtu této funkce. Ale také funkce (5) má mnohé jednoduché vlastnosti (ač ne tak jednoduché jako funkce e^x) a řada (5) je též výhodná pro numerické počítání, pokud $|x|$ není příliš velké. Rozdíl mezi funkcemi (1), (2), (3) a ostatními funkcemi není tedy ani tak zásadní povahy, jako spíše stupňovitý: funkce (1), (2), (3) mají vlastnosti jednodušší[6]) a jsou – aspoň při jednoduchých problémech – důležitější než jiné funkce.

§ 2. Funkce lg x, e^x, a^x, x^a. Postavíme se nyní (až do konce této kapitoly) na stanovisko vytčené v § 1. Považujeme tedy za známou celou obecnou teorii, pokud jsme ji v **DI** a v této knize dosud probrali; budeme se však tvářit, jako bychom vůbec neznali funkce (1), (2), (3) a čísla e, π (jež s těmito funkcemi souvisí) – teorii těchto funkcí si právě v tomto a v následujících paragrafech novým způsobem odvodíme. Nejjednodušší funkce jsou c (konstanta) a proměnná x sama; zřejmě jest

$$\frac{\mathrm{d}c}{\mathrm{d}x} = \lim_{h\to0}\frac{c-c}{h} = \lim_{h\to0} 0 = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}x} = \lim_{h\to0}\frac{(x+h)-x}{h} = \lim_{h\to0} 1 = 1.$$

[5]) Také zavedení čísla e rovnicí

$$e = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$$

se jevilo v **DI**, kap. II, § 4, příkl. 1 na první pohled jako uměle zkonstruovaný příklad, jehož důležitost se ukázala teprve později.

[6]) Některým jednoduchým vlastnostem těchto funkcí, jimiž vynikají nad *všechny* ostatní spojité funkce, je věnován § 13 v kap. V a § 4 Dodatku mé knihy „Diferenciální počet II“ (2. vyd., 1956).

Z konstant a z proměnné x dostáváme čtyřmi základními výkony početními tzv. racionální funkce. Ježto známe pravidla o derivování součtu, rozdílu, součinu a podílu, dovedeme derivovat též každou racionální funkci. Proveďme to napřed pro mocninu. Jest $(x^2)' = x' \, . \, x + x \, . \, x' = 2x$, $(x^3)' = (x^2)' \, . \, x + x^2 \, . \, x' = 2x^2 + x^2 = 3x^2$ a úplnou indukcí $(x^n)' = nx^{n-1}$ pro každé celé kladné n; tento vzorec platí však i pro celé záporné n ($n = -m$, $m > 0$), neboť

$$(x^n)' = (x^{-m})' = \left(\frac{1}{x^m}\right)' = -\frac{(x^m)'}{(x^m)^2} = \frac{-mx^{m-1}}{x^{2m}} = nx^{n-1} \text{ pro } x \neq 0 \, .$$

Tedy $(x^n)' = nx^{n-1}$ pro celá kladná i záporná n (pro $n < 0$ musíme ovšem vyloučit hodnotu $x = 0$). Odtud hned plyne derivace mnohočlenu $(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots)' = na_0x^{n-1} + (n-1)\,a_1x^{n-2} + \ldots$ a derivace racionální funkce $P : Q$ (P, Q mnohočleny):

$$\left(\frac{P(x)}{Q(x)}\right)' = \frac{P'(x)\,Q(x) - P(x)\,Q'(x)}{(Q(x))^2} \, .$$

Je to opět racionální funkce, takže derivování racionálních funkcí nevede k novým funkcím.[7])

Jak je to nyní *s integrováním* racionálních funkcí? Začněme s mocninou x^n (n celé). Jest $(x^{n+1})' = (n+1)\,x^n$; není-li tedy $n + 1 = 0$, jest[8])

$$\left(\frac{x^{n+1}}{n+1}\right)' = x^n, \quad \text{tj.} \quad \int x^n \, \mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad (n \text{ celé}, \ n \neq -1) \, .$$

Zbývá $\int \frac{\mathrm{d}x}{x}$; tento integrál existuje podle věty 49 v intervalu $(-\infty, 0)$ i v intervalu $(0, +\infty)$. Je snad tento integrál racionální funkcí? *Nikoliv*, neboť dokážeme: Žádná racionální funkce

$$\frac{a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots}{b_0x^m + b_1x^{m-1} + \ldots} \quad (n, m \text{ celá}, \ n \geqq 0, \ m \geqq 0, \ a_0 \neq 0, \ b_0 \neq 0) \tag{7}$$

nemá v žádném — sebemenším — intervalu derivaci $\frac{1}{x}$.

---

[7]) Také tvoření „složených funkcí" nevede k novým funkcím. Neboť jsou-li f, φ racionální funkce, je funkce $f(\varphi(x))$ též racionální. Lze totiž psát

$$f(y) = \frac{a_0y^n + a_1y^{n-1} + \ldots}{b_0y^m + b_1y^{m-1} + \ldots} \, ,$$

a dosadíte-li sem za y racionální funkci $\varphi(x)$, dostanete zřejmě opět racionální funkci.

[8]) Pro $n < 0$ nutno ovšem vyloučit hodnotu $x = 0$.

Důkaz. Nechť funkce (7) má v jistém intervalu (α, β) derivaci x^{-1}; z toho odvodíme spor. Podle pravidla o derivování podílu obdržíme pro všechna x intervalu (α, β) rovnici (vypisuji jen členy nejvyššího stupně)

$$\frac{(na_0x^{n-1} + \ldots)(b_0x^m + \ldots) - (a_0x^n + \ldots)(mb_0x^{m-1} + \ldots)}{(b_0x^m + \ldots)^2} = \frac{1}{x},$$

neboli – odstraněním jmenovatele –

$$a_0b_0(n - m)\, x^{n+m} + \ldots = b_0^2x^{2m} + \ldots$$

Podle věty C) v kap. IV, § 1 musí se každý součinitel vlevo rovnat stejnolehlému součiniteli vpravo. Kdyby však bylo $n \neq m$, byl by vlevo mnohočlen stupně $n + m \neq 2m$; tedy musí být $n = m$, ale potom člen s $x^{2m} = x^{n+m}$ má vlevo součinitele 0, vpravo však součinitele $b_0^2 \neq 0$. Náš předpoklad vede tedy ke sporu.

Integrace funkce x^{-1} vede nás tedy k nové funkci, jež není racionální. Jednou primitivní funkcí k funkci x^{1-} v intervalu $(0, +\infty)$ je podle věty 49 funkce $\int_1^x t^{-1}\, dt$; tuto funkci označme $\lg x$; ostatní primitivní funkce se z ní dostanou přičtením „integrační konstanty". Definujeme tedy

(8) $$\lg x = \int_1^x \frac{dt}{t} \text{ pro } x > 0\,.$$ [9]

Mezi všemi primitivními funkcemi jsme tedy vybrali onu, jež pro $x = 1$ má hodnotu 0:

(9) $$\lg 1 = 0.$$

Je-li $x > 0$, $y > 0$, dává substituce $t = xv$ $(dt = x\, dv)$ rovnici

(10) $$\lg (xy) = \int_1^{xy} \frac{dt}{t} = \int_{1/x}^{y} \frac{dv}{v} = \int_1^y - \int_1^{1/x} = \lg y - \lg \frac{1}{x}\,.$$

Volbou $y = 1$ dostáváme z (9), (10)

(11) $$\lg x = -\lg \frac{1}{x}\,,$$

takže (10) lze přepsat do tvaru

(12) $$\lg (xy) = \lg x + \lg y\,.$$

Odtud plyne $\lg (x^2) = 2 \lg x$, $\lg (x^3) = \lg x + \lg (x^2) = 3 \lg x$; úplnou indukcí ihned $\lg (x^n) = n \lg x$ pro n celé kladné. Ale tento vzorec platí podle (9) i pro $n = 0$

[9] Intervalem $(-\infty, 0)$ se už nemusíme zvláště zabývat, neboť pro $x < 0$ substituce $x = -y$ dává

$$\int x^{-1}\, dx = \int y^{-1}\, dy = \lg y = \lg(-x) = \lg |x|\,.$$

$(x^0 = 1)$ a pro celé $n < 0$ $(n = -m,\ m > 0)$, neboť potom podle (11) $\lg(x^n) = \lg(x^{-m}) = \lg \dfrac{1}{x^m} = -\lg x^m = -m \lg x = n \lg x$. Tedy celkem

$$(13) \qquad \lg(x^n) = n \lg x \quad \text{pro} \quad x > 0,\ n \text{ celé}.$$

Konečně: $\lg x$ je primitivní funkcí k funkci x^{-1} v intervalu $(0, +\infty)$, tedy jest

$$(14) \qquad \frac{\mathrm{d} \lg x}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{x} \quad \text{pro} \quad x > 0.$$

Funkce $\lg x$, majíc kladnou vlastní derivaci pro $x > 0$, *je spojitá* a *rostoucí* v intervalu $(0, +\infty)$. Ježto v bodě 1 má hodnotu 0, je

$$(15) \qquad \lg x > 0 \quad \text{pro} \quad x > 1, \quad \lg x < 0 \quad \text{pro} \quad 0 < x < 1.$$

Tvrdím, že

$$(16) \qquad \lim_{x \to +\infty} \lg x = +\infty.$$

Důkaz. Číslo $\lg 2$ je kladné. Je-li tedy K libovolné číslo, existuje přirozené n tak, že $n \lg 2 > K$, tj. (viz (13)) $\lg(2^n) > K$. Ježto $\lg x$ je rostoucí, platí pro všechna $x > 2^n$ nerovnost $\lg x > K$. Tím je (16) dokázáno. Z (16) a z (11) plyne ihned

$$(17) \qquad \lim_{x \to 0+} \lg x = -\infty.$$

Spojitá rostoucí funkce $\lg x$ zobrazuje interval $J_1 = (0, +\infty)$ na jistý interval J_2 (viz větu 130 z DI, str. 238, v 4. vyd. str. 272), jenž podle (16), (17) není shora ani zdola omezen; tedy je nutně $J_2 = (-\infty, +\infty)$. Podle věty 114 z DI, str. 200, v 4. vyd. str. 226 existuje tedy v J_2 funkce inverzní k $\lg x$, kterou označíme $E(x)$.[10]) Tedy: $E(x)$ je spojitá a rostoucí v $(-\infty, +\infty)$ a zobrazuje tento interval na $(0, +\infty)$. Odtud podle kap. I, § 4 plyne: Ježto $E(x)$ není v $(-\infty, +\infty)$ shora omezená, je

$$\lim_{x \to +\infty} E(x) = +\infty;$$

ježto je však zdola omezená, je

$$\lim_{x \to -\infty} E(x) = \inf_{x \in (-\infty, +\infty)} E(x) = 0.$$

Tedy celkem

$$(18) \qquad \lim_{x \to +\infty} E(x) = +\infty, \qquad \lim_{x \to -\infty} E(x) = 0.$$

[10]) Rovnice $E(x) = y$ značí tedy totéž jako $x = \lg y$. Víme ovšem, že tato funkce $E(x)$ je totožná s funkcí e^x z DI. My ovšem zatím děláme, jako bychom tuto funkci neznali.

Derivaci funkce $E(x)$ najdeme podle věty 125 z **DI**, str. 216, v 4. vyd. str. 245 o derivování inverzní funkce takto: Jest $E'(x) = \dfrac{1}{(\lg y)'} = y$ (viz (14)), kde y je definováno rovnicí $y = E(x)$, tj.

$$E'(x) = E(x) \text{ pro každé } x\,. \tag{19}$$

Jest $\lg 1 = 0$, tedy $E(0) = 1$. Jsou-li dále x, y dvě libovolná čísla, položme $E(x) = u$, $E(y) = v$, takže $x = \lg u$, $y = \lg v$, $x + y = \lg u + \lg v = \lg(uv)$ a odtud přechodem k inverzní funkci $uv = E(x + y)$, tj.

$$E(x + y) = E(x)\,E(y)\,. \tag{20}$$

Odtud $E(2x) = (E(x))^2$, $E(3x) = E(2x)\,E(x) = (E(x))^3$, a úplnou indukcí ihned $E(nx) = (E(x))^n$ pro celé kladné n; dále $E(0\,.\,x) = E(0) = 1 = (E(x))^0$ a pro celé záporné $n = -m$ $(m > 0)$ máme podle (20) $E(nx)\,E(mx) = E(0) = 1$, tj. $E(nx) = \dfrac{1}{E(mx)} = \dfrac{1}{(E(x))^m} = (E(x))^n$. Tedy máme celkem

$$E(nx) = (E(x))^n \text{ pro každé celé } n\,; \tag{21}$$

pro $n = -1$ plyne speciálně

$$E(-x) = \frac{1}{E(x)}\,. \tag{22}$$

Je-li $a > 0$, je podle definice inverzní funkce $E(\lg a) = a$ (neboť rovnice $E(x) = a$ je splněna pro $x = \lg a$). Podle (21) je tedy

$$a^n = (E(\lg a))^n = E(n \lg a) \text{ pro celé } n\,. \tag{23}$$

Ježto mocninu a^b máme definovanou dosud jen pro celá b, můžeme ji pro ***necelá b*** definovat jak chceme;[11]) přihlížejíce k rovnici (23) definujme

$$a^b = E(b \lg a) \text{ pro } a > 0 \text{ a pro každé } b\,; \tag{24}$$

[11]) Prosím čtenáře, aby nepojímal tato slova ve smyslu libovůle, nýbrž spíše ve smyslu známého Engelsova výroku o svobodě jakožto poznané nutnosti. My chceme definovat smysl symbolu a^b a studovat potom jeho vlastnosti (viz v dalším vlastnosti A až G), tj. vybudovat teorii „mocniny". Nejde nám však o to, podat jakoukoli definici a teorii symbolu a^b, nýbrž o to, podat takovou definici, která by byla ekvivalentní s definicí podanou v **DI**, kap. III, § 1. Abychom tohoto cíle dosáhli, musíme nutně definovat symbol a^b rovnicí (24) (nebo nějakým způsobem s touto rovnicí ekvivalentním). Kdybychom definovali symbol a^b namátkou nějak jinak, třeba rovnicí

$$a^b = E(b \lg a) + b(b - [b])$$

(kde $[b]$ značí celé číslo definované nerovnostmi $[b] \leq b < [b] + 1$, viz **DI**, str. 65, v 4. vyd. str. 66, věta 46), dostali bychom teorii symbolu a^b, která by sice byla formálně bezvadná, ale pravděpodobně neplodná; rozhodně bychom však nedostali to, co chceme dostat, totiž definici symbolu a^b, ekvivalentní s definicí z **DI**, kap. III, § 1 a příslušnou teorii.

pro celé b je tato definice podle (23) ve shodě s definicí nám známou z aritmetiky (viz **DI**, kap. I, str. 59—60, v 4. vyd. str. 58). Odvoďme základní vlastnosti této „mocniny"; přitom nechť jsou x, y libovolná čísla kladná, m, n libovolná čísla.

A) $1^n = 1$, neboť $1^n = E(n \lg 1) = E(0) = 1$; dále $x^n > 0$, neboť vždy jest $E(n \lg x) > 0$.

B) $x^n y^n = (xy)^n$; neboť levá strana jest $E(n \lg x) \,.\, E(n \lg y) = E(n \lg x + n \lg y) = E(n \lg (xy)) = (xy)^n$ (užívá se rovnic (24), (20), (12), (24)). Odtud $x^n \left(\frac{y}{x}\right)^n = y^n$, tj. $\left(\frac{y}{x}\right)^n = \frac{y^n}{x^n}$, a pro $y = 1$ plyne (podle A) $\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n}$.

C) $x^m x^n = x^{m+n}$; neboť levá strana jest $E(m \lg x)\, E(n \lg x) = E((m + n) \lg x) = x^{m+n}$ (podle rovnic (24), (20), (24)). Odtud $x^n \,.\, x^{m-n} = x^m$, tj. $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$ a pro $m = 0$ plyne $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ (ježto $x^0 = 1$).

D) Je-li $x < y$, $n > 0$, je $x^n < y^n$. Neboť $\lg x < \lg y$, tedy $n \lg x < n \lg y$ a tedy – ježto E je rostoucí funkce – také $E(n \lg x) < E(n \lg y)$, tj. $x^n < y^n$.

E) Je-li $x > 1$, $m > n$, je $x^m > x^n$. Neboť podle D) jest $x^{m-n} > 1^{m-n}$; ale levá strana je $\frac{x^m}{x^n}$ (podle C), pravá je 1 (podle A), tedy $\frac{x^m}{x^n} > 1$ a tedy (ježto $x^n > 0$ podle A) jest $x^m > x^n$.

F) $\lg (x^n) = n \lg x$.[12]) Důkaz: Jest $x^n = E(n \lg x)$. Podle definice inverzní funkce je tedy (viz pozn.[10])) $n \lg x = \lg (x^n)$.

G) $(x^m)^n = x^{mn}$. Neboť levá strana je (podle definice (24) a podle F) $E(n \lg (x^m)) = E(n \,.\, m \lg x) = x^{mn}$.

Definice (8) nás vede ještě k této poznámce: Funkce $\lg x$ je spojitá a rostoucí v $(0, +\infty)$ a zobrazuje tento interval na $(-\infty, +\infty)$; tedy nabývá funkce $\lg x$ každé reálné hodnoty právě v jednom bodě intervalu $(0, +\infty)$. Onu hodnotu x, pro kterou $\lg x$ je roven 1, označme e, takže kladné číslo e je definováno rovnicí

$$\lg e = 1, \quad \text{tj.} \quad \int_1^e \frac{\mathrm{d}x}{x} = 1 \,. \tag{25}$$

Podle (24) je tedy $E(x) = e^x$ a rovnici (19) lze psát v obvyklém tvaru

$$(e^x)' = e^x \,. \tag{26}$$

Vlastnosti C), G) lze pro $x = e$ psát takto (místo m, n píši x, y):

$$e^x e^y = e^{x+y} \,; \quad \frac{e^x}{e^y} = e^{x-y} \,; \quad e^{-x} = \frac{1}{e^x} \,; \quad (e^x)^y = e^{xy} \,.$$

[12]) Nejenom pro *celé* n (což víme již z (13)), nýbrž pro ***každé*** n.

Rovnice (18) lze pak psát ve tvaru

$$\lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty, \quad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0. \tag{27}$$

Ježto $\lg x$ je rostoucí, $\lg 1 = 0$, $\lg e = 1$, jest $e > 1$. Ježto $E(b \lg a) = e^{b \lg a}$, lze definici (24) přepsat do obvyklého tvaru:

$$a^b = e^{b \lg a} \quad (a > 0,\ b \text{ libovolné}).$$[13])

Výraz a^b nás vede ke dvěma důležitým funkcím: Předně můžeme při pevném n každému $x > 0$ přiřadit číslo x^n; za druhé můžeme při pevném $a > 0$ přiřadit každému x číslo a^x.

První z těchto funkcí, tzv. obecná mocnina, má tvar $x^n = e^{n \lg x}$. Podle (26), (14) a podle pravidla o derivování složených funkcí jest

$$\frac{dx^n}{dx} = \frac{d}{dx} e^{n \lg x} = e^{n \lg x} \cdot \frac{n}{x} = x^n \cdot \frac{n}{x} = nx^{n-1} \tag{27a}$$

(viz C) pro $x > 0$. Tato derivace má totéž znamení jako n; tedy je funkce x^n rostoucí v $(0, +\infty)$ pro $n > 0$, klesající pro $n < 0$, a ovšem konstantní (rovná 1) pro $n = 0$. Z rovnice $x^n = e^{n \lg x}$ a z rovnic (27), (16), (17) plyne

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty, \quad \lim_{x \to 0+} x^n = 0 \quad \text{pro} \quad n > 0,$$

$$\lim_{x \to +\infty} x^n = 0, \quad \lim_{x \to 0+} x^n = +\infty \quad \text{pro} \quad n < 0.$$[14])

Je-li q přirozené číslo, jest y^q rostoucí funkce proměnné y v $(0, +\infty)$; tedy existuje ke každému $x > 0$ *nejvýše* jedno kladné číslo y takové, že $y^q = x$. Ale jedno takové číslo existuje, totiž $x^{1/q}$, neboť podle G) jest $(x^{1/q})^q = x^1 = x$. Toto číslo $x^{1/q}$ označme $\sqrt[q]{x}$; tím máme zavedenu definici odmocniny a dokázánu větu 43 z **DI**. Podle G) je pak (pro libovolné p) $x^{p/q} = (x^p)^{1/q} = \sqrt[q]{x^p}$.

---

[13]) Je patrno, že definice dosud v tomto paragrafu podané jsou ve shodě s definicemi dřívějšími: $\lg x$ je ona funkce s derivací x^{-1}, jež pro $x = 1$ má hodnotu 0; e je ono číslo, jehož logaritmus je 1; e^x je funkce inverzní k funkci $\lg x$; konečně a^b jest $e^{b \lg a}$.

[14]) Zkušený čtenář vidí správnost těchto rovnic na první pohled. Chceme-li mít formálně úplný důkaz, můžeme např. poslední rovnici dokázat takto: Budiž K libovolné číslo; podle (27) jest $e^{n \lg x} > K$, jakmile $n \lg x > K_1$, kde K_1 je jisté vhodné číslo; poslední nerovnost lze (ježto $n < 0$) psát též $\lg x < \dfrac{K_1}{n}$. Podle (17) je však tato nerovnost splněna, je-li $0 < x < \delta$, kde δ je jisté vhodné kladné číslo. Ke každému K existuje tedy $\delta > 0$ tak, že pro všechna x intervalu $(0, \delta)$ jest $x^n = e^{n \lg x} > K$.

Vyšetřujme nyní funkci a^x (při daném $a > 0$). Podle (26) a podle pravidla o derivování složených funkcí je

$$\frac{da^x}{dx} = \frac{d}{dx} e^{x \lg a} = e^{x \lg a} . \lg a = a^x \lg a .$$

Ježto $\lg a$ je kladný pro $a > 1$, záporný pro $0 < a < 1$, je funkce a^x v intervalu $(-\infty, +\infty)$ spojitá (majíc tam vlastní derivaci) a pro $a > 1$ rostoucí, pro $0 < a < 1$ klesající a pro $a = 1$ ovšem konstantní ($1^x = 1$). Z (27), z rovnice $a^x = e^{x \lg a}$ a ze znamení čísla $\lg a$ plyne ihned

$$(28)\qquad \begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} a^x = +\infty , \quad \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = 0 \quad \text{pro} \quad a > 1 , \\ \lim\limits_{x \to +\infty} a^x = 0 , \quad \lim\limits_{x \to -\infty} a^x = +\infty \quad \text{pro} \quad 0 < a < 1 . \end{cases}$$

Ježto $a^x > 0$, je z (28) vidět: Je-li $a \neq 1$ (a ovšem stále $a > 0$), zobrazuje funkce a^x interval $(-\infty, +\infty)$ na interval, jehož infimum je 0 a jenž není shora omezen, tj. na otevřený interval $(0, +\infty)$[15] (nikoliv na interval $\langle 0, +\infty)$, neboť nikdy není $a^x = 0$). Existuje tedy pro $a \neq 1$ k funkci a^x funkce inverzní, jež interval $(0, +\infty)$ zobrazuje na interval $(-\infty, +\infty)$. Tuto funkci označme $\log_a x$. Číslo $\log_a x$ jest ono číslo y, pro něž jest $a^y = x$; ale $a^y = e^{y \lg a}$ a rovnice $e^{y \lg a} = x$ znamená (ježto $\lg z$ je inverzní funkcí k e^z), že $y \lg a = \lg x$, tj. $y = \dfrac{\lg x}{\lg a}$. Je tedy

$$(29)\qquad \log_a x = \frac{\lg x}{\lg a} \quad \text{pro} \quad x > 0 , \quad a > 0 , \quad a \neq 1 .$$

Vlastnosti funkce $\log_a x$ lze tedy ihned odvodit z vlastností funkce $\lg x$. Učiňme tak; přitom v následujících tvrzeních jest n libovolné, $a > 0$, $a \neq 1$, $b > 0$, $b \neq 1$, $x > 0$, $y > 0$.

A) $\log_a a = \dfrac{\lg a}{\lg a} = 1$, $\log_a 1 = 0$.

B) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$; $\log_a \dfrac{y}{x} = \log_a y - \log_a x$;

$\log_a \dfrac{1}{x} = -\log_a x$; $\log_a x^n = n \log_a x$.

Dále máme $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$, $\lim\limits_{x \to 0+} \log_a x = -\infty$ pro $a > 1$; pro $0 < a < 1$ se hodnoty limit vymění. Všechny tyto vztahy plynou z rovnic (9), (12), (11), (16), (17) a z F), dělíme-li číslem $\lg a$.

C) $\log_b x = \dfrac{\log_a x}{\log_a b}$; neboť pravá strana je $\dfrac{\lg x : \lg a}{\lg b : \lg a} = \dfrac{\lg x}{\lg b}$; ježto $\log_a \dfrac{1}{a} = -\log_a a = -1$, dostaneme speciálně (pro $b = 1 : a$) $\log_{1/a} x = -\log_a x$.

[15]) Pro $a = 1$ to ovšem není pravda.

D) Z (29), (14) plyne
$$\frac{d}{dx}\log_a x = \frac{1}{x \lg a},$$
takže funkce $\log_a x$ je spojitá v $(0, +\infty)$, a to rostoucí pro $a > 1$, klesající pro $0 < a < 1$ (takže např. pro $a > 1$, $x < y$ jest $\log_a x < \log_a y$). Poznamenejme ještě: víme, že $\lg e = 1$; podle (29) je tedy $\log_e x = \lg x$.

Vidíte, že jsme na několika stránkách odvodili všechny výsledky z **DI**, kap. III, dále všechny výsledky z **DI**, kap. V a kap. VIII o spojitosti a derivacích funkcí x^n, e^x, $\lg x$ (a obecněji a^x $(a > 0)$, $\log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$), dále výsledek příkladu 3 v **DI**, kap. V, § 3[16]) a ovšem rovněž větu 43 z **DI** o existenci q-té odmocniny.[17]) Vše nám šlo daleko rychleji a jednodušeji než tehdy; to je pochopitelné, neboť máme nyní k dispozici daleko větší zásobu obecných vět než tehdy.[18])

Poznamenejme ještě výslovně (ačkoliv to většina čtenářů již jistě poznala), že symboly $\lg x$, e, a^b, e^x, $\log_a x$ zavedené v tomto paragrafu mají týž smysl jako tytéž symboly zavedené v **DI**. Neboť víme předně, že funkce $\lg x$ z **DI** má derivaci x^{-1} (pro $x > 0$) a tedy podle vět 48, 49 je pro $x > 0$
$$\lg x = \int_1^x \frac{dt}{t} + C,$$
načež dosazením $x = 1$ plyne $C = 0$. Ale to je právě rovnice (8), kterou jsme v tomto paragrafu $\lg x$ definovali. Dále víme, že číslo e definované v **DI** je ono (jediné) číslo, jehož přirozený logaritmus je roven jedné. Ale touto rovnicí (25) jsme právě číslo e v tomto paragrafu definovali. Tedy: symboly $\lg x$, e mají v tomto paragrafu týž smysl jako v **DI**. Dále jsme v **DI** definovali symbol a^b pro $a > 0$ a víme, že ve smyslu této definice bylo $a = e^{\lg a}$, $a^b = (e^{\lg a})^b = e^{b \lg a}$, a že speciálně funkce e^x byla inverzní k funkci $\lg x$. V tomto paragrafu jsme však funkci inverzní k $\lg x$ označili $E(x)$ (to je tedy funkce totožná s funkcí e^x, zavedenou v **DI**), načež jsme v rovnici (24) zavedli $a^b = E(b \lg a)$; ježto $E(x)$ má týž smysl jako symbol e^x z **DI**, vidíme, že symbol a^b má v tomto paragrafu týž smysl jako symbol $e^{b \lg a}$ v **DI**, tj. smysl symbolu a^b v tomto paragrafu je týž jako v **DI**. Speciálně: Ježto $\lg e = 1$ (viz (25)), je $e^x = E(x \lg e) = E(x)$, takže od neobvyklého symbolu $E(x)$ můžeme přejít k obvyklému symbolu e^x. Konečně víme, že ve smyslu **DI** je $\log_a x = \dfrac{\lg x}{\lg a}$ pro $x > 0$, $a > 0$,

[16]) Výpočet limity $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$ v **DI**, kap. V, § 5, příkl. 3 neznamená nic jiného než důkaz rovnice $\left(\dfrac{de^x}{dx}\right)_{x=0} = 1$, jež jest obsažena v naší rovnici (26).

[17]) Vynechal jsem pouze některé drobnosti, jež lze doplnit na několika řádcích, tak např. definici 0^n pro $n > 0$, nebo definici q-té odmocniny záporného čísla pro liché q. Uveďme ještě, že věta 71 z DI: „Je-li $a > 0$, $\lim z_n = z$, je $\lim a^{z_n} = a^z$" plyne ze spojitosti funkce a^x.

[18]) Snad tento fakt přispěje také k tomu, aby se čtenář naučil vážit si obecných teorií: jsou nejen nezbytné k pevnému fundování matematiky, ale také svrchovaně užitečné při zcela „konkrétních", řekl bych početně technických problémech.

$a \neq 1$ (viz větu 74 v **DI**, str. 116, v 4. vyd. str. 125—126, bod C), kde místo b pište a, místo a pište e). Ale $\log_a x$ zavedený v tomto paragrafu vyhovuje této rovnici (viz (29)), přičemž už víme, že symboly $\lg x$, $\lg a$ mají v tomto paragrafu týž smysl, jaký měly v **DI**. Tedy i symbol $\log_a x$ má v tomto paragrafu týž smysl jako v **DI**.

Cvičení

1. V DI, kap. II, § 4, příkl. 1 jsme definovali číslo e rovnicí

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n . \tag{30}$$

Nyní jsme tuto definici nepotřebovali, ježto jsme v (25) podali jinou, jednodušší definici čísla e. Dokažme však pro úplnost také rovnici (30). Návod: Je-li

$$1 \leqq t \leqq 1 + \frac{1}{n}, \quad \text{jest} \quad \frac{n}{n+1} \leqq \frac{1}{t} \leqq 1$$

a tedy

$$\lg\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = n \int_1^{1+1/n} \frac{dt}{t} \leqq 1,$$

a obdobně

$$\lg\left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = (n+1) \int_1^{1+1/n} \frac{dt}{t} \geqq 1,$$

tedy

$$\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqq e \leqq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}, \qquad e \cdot \frac{n}{n+1} \leqq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \leqq e .$$

2. V DI, kap. II, § 4, v příkl. 1, 2 jsme však dokázali ještě více, totiž toto: Položíme-li

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1},$$

je $\lim a_n = \lim b_n = e$[19]) a dále $a_n < a_{n+1}$, $b_n > b_{n+1}$. Dokažme to. Návod:

$$\lg\left(1 + \frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n} \int_0^1 \frac{dv}{1 + \frac{v}{n}}$$

$\left(\text{substituce } t = 1 + \frac{v}{n}\right)$, takže vyjde

$$\lg a_n = \int_0^1 \frac{dv}{1 + \frac{v}{n}}, \quad \lg b_n = \int_0^1 \frac{n+1}{n+v}\, dv = \int_0^1 \left(1 + \frac{1-v}{n+v}\right) dv;$$

integrovaná funkce se v prvním případě zvětší, zvětším-li n (vyjma pro $v = 0$), v druhém případě se zmenší (vyjma pro $v = 1$); nato užiji poznámky 2 v kap. II, § 5.

[19]) To plyne už z cvičení 1.

§ 3. Funkce arctg x, tg x. Pokračujme nyní v otázce, k jakým novým funkcím nás vede integrace racionálních funkcí. Dovedeme-li rozložit zlomek $P(x) : Q(x)$ (P, Q mnohočleny) na částečné zlomky podle věty 59,[20]) redukuje se výpočet integrálu funkce $P : Q$ na výpočet integrálů tvaru (viz kap. IV, § 3)

$$\int x^m \, \mathrm{d}x \ (m \geqq 0 \text{ celé}), \quad \int \frac{\mathrm{d}x}{(x-\alpha)^m} \ (m > 0 \text{ celé}),$$

$$\int \frac{Ax + B}{(x^2 + px + q)^m} \, \mathrm{d}x \ (m > 0 \text{ celé}, \ \tfrac{1}{4}p^2 - q < 0).$$

První integrál vede k mocnině, druhý k mocnině a logaritmu (substitucí $x - \alpha = t$ přechází v integrál $\int t^{-m} \, \mathrm{d}t$). Třetí integrál se dá substitucí $x + \frac{1}{2}p = \sqrt{q - \frac{1}{4}p^2} \, . \, t$ (odmocnina nám nevadí, tu známe již z § 2) převést na $\int \frac{Ht + K}{(t^2+1)^m} \, \mathrm{d}t$; substituce $t^2 + 1 = u$ dává

$$\int \frac{t \, \mathrm{d}t}{(t^2+1)^m} = \frac{1}{2} \int \frac{\mathrm{d}u}{u^m}$$

(tedy zase mocnina nebo logaritmus): zbývá tedy integrál $\int \frac{\mathrm{d}t}{(t^2+1)^m}$, jenž se rekurentní formulí (viz kap. III, § 3, příkl. 5) dá převést na integrál

$$\int \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 1}. \tag{31}$$

Vedle integrálů známých z § 2 máme tedy již jen integrál (31). Z nekonečně mnoha primitivních funkcí k funkci $(x^2 + 1)^{-1}$ si vyberme tu, která pro $x = 0$ nabývá hodnoty 0; tuto funkci označme arctg x; definujeme tedy

$$\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + 1} \text{ pro každé reálné } x. \tag{32}$$

To je tedy nová funkce, jejíž vlastnosti budeme vyšetřovat.[21])

---

[20]) To znamená v podstatě: dovedeme-li řešit rovnici $Q(x) = 0$. To může být úloha početně i zásadně obtížná, patří však do algebry, a my se jí zde nebudeme zabývat.

[21]) Je to skutečně „nová" funkce? Nedá se z racionálních funkcí a funkcí lg x, e^x, x^a vytvořit čtyřmi základními výkony početními a tvořením složených funkcí, jako např. funkce

$$\lg\left(\lg\left(e^{\sqrt{x}} + \frac{x^{\sqrt{x}}}{\lg(x+1)}\right)\right)?$$

Tuto otázku nebudeme řešit: my integrál (32) v tomto tvaru vyjádřit nedovedeme a proto jsme jej označili novým znakem. Čtenář, který zná logaritmus komplexního čísla, možná namítne, že funkci arctg x lze vyjádřit logaritmem komplexního čísla; ale my jsme v § 2 zavedli pouze logaritmus kladného čísla; nahlédneme-li do definice logaritmu komplexního čísla, vidíme ihned, že rozšíření definice logaritmu na imaginární čísla je v podstatě totéž jako zavedení funkce arctg x (nebo některé funkce příbuzné) pro reálné x.

Substituce $t = -u$ dává $\int_0^{-x} \frac{dt}{t^2+1} = -\int_0^x \frac{du}{u^2+1}$, tj.

$$\arctg(-x) = -\arctg x. \tag{33}$$

Podle (32) je dále

$$(\arctg x)' = \frac{1}{x^2+1} > 0, \tag{34}$$

takže funkce (32) je rostoucí v $(-\infty, +\infty)$. Ježto $\arctg 0 = 0$, je tato funkce kladná pro $x > 0$, záporná pro $x < 0$. Dále stačí, omezíme-li se na hodnoty $x \geqq 0$; pro záporná x užijeme pak rovnice (33). Tvrdím, že funkce (32) jest omezená v $\langle 0, +\infty)$. Neboť pro $0 \leqq x \leqq 1$ je $\arctg x \leqq \int_0^x dt = x \leqq 1$, pro $x > 1$ jest pak $\arctg x = \int_0^1 + \int_1^x \frac{dt}{1+t^2} \leqq \int_0^1 dt + \int_1^x t^{-2}\, dt = 1 + 1 - x^{-1} < 2$; tedy celkem $0 \leqq \arctg x < 2$ pro $x \geqq 0$. Supremum funkce $\arctg x$ v intervalu $\langle 0, +\infty)$ označme $\frac{1}{2}\varrho$; jest $\varrho > 0$, neboť funkce (32) nabývá v uvedeném intervalu kladných hodnot. Pro každé $x \geqq 0$ jest $\arctg x \leqq \frac{1}{2}\varrho$, ba dokonce $\arctg x < \frac{1}{2}\varrho$; neboť kdyby pro nějakou hodnotu x_0 bylo $\arctg x_0 = \frac{1}{2}\varrho$, bylo by $\arctg x > \frac{1}{2}\varrho$ pro $x > x_0$, což není možno. Funkce $\arctg x$ zobrazuje tedy interval $\langle 0, +\infty)$ na jistý interval J, jehož infimum je 0, supremum $\frac{1}{2}\varrho$; mimoto je $\arctg 0 = 0$, ale nikdy není $\arctg x = \frac{1}{2}\varrho$; tedy jest $J = \langle 0, \frac{1}{2}\varrho)$. Z (33) je pak patrno, že funkce $\arctg x$ zobrazuje $(-\infty, 0\rangle$ na $(-\frac{1}{2}\varrho, 0\rangle$. Tedy celkem: Funkce $\arctg x$ je spojitá a rostoucí v intervalu $(-\infty, +\infty)$ a zobrazuje tento interval na jistý omezený interval $(-\frac{1}{2}\varrho, \frac{1}{2}\varrho)$ $(\varrho > 0)$.

Funkce inverzní k funkci $\arctg x$ – označme ji $\operatorname{tg} x$ – je tedy spojitá a rostoucí funkce v intervalu $(-\frac{1}{2}\varrho, \frac{1}{2}\varrho)$[22]) a zobrazuje tento interval na interval $(-\infty, +\infty)$. Rovnice $y = \operatorname{tg} x$ $(-\frac{1}{2}\varrho < x < \frac{1}{2}\varrho)$ značí tedy totéž jako $x = \arctg y$. Tedy jest $\operatorname{tg} 0 = 0$; označíme-li $\operatorname{tg} x = y$, jest $x = \arctg y$, tedy $-x = -\arctg y = \arctg(-y)$, tedy $-y = \operatorname{tg}(-x)$, tj.

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x. \tag{35}$$

Derivaci funkce $\operatorname{tg} x$ obdržíme podle pravidla o derivování inverzních funkcí takto: položme $\operatorname{tg} x = y$; potom jest

$$\frac{d}{dx}\operatorname{tg} x = \frac{1}{\dfrac{d}{dy}\arctg y} = 1 + y^2 = 1 + \operatorname{tg}^2 x \text{ pro } -\tfrac{1}{2}\varrho < x < \tfrac{1}{2}\varrho. \tag{36}$$

Uveďme ještě tyto rovnice:

$$\lim_{x\to+\infty} \arctg x = \tfrac{1}{2}\varrho, \qquad \lim_{x\to-\infty} \arctg x = -\tfrac{1}{2}\varrho,^{23})$$

$$\lim_{x\to\varrho/2-} \operatorname{tg} x = +\infty, \qquad \lim_{x\to-\varrho/2+} \operatorname{tg} x = -\infty. \tag{37}$$

---

[22]) Dosud je tedy funkce $\operatorname{tg} x$ definována pouze v intervalu $(-\frac{1}{2}\varrho, \frac{1}{2}\varrho)$.

[23]) Čtenář již uhodl, že ϱ je známé Ludolfovo číslo. Nezavedl jsem znak π, aby nenastalo nedorozumění v § 4, kde číslo π zavedu jiným způsobem (načež ovšem dokáži rovnost $\varrho = \pi$).

Důkaz první rovnice: Budiž $\varepsilon > 0$; existuje x_0 tak, že $\operatorname{arctg} x_0 > \frac{1}{2}\varrho - \varepsilon$, načež pro $x > x_0$ jest $\frac{1}{2}\varrho - \varepsilon < \operatorname{arctg} x < \frac{1}{2}\varrho$. Druhá rovnice plyne pak z (33). Důkaz třetí rovnice: Budiž $K > 0$; existuje x_0 tak, že $-\frac{1}{2}\varrho < x_0 < \frac{1}{2}\varrho$, $\operatorname{tg} x_0 > K$, načež pro $x_0 < x < \frac{1}{2}\varrho$ jest $\operatorname{tg} x > K$. Čtvrtá rovnice plyne pak z (35).

Z funkce $\operatorname{tg} x$ bychom snadno mohli přejít k funkcím $\sin x$, $\cos x$, kdybychom definovali

$$(38) \qquad \cos x = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x}},\text{[24]} \ \sin x = \operatorname{tg} x \,.\, \cos x \quad \text{pro} \quad -\tfrac{1}{2}\varrho < x < \tfrac{1}{2}\varrho\,.$$

Kdybychom pak definovali $\cos x$, $\sin x$ vhodným způsobem i pro ostatní hodnoty x, mohli bychom vybudovat úplnou teorii funkcí goniometrických a cyklometrických. Ježto však definice (38) je trochu násilná (kdybychom odjinud neznali rovnice (38) a důležitost funkcí $\sin x$, $\cos x$, sotva by nás napadlo definovat tyto funkce rovnicemi (38)), nebudu to zde provádět [25] a vyložím v § 4 ještě jiný způsob, jak lze dospět k teorii funkcí goniometrických a cyklometrických. Zde jsem chtěl jenom doplnit výklady § 2 a ukázat, jak integrace racionálních funkcí vede k zavedení nových funkcí, totiž funkcí (1) (v § 2) a funkcí (2), (3) (v § 3). Že funkce $\operatorname{arctg} x$ zavedená v tomto paragrafu je totožná s funkcí definovanou v **DI** (a označenou tam týmž symbolem), je jasné: obě tyto funkce mají touž derivaci $1 : (1 + x^2)$ (viz (34)), liší se tedy pouze o konstantu, a tato konstanta je rovna nule, neboť obě tyto funkce pro $x = 0$ nabývají hodnoty 0 (viz (32)).

Cvičení

1. Funkce $\dfrac{1}{1 + x^2}$ není v žádném intervalu derivací racionální funkce (tj. funkce $\operatorname{arctg} x$ není v žádném intervalu rovna nějaké racionální funkci). Návod: Nechť v jistém intervalu $\dfrac{1}{1 + x^2} = \left(\dfrac{P}{Q}\right)' = \dfrac{P'Q - PQ'}{Q^2}$, kde P, Q jsou polynomy.[26] Rozložím P, Q ve smyslu věty F) v kap. IV, § 1 a zkrátím zlomek $P : Q$. Budiž $(1 + x^2)^k$ nejvyšší mocnina $1 + x^2$ obsažená v Q. Z rovnice $Q^2 = (1 + x^2)(P'Q - PQ')$ plyne, že nutně $k > 0$. Tedy P neobsahuje činitele $x^2 + 1$ a snadno zjistíte, že pravá strana poslední rovnice obsahuje $1 + x^2$ právě v mocnině k-té, kdežto levá v $2k$-té, což je spor, ježto $k > 0$, a tedy $2k \neq k$.

2. Podobným způsobem ukažte obecněji: Budiž $P_1 : Q_1$ racionální funkce, jež je v jistém intervalu derivací nějaké racionální funkce; přitom nechť P_1, Q_1 nemají společné kořeny. Potom Q_1 nemá jednoduchých kořenů. Odtud plyne výsledek cvičení 1 i obdobný výsledek o logaritmu z § 2.

---

[24]) Takže rovnice (36) nabývá obvyklého tvaru $(\operatorname{tg} x)' = (\cos x)^{-2}$.

[25]) Vrátím se však k tomu v cvičení 1 k § 4.

[26]) Myslím stále ovšem reálné racionální funkce a reálné polynomy. Pro ty, kdo dovedou derivovat komplexní funkce reálné proměnné (viz kap. X, § 1), poznamenávám: To není žádné omezení obecnosti; má-li komplexní racionální funkce R v nějakém intervalu derivaci $(1 + x^2)^{-1}$, rozložím $R = R_1 + iR_2$, kde R_1, R_2 jsou reálné racionální funkce, načež $R_1' = (1 + x^2)^{-1}$, $R_2' = 0$ (takže R_2 je konstanta).

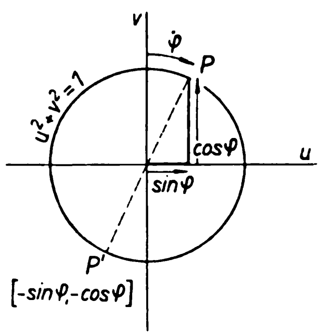
3. Je $\operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}$, $\operatorname{arctg} y = \int_0^y \frac{dt}{1+t^2}$.

Chceme nahradit druhý integrál podobným, kde však dolní mez je x. K tomu cíli zavedeme substituci $t = \frac{au+b}{cu+d}$ tak, aby bylo $ax + b = 0$, $\frac{dt}{1+t^2} = \frac{du}{1+u^2}$. Nesmí být $a = 0$, ježto potom by bylo i $b = 0$; můžeme tedy bez újmy obecnosti klást $a = 1$, $b = -x$, načež druhá rovnice po provedení výpočtu dává $t = \frac{u-x}{ux+1}$; odtud $u = \frac{t+x}{1-tx}$. Je-li $xy < 1$, má poslední zlomek význam pro všechna t mezi nulou a y, načež provedení substituce dává

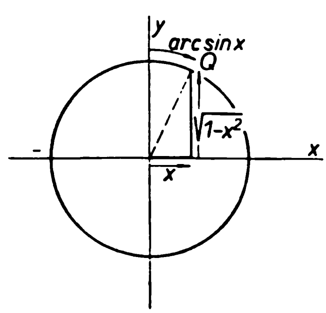
$$\operatorname{arctg} y = \int_x^{(x+y)/(1-xy)} \frac{du}{1+u^2}, \quad \text{tedy } \operatorname{arctg} x + \operatorname{arctg} y = \operatorname{arctg} \frac{x+y}{1-xy},$$

pokud $xy < 1$. Srovnej **DI** kap. VII, § 2, cvičení 8. Lze tedy tento „aditivní teorém" pro funkci $\operatorname{arctg} x$ odvodit přímo z integrálního vyjádření této funkce, bez použití vlastností inverzní funkce $\operatorname{tg} x$ (jak jsme to učinili v **DI**).

§ 4. Jiný způsob zavedení funkcí goniometrických a cyklometrických. Způsob, kterým jsme v § 3 zavedli funkce $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{tg} x$, byl zcela přirozený, ale naznačený přechod k funkcím $\sin x$, $\cos x$ rovnicemi (38) by byl snad trochu násilný. Je poučno zavést goniometrické a cyklometrické funkce ještě jiným způsobem, a to v podstatě tak, jak se to dělá v geometrii: to provedeme v tomto paragrafu. Škrtneme tedy § 3 a budeme se opírat pouze o výsledky § 2[27]) (a ovšem o obecné věty uvedené v § 1



Obr. 15.



Obr. 16.

v bodech **A**), **B**)). Načrtněme si známý obrázek. (Viz obr. 15 — osy značím u, v, abych měl znaky x, y volné; čtenáři jistě nevadí, že osy jsou proti obr. 21 v **DI** vyměněny; ostatně mají obrázky jen orientační význam.) Vidíme, že se musíme napřed zabývat délkou oblouku jednotkové kružnice, abychom dovedli oblouk dané délky „nanést" od bodu $[0, 1]$. Nakresleme tedy ještě jeden obrázek, kde vyjdeme od dané abscisy x bodu Q, délku příslušného oblouku pak označme znakem $\arcsin x$, přičemž

[27]) Z funkcí zavedených v § 2 budeme dokonce potřebovat jen druhou odmocninu.

se smluvíme, že pro záporná x opatříme délku tohoto oblouku znamením minus, pro $x = 0$ pak klademe (jak je přirozeno) $\arcsin 0 = 0$. Přidržíme-li se označení pro délku oblouku, užitého v kap. V, § 2, můžeme říci: Definujme funkci $\arcsin x$ v intervalu $\langle -1, 1\rangle$ těmito rovnicemi:[28])

$$\left\{\begin{array}{ll} \arcsin x = L(0, x) & \text{pro} \quad 0 < x \leqq 1 \\ \arcsin 0 = 0 & \\ \arcsin x = -L(x, 0) & \text{pro} \quad -1 \leqq x < 0\,, \end{array}\right. \tag{39}$$

jestliže ovšem příslušný oblouk má konečnou délku. Ježto pro $y = \sqrt{1 - x^2}$ [29]) ihned najdete $\sqrt{1 + y'^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$ (jestliže $|x| < 1$), je podle věty 60

$$L(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - t^2}} \quad \text{pro} \quad -1 < \alpha < \beta < 1\,, \tag{40}$$

takže definice (39) dává ihned[30])

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - t^2}} \quad \text{pro} \quad |x| < 1\,. \tag{41}$$

Poznamenejme, že substituce $t = -v$ dává ihned

$$\int_0^{-x} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1 - t^2}} = -\int_0^x \frac{\mathrm{d}v}{\sqrt{1 - v^2}}\,,$$

tj.

$$\arcsin(-x) = -\arcsin x \quad \text{pro} \quad |x| < 1\,, \tag{42}$$

a že podle (41) jest

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} > 0 \quad \text{pro} \quad |x| < 1\,. \tag{43}$$

Chceme ještě dokázat, že rovnicemi (39) je $\arcsin x$ definován též pro $x = \pm 1$, tj. že existují konečné délky $L(0, 1)$, $L(-1, 0)$. K tomu cíli stačí podle poznámky 1 v kap. V, § 3 ukázat, že existují vlastní limity

$$\lim_{x \to 1-} \arcsin x = \lim_{x \to 1-} L(0, x)\,, \qquad \lim_{x \to -1+} \arcsin x = -\lim_{x \to -1+} L(x, 0)\,, \tag{44}$$

[28]) Píši stručněji $L(a, b)$ místo $L(a, b, \sqrt{1 - x^2})$.

[29]) Odmocnina nám nevadí, tu známe již z § 2.

[30]) V případě $x < 0$ užiji toho, že $-\int_x^0 = \int_0^x$.

načež čísla $\arcsin 1 = L(0, 1)$, $\arcsin(-1) = -L(-1, 0)$ se rovnají těmto limitám.[31]) Vzhledem k (42) stačí vyšetřovat první z limit (44); druhá se prostě dostane změnou znamení. Důkaz provedeme takto: Pro $0 \leqq t < 1$ jest

$$0 < \frac{1}{\sqrt{1-t^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-t}\,.\,\sqrt{1+t}} \leqq \frac{1}{\sqrt{1-t}}$$

a tedy

$$0 \leqq \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}} \leqq \int_0^x \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}} = -2\left[\sqrt{1-t}\right]_0^x = 2 - 2\sqrt{1-x} < 2$$

pro $0 \leqq x < 1$ (primitivní funkce k $(1-t)^{-1/2}$ je vskutku $-2(1-t)^{1/2}$, jak plyne ze vzorce (27a) v § 2). Funkce $\arcsin x$ je tedy omezená v $\langle 0, 1)$; supremum této funkce v tomto intervalu označme $\frac{1}{2}\pi$; tím je tedy definováno jisté číslo π.[32]) Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje (podle definice suprema) číslo x_0 $(0 \leqq x_0 < 1)$ tak, že jest $\arcsin x_0 > \frac{1}{2}\pi - \varepsilon$. Ježto $\arcsin x$ je podle (43) rostoucí v $\langle 0, 1)$, platí pro $x_0 < x < 1$ nerovnost $\frac{1}{2}\pi - \varepsilon < \arcsin x \leqq \frac{1}{2}\pi$ a tedy jest $\lim\limits_{x \to 1-} \arcsin x = \frac{1}{2}\pi$. Podle toho, co jsme k rovnicím (44) řekli, má definice (39) smysl i pro $x = \pm 1$ a dává

$$\arcsin 1 = L(0, 1) = \tfrac{1}{2}\pi\,, \quad \arcsin(-1) = -L(-1, 0) = -\tfrac{1}{2}\pi\,. \tag{45}$$

Zároveň je zřejmý geometrický význam čísla π: délka „čtvrtkružnice“ $0 \leqq x \leqq 1$, $y = \sqrt{1-x^2}$ je rovna $\frac{1}{2}\pi$.

Rovnicemi (39) je tedy definována funkce $\arcsin x$ v oboru $\langle -1, 1\rangle$; je to funkce spojitá v $\langle -1, 1\rangle$, jež má ve vnitřních bodech tohoto intervalu kladnou derivaci (43); tedy je podle věty 135 v **DI**, str. 247, v 4. vyd. str. 283 rostoucí v $\langle -1, 1\rangle$; podle (45) zobrazuje pak funkce $\arcsin x$ interval $\langle -1, 1\rangle$ na interval $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$.[33])

K funkci $\arcsin x$ tedy existuje inverzní funkce, kterou označme $\sin x$; je to funkce rostoucí a spojitá v $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$, zobrazující tento interval na interval $\langle -1, 1\rangle$. Rovnice $y = \sin x$ je pro $-\frac{1}{2}\pi \leqq x \leqq \frac{1}{2}\pi$ splněna tehdy a jen tehdy, je-li $x = \arcsin y$.[34]) Jsouce vedeni obrazcem 15, zaveďme v intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$ ještě jednu funkci $\cos x$ rovnicí

$$\cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x} \quad \text{pro} \quad -\tfrac{1}{2}\pi \leqq x \leqq \tfrac{1}{2}\pi \tag{46}$$[35])

---

[31]) V tomto případě bude tedy funkce $\arcsin x$ spojitá zleva v bodě 1 a zprava v bodě -1, tedy spojitá v $\langle -1, 1\rangle$ (neboť ve vnitřních bodech intervalu plyne spojitost z existence derivace (43)).

[32]) Funkce $\arcsin x$ je rovna 0 pro $x = 0$ a podle (43) je rostoucí v $(-1, +1)$, tedy je kladná pro $0 < x < 1$. Tedy je její supremum v $\langle 0, 1)$ kladné, tj. $\pi > 0$.

[33]) Neboť její nejmenší a největší hodnota jsou podle (45) $-\frac{1}{2}\pi$, $\frac{1}{2}\pi$. Z (45) zároveň plyne, že (42) platí i pro $x = \pm 1$, tedy v celém intervalu $\langle -1, 1\rangle$.

[34]) Prozatím je tedy $\sin x$ funkce v oboru $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$; za chvíli její definici rozšíříme na všechna x.

[35]) To lze, ježto hodnoty funkce $\sin x$ leží vesměs v intervalu $\langle -1, 1\rangle$.

(ostatně bychom k této funkci byli přivedeni za chvilku, při počítání derivace funkce $\sin x$). Studujme trochu vlastnosti funkcí $\sin x$, $\cos x$. Jsou to funkce spojité v $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$. Je-li x číslo tohoto intervalu, položme $y = \sin x$, tj. $x = \arcsin y$; potom jest (viz pozn.[33])) $-x = \arcsin(-y)$, tj. $-y = \sin(-x)$, tedy

(47) $$\sin(-x) = -\sin x \quad \text{pro} \quad -\tfrac{1}{2}\pi \leqq x \leqq \tfrac{1}{2}\pi\,,$$

načež z (46) plyne

(48) $$\cos(-x) = \cos x \quad \text{pro} \quad -\tfrac{1}{2}\pi \leqq x \leqq \tfrac{1}{2}\pi\,.$$

Jest $\sin(-\frac{1}{2}\pi) = -1$, $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$. Roste-li x od $-\frac{1}{2}\pi$ do 0, roste $\sin x$ od -1 do 0, takže podle (46) $\cos x$ roste od 0 do 1; roste-li x od 0 do $\frac{1}{2}\pi$, roste $\sin x$ od 0 do 1, takže $\cos x$ klesá od 1 do 0. Jest

(49) $$\cos(-\tfrac{1}{2}\pi) = \cos\tfrac{1}{2}\pi = 0\,, \quad \cos 0 = 1\,.$$

Počítejme derivaci funkce $\sin x$. Budiž $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$ a položme $y = \sin x$, takže $-1 < y < 1$. Věta o derivování inverzních funkcí dává podle (43)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = \frac{1}{\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\arcsin y} = \sqrt{1 - y^2} = \sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x\,,$$

načež podle (46)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = \frac{-\sin x}{\sqrt{1 - \sin^2 x}}\,.\,\cos x = -\sin x\,.$$

Tedy celkem máme pro $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$

(50) $$(\sin x)' = \cos x\,, \quad (\cos x)' = -\sin x\,.$$

Rozšíříme nyní definici funkcí $\sin x$, $\cos x$ tak, aby byly definovány v intervalu $(-\infty, +\infty)$. Pohlédneme-li na body P, P' na obr. 15, zdá se nám účelným provést toto rozšíření tak, aby pro všechna x platily rovnice

(51) $$\sin(x + \pi) = -\sin x\,, \quad \cos(x + \pi) = -\cos x\,.$$

Abychom toto rozšíření provedli, postupujeme takto: ke každému číslu x existuje jedno a jen jedno celé číslo k tak, že $-\frac{1}{2}\pi + k\pi < x \leqq -\frac{1}{2}\pi + (k + 1)\pi$, načež $-\frac{1}{2}\pi < x - k\pi \leqq \frac{1}{2}\pi$, takže $\sin(x - k\pi)$, $\cos(x - k\pi)$ jsou definovány. Definujeme pak dvě funkce $f(x)$, $g(x)$ rovnicemi

(52) $$f(x) = (-1)^k \sin(x - k\pi)\,, \quad g(x) = (-1)^k \cos(x - k\pi)\,.$$[36])

[36]) Jsou to tedy funkce v oboru $(-\infty, +\infty)$.

Leží-li x v intervalu $(-\frac{1}{2}\pi + k\pi, -\frac{1}{2}\pi + (k+1)\pi\rangle$, leží $x + \pi$ v intervalu $(-\frac{1}{2}\pi + (k+1)\pi, -\frac{1}{2}\pi + (k+2)\pi\rangle$, a podle definice (52) je tedy $f(x+\pi) = (-1)^{k+1} \,.\, \sin(x + \pi - (k+1)\pi) = (-1)^{k+1} \sin(x - k\pi) = -f(x)$, a obdobně $g(x + \pi) = -g(x)$. Tyto rovnice platí tedy pro každé x. Pro $-\frac{1}{2}\pi < x \leqq \frac{1}{2}\pi$ jest $k = 0$ a tedy podle (52) $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$; pro $x = -\frac{1}{2}\pi$ pak jest $k = -1$ a tedy podle (52) $f(-\frac{1}{2}\pi) = -\sin\frac{1}{2}\pi = -1 = \sin(-\frac{1}{2}\pi)$, $g(-\frac{1}{2}\pi) = -\cos\frac{1}{2}\pi = 0 = \cos(-\frac{1}{2}\pi)$. Pro $-\frac{1}{2}\pi \leqq x \leqq \frac{1}{2}\pi$ je tedy $f(x) = \sin x$, $g(x) = \cos x$. Nedojde tedy k nedorozumění, označím-li funkce $f(x)$, $g(x)$ znaky $\sin x$, $\cos x$ pro *všechna* x. Tím jsme rozšířili obor funkcí $\sin x$, $\cos x$ na interval $(-\infty, +\infty)$ a rovnice $f(x+\pi) = -f(x)$, $g(x+\pi) = -g(x)$ lze psát nyní ve tvaru (51). Prosím čtenáře za prominutí, že jsem tuto maličkost probíral tak podrobně; šlo mně o to, aby čtenáři neušla žádná podrobnost nutná k přesnému provedení této úvahy.

Píši-li v rovnicích (51) $x - \pi$ místo x, lze je psát ve tvaru $\sin(x - \pi) = -\sin x$, $\cos(x - \pi) = -\cos x$; odtud a z (51) ihned úplnou indukcí plyne

$$\sin(x + k\pi) = (-1)^k \sin x, \quad \cos(x + k\pi) = (-1)^k \cos x \quad \text{pro každé celé } k. \tag{53}$$

Body $\pm\frac{1}{2}\pi, \pm\frac{3}{2}\pi, \pm\frac{5}{2}\pi, \ldots$ rozdělují interval $(-\infty, +\infty)$ na intervaly délky π. Tvrdím nyní: v každém intervalu $J_k = \langle -\frac{1}{2}\pi + k\pi, -\frac{1}{2}\pi + (k+1)\pi\rangle$ (k celé) jsou funkce $\sin x$, $\cos x$ spojité. Důkaz: Jest $\sin x = (-1)^k \sin(x - k\pi)$; probíhá-li x interval J_k, leží hodnoty spojité funkce $x - k\pi$ v intervalu $J_0 = \langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$ a v intervalu J_0 je funkce $\sin y$ spojitá. Podle věty 5 (v kap. I) je tedy funkce $\sin(x - k\pi)$ a tedy i funkce $(-1)^k \sin(x - k\pi)$ spojitá v J_k. Pro $\cos x$ je důkaz týž. Odtud je patrno, že funkce $\sin x$, $\cos x$ jsou spojité v $(-\infty, +\infty)$.[37]) Vyšetřujme ještě derivaci funkcí $\sin x$, $\cos x$. Je-li bod x uvnitř některého intervalu J_k, užijme rovnice $\sin x = (-1)^k \sin(x - k\pi)$. Bod $x - k\pi$ leží v *otevřeném* intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$; ježto vzorec (50) platí v tomto intervalu, máme podle pravidla o derivování složených funkcí a podle (53)

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin x = (-1)^k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\sin(x - k\pi) = (-1)^k \cos(x - k\pi) = \cos x$$

a obdobně

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos x = (-1)^k \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\cos(x - k\pi) = -(-1)^k \sin(x - k\pi) = -\sin x\,,$$

tj. vzorce (50) platí pro všechna x, vyjma snad pro čísla tvaru $\frac{1}{2}\pi + k\pi$ (k celé). Budiž konečně $x_0 = \frac{1}{2}\pi + k\pi$ (k celé). Je-li $0 < |x - x_0| < \pi$ a značí-li K uzavřený interval

[37]) Spojitost těchto funkcí v každém bodě, ležícím *uvnitř* některého intervalu J_k, je zřejmá. Zbývají body tvaru $c = -\frac{1}{2}\pi + k\pi$ (k celé). Takový bod c je počátečním bodem intervalu J_k, takže naše funkce jsou v něm spojité zprava; současně je však bod c koncovým bodem intervalu J_{k-1}, takže naše funkce jsou v něm spojité zleva.

o krajních bodech x_0, x, jsou funkce $\sin x$, $\cos x$ spojité v K a mají derivace (50) v každém vnitřním bodě tohoto intervalu. Podle věty o přírůstku funkce je tedy

$$
\begin{aligned}
&\frac{\sin x - \sin x_0}{x - x_0} = (\sin x)'_{x=\xi_1} = \cos \xi_1 \,, \\
(54) \qquad &\frac{\cos x - \cos x_0}{x - x_0} = (\cos x)'_{x=\xi_2} = -\sin \xi_2 \,,
\end{aligned}
$$

přičemž čísla ξ_1, ξ_2 leží mezi x_0, x. Ježto funkce $\sin x$, $\cos x$ jsou spojité v bodě x_0, mají pravé (a tedy i levé) strany v (54) pro $x \to x_0$ limitu $\cos x_0$, popř. $-\sin x_0$, takže existují derivace $(\sin x)'_{x=x_0} = \cos x_0$, $(\cos x)'_{x=x_0} = -\sin x_0$; tj. vzorce (50) platí pro *všechna x vůbec*.

Budiž nyní y libovolné číslo a vyšetřujme tuto funkci proměnné x:

$$
\begin{aligned}
F(x) = (\sin(x + y) - \sin x \cos y - \cos x \sin y)^2 + \\
+ (\cos(x + y) - \cos x \cos y + \sin x \sin y)^2 \,.
\end{aligned}
$$

Derivace této funkce jest

$$
\begin{aligned}
2(\sin(x + y) - \sin x \cos y - \cos x \sin y)(\cos(x + y) - \cos x \cos y + \\
+ \sin x \sin y) + 2(\cos(x + y) - \cos x \cos y + \sin x \sin y) \,. \\
.\,(-\sin(x + y) + \sin x \cos y + \cos x \sin y) = 0
\end{aligned}
$$

(první závorka se až na znamení rovná čtvrté, druhá se rovná třetí). Funkce $F(x)$ je tedy konstantní v $(-\infty, +\infty)$; dosadíme-li $x = 0$ (tedy $\sin x = 0$, $\cos x = 1$), vidíme, že $F(0) = 0$, takže $F(x) = 0$ pro všechna x. Ježto $F(x)$ je součtem dvou druhých mocnin (tedy čísel nezáporných), musí každý sčítanec sám o sobě být roven nule. Tedy je pro všechna x, y

$$
(55) \qquad
\begin{aligned}
\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y \,, \\
\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y \,.
\end{aligned}
$$

Budiž dále x libovolné číslo a zvolme celé k tak, že $-\frac{1}{2}\pi \leqq x + k\pi \leqq \frac{1}{2}\pi$; můžeme tedy užít vzorce (47), jenž dává $\sin(-x - k\pi) = -\sin(x + k\pi)$, tj. (viz (53)) $(-1)^k \sin(-x) = -(-1)^k \sin x$, tj. $\sin(-x) = -\sin x$; obdobně pro $\cos x$. Rovnice (47), (48) platí tedy pro *všechna x*. Naše funkce $\sin x$, $\cos x$ mají tedy — mimo jiné — tyto čtyři vlastnosti:

1. Jsou definovány pro všechna x.

2. Pro libovolná x, y platí (47), (48), (55).

3. Existuje kladné číslo π tak, že $\sin x$ je rostoucí v $\langle 0, \frac{1}{2}\pi \rangle$ a že $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$; mimoto je $\sin 0 = 0$.

4. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - \sin 0}{x - 0} = (\sin x)'_{x=0} = \cos 0 = 1 \,.$

Funkce $\sin x, \cos x$ mají tedy čtyři základní vlastnosti z **DI**, kap. VI, § 1; v **DI** jsme pak zjistili, jak lze z těchto čtyř základních vlastností odvodit další; to ovšem nebudu opakovat. Odvoďme jenom Maclaurinovu řadu pro funkce $\sin x$, $\cos x$. Opětovným užitím rovnic (50) obdržíme $(\sin x)^{(4k)} = \sin x$, $(\sin x)^{(4k+1)} = \cos x$, $(\sin x)^{(4k+2)} = -\sin x$, $(\sin x)^{(4k+3)} = -\cos x$ pro každé celé $k \geqq 0$; pro $x = 0$ jsou tyto hodnoty po řadě 0, 1, 0, -1. Maclaurinův vzorec dává tedy pro každé x

(56) $$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots \pm \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + R_n ,$$

kde

$$|R_n| = \left|\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}\cos \Theta x\right| \leqq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}.^{38})$$

Tedy je $\lim_{n\to\infty} R_n = 0$[39]) a z (56) plyne limitním přechodem $n \to \infty$ pro každé x rovnice $\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$ Podobně odvodíte rovnici $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots$

Naše funkce $\sin x$, $\cos x$ jsou tedy vskutku totožné s těmi, které jsme zavedli v **DI**. Rovněž číslo π, určené vlastností 3 (číslo $\frac{1}{2}\pi$ je nejmenší kladné číslo x, pro něž $\sin x = 1$), je tedy totožné s číslem π zavedeným v **DI** (viz vlastnost 3 v **DI**, str. 189, v 4. vyd. str. 212). Také naše funkce $\arcsin x$ z tohoto paragrafu je totožná s funkcí $\arcsin x$ z **DI**; neboť v obou případech jde o funkci inverzní k funkci $\sin x$ v intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$ (viz jednak dva odstavce následující za vzorcem (45), jednak větu 115 v **DI** str. 202, v 4. vyd. str. 229).

Poznámka 1. Způsob, kterým jsme v tomto paragrafu zavedli goniometrické funkce, dává nám zároveň jejich geometrický význam, aspoň pro $-\frac{1}{2}\pi \leqq x \leqq \frac{1}{2}\pi$; řekněme to stručně. Roste-li y od 0 do 1, roste funkce $\arcsin y = L(0, y)$ od 0 do $\frac{1}{2}\pi$, takže tato funkce zobrazuje interval $(0, 1\rangle$ na $(0, \frac{1}{2}\pi\rangle$. Ke každému číslu x intervalu $(0, \frac{1}{2}\pi\rangle$ existuje tedy v intervalu $(0, 1\rangle$ právě *jedno* číslo y tak, že $\arcsin y = L(0, y) = x$; toto číslo y označíme $\sin x$; je to abscisa onoho bodu P na čtvrtkružnici $0 \leqq u \leqq 1$, $v = \sqrt{1 - u^2}$, jenž je koncovým bodem oblouku, který má počáteční bod $[0, 1]$ a délku x; ordináta bodu P jest $\sqrt{1 - \sin^2 x} = \cos x$ (viz k tomu obr. 15). Podobně je tomu pro $-\frac{1}{2}\pi \leqq x < 0$, až na to, že zde se oblouk délky $|x|$ nanáší na „levou" čtvrtkružnici $-1 \leqq u \leqq 0$, $v = \sqrt{1 - u^2}$. Je jistě zbytečné, abych o tom mluvil podrobněji.

[38]) Neboť pro $-\frac{1}{2}\pi \leqq x \leqq \frac{1}{2}\pi$ je největší hodnota funkce $\cos x$ rovna 1, nejmenší 0. Podle (53) pak jest $|\cos u| \leqq 1$ pro všechna u.

[39]) Existuje totiž (při daném x) přirozené číslo p tak, že $|x| < \frac{1}{2}p$. Potom jest pro $2n + 1 > p$

$$|R_n| \leqq \frac{\frac{1}{2}p}{1} \cdot \frac{\frac{1}{2}p}{2} \cdots \frac{\frac{1}{2}p}{p} \cdot \frac{\frac{1}{2}p}{p+1} \cdots \frac{\frac{1}{2}p}{2n+1} < (\tfrac{1}{2}p)^p \cdot (\tfrac{1}{2})^{2n+1-p} = p^p \cdot (\tfrac{1}{2})^{2n+1} ;$$

poslední výraz pak má pro $n \to \infty$ limitu 0.

Poznámka 2. Z druhé rovnice (55) plyne pro $y = -x$ vztah $\cos(x - x) = \cos x \cos(-x) - \sin x \sin(-x)$, tj. podle 2. základní vlastnosti

$$\cos^2 x + \sin^2 x = 1 . \tag{57}$$

Funkce $\cos x$ je různá od nuly v intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$, ale rovná nule pro $x = \pm\frac{1}{2}\pi$. Z (53) plyne, že jediné body, pro něž je $\cos x$ rovno nule, jsou body

$$x = \tfrac{1}{2}\pi + k\pi \ (k \text{ celé}) . \tag{58}$$

Funkce

$$F(x) = \frac{\sin x}{\cos x} \tag{59}$$

je tedy definována pro všechna x, vyjma pro hodnoty (58). Z vlastností (47), (48), (53) ihned plyne $F(-x) = -F(x)$, $F(x + \pi) = F(x)$. Dále jest [40]) (viz (50), (57))

$$F'(x) = \frac{\cos x \,.\, \cos x - \sin x \,.\, (-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x} > 0 . \tag{60}$$

Tedy je funkce $F(x)$ rostoucí a spojitá v $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ a obecněji v každém intervalu $(-\frac{1}{2}\pi + k\pi, \frac{1}{2}\pi + k\pi)$ (k celé). Dále jest

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}\pi -} F(x) = +\infty , \qquad \lim_{x \to -\frac{1}{2}\pi +} F(x) = -\infty . \tag{61}$$

Důkaz. Budiž $K > 0$. Ježto $\lim \sin x = \sin \frac{1}{2}\pi = 1$ (vynechávám znak $x \to \frac{1}{2}\pi -$), $\lim \cos x = \cos \frac{1}{2}\pi = 0$, $\cos x > 0$ pro $0 < x < \frac{1}{2}\pi$, existuje $\delta > 0$ tak, že pro $\frac{1}{2}\pi - \delta < x < \frac{1}{2}\pi$ jest $\sin x > \frac{1}{2}$, $0 < \cos x < \dfrac{1}{2K}$, tedy $F(x) > K$; tím je dokázána první rovnice (61), druhá pak plyne z rovnice $F(-x) = -F(x)$.

Spojitá rostoucí funkce F zobrazuje podle (61) interval $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ na interval, jenž není shora ani zdola omezen, tj. na interval $(-\infty, +\infty)$. K funkci $F(x)$ v intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$ existuje tedy inverzní funkce $G(x)$, jež je spojitá a rostoucí v $(-\infty, +\infty)$ a zobrazuje tento interval na $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$. Rovnice $y = G(x)$ značí pro $-\frac{1}{2}\pi < y < \frac{1}{2}\pi$ totéž jako $x = F(y)$; ježto $F(0) = 0$, je $G(0) = 0$. Dále: označím-li $G(x) = y$, je

$$G'(x) = \frac{1}{F'(y)} = \cos^2 y ;$$

ale

$$\cos^2 y = \frac{\cos^2 y}{\cos^2 y + \sin^2 y} = \frac{1}{1 + F^2(y)} = \frac{1}{1 + x^2}$$

[40]) Vylučuji ovšem hodnoty (58).

(neboť $G(x) = y$, tedy $x = F(y)$), takže

$$G'(x) = \frac{1}{1 + x^2}.$$

Funkce $G(x)$ je tedy ona primitivní funkce k funkci $(1 + x^2)^{-1}$, jež pro $x = 0$ má hodnotu 0, tj. $G(x) = \int_0^x \frac{dt}{1 + t^2}$, takže funkce $G(x)$ je totožná s funkcí $\operatorname{arctg} x$ zavedenou v § 3. Tato funkce zobrazuje interval $(-\infty, +\infty)$ na interval, jejž jsme v § 3 označili $(-\frac{1}{2}\varrho, \frac{1}{2}\varrho)$; z tohoto paragrafu však víme, že $G(x)$ zobrazuje interval $(-\infty, +\infty)$ na $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$; *tedy jest* $\varrho = \pi$. Inverzní funkci k funkci $G(x) = \operatorname{arctg} x$ jsme v § 3 označili $\operatorname{tg} x$; víme však, že tato inverzní funkce je právě naše funkce $F(x)$ (uvažovaná ovšem pouze v oboru $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$). Pro $-\frac{1}{2}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$ je $\operatorname{tg} x = F(x) = \sin x : \cos x$. Nemůže tedy nastat nedorozumění, rozšíříme-li definici funkce $\operatorname{tg} x$ na všechna x (s výjimkou hodnot (58)) rovnicí

$$\operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}.$$

Vlastnosti této funkce (59) jsme již do jisté míry studovali. V **DI**, kap. VI jsme ostatně vyložili, jak lze vlastnosti funkcí $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x = \cos x : \sin x$ odvodit z vlastností funkcí $\sin x$, $\cos x$.

Celým účelem této poznámky bylo ukázat, že funkce $\operatorname{tg} x$ zavedená v § 3 se dá vyjádřit obvyklým způsobem pomocí funkcí $\sin x$, $\cos x$ zavedených v § 4 a že číslo $\frac{1}{2}\varrho$ zavedené v § 3 je totožné s číslem $\frac{1}{2}\pi$ zavedeným obvyklým způsobem v § 4.

Poznámka 3. Otázka po oblouku kružnice nás vedla k nové funkci

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}}.^{41})$$

Obdobně: otázka po oblouku elipsy $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ [42]$\left(\text{tj. } y = \pm \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}\right)$ nás vede – vypočteme-li y'^2 – k další nové funkci

$$\int_0^x \sqrt{\frac{a^2 - \varepsilon^2 t^2}{a^2 - t^2}}\, dt$$

nebo (kladu-li $t = av$, $x = ay$) k funkci

$$(62) \qquad \varphi(y) = a \int_0^y \sqrt{\frac{1 - \varepsilon^2 v^2}{1 - v^2}}\, dv = a \int_0^y \frac{1 - \varepsilon^2 v^2}{\sqrt{(1 - v^2)(1 - \varepsilon^2 v^2)}}\, dv.$$

---

[41]) Tato funkce je „nová" pouze, jestliže jsme dosud nezavedli funkci $\operatorname{arctg} x$, neboť mezi oběma funkcemi je jednoduchý vztah; viz cvičení 2.

[42]) Předpokládám $0 < b \leqq a$ a kladu $\varepsilon = \sqrt{a^2 - b^2} : a$, tedy $0 \leqq \varepsilon < 1$.

K této funkci (která není obsažena mezi funkcemi vyšetřovanými v kap. IV, ježto pod odmocninou je mnohočlen *čtvrtého* stupně) jsme vedeni zcela obdobnou otázkou jako k funkci $\arcsin x$; pouze je tato funkce φ složitější – pochopitelně, neboť elipsa je složitější než kružnice; pro $a = 1$, $\varepsilon = 0$ (což odpovídá právě jednotkové kružnici) přechází ovšem funkce $\varphi(y)$ ve funkci $\arcsin y$. Integrálu (62) a integrálům příbuzným se podle jejich původu říká *eliptické integrály*; blíže viz o nich jednak v kap. XI, hlavně však v II. díle tohoto Integrálního počtu.

Cvičení

1. Soustavnou teorii funkcí goniometrických a cyklometrických jsme podali v § 4 vycházejíce od funkce $\arcsin x$; v § 3, kde jsme vyšli od funkce $\operatorname{arctg} x$, jsme ji pouze naznačili. Ukažte nyní, jak lze tuto teorii vybudovat též na základě úvah z § 3; přitom pišme π místo ϱ (nedorozumění je vyloučeno, ježto úvah z § 4 nebudeme užívat). Návod: Definici (38) doplňte též pro $x = \pm \frac{1}{2}\pi$ tak, aby funkce $\cos x$, $\sin x$ byly spojité v *uzavřeném* intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$ (např. z (38), (37) vyjde $\lim_{x \to \frac{1}{2}\pi -} \cos x = 0$, $\lim_{x \to \frac{1}{2}\pi -} \sin x = 1$, definujeme tedy $\cos \frac{1}{2}\pi = 0$, $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$). Nyní lze vyšetřit vzrůst a klesání funkcí $\cos x$, $\sin x$ pro $|x| \leqq \frac{1}{2}\pi$ a dokázat rovnice (47), (48) jako v § 4. Nato rozšíříme definici funkcí $\cos x$, $\sin x$ na všechna x atd. jako v § 4 až k poznámce 1. Také definici funkce $\operatorname{tg} x$ rozšíříme na všechna x, pro něž $\cos x \neq 0$, rovnicí $\operatorname{tg} x = \sin x : \cos x$ (viz druhou rovnici (38)) a vypočteme $(\operatorname{tg} x)'$. Podobně bychom mohli zavést funkci $\operatorname{cotg} x = \cos x : \sin x$, jež ovšem již neposkytuje nic podstatně nového. K funkci $\sin x$ (uvažované *pouze* v intervalu $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$) existuje spojitá rostoucí inverzní funkce $\arcsin x$, zobrazující interval $\langle -1, 1\rangle$ na $\langle -\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$. Snadno najdete derivaci této funkce pro $|x| < 1$ a odtud zjistíte, že $\arcsin x = \int_0^x (1 - t^2)^{-1/2}\,dt$ pro $|x| < 1$. Odtud pak jako v § 4 najdete souvislost funkce arscin x s délkou oblouku jednotkové kružnice a geometrický význam goniometrických funkcí (věc je teď o to jednodušší než v § 4, že existence limity $\lim_{x \to 1-} \arcsin x = \lim_{x \to 1-} L(0, x) = \frac{1}{2}\pi$ je již zaručena).

2. Vyjděme z definic

$$\arcsin x = \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1 - t^2}} \quad (|x| < 1)\,, \qquad \operatorname{arctg} x = \int_0^x \frac{dt}{1 + t^2}\,.$$

Snažíme-li se převést první integrál na integrál racionální funkce substitucí $\sqrt{\dfrac{1 - t}{1 + t}} = u$, obdržíme

$$\arcsin x = -2 \int_1^{\sqrt{(1-x)/(1+x)}} \frac{du}{1 + u^2} = 2\left(\operatorname{arctg} 1 - \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{1 - x}{1 + x}}\right)$$

pro $|x| < 1$, takže $\arcsin x$ lze vyjádřit pomocí funkce arctg. Hezčí vztah však dostanete, kladete-li $u = \dfrac{t}{\sqrt{1 - t^2}}$; vyjde

$$\arcsin x = \int_0^{x/\sqrt{1-x^2}} \frac{du}{1 + u^2} = \operatorname{arctg} \frac{x}{\sqrt{1 - x^2}} \quad (\text{pro } |x| < 1)\,.$$

Tento vztah lze též psát ve tvaru

$$\operatorname{arctg} x = \arcsin \frac{x}{\sqrt{1 + x^2}}$$

pro každé x.

3. Z cvičení 2 a z cvičení 3 k § 3 odvoďte

$$\arcsin x + \arcsin y = \operatorname{arctg} \frac{x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)} - xy} =$$

$$= \arcsin (x\sqrt{1 - y^2} + y\sqrt{1 - x^2}),$$

pokud $|x| < 1$, $|y| < 1$ a současně $xy < \sqrt{(1 - x^2)(1 - y^2)}$, tj. buďto $xy \leqq 0$ nebo $x^2 + y^2 < 1$. (Srovnejte s DI, kap. VII, § 2, příkl. 2 a cvičení 1; případy $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $x^2 + y^2 = 1$ by se snadno doplnily limitní úvahou.)

4. Je ještě jiný způsob, jak dospět k funkcím $\sin x$, $\cos x$. Ježto funkce e^x má všechny derivace rovny e^x,[43]) plyne z Maclaurinovy formule snadno

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots \tag{63}$$

Tato řada konverguje absolutně nejenom pro všechna reálná, nýbrž i pro všechna komplexní x (vezměte si teď k ruce DI, kap. XV). Definujme tedy symbol e^x rovnicí (63) i pro všechna komplexní x. Dá se ukázat, že pro komplexní x, y jest $e^{x+y} = e^x e^y$ (důkaz viz v DI, kap. XV). Speciálně: je-li $z = x + iy$ (x, y reálná), jest $e^{x+iy} = e^x e^{iy}$; abychom tedy znali reálnou a imaginární část čísla e^z, musíme rozložit e^{iy} na reálnou a imaginární část; ty označíme $\cos y$, $\sin y$; tedy $e^{iy} = \cos y + i \sin y$, kde

$$\cos y = 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!} - \ldots, \qquad \sin y = \frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} + \frac{y^5}{5!} - \ldots \tag{64}$$

Zřejmě $\cos(-y) = \cos y$, $\sin(-y) = -\sin y$ a z rovnice $e^{i(x+y)} = e^{ix}e^{iy}$ plynou rozepsáním na reálnou a imaginární část rovnice (55).

Pro $0 < |y| < 1$ je podle (63)

$$\left|\frac{e^{iy} - 1}{y} - i\right| \leqq |y| \left(\frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots\right), \quad \text{tedy} \quad \lim_{y \to 0} \frac{e^{iy} - 1}{y} = i,$$

$$\lim_{h \to 0} \frac{e^{i(x+h)} - e^{ix}}{h} = e^{ix} \lim_{h \to 0} \frac{e^{ih} - 1}{h} = ie^{ix};$$

rozepsáním na reálnou a imaginární část plyne

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x. \tag{65}$$

[43]) Užívám pouze těch výsledků o funkci e^x, jež byly odvozeny v § 2.

Z (64) plyne: pro $0 < y \leqq 2$ jest $\cos y \leqq 1 - \frac{y^2}{2!} + \frac{y^4}{4!}$, $\sin y > 0$ $\left(\text{neboť } -\frac{y^6}{6!} + \frac{y^8}{8!} < 0,\right.$ $\left. -\frac{y^{10}}{10!} + \frac{y^{12}}{12!} < 0, \ldots, \frac{y}{1!} - \frac{y^3}{3!} > 0, \ldots\right)$. Tedy (viz stále (65)) $\cos y$ klesá v $\langle 0, 2\rangle$, $\cos 2 < 0$, takže $\cos x = 0$ právě pro jednu hodnotu $x = \frac{1}{2}\pi$ intervalu $(0, 2)$; jest pak $\sin x$ rostoucí v $\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$, $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{1}{2}\pi = 1$ (neboť z rovnice $e^{ix} . e^{-ix} = 1$ snadno plyne $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$). Konečně $\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = (\sin x)'_{x=0} = \cos 0 = 1$. Naše funkce mají tedy čtyři základní vlastnosti z **DI**, kap. VI, § 1. V této a v dalších kapitolách v **DI** bylo pak obšírně ukázáno, jak lze z těchto vlastností odvozovat další vlastnosti funkcí goniometrických a s nimi souvisících funkcí cyklometrických.