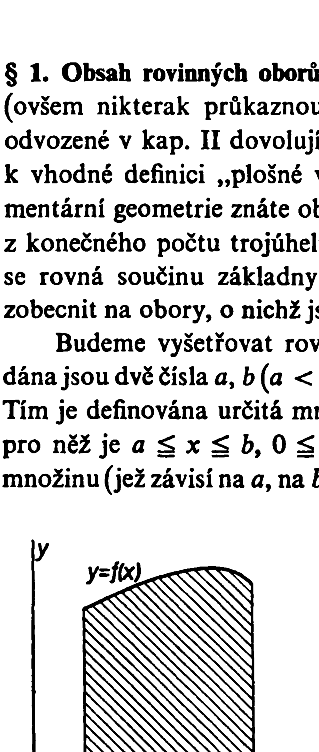
Kapitola V

OBSAH ROVINNÝCH OBORŮ A DÉLKA ROVINNÉ KŘIVKY

§ 1. **Obsah rovinných oborů.** V kap. II, § 1 jsme provedli malou orientační úvahu (ovšem nikterak průkaznou!) o „plošné velikosti" jistých rovinných oborů. Věty odvozené v kap. II dovolují nám nyní formulovat tyto úvahy přesněji a dospět tak k vhodné definici „plošné velikosti" nebo kratčeji „obsahu" těchto oborů. Z elementární geometrie znáte obsah trojúhelníka a obsah oněch útvarů, jež se dají složit z konečného počtu trojúhelníků, tj. obsah mnohoúhelníků. Např. obsah obdélníka se rovná součinu základny a výšky. Naším cílem jest nyní tuto definici vhodně zobecnit na obory, o nichž jsme mluvili v kap. II, § 1.

Budeme vyšetřovat rovinné obory (tj. množiny bodů v rovině) tohoto tvaru: dána jsou dvě čísla a, b ($a < b$) a funkce $f(x)$, spojitá a nezáporná v intervalu $\langle a, b\rangle$.[1]) Tím je definována určitá množina bodů v rovině, totiž množina všech bodů $[x, y]$, pro něž je $a \leqq x \leqq b$, $0 \leqq y \leqq f(x)$ (na obr. 5 je tato množina šrafována). Tuto množinu (jež závisí na a, na b a na tvaru funkce $f(x)$) označme znakem $M(a, b, f(x))$.[2])



Obr. 5.

Budeme se nyní snažit přiřadit *každé* takové množině $M(a, b, f(x))$ jisté číslo $P(a, b, f(x))$[3]) [které nazveme „obsahem" množiny $M(a, b, f(x))$] tak, aby byly splněny tyto čtyři požadavky:

I. Vždy je $P(a, b, f(x)) \geqq 0$ (slovo „vždy" znamená ovšem: pro každou dvojici čísel $a < b$ a pro každou funkci $f(x)$, spojitou a nezápornou v intervalu $\langle a, b\rangle$).

II. Je-li $a < c < b$ a je-li funkce $f(x)$ spojitá a nezáporná v intervalu $\langle a, b\rangle$, je

$$P(a, b, f(x)) = P(a, c, f(x)) + P(c, b, f(x)).$$

(Názorný význam je jasný: viz obr. 6, kde $P(a, b, f(x))$ je číslo přiřazené celé šrafované množině, kdežto $P(a, c, f(x))$ resp. $P(c, b, f(x))$ jsou čísla, přiřazená množině

[1]) Tj.: je-li $a \leqq x \leqq b$, je $f(x) \geqq 0$ (názorně: všechny body „čáry" $y = f(x)$ leží nad osou x nebo na ní; žádný bod neleží pod osou x). V kap. II, § 1 jsme pro větší jednoduchost požadovali $f(x) > 0$; nyní připouštíme i $f(x) = 0$.

[2]) Např. $M(1, 3, x^2)$ je množina omezená „dole" osou x, „vlevo" přímkou $x = 1$, „vpravo" přímkou $x = 3$ a „nahoře" parabolou $y = x^2$.

[3]) Toto číslo závisí ovšem na množině $M(a, b, f(x))$, tj. na číslech a, b a na tvaru funkce $f(x)$.

vodorovně resp. svisle šrafované.) Indukcí plyne ovšem z požadavku II okamžitě: je-li funkce $f(x)$ spojitá a nezáporná v intervalu $\langle a, b\rangle$, a je-li $a = x_0 < x_1 < \ldots$ $\ldots < x_n = b$, je $P(a, b, f(x)) = \sum_{i=1}^{n} P(x_{i-1}, x_i, f(x))$.

III. Jsou-li

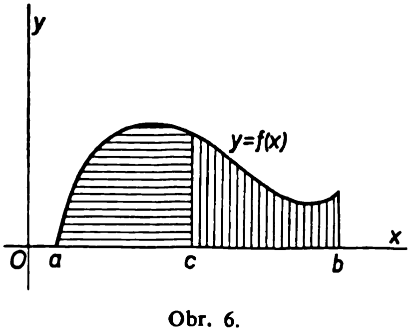
$$M(a, b, f(x)), \tag{1}$$

$$M(\alpha, \beta, \varphi(x)) \tag{2}$$

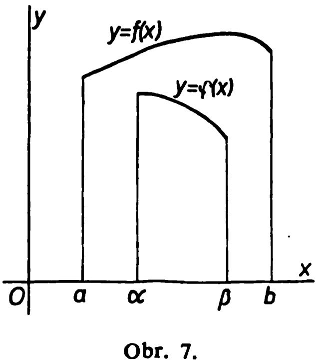
dvě množiny vyšetřovaného typu a je-li množina (2) částí množiny (1),[4]) je $P(\alpha, \beta, \varphi(x)) \leqq P(a, b, f(x))$.[5]) Všimněme si, kdy množina (2) je částí množiny (1). Předně musí být $\alpha \geqq a$; neboť kdyby bylo $\alpha < a$, patřil by bod $[\alpha, 0]$ k množině (2), ale nepatřil by k množině (1); z podobného důvodu musí být $\beta \leqq b$. Konečně pro $\alpha \leqq x \leqq \beta$ musí být $\varphi(x) \leqq f(x)$; neboť kdyby pro nějaké x intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ bylo $\varphi(x) > f(x)$, patřil by bod $[x, \varphi(x)]$ k množině (2), ale nepatřil by k množině (1).

Naopak, jsou-li tyto podmínky splněny, tj. je-li $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$ a je-li $\varphi(x) \leqq f(x)$ pro každé x intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$, je množina (2) částí množiny (1) (tj. je-li $\alpha \leqq x \leqq \beta, 0 \leqq y \leqq \varphi(x)$, je tím spíše $a \leqq x \leqq b$, $0 \leqq y \leqq f(x)$). (Viz obr. 7.)

IV. Je-li množina $M(a, b, f(x))$ obdélník o stranách z, v, je $P(a, b, f(x)) = zv$ (tj. číslo $P(a, b, f(x))$ se rovná obsahu obdélníka počítanému podle definice známé



Obr. 6.



Obr. 7.

z elementární geometrie). Kdy je množina $M(a, b, f(x))$ obdélník? Tehdy, je-li funkce $f(x)$ rovna v intervalu $\langle a, b\rangle$ kladné konstantě v. Požadavek IV lze vyslovit tedy také takto: Je-li $a < b$, $v > 0$, je

$$P(a, b, v) = (b - a)\, v\,. \tag{3}$$

Poznamenejme ještě toto: jsou-li splněny požadavky I, III, IV, platí (3) i pro $v = 0$. Neboť, je-li ε libovolné kladné číslo, je množina $M(a, b, 0)$[6]) částí oboru $M(a, b, \varepsilon)$

[4]) Říkáme, že množina M_2 je částí množiny M_1, jestliže každý prvek množiny M_2 je prvkem množiny M_1.

[5]) Zkrátka: „části" není nikdy přiřazeno číslo větší než „celku".

[6]) Tato množina je množina všech bodů $[x, 0]$ na ose x, pro něž je $a \leqq x \leqq b$.

a tedy podle I, III, IV je $0 \leqq P(a, b, 0) \leqq P(a, b, \varepsilon) = (b - a)\,\varepsilon$. Ježto nerovnost $P(a, b, 0) \leqq \varepsilon(b - a)$ platí pro každé kladné ε, nemůže číslo $P(a, b, 0)$ být kladné, tj. je $P(a, b, 0) = 0 = (b - a) \,.\, 0$, tj. vzorec (3) platí i pro $v = 0$.

Ukážeme nyní především toto: je-li vůbec možno každé množině $M(a, b, f(x))$ vyšetřovaného typu přiřadit číslo $P(a, b, f(x))$ tak, aby byly splněny požadavky I, II, III, IV, je to možno *jen jedním* způsobem, a to tak, že položíme

$$P(a, b, f(x)) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{4}$$

Důkaz. Předpokládejme, že každé množině $M(a, b, f(x))$ vyšetřovaného typu je přiřazeno číslo $P(a, b, f(x))$ tak, že jsou splněny požadavky I, II, III, IV. Buďte a, b dvě libovolná čísla taková, že $a < b$, a budiž $f(x)$ libovolná funkce spojitá a nezáporná v intervalu $\langle a, b\rangle$. Zvolme libovolné rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ s dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. Znakem m_i označme nejmenší hodnotu funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ (tj. infimum funkce $f(x)$ v tomto intervalu), znakem M_i označme největší hodnotu (tj. supremum) funkce $f(x)$ v intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$;[7]) pišme konečně $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

Podle požadavku II je

$$P(a, b, f(x)) = \sum_{i=1}^{n} P(x_{i-1}, x_i, f(x))\,. \tag{5}$$

V intervalu $\langle x_{i-1}, x_i\rangle$ je $0 \leqq m_i \leqq f(x) \leqq M_i$; tedy množina $P(x_{i-1}, x_i, m_i)$ (to jest obdélník o výšce m_i) je částí množiny $P(x_{i-1}, x_i, f(x))$ a množina $P(x_{i-1}, x_i, f(x))$ je částí množiny $P(x_{i-1}, x_i, M_i)$. Podle požadavku III je tedy $P(x_{i-1}, x_i, m_i) \leqq$ $\leqq P(x_{i-1}, x_i, f(x)) \leqq P(x_{i-1}, x_i, M_i)$. Ale podle rovnice (3) (jež plyne z požadavků I, III, IV pro $v \geqq 0$) je

$$P(x_{i-1}, x_i, m_i) = m_i\,\Delta x_i\,, \qquad P(x_{i-1}, x_i, M_i) = M_i\,\Delta x_i\,;$$

tedy

$$m_i\,\Delta x_i \leqq P(x_{i-1}, x_i, f(x)) \leqq M_i\,\Delta x_i\,.$$

Sečteme-li tyto nerovnosti pro $i = 1, 2, \ldots, n$, dostáváme podle (5) nerovnosti

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i \leqq P(a, b, f(x)) \leqq \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i\,.$$

Platí však

$$\sum_{i=1}^{n} m_i\,\Delta x_i = s(D)\,, \qquad \sum_{i=1}^{n} M_i\,\Delta x_i = S(D)\,,$$

kde $s(D)$, $S(D)$ znamená dolní a horní součet příslušný k rozdělení D.[8]) Pro každé rozdělení D platí tedy nerovnost

$$s(D) \leqq P(a, b, f(x)) \leqq S(D)\,. \tag{6}$$

[7]) Tato nejmenší a největší hodnota existuje podle věty 128 v DI, str. 236, v 4. vyd. str. 269.

[8]) Užívám zde i v následujícím paragrafu označení kap. II, § 2.

Budiž nyní D_m ono rozdělení, jímž se interval $\langle a, b\rangle$ dělí na m stejných dílů $\left(\text{tedy } x_i = a + \frac{i}{m}(b-a) \text{ pro } i = 0, 1, \ldots, m\right)$. Je tedy[9] $v(D_m) = \frac{1}{m}(b-a)$ a tedy $\lim_{m\to\infty} v(D_m) = 0$. Podle vět 18, 20 je

$$\lim_{m\to\infty} s(D_m) = \lim_{m\to\infty} S(D_m) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.^{10})$$

Podle (6) je však pro každé m

$$s(D_m) \leqq P(a, b, f(x)) \leqq S(D_m)$$

a tedy též

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{m\to\infty} s(D_m) \leqq P(a, b, f(x)) \leqq \lim_{m\to\infty} S(D_m) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,;$$

tedy skutečně platí rovnice (4).

Je tedy skutečně *nejvýše* jedna možnost, jak uspokojit podmínky I, II, III, IV, a to ta, že definujeme $P(a, b, f(x))$ rovnicí (4). A nyní ještě ukážeme: definujeme-li $P(a, b, f(x))$ rovnicí (4), jsou požadavky I, II, III, IV splněny.

Vskutku, je-li $a < b$ a je-li $f(x)$ funkce spojitá a nezáporná v intervalu $\langle a, b\rangle$, je předně $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqq 0$ (viz větu 27); je-li ještě $a < c < b$, je $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,.$ $.\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$; je-li $a < b$, $v > 0$, je $\int_a^b v\,\mathrm{d}x = v(b-a)$, takže požadavky I, II, IV jsou splněny. Budiž nyní $a < b$, $\alpha < \beta$, budiž $f(x)$ funkce spojitá a nezáporná v intervalu $\langle a, b\rangle$ a budiž funkce $\varphi(x)$ spojitá a nezáporná v intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$. Budiž konečně množina $M(\alpha, \beta, \varphi(x))$ částí množiny $M(a, b, f(x))$. Potom, jak víme, je $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$ a v intervalu $\langle \alpha, \beta\rangle$ je stále $\varphi(x) \leqq f(x)$. Tedy je

$$\int_a^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x \geqq 0\,,^{11})\qquad \int_\beta^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqq 0\,,\qquad \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x \geqq \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

a tedy

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^\alpha f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x + \int_\beta^b f(x)\,\mathrm{d}x \geqq$$
$$\geqq 0 + \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,\mathrm{d}x + 0 = \int_\alpha^\beta \varphi(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

a tedy je splněn též požadavek III.

Tedy celkem vidíme: vskutku je možno *jedním a jen jedním způsobem* přiřadit každé množině $M(a, b, f(x))$ vyšetřovaného typu číslo $P(a, b, f(x))$ tak, že jsou splněny požadavky I až IV, a to tak, že definujeme $P(a, b, f(x))$ rovnicí (4).

Číslo $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ nazýváme proto *obsahem* nebo také *měrou* množiny $M(a, b, f(x))$.

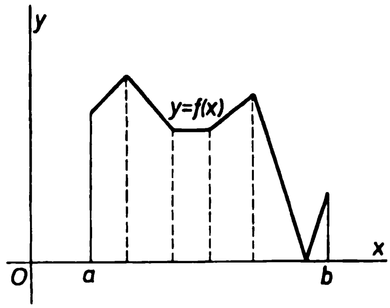
---

[9]) Užívám označení $v(D)$ zavedeného v kap. II, § 3.

[10]) Horní integrál (z věty 18) a dolní integrál (z věty 20) mohu totiž nahradit prostě integrálem, ježto spojitá funkce $f(x)$ má podle věty 38 integrál od a do b.

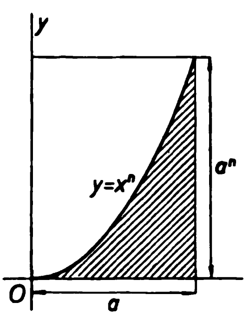
[11]) To platí — se znamením rovnosti — i pro $a = \alpha$.

Poznámka 1. Vyšetřovali jsme jenom množiny $M(a, b, f(x))$ velmi speciálního typu; mohli bychom sice rozšířit předešlé úvahy na množiny poněkud obecnější, upouštím však od toho. Neboť k obecné teorii míry vyhovující všem požadavkům, které analýza na ni klade, bychom takto nedospěli. Takovou obecnou a zcela vyhovující teorii míry podal *Lebesgue* a český čtenář může se o této teorii poučit z knihy Ed. Čecha, Bodové množiny I (1936) nebo z mé knihy „Integrální počet II" nebo konečně z učebního textu I. Černého a J. Maříka „Integrální počet I a II" (Stát. pedag. naklad., Praha, 1960 a 1961).

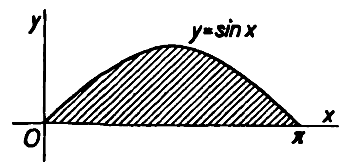


Obr. 8.

Poznámka 2. Jestliže se „čára" $y = f(x)$ v intervalu $\langle a, b\rangle$ skládá z konečného počtu úseček, tj. jestliže interval $\langle a, b\rangle$ lze rozdělit na konečný počet částečných intervalů tak, že v každém částečném intervalu je funkce $f(x)$ lineární (viz obr. 8), je množina $M(a, b, f(x))$ mnohoúhelníkem a pro obsah této množiny máme *dvě* definice: jednak definici známou z elementární geometrie, jednak definici podle vzorce (4). Ukážeme, že obě tyto definice dávají stejný výsledek. Ježto obsah množiny takové, jaká je nakreslena na obr. 8, se počítá podle obou definic jako součet obsahů lichoběžníků[12] na obr. 8 vyznačených, stačí dokázat, že obsah každého takového lichoběžníka počítaný podle elementární definice (tj. poloviční součet základen násobený výškou) se rovná obsahu počítanému podle vzorce (4). Budiž tedy $a < b$ a v intervalu $\langle a, b\rangle$ budiž $f(x) = kx + q \geqq 0$; množina $M(a, b, f(x))$ je lichoběžník o základnách $f(a) = ka + q$, $f(b) = kb + q$ a o výšce



Obr. 9.



Obr. 10.

$b - a$. Jeho obsah podle elementární definice je $(b - a)\left(\frac{1}{2}k(a + b) + q\right) = \frac{1}{2}k(b^2 - a^2) + q(b - a)$, podle naší nové definice je jeho obsah $\int_a^b (kx + q)\,dx = \frac{1}{2}k(b^2 - a^2) + q(b - a)$, čímž je souhlas obou výsledků dokázán.

[12]) Tyto lichoběžníky mohou přejít ovšem též v obdélníky nebo trojúhelníky.

Příklad 1. Obsah množiny šrafované na obr. 9 ($f(x) = x^n$, $n > 0$, $a > 0$) je[13])

$$\int_0^a x^n \, dx = \frac{1}{n+1} a^{n+1} = \frac{1}{n+1} a \, . \, a^n$$

(všimněte si, že $a \, . \, a^n$ je obsah obdélníka o základně a a výšce a^n).

Příklad 2. Obsah množiny šrafované na obr. 10 ($f(x) = \sin x$) je

$$\int_0^\pi \sin x \, dx = -\cos \pi + \cos 0 = 2 \, .$$

§ 2. Délka rovinné křivky. Budiž $f(x)$ spojitá v intervalu $\langle a, b \rangle$. Množinu všech bodů $[x, y]$ vyhovujících podmínkám

$$a \leqq x \leqq b \, , \qquad y = f(x)$$

budeme nazývat „křivkou" a označíme ji pro krátkost písmenem C.[14]) Z analytické geometrie víte, jak se počítá délka úsečky;[15]) naším cílem v tomto paragrafu pak bude definovat vhodným způsobem délku křivky C.

Sestrojme libovolné rozdělení D intervalu $\langle a, b \rangle$ dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ ($n \geqq 1$);[16]) sestrojme body

$$[x_0, f(x_0)] = P_0 \, , \quad [x_1, f(x_1)] = P_1, \ldots, [x_n, f(x_n)] = P_n \, ;$$

znakem $K(D)$ značme lomenou čáru, sestrojenou z úseček $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_1P_2}, \ldots, \overline{P_{n-1}P_n}$ (viz obr. 11), a znakem $L(D)$ označme „délku" lomené čáry $K(D)$, tj. součet délek úseček $\overline{P_0P_1}$, $\overline{P_1P_2}, \ldots, \overline{P_{n-1}P_n}$. Tímto způsobem je každému rozdělení D intervalu $\langle a, b \rangle$ přiřazeno určité kladné číslo $L(D)$.

[13]) Viz poznámku [4]) v kap. III, § 2.

[14]) Slovem „křivka" se označují také množiny mnohem obecnější; ale těmito věcmi se zde nebudu zabývat. Názorný význam „křivky" C je jasný: ke každé hodnotě x intervalu $\langle a, b \rangle$ sestrojím bod $[x, y]$, jehož ordináta je dána rovnicí $y = f(x)$; C je pak množina všech těchto bodů. Tato „křivka" C není nic jiného než „graf" funkce f v oboru $\langle a, b \rangle$ ve smyslu **DI**, str. 148, ve 4. vyd. str. 162–163.

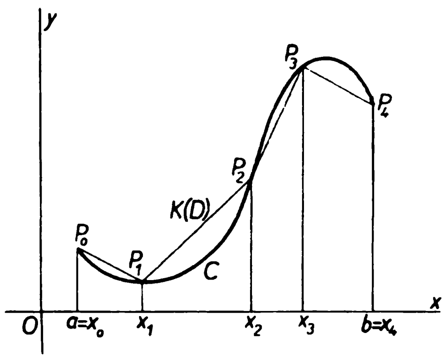
[15]) Poznamenejme: Jsou-li $P_1 = [x_1, y_1]$, $P_2 = [x_2, y_2]$ dva body, nazýváme délkou úsečky $\overline{P_1P_2}$ číslo $\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$; je-li $P_3 = [x_3, y_3]$ další bod, víte, že délka úsečky $\overline{P_1P_3}$ je nejvýše rovna součtu délek úseček $\overline{P_1P_2}$, $\overline{P_2P_3}$. To je aritmeticky vyjádřeno nerovností $\sqrt{(x_3 - x_1)^2 + (y_3 - y_1)^2} \leqq \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} + \sqrt{(x_3 - x_2)^2 + (y_3 - y_2)^2}$. Důkaz této nerovnosti ihned obdržíte, dosadíte-li do nerovnosti $\sqrt{(a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2} \leqq \sqrt{a_1^2 + b_1^2} + \sqrt{a_2^2 + b_2^2}$, dokázané v **DI**, str. 373, ve 4. vyd. str. 429 (vzorec (3)), $a_1 = x_2 - x_1$, $b_1 = y_2 - y_1$, $a_2 = x_3 - x_2$, $b_2 = y_3 - y_2$, tedy $a_1 + a_2 = x_3 - x_1$, $b_1 + b_2 = y_3 - y_1$.

[16]) Užívám zde podobného označení jako v kap. II, § 2 a 3.

Pro množinu všech těchto čísel $L(D)$ (příslušných ke všem možným rozdělením D intervalu $\langle a, b\rangle$) mohou nastat tyto dva případy:

I. Buďto tato množina není shora omezená a potom budeme krátce říkat, že křivka C má nekonečnou délku.[17]

II. Nebo tato množina je shora omezená a potom má jisté supremum, které označíme $L(a, b, f(x))$.[18] Potom budeme říkat, že křivka C má konečnou délku a číslo $L(a, b, f(x))$ nazveme *délkou* křivky C.[19]



Obr. 11.

V jednom jednoduchém případě dokážeme nyní, že křivka C má konečnou délku, a podáme vyjádření této délky určitým integrálem:

Věta 60. *Budiž $f(x)$ funkce spojitá v $\langle a, b\rangle$, jež má vlastní derivaci $f'(x)$ ve všech bodech intervalu $\langle a, b\rangle$, vyjma nejvýše v konečném počtu bodů; v těchto výjimečných bodech definujeme význam symbolu $f'(x)$ jakkoliv. Nechť existuje Riemannův integrál*

$$(7) \qquad \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x\,.$$ [20]

Potom křivka C (definovaná jako množina všech bodů $[x, y]$, vyhovujících podmínkám $a \leqq x \leqq b$, $y = f(x)$) má konečnou délku danou rovnicí

$$L(a, b, f(x)) = \int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2}\, \mathrm{d}x\,.$$

Důkaz. Hodnotu integrálu (7) označme A. Máme pak dokázat toto:

I. Pro každé rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$ jest $L(D) \leqq A$.

II. Ke každému kladnému číslu ε existuje rozdělení D tak, že jest $L(D) > A - \varepsilon$. Vskutku: dokážeme-li tato dvě tvrzení, bude tím dokázáno, že číslo A je právě supremum všech čísel $L(D)$.

---

[17]) Výrok „křivka C má nekonečnou délku" neobsahuje tedy nic tajemného: je to jen zkrácené vyjádření okolnosti, že množina svrchu popsaná není shora omezená.

[18]) Toto číslo může záviset pouze na a, b a na tvaru funkce f; všechny tyto tři prvky jsou pak v označení vytčeny.

[19]) Věc je velmi názorná: délka křivky C je supremum délek všech lomených čar, popsaných na začátku tohoto paragrafu.

[20]) Existence a hodnota tohoto integrálu nezávisí podle věty 33 na tom, *jak* jsme definovali smysl symbolu $f'(x)$ v těchto výjimečných bodech. Je-li např. $a = -1$, $b = 1$, $f(x) = x + |x|$, je $f(x) = 0$, $f'(x) = 0$ pro $x < 0$, $f(x) = 2x$, $f'(x) = 2$ pro $x > 0$, kdežto derivace $f'(0)$ neexistuje. Ať nyní doplníme definici symbolu $f'(0)$ jakkoliv, jest integrál (7) roven

$$\int_{-1}^{0} \sqrt{1 + 0^2}\, \mathrm{d}x + \int_0^1 \sqrt{1 + 2^2}\, \mathrm{d}x = 1 + \sqrt{5}\,.$$

Učiňme ještě tuto poznámku: je-li D nějaké rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ dané dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$ a je-li D' rozdělení, které vznikne z D tím, že k dělicím bodům $x_0, x_1, \ldots, x_n$ přidáme ještě jeden nový dělicí bod x', je $L(D) \leqq L(D')$.

Důkaz je jasný; nechť x' leží třeba mezi dělicími body x_{i-1}, x_i $(x_{i-1} < x' < x_i)$; sestrojme bod $P' = [x', f(x')]$. Lomená čára $K(D')$ se liší od $K(D)$ jen tím, že úsečka $\overline{P_{i-1}P_i}$ je nahrazena dvěma úsečkami $\overline{P_{i-1}P'}$, $\overline{P'P_i}$; ale – jak víte z poznámky[15]) – součet délek úseček $\overline{P_{i-1}P'}$, $\overline{P'P_i}$ je nejméně roven délce úsečky $\overline{P_{i-1}P_i}$, takže vskutku $L(D') \geqq L(D)$.

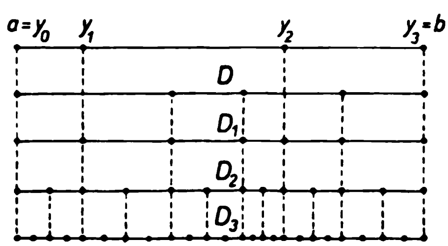
Z tohoto výsledku plyne dále: je-li rozdělení $\bar{D}$ zjemněním rozdělení D,[21]) je $L(D) \leqq L(\bar{D})$. Vskutku: buďto je rozdělení $\bar{D}$ totožné s D a potom je nerovnost platna (se znamením $=$). Nebo rozdělení $\bar{D}$ není totožné s D; potom dostanu $\bar{D}$ tak, že k dělicím bodům $x_0, x_1, \ldots, x_n$ rozdělení D přidám ještě nějaké další dělicí body $x', x'', \ldots, x^{(m)}$. Přidám-li k rozdělení D dělicí bod x', dostanu jisté rozdělení D' a podle předešlého je $L(D) \leqq L(D')$; přidám-li k rozdělení D' další dělicí bod x'', dostanu další rozdělení D'' a bude opět $L(D') \leqq L(D'')$ atd.; po m krocích dospěji tak k rozdělení $D^{(m)} = \bar{D}$ a bude $L(D) \leqq L(D') \leqq L(D'') \leqq \ldots \leqq L(D^{(m)}) = L(\bar{D})$.

Nyní přistoupíme k vlastnímu důkazu. Podle předpokladu existují body $a = y_0 < y_1 < \ldots < y_p = b$ tak, že v každém bodě intervalu $\langle a, b\rangle$, různém od těchto bodů, má $f(x)$ vlastní derivaci. Budiž D libovolné rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Sestrojím rozdělení D_1 tak, že k dělicím bodům rozdělení D přidám ještě dělicí body $y_0, y_1, \ldots, y_p$; pro každé celé $m > 1$ sestrojím konečně rozdělení D_m tak, že každý částečný interval rozdělení D_1 rozdělím na 2^{m-1} stejných dílů (viz obr. 12). Každé z rozdělení $D, D_1, D_2, D_3, \ldots$ je zjemněním předcházejícího a proto jest

$$(8) \quad L(D) \leqq L(D_1) \leqq L(D_2) \leqq L(D_3) \leqq \ldots$$

Dokážeme nyní, že

$$(9) \quad \lim_{m\to\infty} L(D_m) = A\,.$$



Obr. 12.

Tím bude důkaz tvrzení I, II hotov: Neboť předně jest podle (8) $L(D) \leqq L(D_m)$ pro každé m a tedy (podle **DI**, pozn. 4 po větě 60, str. 86, v 4. vyd. str. 91) též $L(D) \leqq \lim L(D_m)$, tj. $L(D) \leqq A$, přičemž D bylo jakékoliv rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$. Za druhé: Je-li ε jakékoliv kladné číslo, existuje podle (9) index m tak, že rozdělení D_m splňuje nerovnost $L(D_m) > A - \varepsilon$.

[21]) To znamená, že všechny dělicí body rozdělení D jsou také dělicími body rozdělení $\bar{D}$; ovšem rozdělení $\bar{D}$ může mít ještě další dělicí body.

Zbývá tedy ještě úkol dokázat rovnici (9). Označme znakem $g(x)$ funkci $\sqrt{1 + (f'(x))^2}$; podle předpokladu existuje Riemannův integrál $\int_a^b g(x)\,dx$. Dělicí body rozdělení D_m buďte $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$.[22]) Číslo $L(D_m)$ se rovná součtu čísel $l_1, l_2, \ldots, l_n$, kde l_j je délka úsečky spojující body $[x_{j-1}, f(x_{j-1})]$, $[x_j, f(x_j)]$, tedy

$$(10) \qquad l_j = \sqrt{(x_j - x_{j-1})^2 + (f(x_j) - f(x_{j-1}))^2}\,.$$

Ale funkce $f(x)$ je spojitá v $\langle x_{j-1}, x_j\rangle$ a má vlastní derivaci $f'(x)$ v každém *vnitřním* bodě intervalu $\langle x_{j-1}, x_j\rangle$ (neboť body $y_0, y_1, \ldots, y_p$ patří k dělicím bodům rozdělení D_m). Podle věty o přírůstku funkce (věta 6 nebo **DI**, věta 133, str. 242, v 4. vyd. str. 276) existuje tedy číslo ξ_j tak, že jest $f(x_j) - f(x_{j-1}) = f'(\xi_j)(x_j - x_{j-1})$, $x_{j-1} < \xi_j < x_j$. Podle (10) je tedy (píšeme-li ještě $\Delta x_j = x_j - x_{j-1}$)

$$l_j = \sqrt{(\Delta x_j)^2 + (f'(\xi_j))^2 (\Delta x_j)^2} = \sqrt{1 + (f'(\xi_j))^2}\,\Delta x_j = g(\xi_j)\,\Delta x_j\,,$$

a tedy

$$(10a) \qquad L(D_m) = \sum_{j=1}^{n} g(\xi_j)\,\Delta x_j\,.$$

Ježto $x_{j-1} \leqq \xi_j \leqq x_j$ (dokonce platí znamení $<$), ježto $g(x)$ má Riemannův integrál $\int_a^b g(x)\,dx = A$, a ježto zřejmě $\lim_{m\to\infty} \nu(D_m) = 0$,[23]) plyne z (10a) podle věty 22 rovnice $\lim_{m\to\infty} L(D_m) = \int_a^b g(x)\,dx$, čímž (9) je dokázáno.

Poznámka 1. Je-li funkce $f(x)$ lineární v intervalu $\langle a, b\rangle$, tj. je-li $f(x) = kx + q$, je množina C úsečkou spojující bod $[a, ka + q]$ s bodem $[b, kb + q]$; máme tedy v tomto případě dvě definice pro délku „křivky“ C; podle elementární definice je tato délka dána číslem

$$\sqrt{(b - a)^2 + (kb + q - ka - q)^2} = \sqrt{1 + k^2}\,(b - a)\,;$$

podle nové definice je dána integrálem

$$\int_a^b \sqrt{1 + k^2}\,dx = \sqrt{1 + k^2}\,(b - a)\,;$$

oba výsledky tedy jsou stejné.[24])

[22]) Tyto dělicí body i jejich počet n závisí ovšem na m; měl bych to vlastně nějak vyznačit dvojitými indexy, jak jsem to učinil ve větě 22; ale čtenáři jistě nevadí, že jsem to pro větší přehlednost vzorců neučinil.

[23]) Podobně jako v kap. II píši $\nu(D_m) = \mathrm{Max}\,(\Delta x_1, \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n)$.

[24]) Podmínky věty 60 jsou ovšem splněny: funkce $kx + q$ je všude spojitá, má všude derivaci k a napsaný integrál existuje. Podobně u příkl. 1.

Příklad 1. Počítejme délku L oblouku paraboly $y = x^2$, jehož krajní body jsou: vrchol paraboly a bod o abscise $a > 0$ (tj. bod $[0, 0]$ a bod $[a, a^2]$). Jest $L = \int_0^a \sqrt{1 + 4x^2}\, dx$. Substituce

$$\sqrt{4x^2 + 1} = 2x + t\,, \quad x = \frac{1 - t^2}{4t}\,, \quad \sqrt{4x^2 + 1} = \frac{1 + t^2}{2t}\,,$$

$$dx = -\frac{1 + t^2}{4t^2}\, dt\,;$$

$$L = -\frac{1}{8}\int_1^{\sqrt{4a^2+1}-2a} \frac{(1 + t^2)^2}{t^3}\, dt =$$

$$= \frac{1}{16}\left(\frac{1}{(\sqrt{4a^2 + 1} - 2a)^2} - 1\right) - \frac{1}{16}((\sqrt{4a^2 + 1} - 2a)^2 - 1) -$$

$$-\tfrac{1}{4}\lg(\sqrt{4a^2 + 1} - 2a)\,.$$

Užijeme-li rovnice $(\sqrt{4a^2 + 1} - 2a)(\sqrt{4a^2 + 1} + 2a) = 1$, dostaneme snadno $L = \frac{1}{2}a\sqrt{4a^2 + 1} + \frac{1}{4}\lg(\sqrt{4a^2 + 1} + 2a)$.

Cvičení

To, co jsme dokázali v tomto paragrafu, je jenom zlomkem toho, co bychom o délce křivky mohli dokázat. Některé doplňky a zobecnění předkládám čtenáři jako cvičení. Ve všech těchto cvičeních činíme společný předpoklad, že je dána funkce $f(x)$ spojitá v $\langle a, b\rangle$. Abychom si uspořili zdlouhavé rozlišování, učiníme tuto úmluvu: Má-li křivka nekonečnou délku, budeme psát $L(a, b, f(x)) = +\infty$ a symbol $+\infty$ budeme považovat za „větší" než každé reálné číslo.[25])

1. Vždy jest $L(a, b, f(x)) \geqq \sqrt{(b - a)^2 + (f(b) - f(a))^2}$; znamení rovnosti platí tehdy a jen tehdy, je-li křivka úsečkou, tj. má-li $f(x)$ tvar $f(x) = kx + q$ (k, q konstanty).

2. Je-li $D_1, D_2, \ldots$ posloupnost rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ taková, že $\lim_{m\to\infty} \nu(D_m) = 0$, je

$$L(a, b, f(x)) = \lim_{m\to\infty} L(D_m)\,.$$

Návod: Budiž $A < L(a, b, f(x))$. Stačí ukázat, že existuje $\delta > 0$ tak, že pro každé rozdělení D, vyhovující podmínce $\nu(D) < \delta$, je $L(D) > A$. Předně existuje rozdělení D_1 (dělicí body $a = y_0 < y_1 < \ldots < y_{p-1} < y_p = b$) tak, že $L(D_1) > A$; položme $L(D_1) - A = \lambda > 0$. Je-li D libovolné rozdělení (dělicí body $x_0, \ldots, x_n$), sestrojme D' jako v důkazu věty 17; potom $L(D') \geqq L(D_1) = A + \lambda$. Je-li $\nu(D)$ dosti malé, je rozdíl $L(D') - L(D)$ nejvýše roven součtu $p - 1$ členů, z nichž j-tý má tvar

$$\sqrt{(y_j - x_r)^2 + (f(y_j) - f(x_r))^2} + \sqrt{(x_{r+1} - y_j)^2 + (f(x_{r+1}) - f(y_j))^2}\,,$$

leží-li y_j mezi x_r, x_{r+1}; ze spojitosti funkce f plyne: je-li $\nu(D)$ dosti malé, je každý z těchto členů menší než $\lambda : p$, a tedy $L(D) > A$.

[25]) Mnohému čtenáři je asi tato úmluva běžná; kdo se necítí zcela uspokojen, ať si přečte ř. 17–24 na str. 173 (počínaje slovem „zavedeme").

3. Budiž $a < c < b$. Potom platí: konečná délka $L(a, b, f(x))$ existuje[26]) tehdy a jen tehdy, existují-li konečné délky $L(a, c, f(x))$, $L(c, b, f(x))$, načež platí rovnice $L(a, c, f(x)) + L(c, b, f(x)) = L(a, b, f(x))$. Návod: Vyšetřuji jen taková rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$, při nichž je c dělicím bodem, a užiji cvičení 2.

§ 3. **Geometrický význam čísla π a funkcí $\cos x$, $\sin x$.** Na horní polokružnici kružnice $x^2 + y^2 = 1$ počítejme délku oblouku od bodu s abscisou [26a]) α do bodu s abscisou β, tj. číslo $L(\alpha, \beta, \sqrt{1 - x^2})$; obdobně pro dolní polokružnici. Pro zkrácení pišme $L(\alpha, \beta) = L(\alpha, \beta, \sqrt{1 - x^2})$, $L'(\alpha, \beta) = L(\alpha, \beta, -\sqrt{1 - x^2})$ pro $-1 \leqq \alpha < \beta \leqq 1$. Z rovnice $y = \pm\sqrt{1 - x^2}$ plyne $(y')^2 = \dfrac{x^2}{1 - x^2}$, $\sqrt{1 + (y')^2} = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$, takže pro $-1 < \alpha < \beta < 1$ jest podle věty 60

$$L(\alpha, \beta) = L'(\alpha, \beta) = \int_\alpha^\beta \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2}} = \arcsin\beta - \arcsin\alpha\,. \tag{11}$$

Pro $\alpha = -1$ nebo pro $\beta = 1$ však věta 60 selhává, ježto funkce $(1 - x^2)^{-1/2}$ nemá např. Riemannův integrál od α $(-1 < \alpha < 1)$ do 1.[27]) Abychom i tyto případy rozřešili, připojme tuto poznámku, která může být užitečná i v jiných podobných případech.

Poznámka 1. Budiž $f(x)$ spojitá v $\langle a, b\rangle$; pro každé t intervalu $(a, b\rangle$ označme znakem C_t množinu oněch bodů $[x, y]$, jež vyhovují podmínkám $a \leqq x \leqq t$, $y = f(x)$.[28]) Nechť křivka C_t má pro každé t *otevřeného* intervalu (a, b) konečnou délku a nechť existuje vlastní limita $A = \lim\limits_{t \to b-} L(a, t, f(x))$. Potom též křivka C_b má konečnou délku danou rovnicí

$$L(a, b, f(x)) = \lim_{t \to b-} L(a, t, f(x))\,. \tag{12}$$

Důkaz. Budiž D libovolné rozdělení intervalu $\langle a, b\rangle$ dané dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$. K těmto dělicím bodům přidejme ještě další dělicí bod t tak, že $x_{n-1} < t < b$;[29]) tím vznikne další rozdělení D' a jest $L(D) \leqq L(D')$. Body $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$, t definují jisté rozdělení D'' intervalu $\langle a, t\rangle$ a je $L(D') = L(D'') + \sqrt{(b - t)^2 + (f(b) - f(t))^2}$. Avšak $L(D'') \leqq L(a, t, f(x))$, takže celkem máme

$$L(D) \leqq L(a, t, f(x)) + \sqrt{(b - t)^2 + (f(b) - f(t))^2}$$

[26]) Tím ovšem rozumím: křivka $a \leqq x \leqq b$, $y = f(x)$ má konečnou délku.

[26a]) První souřadnici bodu $[x, y]$ nazýváme jeho abscisou (nebo úsečkou), druhou souřadnici nazýváme ordinátou (nebo pořadnicí).

[27]) Tato funkce není totiž omezená v intervalu $\langle\alpha, 1)$, neboť $\lim\limits_{x \to 1-} (1 - x^2)^{-1/2} = +\infty$.

[28]) C_t je prostě ona část křivky C_b, jež je obsažena v pásu $a \leqq x \leqq t$ (nakreslete!).

[29]) Kreslete si náčrtek; vše je velmi názorné.

pro každé t intervalu (x_{n-1}, b). Podle cvičení 6, 7 v **DI**, kap. V, § 5, str. 177, v 4. vyd. str. 198 je tedy $L(D)$ nejvýše rovno limitě pravé strany pro $t \to b-$. Ale druhý člen vpravo má limitu 0 (neboť f je spojitá v bodě b zleva), první člen má pak podle předpokladu limitu A. Tedy máme

$$(13) \qquad L(D) \leqq A \text{ pro každé rozdělení } D \text{ intervalu } \langle a, b\rangle\,.$$

Budiž za druhé dáno jakékoliv kladné číslo ε. Podle předpokladu existuje číslo t intervalu (a, b) tak, že $L(a, t, f(x)) > A - \frac{1}{2}\varepsilon$. Podle definice délky existuje rozdělení D_1 intervalu $\langle a, t\rangle$ dané dělicími body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = t$ tak, že $L(D_1) > L(a, t, f(x)) - \frac{1}{2}\varepsilon > A - \varepsilon$. Dělicí body $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n < x_{n+1} = b$ definují jisté rozdělení D_0 intervalu $\langle a, b\rangle$ a jest ovšem $L(D_0) = L(D_1) + \sqrt{(b-t)^2 + (f(b) - f(t))^2} > L(D_1) > A - \varepsilon$. Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje tedy rozdělení D_0 intervalu $\langle a, b\rangle$ tak, že $L(D_0) > A - \varepsilon$. Odtud a z (13) plyne, že číslo A je skutečně supremum všech čísel $L(D)$ (pro všechna rozdělení D intervalu $\langle a, b\rangle$), takže vskutku $L(a, b, f(x)) = A$, což je právě rovnice (12).

Platí ovšem též podobná věta týkající se rovnice $L(a, b, f(x)) = \lim_{t \to a+} L(t, b, f(x))$ (tj.: je-li $f(x)$ spojitá v $\langle a, b\rangle$ a existuje-li vlastní limita vpravo, je tato rovnice správná).

Užijme nyní této poznámky na náš případ. Ježto při pevném α jest $\lim_{\beta \to 1-} (\arcsin \beta - \arcsin \alpha) = \frac{1}{2}\pi - \arcsin \alpha$, plyne z (11)

$$L(\alpha, 1) = L'(\alpha, 1) = \tfrac{1}{2}\pi - \arcsin \alpha \quad \text{pro} \quad -1 < \alpha < 1$$

a obdobně limitním přechodem $\alpha \to -1+$ plyne $L(-1, \beta) = L'(-1, \beta) = \arcsin \beta + \frac{1}{2}\pi$ pro $-1 < \beta < 1$, načež limitní přechod $\beta \to 1-$ dává $L(-1, 1) = L'(-1, 1) = \pi$. Jinými slovy: *Vzorec*

$$(11a) \qquad L(\alpha, \beta) = L'(\alpha, \beta) = \arcsin \beta - \arcsin \alpha$$

platí i pro $\alpha = -1$ *a pro* $\beta = 1$, *tj. platí celkem pro* $-1 \leqq \alpha < \beta \leqq 1$.

Vzorec $L(-1, 1) = \pi$ říká, že délka polokružnice $y = \sqrt{1 - x^2}$, $-1 \leqq x \leqq 1$ je rovna π. To není samozřejmost, nýbrž naopak je to výsledek mající pro nás zásadní význam. V **DI** jsme totiž definovali funkce $\cos x$, $\sin x$ řadami

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots, \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots$$

a číslo $\frac{1}{2}\pi$ jsme definovali jako nejmenší kladné číslo x, pro něž je $\sin x = 1$. Odvodili jsme mnoho vlastností funkcí $\cos x$, $\sin x$ a čísla π, dosud jsme však neukázali, že tyto funkce $\cos x$, $\sin x$ a číslo π mají význam běžný z geometrie. To jsme také dosud nemohli učinit, ježto tento geometrický význam spočívá na pojmu délky oblouku kružnice, a tento pojem jsme postavili na pevný základ teprve v § 2 této kapitoly. Právě jsme dokázali, že číslo π má vskutku význam běžný z geometrie. Nyní dokážeme totéž pro funkce $\cos x$, $\sin x$. Dokážeme totiž toto:

Je-li $0 < \alpha \leqq \pi$, *existuje právě jeden bod* $[x_0, y_0]$ *vyhovující rovnici* $y_0 = \sqrt{1 - x_0^2}$, *pro nějž jest* $L(x_0, 1) = \alpha$; *souřadnice tohoto bodu jsou pak* $x_0 = \cos \alpha$, $y_0 = \sin \alpha$.[30])

Důkaz. Podle (11a) je pro $-1 \leqq x < 1$

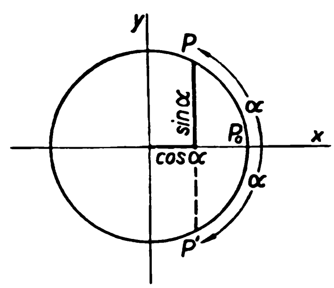
$$L(x, 1) = \tfrac{1}{2}\pi - \arcsin x = \arccos x \,. \tag{14}$$

Funkce $\arccos x$ je spojitá a klesající v $\langle -1, 1\rangle$ a zobrazuje tento interval na interval $\langle 0, \pi\rangle$. Je-li tedy $0 < \alpha \leqq \pi$, existuje jedna a jen jedna hodnota x_0 v intervalu $\langle -1, 1\rangle$ taková, že $\arccos x_0 = \alpha$; přitom jest $x_0 \neq 1$, ježto $\arccos 1 \neq \alpha$. Tedy jest $-1 \leqq x_0 < 1$, takže lze užít vzorce (14); tedy $L(x_0, 1) = \alpha$ a x_0 je jediné číslo intervalu $\langle -1, 1\rangle$, pro které tento vzorec platí. Rovnice $\arccos x_0 = \alpha$ dává $x_0 = \cos \alpha$ a tedy $\sqrt{1 - x_0^2} = \sin \alpha$ (znamení je správně voleno, ježto pro $0 < \alpha \leqq \pi$ je $\sin \alpha \geqq 0$), tj. $y_0 = \sin \alpha$.

Poznámka 2. Rovnice $L(-1, 1) = \pi$ říká, že číslo π je *délka* horení polokružnice $-1 \leqq x \leqq 1$, $y = \sqrt{1 - x^2}$. Ale číslo π má ještě jeden běžný geometrický význam, souvisící s *plošnou velikostí* kruhu. Tento význam si nyní odvodíme. Podržíme-li označení z § 1, je obsah horního jednotkového polokruhu (tj. obsah množiny všech bodů $[x, y]$ vyhovujících nerovnostem $-1 \leqq x \leqq 1, 0 \leqq y \leqq \sqrt{1 - x^2}$) dán výrazem

$$P(-1, 1, \sqrt{1 - x^2}) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\, dx \,.$$

30) Názorně řečeno: „Nanesu-li" na horní polokružnici od bodu $P_0 = [1, 0]$ oblouk α $(0 < \alpha \leqq \pi)$, má koncový bod P tohoto oblouku souřadnice $x_0 = \cos \alpha$, $y_0 = \sin \alpha$ (viz obr. 13). Nanesu-li oblouk α od bodu P_0 na *dolní* polokružnici, má koncový bod P' tohoto oblouku opět abscisu $x_0 = \cos \alpha$ (ježto $L'(x_0, 1) = L(x_0, 1)$), ale ordinátu $-y_0 = -\sin \alpha$. Ježto funkce $\cos x$ je sudá, $\sin x$ lichá, jsou souřadnice tohoto bodu $\cos(-\alpha)$, $\sin(-\alpha)$. Pro $\alpha = 0$ zůstaňme konečně v bodě P_0 (nenanáším žádný oblouk); ten má souřadnice $1 = \cos 0$, $0 = \sin 0$. Tím je popsán geometrický význam funkcí $\cos x$, $\sin x$ v intervalu $\langle -\pi, \pi\rangle$. Ostatní hodnoty těchto funkcí plynou pak z periodičnosti.



Obr. 13.

Abychom tento integrál vypočetli, vypočteme napřed primitivní funkci $J(x) = \int \sqrt{1 - x^2}\,dx$ v intervalu $(-1, 1)$. Integrací per partes máme

$$J(x) = x\sqrt{1 - x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1 - x^2}}\,dx\,.^{31)} \tag{15}$$

Píšeme-li v posledním integrálu čitatele ve tvaru $1 - (1 - x^2)$, vidíme, že integrál vpravo je roven $\arcsin x - J(x)$, takže z (15) plyne

$$J(x) = \tfrac{1}{2}x\sqrt{1 - x^2} + \tfrac{1}{2}\arcsin x\,.$$

Funkce na pravé straně je spojitá v $\langle -1, 1\rangle$ a má derivaci $\sqrt{1 - x^2}$ v každém vnitřním bodě tohoto intervalu. Podle věty 39 je tedy

$$P(-1, 1, \sqrt{1 - x^2}) = \int_{-1}^{1} \sqrt{1 - x^2}\,dx = J(1) - J(-1) = \tfrac{1}{2}\pi\,.$$

Tím je zjištěno, že *obsah jmenovaného polokruhu je roven* $\frac{1}{2}\pi$. Obecněji máme

$$P(\alpha, \beta, \sqrt{1 - x^2}) = \left[\tfrac{1}{2}x\sqrt{1 - x^2} + \tfrac{1}{2}\arcsin x\right]_\alpha^\beta$$

pro $-1 \leqq \alpha < \beta \leqq 1$.

Cvičení

1. Budiž f spojitá v $\langle a, b\rangle$. Nechť existuje konečná délka $L(a, b, f(x))$. Potom funkce $\varphi(y) = L(a, y, f(x))$[32] je rostoucí a spojitá v $\langle a, b\rangle$. Návod: Rostoucí je podle cvičení 1, 3 v § 2. Tedy (viz kap. I, § 4) pro každé c intervalu $a < c \leqq b$ existuje limita (zřejmě vlastní) $\lim_{y \to c-} \varphi(y)$; podle poznámky 1 je tedy tato limita rovna $\varphi(c)$. Podobně se dokáže $\lim_{y \to c+} \varphi(y) = \varphi(c)$ pro $a \leqq c < b$.

---

[31]) Proč nepočítáme hned *určitý* integrál v mezích $-1, 1$? Protože Riemannův integrál vpravo v těchto mezích neexistuje; ovšem čtenář, který zná teorii nevlastních integrálů (o níž také později pojednáme), by mohl rovnou počítat určitý integrál.

[32]) Pro $y = a$ definujeme $L(a, a, f(x)) = 0$.