Dodatky

Dodatek 3.1. Množina X je *lineární prostor* nad K (kde $K = R$ nebo $K = C$), jsou-li definovány prvky $x + y \in X$, $\lambda x \in X$ pro $x, y \in X$, $\lambda \in K$ a existuje-li prvek $0 \in X$ tak, že platí

$$\begin{aligned}
&x + y = y + x\,,\\
&(x + y) + z = x + (y + z)\,,\\
&(\lambda\mu)\,x = \lambda(\mu x)\,,\\
&\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y\,,\\
&(\lambda + \mu)\,x = \lambda x + \mu x\,,\\
&x + 0 = x\,,\\
&0x = 0\,,\\
&1x = x
\end{aligned}$$

pro $x, y \in X$, $\lambda, \mu \in K$. 0 se nazývá nulový prvek. Prvky prostoru X se též nazývají *vektory* a X se nazývá *vektorový prostor. Prvky* $x_1, \ldots, x_s \in X$ se nazývají *lineárně nezávislé*, jestliže platí $\lambda_1 x_1 + .. + \lambda_s x_s \neq 0$, jakmile $|\lambda_1| + |\lambda_2| + \ldots + |\lambda_s| > 0$. V opačném případě jsou *prvky* $x_1, \ldots, x_s$ *lineárně závislé.* Jestliže $y_1, \ldots, y_m$ jsou lineárně nezávislé vektory v X a jestliže ke každému $x \in X$ existují čísla $c_1, \ldots, c_m \in K$ tak, že $x = c_1 y_1 + \ldots + c_m y_m$, pak uspořádaná m-tice $(y_1, \ldots, y_m)$ se nazývá *báze* v X. V lineární algebře se dokazuje, že platí: Jsou-li $(y_1, \ldots, y_m)$, $(z_1, \ldots, z_k)$ báze v X, pak $k = m$. Má-li X *bázi*, potom počet prvků kterékoliv báze v X se nazývá *dimenze* prostoru X. Platí:

Má-li X dimenzi m a jsou-li prvky $y_i \in X$, $i = 1, 2, \ldots, m$, lineárně nezávislé, pak $(y_1, \ldots, y_m)$ je báze v X. (D3.1.1)

Je-li $y, x_1, \ldots, x_r \in X$, $c_1, \ldots, c_r \in K$, $y = c_1 x_1 + \ldots + c_r x_r$, pak říkáme, že y je *lineární kombinací prvků* $x_1, \ldots, x_r$ nebo též, že prvek y je *lineárně závislý na prvcích* $x_1, \ldots, x_r$.

Dodatek 3.2. Důkaz nerovnosti (3.2.8):
Nechť $e^{[i]}$ je vektor, pro jehož souřadnice $e_j^{[i]}$ platí $e_j^{[i]} = 0$ pro $i \neq j$, $e_i^{[i]} = 1$

pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Je

$$x = x_1 e^{[1]} + \ldots + x_{n-1} e^{[n-1]} + x_n e^{[n]},$$
$$\|x\| \leqq \|x_1 e^{[1]} + \ldots + x_{n-1} e^{[n-1]}\| + \|x_n e^{[n]}\|.$$

Postupně odvodíme

$$\|x\| \leqq \|x_1 e^{[1]}\| + \ldots + \|x_{n-1} e^{[n-1]}\| + \|x_n e^{[n]}\| \leqq$$
$$\leqq |x_1| \, \|e^{[1]}\| + \ldots + |x_n| \, \|e^{[n]}\| \leqq \eta_1 \sum_{i=1}^{n} |x_i|,$$

kde $\eta_1 = \max_{i=1,2,\ldots,n} \|e^{[i]}\|$.

Důkaz nerovnosti (3.2.9): Položme

$$S = \{x = (x_1, \ldots, x_n) | \sum_{i=1}^{n} |x_i| = 1\}, \quad \alpha = \inf \{\|x\| \mid x \in S\}.$$

Dokážeme, že existuje $y \in S$ tak, že $\alpha = \|y\|$.

Ke každému $j = 1, 2, 3, \ldots$ existuje $x^{[j]} = (x_1^{[j]}, \ldots, x_n^{[j]}) \in S$, tak že $\|x^{[j]}\| \leqq \leqq \alpha + 1/j$. Každá z číselných posloupností $x_1^{[j]}, j = 1, 2, \ldots, x_2^{[j]}, j = 1, 2, \ldots, \ldots, x_n^{[j]}$, $j = 1, 2, \ldots$, je omezená, a proto lze vybrat takovou posloupnost přirozených čísel že posloupnosti $x_1^{[j_k]}$, $k = 1, 2, \ldots$, $x_2^{[j_k]}$, $k = 1, 2, \ldots, \ldots$, $x_n^{[j_k]}$, $k = 1, 2, \ldots$, jsou konvergentní (nejdříve vybereme takovou posloupnost přirozených čísel $r_1, r_2, \ldots$, aby posloupnost $x_1^{[r_1]}, x_1^{[r_2]}, \ldots$ byla konvergentní, potom z posloupnosti $r_1, r_2, \ldots$ vybereme posloupnost $s_1, s_2, \ldots$, aby $x_2^{[s_1]}, x_2^{[s_2]}, \ldots$ byla konvergentní posloupnost atd.), tedy

$$\lim_{k \to \infty} x_i^{[j_k]} = y_i \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Je

$$x^{[j_k]} \in S, \quad \sum_{i=1}^{n} |x_i^{[j_k]}| = 1 \quad \text{pro} \quad k = 1, 2, \ldots,$$

tedy je $\sum_{i=1}^{n} |y_i| = 1$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in S$. Proto je $\|y\| \geqq \alpha$.

Je také $y = x^{[j_k]} + (y - x^{[j_k]})$, tedy

$$\|y\| \leqq \|x^{[j_k]}\| + \|y - x^{[j_k]}\| \leqq \alpha + 1/j_k + \|y - x^{[j_k]}\|. \tag{D3.2.1}$$

Podle (3.2.8) je

$$\|y - x^{[j_k]}\| \leqq \eta_1 \sum_{i=1}^{n} |y_i - x_i^{[j_k]}|$$

a tak

$$\lim_{k \to \infty} \|y - x^{[j_k]}\| = 0.$$

Také $\lim_{k\to\infty} 1/j_k = 0$ a z (D3.2.1) plyne $\|y\| \leqq \alpha$. Proto je $\|y\| = \alpha$. Protože je $y \in S$ (tedy $y \neq 0$), je $\alpha = \|y\| > 0$. Nechť $v = (v_1, \ldots, v_n) \neq 0$. Položme $x = \lambda v$, kde

$$\lambda = (\sum_{i=1}^{n} |v_i|)^{-1}.$$

Je $x \in S$, tedy $\|x\| \geqq \alpha$. Protože je $v = x/\lambda$, platí

$$\|v\| = \frac{1}{\lambda}\|x\| \geqq \alpha\frac{1}{\lambda} = \alpha\sum_{i=1}^{n}|v_i|$$

a tak platí (3.2.9), položíme-li $\eta_2 = \alpha$, a je $\eta_2 > 0$.

Dodatek 3.3. Důkaz Věty 3.4.1:

Je-li $w\colon (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \to K^n$ řešení rovnice (3.3.1), nechť $\mathscr{B}(w)$ je množina takových $\beta \in R \cup \{\infty\}$, že existuje řešení $v\colon (\tilde{\alpha}, \beta) \to K^n$ rovnice (3.3.1), které je prodloužením řešení w. Položme $B(w) = \sup\{\beta|\ \beta \in \mathscr{B}(w)\}$, $b(w) = \tilde{\beta} + 1$, je-li $B(w) = \infty$, $b(w) = [\tilde{\beta} + B(w)]/2$, je-li $B(w) < \infty$. Obdobně nechť $\mathscr{A}(w)$ je množina takových $\alpha \in R \cup \{-\infty\}$, že existuje řešení $x\colon (\alpha, \tilde{\beta}) \to K^n$ rovnice (3.3.1), které je prodloužením řešení w. Položme $A(w) = \inf\{\alpha|\ \alpha \in \mathscr{A}(w)\}$, $a(w) = \tilde{\alpha} - 1$, je-li $A(w) = -\infty$, $a(w) = [\tilde{\alpha} + A(w)]/2$, je-li $A(w) > -\infty$. Existují tedy řešení $v\colon (\tilde{\alpha}, b(w)) \to K^n$, $x\colon (a(w), \tilde{\beta}) \to K^n$ rovnice (3.3.1), která jsou prodlouženími řešení w. Položme $y(t) = v(t)$ pro $t \in (\tilde{\alpha}, b(w))$, $y(t) = x(t)$ pro $t \in (a(w), \tilde{\beta})$; $y\colon (a(w), b(w)) \to K^n$ je prodloužení řešení w. Dokázali jsme, že každé řešení w rovnice (3.3.1) lze prodloužit na interval $(a(w), b(w))$.

Položme $u^{[1]} = u$, k řešení $u^{[1]}$ najděme prodloužení $u^{[2]}$, které je definováno na $(a(u^{[1]}), b(u^{[1]}))$, a dále postupujme indukcí. Známe-li řešení $u^{[i]}$, kde i je přirozené číslo, najděme k němu prodloužení $u^{[i+1]}$, které je definováno na $(a(u^{[i]}), b(u^{[i]}))$. Je

$$b(u^{[1]}) \leqq b(u^{[2]}) \leqq b(u^{[3]}) \leqq \ldots, \quad a(u^{[1]}) \geqq a(u^{[2]}) \geqq a(u^{[3]}) \geqq \ldots.$$

Položme $\vartheta = \lim_{i\to\infty} b(u^{[i]})$, $\varepsilon = \lim_{i\to\infty} a(u^{[i]})$. Protože $u^{[i+1]}$ je prodloužením řešení $u^{[i]}$, můžeme definovat funkci $q\colon (\varepsilon, \vartheta) \to K^n$ rovnicemi $q(t) = u^{[i+1]}(t)$ pro $t \in (a(u^{[i]}), b(u^{[i]}))$. Jak ukážeme, q je řešení rovnice (3.3.1) a je prodloužením řešení u.

Kdyby q nebylo maximálním řešením, bylo by buď $-\infty < \varepsilon$, nebo $\vartheta < \infty$ a existovalo by vlastní prodloužení řešení q. Nechť je např. $\vartheta < \infty$, $\xi > \vartheta$ a nechť $z\colon (\varepsilon, \xi) \to K^n$ je prodloužením řešení q. Je $\mathscr{B}(u^{[i]}) \supset \mathscr{B}(u^{[i+1]})$, a tedy $B(u^{[i]}) \geqq B(u^{[i+1]})$ pro $i = 1, 2, \ldots$ a pro dosti veliká i je $B(u^{[i]}) < \infty$ (jinak by bylo $\vartheta = \infty$). Tedy je $b(u^{[i+1]}) = [b(u^{[i]}) + B(u^{[i]})]/2$, $B(u^{[i+1]}) \leqq B(u^{[i]})$, $B(u^{[i+1]}) - b(u^{[i+1]}) \leqq [B(u^{[i]}) - b(u^{[i]})]/2$ pro všechna dosti veliká i. Odtud plyne $\vartheta = \lim_{i\to\infty} B(u^{[i]})$. Definujme funkce $z^{[i]}\colon (a(u^{[i]}), \xi) \to K^n$ předpisem $z^{[i]}(t) = z(t)$. Je $z^{[i]} \in \mathscr{B}(u^{[i]})$ pro

$i = 1, 2, \ldots$, tedy $\xi \leqq B(u^{[i]})$ pro $i = 1, 2, \ldots$ a to není možné. Proto q musí být maximálním řešením.

Dodatek 4.1. Následující věta je dokázána v [14].

D4.1.1. Věta: *Nechť $\mathscr{J}$ je otevřený interval, nechť funkce $\tilde{A}$: $\mathscr{J} \to M_n(R)$ má spojitou derivaci, $1 \leqq k < n$, a nechť platí* rank $\tilde{A}(t) = k$ *pro $t \in \mathscr{J}$.*

Potom existuje funkce $\tilde{M}$: $\mathscr{J} \to M_n(R)$, která má spojitou derivaci, a platí:

$$\det \tilde{M}(t) \neq 0 \quad \textit{pro} \quad t \in \mathscr{J}\,, \tag{D4.1.1}$$

$$\tilde{A}(t)\, \tilde{M}(t) = ((\tilde{v}^{[1]}, \ldots, \tilde{v}^{[k]}, 0, \ldots, 0))\,, \tag{D4.1.2}$$

kde $\tilde{v}^{[j]} \in R^n$ pro $j = 1, 2, \ldots, k$.

Užitím Věty D4.1.1 dokážeme, že platí Věta 4.10.1. Nejdříve dokážeme, že platí toto tvrzení:

$$\text{Věta 4.10.1 platí v případě } K = R. \tag{D4.1.3}$$

Důkaz: Nechť funkce $u^{[j]}$: $\mathscr{J} \to R^n$ mají spojitou derivaci a nechť platí (4.10.3). Nechť $\tilde{A}(t)$ je matice transponovaná k matici $(u^{[1]}(t), \ldots, u^{[k]}(t), 0, \ldots, 0)$. Nechť $u^{[l]}(t)$ je l-tý sloupec matice $\tilde{M}(t)$ pro $l = k + 1, \ldots, n$. Z (D4.1.1) a (D4.1.2) plyne, že platí (4.10.4), (4.10.5) a tak (D4.1.3) platí.

Je-li $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in R^n$, položme

$$[x, y] = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) \in R^{2n}\,.$$

Pišme $w = p + \mathrm{i}q$, je-li

$$w = (w_1, \ldots, w_n) \in C^n\,, \quad p = (p_1, \ldots, p_n) \in R^n\,, \quad q = (q_1, \ldots, q_n) \in R^n\,,$$

$$w_j = p_j + \mathrm{i}q_j \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, \ldots, n\,.$$

Nechť $z^{[j]} \in C^n$, $z^{[j]} = p^{[j]} + \mathrm{i}q^{[j]}$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Je-li $\gamma_j \in C$, $\gamma_j = \alpha_j + \mathrm{i}\beta_j$, α_j, $\beta_j \in R$ pro $j = 1, 2, \ldots, k$, pak

$$\gamma_1 z^{[1]} + \ldots + \gamma_k z^{[k]} = 0 \tag{D4.1.4}$$

platí právě tehdy, jestliže platí

$$\begin{aligned} &\alpha_1 p^{[1]} - \beta_1 q^{[1]} + \ldots + \alpha_k p^{[k]} - \beta_k q^{[k]} = 0\,, \\ &\alpha_1 q^{[1]} + \beta_1 p^{[1]} + \ldots + \alpha_k q^{[k]} + \beta_k p^{[k]} = 0\,, \end{aligned} \tag{D4.1.5}$$

a (D4.1.4) platí právě tehdy, platí-li

$$\begin{aligned} &\alpha_1[p^{[1]}, q^{[1]}] + \beta_1[-q^{[1]}, p^{[1]}] + \ldots + \alpha_k[p^{[k]}, q^{[k]}] + \\ &+ \beta_k[-q^{[k]}, p^{[k]}] = 0\,. \end{aligned} \tag{D4.1.6}$$

Odtud plyne

Vektory $z^{[1]}, \ldots, z^{[k]} \in C^n$ jsou lineárně nezávislé právě tehdy, jsou-li lineárně nezávislé vektory

$$[p^{[1]}, q^{[1]}], [-q^{[1]}, p^{[1]}], \ldots, [p^{[k]}, q^{[k]}], [-q^{[k]}, p^{[k]}] \in R^{2n}. \tag{D4.1.7}$$

Nyní dokážeme, že platí:

Věta 4.10.1 platí v případě $K = C$. (D4.1.8)

Důkaz: Nechť funkce $u^{[j]}: \mathscr{J} \to C^n$ mají spojité derivace pro $j = 1, 2, \ldots, k$ a nechť platí (4.10.3). Položme $u^{[j]}(t) = v^{[j]}(t) + \mathrm{i}w^{[j]}(t)$, $j = 1, 2, \ldots, k$, $t \in \mathscr{J}$, a funkce $u^{[l]}(t)$ hledejme ve tvaru $v^{[l]}(t) + \mathrm{i}w^{[l]}(t)$, $l = k + 1, \ldots, n$, $t \in \mathscr{J}$. Podle (D4.1.7) jsou vektory v počtu $2k$

$$[v^{[j]}(t), w^{[j]}(t)], \quad [-w^{[j]}(t), v^{[j]}(t)], \quad j = 1, 2, \ldots, k, \tag{D4.1.9}$$

lineárně nezávislé a tak podle Věty 4.10.1 [viz (D4.1.3), Věty 4.10.1 užijeme pro případ prostoru R^{2n}] existují funkce $v^{[l]}, w^{[l]}: \mathscr{J} \to R^n$, které mají spojitou derivaci tak, že platí:

(i) Vektory v počtu $n - k$

$$[v^{[l]}(t), w^{[l]}(t)], \quad l = k + 1, k + 2, \ldots, n, \tag{D4.1.10}$$

jsou lineárně nezávislé pro $t \in \mathscr{J}$.

(ii) Při každé volbě $t \in \mathscr{J}$ je kterýkoliv z vektorů (D4.1.10) ortogonální na kterýkoliv z vektorů (D4.1.9).

Podle Dodatku 4.2 a (i) jsou při každém $t \in \mathscr{J}$ vektory (D4.1.10) spolu s vektory

$$[-w^{[l]}(t), v^{[l]}(t)], \quad l = k + 1, \ldots, n, \tag{D4.1.11}$$

lineárně nezávislé. Proto [viz (D4.1.7)] platí (4.10.5). Z (ii) plyne, že platí (4.10.4), a tak je dokázáno, že platí (D4.1.8).

Dodatek 4.2. Platí toto tvrzení:
Jsou-li vektory

$$x^{[1]}, \ldots, x^{[r]} \in K^n \tag{D4.2.1}$$

lineárně nezávislé, jsou-li vektory

$$y^{[1]}, \ldots, y^{[s]} \in K^n \tag{D4.2.2}$$

lineárně nezávislé, je-li

$$(x^{[j]}, y^{[l]}) = 0 \quad \textit{pro} \quad j = 1, 2, \ldots, r, \quad l = 1, 2, \ldots, s, \tag{D4.2.3}$$

potom vektory (D4.2.1) *spolu s vektory* (D4.2.2), *tj. vektory*

$$x^{[1]}, \ldots, x^{[r]}, y^{[1]}, \ldots, y^{[s]} \tag{D4.2.4}$$

jsou lineárně nezávislé.

Důkaz: Kdyby byly vektory (D4.2.4) lineárně závislé, existovala by čísla $\gamma_1, \ldots, \gamma_r, \delta_1, \ldots, \delta_s \in K$ tak, že by bylo

$$\gamma_1 x^{[1]} + \ldots + \gamma_r x^{[r]} + \delta_1 y^{[1]} + \ldots + \delta_s y^{[s]} = 0\,, \tag{D4.2.5}$$

$$|\gamma_1| + \ldots + |\gamma_r| + |\delta_1| + \ldots + |\delta_s| > 0\,. \tag{D4.2.6}$$

Položme $w = \gamma_1 x^{[1]} + \ldots + \gamma_r x^{[r]}$, $z = \delta_1 y^{[1]} + \ldots + \delta_s y^{[s]}$. Podle (D4.2.5) je $w = -z$; protože vektory v (D4.2.1) a v (D4.2.2) jsou lineárně nezávislé, musí být $w \neq 0 \neq z$. Z (D4.2.3) plyne, že $(w, z) = 0$; je tedy $(w, w) = 0$, tj. $w = 0$ a to není možné. Vektory (D4.2.4) jsou tedy lineárně nezávislé.

Dodatek 4.3. Nechť funkce $a_{11}, \ldots, a_{1n}: \mathscr{J} \to K$ jsou spojité, nechť $k < n$, nechť

$$v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1k} \tag{D4.3.1$_1$}$$

jsou řešení rovnice

$$x_1^{(n)} + a_{11}(t)\, x_1^{(n-1)} + \ldots + a_{1n}(t)\, x_1 = 0\,. \tag{D4.3.2$_1$}$$

Předpokládejme, že na intervalu $(\alpha, \beta) \subset \mathscr{J}$ můžeme k-krát provést postup, který je popsán v odst. 4.11. To znamená: Je $v_{11}(t) \neq 0$ pro $t \in (\alpha, \beta)$ a po substituci $x_1 = v_{11}(t)\, y_1$, $x_2 = \dot{y}_1$ dostáváme rovnici

$$x_2^{(n-1)} + a_{21}(t)\, x_2^{(n-2)} + \ldots + a_{2,n-1}(t)\, x_2 = 0\,, \tag{D4.3.2$_2$}$$

která má řešení

$$v_{22}, v_{23}, \ldots, v_{2k} \tag{D4.3.1$_2$}$$

a platí

$$v_{2i}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v_{1i}}{v_{11}}\right)(t) \quad \text{pro} \quad t \in (\alpha, \beta)\,, \quad i = 2, 3, \ldots, k\,, \tag{D4.3.3$_2$}$$

$v_{22}(t) \neq 0$ pro $t \in (\alpha, \beta)$. Při j-tém kroku provádíme substituci

$$x_j = v_{jj}(t)\, y_j\,, \quad x_{j+1} = \dot{y}_j \tag{D4.3.4$_{j+1}$}$$

[kde $v_{jj}(t) \neq 0$ pro $t \in (\alpha, \beta)$] a dostáváme rovnici

$$x_{j+1}^{(n-j)} + a_{j+1,1}(t)\, x_{j+1}^{(n-j-1)} + \ldots + a_{j+1,n-j}(t)\, x_{j+1} = 0\,, \tag{D4.3.2$_{j+1}$}$$

která má řešení

$$v_{j+1,j+1}, v_{j+1,j+2}, \ldots, v_{j+1,k}\,, \tag{D4.3.1$_{j+1}$}$$

a platí

$$v_{j+1,i}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{v_{ji}}{v_{jj}}\right)(t) \quad \text{pro} \quad t \in (\alpha, \beta),\ i = j + 1, \ldots, k\,, \tag{D4.3.3$_{j+1}$}$$

$v_{j+1,j+1}(t) \neq 0$ pro $t \in (\alpha, \beta)$. Přitom $j = 1, 2, \ldots, k$ a v případě rovnice (D4.3.2$_{k+1}$) již nejsou dána žádná řešení.

Ukážeme, že v této situaci platí

$$w(v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1i})(t) \neq 0 \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, k, \quad t \in (\alpha, \beta). \tag{D4.3.5}$$

Z rovnic (D4.3.3$_{j+1}$) odvodíme, že je

$$v_{ji} = v_{jj} \int \left[v_{j+1,j+1} \int \left(v_{j+2,j+2} \cdots \int v_{ii} \right) \right] \quad \text{pro} \quad i = j + 1, \ldots, k, \tag{D4.3.6}$$

kde $\int q$ znamená vhodnou primitivní funkci k funkci q. Z (D4.3.6) pro $j = 1$ plyne podle Dodatku 4.4, že je

$$w(v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1i}) = v_{11}^{i} v_{22}^{i-1} v_{33}^{i-2} \ldots v_{ii} \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, k, \tag{D4.3.7}$$

a tak platí (D4.3.5).

Vyšetříme ještě opačnou situaci. Předpokládejme, že známe řešení (D4.3.1$_1$) rovnice (D4.3.2$_1$) a že platí (D4.3.5). Položme

$$v_{22} = \frac{w(v_{11}, v_{12})}{v_{11}^2}, \quad v_{ii} = \frac{w(v_{11}, \ldots, v_{1i}) \, w(v_{11}, \ldots, v_{1,i-2})}{(w(v_{11}, \ldots, v_{1,i-1}))^2}$$

$$\text{pro} \quad i = 3, \ldots, k. \tag{D4.3.8}$$

Pro $j < i$ položme

$$u_{ji} = v_{jj} \int \left[v_{j+1,j+1} \int \left(v_{j+2,j+2} \cdots \int v_{ii} \right) \right], \tag{D4.3.9}$$

kde $\int z$ znamená (pevně zvolenou) primitivní funkci k funkci z. Obdobně jako (D4.3.7) platí

$$w(v_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1i}) = v_{11}^{i} v_{22}^{i-1} v_{33}^{i-2} \ldots v_{ii} \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, k.$$

Z (D4.3.8) plyne indukcí, že je

$$w(v_{11}, v_{12}, \ldots, v_{1i}) = v_{11}^{i} v_{22}^{i-1} \ldots v_{ii} \quad \text{pro} \quad i = 2, 3, \ldots, k.$$

Z rovnice $w(v_{11}, u_{12}) = w(v_{11}, v_{12})$ plyne $w(v_{11}, u_{12} - v_{12}) = 0$ a podle Dodatku 4.5 existuje číslo $\beta_{21} \in K$ takové, že je $u_{12} = v_{12} + \beta_{21} v_{11}$. Indukcí se obdobně dokáže, že existují čísla β_{ij} pro $i > j$ tak, že platí

$$u_{1i} = v_{1i} + \sum_{j=1}^{i-1} \beta_{ij} v_{1j} \quad \text{pro} \quad i = 2, \ldots, k. \tag{D4.3.10}$$

Z (D4.3.10) plyne, že funkce u_{1i} jsou řešení rovnice (D4.3.2$_1$); podle (D4.3.9) je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{u_{j,j+1}}{v_{jj}} \right) = v_{j+1,j+1} \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, \ldots, k - 1,$$

$v_{jj}(t) \neq 0$ pro $t \in (\alpha, \beta)$, $j = 1, 2, \ldots, k$, a proto vyjdeme-li ze soustavy řešení $v_{11}, u_{12}, \ldots, u_{1k}$, můžeme na rovnici (D4.3.2$_1$) k-krát použít postupu popsaného v odst. 4.11.

D4.3.1. Poznámka: Nechť $k = n - 1$ a nechť platí (D4.3.5). Rovnice

$$\dot{x}_n + a_{n1}x_n = 0 \tag{D4.3.2$_n$}$$

má řešení $v_{nn} = \exp\left(-\int a_{n1}\right)$ a je $v_{nn}(t) \neq 0$ pro $t \in (\alpha, \beta)$. Rovnici (D4.3.2$_n$) můžeme zapsat ve tvaru

$$v_{nn}(t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x_n}{v_{nn}(t)}\right) = 0\,,$$

a vezmeme-li v úvahu substituci (D4.3.4$_{j+1}$), můžeme rovnici (D4.3.2$_1$) zapsat ve tvaru

$$v_{11}(t) \dots v_{n-1,n-1}(t)\, v_{nn}(t) \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{v_{nn}(t)} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{v_{n-1,n-1}(t)} \cdots \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{x_1}{v_{11}(t)}\right)\dots\right)\right).$$

D4.3.2. Poznámka: V. Jarník dokázal v práci [31], že platí tato Věta: *Nechť funkce $v_i: (\alpha, \beta) \to R$ mají spojité derivace do řádu n, $i = 1, 2, \dots, k$, $k \leqq n$.*

Položme $\bar{v}_i(t) = \operatorname{col}\left(v_i(t), \dot{v}_i(t), \dots, v_i^{(n-1)}(t)\right)$. Nechť vektory $\bar{v}_i(t)$, $i = 1, 2, \dots k$, jsou lineárně nezávislé pro $t \in (\alpha, \beta)$. Potom množina nulových bodů funkce $w(v_1, \dots, v_s)$ nemá hromadný bod v (α, β), $s = 1, 2, \dots, k$.

Dodatek 4.4. Nechť funkce $\eta: \mathscr{I} \to K$, $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_i: \mathscr{I} \to K$ mají spojité derivace do řádu $i - 1$. Z pravidel pro počítání s determinanty lze odvodit, že platí

$$w(\eta\zeta_1, \eta\zeta_2, \dots, \eta\zeta_i) = \eta^i\, w(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_i)\,.$$

Dodatek 4.5. Nechť funkce $\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{i+1}: \mathscr{I} \to K$ mají spojité derivace do řádu i a nechť platí

$$w(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_i)(t) \neq 0 \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{I}\,, \tag{D4.5.1}$$

$$w(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_{i+1})(t) = 0 \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{I}\,. \tag{D4.5.2}$$

Potom existují čísla $\alpha_1, \dots, \alpha_i \in K$ tak, že platí

$$\zeta_{i+1} = \alpha_1\zeta_1 + \alpha_2\zeta_2 + \dots + \alpha_i\zeta_i\,.$$

Toto tvrzení plyne ze skutečnosti, že podle (D4.5.1) a (D4.5.2) ζ_{i+1} je řešení rovnice

$$[w(\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_i)]^{-1} \begin{vmatrix} \zeta_1, & \dots, & \zeta_i, & x \\ \dot{\zeta}_1, & \dots, & \dot{\zeta}_i, & \dot{x} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \zeta_1^{(i)}, & \dots, & \zeta_i^{(i)}, & x^{(i)} \end{vmatrix} = 0 \tag{D4.5.3}$$

(viz odst. 4.9) a $\zeta_1, \dots, \zeta_i$ je fundamentální systém rovnice (D4.5.3).

Dodatek 4.6. Jsou-li $v_1, \dots, v_k$ řešení rovnice

$$x^{(n)} + a_1(t)\, x^{(n-1)} + \dots + a_n(t)\, x = 0 \tag{D4.6.1}$$

a platí-li

$$w(v_1, \ldots, v_k)(t) \neq 0 \quad \text{pro} \quad t \in (\alpha, \beta), \tag{D4.6.2}$$

můžeme hledat řešení x rovnice (D4.6.1) ve tvaru

$$x(t) = \zeta_1(t)\, v_1(t) + \ldots + \zeta_k(t)\, v_k(t) \quad \text{pro} \quad t \in (\alpha, \beta). \tag{D4.6.3}$$

Funkce $\zeta_1, \ldots, \zeta_k$ budeme hledat tak, aby ještě platilo

$$\begin{gathered} x^{(i)}(t) = \zeta_1(t)\, v_1^{(i)}(t) + \ldots + \zeta_k(t)\, v_k^{(i)}(t) \\ \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, k-1, \quad t \in (\alpha, \beta). \end{gathered} \tag{D4.6.4}$$

Funkci ϑ zavedeme rovnicí

$$x^{(k)}(t) = \zeta_1(t)\, v_1^{(k)}(t) + \ldots + \zeta_k(t)\, v_k^{(k)}(t) + \vartheta(t). \tag{D4.6.5}$$

Z rovnic (D4.6.3), (D4.6.4), (D4.6.5) plyne, že platí

$$\begin{gathered} \dot{\zeta}_1(t)\, v_1(t) + \ldots + \dot{\zeta}_k(t)\, v_k(t) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{\zeta}_1(t)\, v_1^{(k-2)}(t) + \ldots + \dot{\zeta}_k(t)\, v_k^{(k-2)}(t) = 0, \\ \dot{\zeta}_1(t)\, v_1^{(k-1)}(t) + \ldots + \dot{\zeta}_k(t)\, v_k^{(k-1)}(t) = \vartheta(t). \end{gathered} \tag{D4.6.6}$$

Podle (D4.6.2) a (D4.6.6) najdeme funkce $\gamma_i: (\alpha, \beta) \to K$ tak, že platí $\dot{\zeta}_i(t) = \gamma_i(t)\, \vartheta(t)$. Snadno se zjistí, že funkce ζ_i mají spojité derivace do řádu $n + 1 - k$ a že funkce γ_i a ϑ mají spojité derivace do řádu $n - k$. Derivováním rovnice (D4.6.5) zjistíme, že je

$$x^{(k+1)}(t) = \zeta_1(t)\, v_1^{(k+1)}(t) + \ldots + \zeta_k(t)\, v_k^{(k+1)}(t) + \delta_{k+1,1}(t)\, \vartheta(t) + \dot{\vartheta}(t),$$

kde $\delta_{k+1,1}(t) = \sum_{r=1}^{k} \gamma_r(t)\, v_r^{(k)}(t)$, a postupně odvodíme

$$\begin{aligned} x^{(i)}(t) = {} & \zeta_1(t)\, v_1^{(i)}(t) + \ldots + \zeta_k(t)\, v_k^{(i)}(t) + \delta_{i1}(t)\, \vartheta(t) + \delta_{i2}(t)\, \dot{\vartheta}(t) + \ldots + \\ & + \delta_{i,i-k-1}(t)\, \vartheta^{(i-k-1)}(t) + \vartheta^{(i-k)}(t) \quad \text{pro} \quad i = k+1, k+2, \ldots, n, \end{aligned} \tag{D4.6.7}$$

kde pro funkce $\delta_{ij}(t)$ platí vzorce obdobné vzorci pro $\delta_{k+1,1}(t)$. Funkce δ_{i1} mají spojité derivace do řádu $n - k$, funkce δ_{i2} mají spojité derivace do řádu $n - k - 1$ atd. Dosazením rovnic (D4.6.4), (D4.6.5) a (D4.6.7) do (D4.6.1) dostaneme homogenní rovnici řádu $n - k$ pro ϑ, jejíž koeficienty jsou známé funkce [členy, které obsahují funkce $\zeta_i(t)$, se zruší]. Ke každému řešení ϑ této rovnice najdeme funkce $\dot{\zeta}_i$, ζ_i a pak řešení x rovnice (D4.6.1) určíme podle vzorce (D4.6.3).

Dodatek 5.1. Nechť je $A = ((A_{ij})) \in M_n$. Z definice determinantu plyne, že je

$$\det((\lambda I - A)) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} - \ldots + (-1)^n a_n; \tag{D5.1.1}$$

přitom je

$$a_1 = \sum_i A_{ii}\,, \quad a_2 = \sum_{i<j} \begin{vmatrix} A_{ii}, & A_{ij} \\ A_{ji}, & A_{jj} \end{vmatrix}\,,$$

$$a_3 = \sum_{i<j<k} \begin{vmatrix} A_{ii}, & A_{ij}, & A_{ik} \\ A_{ji}, & A_{jj}, & A_{jk} \\ A_{ki}, & A_{kj}, & A_{kk} \end{vmatrix}\,, \ldots, a_n = \det\left((A_{ij})\right).$$

Mnohočlen na pravé straně se nazývá *charakteristický mnohočlen matice* A. Rovnice

$$\lambda^n - a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} - \ldots + (-1)^n a_n = 0 \tag{D5.1.2}$$

se nazývá *charakteristická rovnice.* Kořeny charakteristické rovnice se nazývají *charakteristická* (nebo *vlastní*) *čísla matice* A. Nechť λ je vlastní číslo; vektor $y \in K^n$, $y \neq 0$, se nazývá *vlastní vektor* (patřící k λ), je-li

$$(A - \lambda I)\,y = 0\,.$$

Dodatek 5.2 Hurwitzova věta: *Nechť* $\alpha_i \in R$ *pro* $i = 0, 1, 2, \ldots, n, \alpha_0 > 0$. *Položme* $\alpha_i = 0$ *pro* $i > n$ *a sestavme determinanty*

$$\Delta_1 = \alpha_1, \Delta_2 = \begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_0 \\ \alpha_2, & \alpha_3 \end{vmatrix}, \quad \Delta_3 = \begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_0, & 0 \\ \alpha_3, & \alpha_2, & \alpha_1 \\ \alpha_5, & \alpha_4, & \alpha_3 \end{vmatrix}, \ldots,$$

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \alpha_1, & \alpha_0, & 0, & 0, & \ldots, 0 \\ \alpha_3, & \alpha_2, & \alpha_1, & \alpha_0, & \ldots, 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \alpha_{2n-1}, & \alpha_{2n-2}, & \alpha_{2n-3}, & \alpha_{2n-4}, & \ldots, \alpha_n \end{vmatrix}.$$

Nutná a postačující podmínka, aby pro každý kořen λ *rovnice*

$$\alpha_0\lambda^n + \alpha_1\lambda^{n-1} + \ldots + \alpha_n = 0$$

platilo $\operatorname{Re}\lambda < 0$, *je* $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \ldots, \Delta_n > 0$.

Důkaz lze najít např. v [12], kap. 2, § 9.

Dodatek 5.3. Nechť X je lineární prostor nad K. Množina $Y \subset X$ se nazývá *lineární podprostor* (v X), jestliže platí:

Je-li $x, y \in Y$, $\lambda \in K$, pak je též $x + y, \lambda x \in Y$.

Nechť $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ jsou lineární podprostory, $Y_i \cap Y_j = \{0\}$ pro $i \neq j$. Množina takových $x \in X$, k nimž existují $y_1 \in Y_1, y_2 \in Y_2, \ldots, y_k \in Y_k$ tak, že je $x = y_1 + y_2 + \ldots + y_k$, se nazývá *přímý součet podprostorů* $Y_1, Y_2, \ldots, Y_k$ a značí se $Y_1 \dotplus Y_2 \dotplus \ldots \dotplus Y_k$.

Je-li $U_i \subset Y_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, k$, potom $U_1 \dotplus U_2 \dotplus \ldots \dotplus U_k$ znamená množinu takových $u \in X$, k nimž existují $u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, \ldots, u_k \in U_k$ tak, že je $u = u_1 + u_2 + \ldots + u_k$.

Dodatek 8.1. Důkaz Věty 8.1.4: Bez ztráty na obecnosti můžeme předpokládat, že je $\operatorname{Re} \lambda_1 \leqq \operatorname{Re} \lambda_2 \leqq \ldots \leqq \operatorname{Re} \lambda_n$. Zvolme číslo $T \in (a, b)$ tak, aby bylo

$$\int_T^\infty \sum_{k=1}^n |C_{jk}(s)| \, ds < \frac{1}{2n} \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, \ldots, n . \tag{D8.1.1}$$

Zvolme $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Nechť $l = l(i)$ je takové přirozené číslo, že je

$$\begin{aligned} &\operatorname{Re} \lambda_j < \operatorname{Re} \lambda_i \quad \text{pro} \quad j < l(i) , \\ &\operatorname{Re} \lambda_j \geqq \operatorname{Re} \lambda_i \quad \text{pro} \quad j \geqq l(i) . \end{aligned} \tag{D8.1.2}$$

Budeme hledat řešení $z = \operatorname{col}(z_1, z_2, \ldots, z_n)$, $z: \langle T, \infty) \to K^n$, soustavy integrálních rovnic

$$\begin{aligned} z_j(t) &= \delta_{ij} e^{\lambda_i t} - \int_t^\infty e^{-\lambda_j(s-t)} \sum_{k=1}^n C_{jk}(s) \, z_k(s) \, ds \quad \text{pro} \quad j \geqq l(i) , \\ z_j(t) &= \int_T^t e^{\lambda_j(t-s)} \sum_{k=1}^n C_{jk}(s) \, z_k(s) \, ds \quad \text{pro} \quad j < l(i) , \end{aligned} \tag{D8.1.3}$$

kde $\delta_{ij} = 0$ pro $j \neq i$, $\delta_{ii} = 1$.

Derivováním soustavy (D8.1.3) se přesvědčíme, že splňuje-li funkce z soustavu (D8.1.3), splňuje také rovnici (8.1.14). Věta 8.1.4 bude tedy dokázána, dokážeme-li, že soustava (D8.1.3) má řešení a že platí (8.1.15) pro $u^{[i]} = z$. K tomuto cíli položme

$$z_j(t) = e^{\lambda_i t} q_j(t) \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, \ldots, n . \tag{D8.1.4}$$

Soustava (D8.1.3) přejde v soustavu

$$\begin{aligned} q_j(t) &= \delta_{ij} - \int_t^\infty e^{-(\lambda_j - \lambda_i)(s-t)} \sum_{k=1}^n C_{jk}(s) \, q_k(s) \, ds \quad \text{pro} \quad j \geqq l(i) , \\ q_j(t) &= \int_T^t e^{(\lambda_j - \lambda_i)(t-s)} \sum_{k=1}^n C_{jk}(s) \, q_k(s) \, ds \\ &\text{pro} \quad j < l(i) , \quad t \in \langle T, \infty) . \end{aligned} \tag{D8.1.5}$$

Řešení soustavy (D8.1.5) najdeme metodou postupných aproximací. Položíme

$$\begin{aligned} q_{j1}(t) &= \delta_{ij} \quad \text{pro} \quad t \in \langle T, \infty) , \quad j = 1, 2, \ldots, n , \\ q_{j,m+1}(t) &= \delta_{ij} - \int_t^\infty e^{-(\lambda_j - \lambda_i)(s-t)} \sum_{k=1}^n C_{jk}(s) \, q_{km}(s) \, ds \quad \text{pro} \quad j \geqq l(i) , \\ q_{j,m+1}(t) &= \int_T^t e^{(\lambda_j - \lambda_i)(t-s)} \sum_{k=1}^n C_{jk}(s) \, q_{km}(s) \, ds \\ &\text{pro} \quad j < l(i) , \quad t \in \langle T, b) . \end{aligned} \tag{D8.1.6}$$

Indukcí se přesvědčíme, že platí nerovnosti

$$|q_{jm}(t)| \leqq 2\,, \quad |q_{j,m+1}(t) - q_{jm}(t)| \leqq 2^{-m+1} \quad \text{pro} \quad m = 1, 2, 3, \ldots\,,$$
$$j = 1, 2, \ldots, n\,, \quad t \in \langle T, \infty)\,. \tag{D8.1.7}$$

Položme $q_j(t) = \lim_{m\to\infty} q_{jm}(t)$. Z (D8.1.7) plyne, že tyto limity existují, že je

$$|q_j(t)| \leqq 2 \tag{D8.1.8}$$

a že funkce q_j: $\langle T, \infty) \to K$ splňují soustavu (D8.1.5). Je-li $j \geqq l(i)$, plyne z (D8.1.5), že je

$$\lim_{t\to\infty} q_j(t) = \delta_{ij}\,, \tag{D8.1.9}$$

neboť je

$$\lim_{t\to\infty} \int_t^\infty \sum_{k=1}^n |C_{jk}(s)|\, ds = 0\,.$$

Označme $\tau = \tau(t) = (T + t)/2$ pro $t \geqq T$. Je-li $j < l(i)$, dostáváme z druhé z rovnic (D8.1.6) a z (D8.1.8) odhad

$$|q_j(t)| \leqq \int_T^\tau e^{(\lambda_j - \lambda_i)(t-T)/2} \sum_{k=1}^n 2|C_{jk}(s)|\, ds + \int_\tau^t 2 \sum_{k=1}^n |C_{jk}(s)|\, ds \leqq$$
$$\leqq e^{(\lambda_j - \lambda_i)(t-T)/2} \int_T^\infty 2 \sum_{k=1}^n |C_{jk}(s)|\, ds + 2 \int_{\tau(t)}^t \sum_{k=1}^n |C_{jk}(s)|\, ds\,.$$

Protože $\lim_{t\to\infty} \tau(t) = \infty$, je

$$\lim_{t\to\infty} \int_{\tau(t)}^t \sum_{k=1}^n |C_{jk}(s)|\, ds = 0\,,$$

a tedy $\lim_{t\to\infty} q_j(t) = 0$. Vzhledem k (D8.1.4) platí (8.1.13) a (8.1.14). Věta 8.1.4 je dokázána.

Dodatek 9.1. Dokážeme, že platí

D9.1.1. Věta: *Nechť Q je matice typu (r, s) s prvky v K, $w \in K^r$. Rovnice*

$$Qx = w$$

má řešení právě tehdy, je-li $(w, y) = 0$ pro každé řešení y rovnice

$$Q^* y = 0\,.$$

Důkaz: Položme $\mathscr{W} = \{Qx \mid x \in K^s\}$, $\mathscr{Y} = \{y \in K^r \mid Q^* y = 0\}$, $\mathscr{Z} = \{z \in K^r \mid (z, y) = 0 \text{ pro } y \in \mathscr{Y}\}$. Je $(Qx, y) = (x, Q^* y) = 0$ pro $y \in \mathscr{Y}$, tedy $\mathscr{W} \subset \mathscr{Z}$. Je $\dim \mathscr{W} = \operatorname{rank} Q$, $\dim \mathscr{Y} = r - \operatorname{rank} Q^* = r - \operatorname{rank} Q$, $\dim \mathscr{Z} = r - \dim \mathscr{Y} = \operatorname{rank} Q$, tedy je $\mathscr{W} = \mathscr{Z}$ a Věta D9.1.1 je dokázána.

Dodatek 9.2. Naznačíme, jak Věta 9.5.4 plyne z výsledků odst. 6.4 knihy [72]. V prostoru $C^{(0)}$ zavedeme skalární součin rovnicí

$$(x, y) = \int_\alpha^\beta x(t)\, \bar{y}(t)\, \mathrm{d}t\,;$$

normu prvku $x \in C^{(0)}$ definovanou pomocí skalárního součinu budeme značit $\|x\|_2$, tedy

$$\|x\|_2 = \left[\int_\alpha^\beta |x(t)|^2\, \mathrm{d}t\right]^{1/2}, \quad \text{zatímco} \quad \|x\| = \sup_{t\in\langle\alpha,\beta\rangle} |x(t)|\,.$$

Nechť pro $x \in C^{(0)}$ znamená $\mathsf{K}x = y$ funkci definovanou rovnicí

$$y(t) = \int_\alpha^\beta \varkappa(t, \tau)\, x(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,.$$

Z (9.5.11) se odvodí, že $y(t)$ je definováno pro $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$ a že funkce y je spojitá, a snadno se též ukáže, že zobrazení K: $C^{(0)} \to C^{(0)}$ je lineární, tj. K je lineární operátor. Nechť je $|\varkappa(t, \tau)| \leqq \gamma$ pro $(t, \tau) \in \mathscr{J}$. Ze Schwarzovy nerovnosti plyne, že je

$$|y(t)| \leqq \left[\int_\alpha^\beta |\varkappa(t, \tau)|^2\, \mathrm{d}\tau\right]^{1/2} \left[\int_\alpha^\beta |x(\tau)|^2\, \mathrm{d}\tau\right]^{1/2} \leqq$$

$$\leqq \delta \left[\int_\alpha^\beta |x(\tau)|^2\, \mathrm{d}\tau\right]^{1/2}, \quad \text{kde} \quad \delta = \gamma(\beta - \alpha)^{1/2}\,. \tag{D9.2.1}$$

Odtud plyne $\|y\|_2 \leqq \delta(\beta - \alpha)^{1/2}\|x\|_2$, a tedy operátor K je omezený vzhledem k normě $\|.\|_2$. Pomocí (9.5.12) se snadno zjistí, že operátor K je symetrický. Zbývá ještě ukázat, že operátor K je kompaktní vzhledem k normě $\|.\|_2$, tj. máme dokázat, že platí tvrzení:

Je-li $\sigma \in R$, $x_i \in C^{(0)}$, $y_i = \mathsf{K}x_i$, $\|x_i\|_2 \leqq \sigma$ *pro* $i = 1, 2, 3, \ldots$, *pak existuje* $y \in C^{(0)}$ *a vybraná posloupnost* y_{i_j} *tak, že*

$$\|y_{i_j} - y\|_2 \to \infty \quad \textit{pro} \quad j \to \infty. \tag{D9.2.2}$$

(D9.2.2) je zřejmým důsledkem těchto dvou tvrzení:

Je-li $\sigma \in R$, $x_i \in C^{(0)}$, $y_i = \mathsf{K}x_i$, $\|x_i\|_2 \leqq \sigma$ *pro* $i = 1, 2, 3, \ldots$, *pak existuje* $y \in C^{(0)}$ *a vybraná posloupnost* y_{i_j} *tak, že*

$$\|y_{i_j} - y\| \to 0 \textit{ pro } j \to \infty. \tag{D9.2.3}$$

Je-li z_j, $z \in C^{(0)}$, $j = 1, 2, \ldots$, $\|z_j - z\| \to 0$ *pro* $j \to \infty$, *pak*

$$\|z_j - z\|_2 \to 0 \textit{ pro } j \to \infty. \tag{D9.2.4}$$

Důkaz tvrzení (D9.2.3) lze provést takto: Podle (D9.2.1) je $\|y_i\| \leqq \gamma\sigma$ pro $i = 1, 2, \ldots$. Podle Schwarzovy nerovnosti je

$$|y_i(t_2) - y_i(t_1)| \leqq \left[\int_\alpha^\beta |\varkappa(t_2, \tau) - \varkappa(t_1, \tau)|^2\, \mathrm{d}\tau\right]^{1/2} \|x_i\|_2$$

a z (9.5.11) lze odvodit, že y_i, $i = 1, 2, \ldots$, je posloupnost stejně spojitých funkcí. (D9.2.3) plyne z Arzelàovy-Ascoliovy věty (viz Dodatek 10.1).

Důkaz tvrzení (D9.2.4) je snadný.

Je tedy K lineární symetrický kompaktní operátor a Věta 9.5.4 plyne z Vět 6-4-B a 6-4-D(a) knihy [72].

Dodatek 10.1.

D10.1.1. Definice: Nechť $\mathscr{J} \subset R$ je interval, $u^{[i]}: \mathscr{J} \to K^n$ pro $i = 1, 2, 3, \ldots$. Funkce $u^{[i]}$, $i = 1, 2, \ldots$, jsou *stejně omezené*, existuje-li takové číslo $\varkappa \in R$, že platí

$$\|u^{[i]}(t)\| \leqq \varkappa \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, 3, \ldots, \quad t \in \mathscr{J}. \tag{D10.1.1}$$

Funkce $u^{[i]}$ jsou *stejně spojité*, jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že platí

$$\|u^{[i]}(t_2) - u^{[i]}(t_1)\| \leqq \varepsilon, \tag{D10.1.2}$$

jakmile $t_1, t_2 \in \mathscr{J}$, $|t_1 - t_2| \leqq \delta$, $i = 1, 2, 3, \ldots$.

D10.1.2. Věta (Arzelàova-Ascoliova): *Nechť $\mathscr{J}$ je omezený interval a nechť funkce $u^{[i]}: \mathscr{J} \to K^n$, $i = 1, 2, \ldots$, jsou stejně omezené a stejně spojité. Potom z posloupnosti $u^{[1]}, u^{[2]}, u^{[3]}, \ldots$ lze vybrat posloupnost stejnoměrně konvergentní.*

Důkaz: Seřaďme množinu racionálních čísel z intervalu $\mathscr{J}$ v posloupnost $r_1, r_2, r_3, \ldots$. Protože platí (D10.1.1), můžeme z posloupnosti $u^{[1]}, u^{[2]}, u^{[3]}, \ldots$ vybrat posloupnost

$$u^{[11]}, u^{[12]}, u^{[13]}, \ldots \tag{D10.1.3}$$

tak, aby konvergovala v bodě r_1. Z posloupnosti (D10.1.3) vybereme posloupnost

$$u^{[21]}, u^{[22]}, u^{[23]}, \ldots \tag{D10.1.4}$$

tak, aby konvergovala v bodě r_2. [Přirozeně posloupnost (D10.1.4) konverguje i v bodě r_1.] Po k krocích tak vybereme posloupnost

$$u^{[k1]}, u^{[k2]}, u^{[k3]}, \ldots,$$

která konverguje v bodech $r_1, r_2, \ldots, r_k$. Diagonální posloupnost

$$u^{[11]}, u^{[22]}, u^{[33]}, \ldots \tag{D10.1.5}$$

konverguje ve všech bodech $r_1, r_2, r_3, \ldots$.

Zvolme $\varepsilon > 0$ a nechť δ je určeno z podmínky (D10.1.2). Existuje přirozené číslo l tak, že každý bod $t \in \mathscr{J}$ má od některého z bodů $r_1, r_2, \ldots, r_l$ vzdálenost menší než δ. Protože posloupnost (D10.1.5) konverguje ve všech bodech $r_1, r_2, r_3, \ldots$, existuje číslo m tak, že je

$$\|u^{[jj]}(r_k) - u^{[ii]}(r_k)\| \leqq \varepsilon \quad \text{pro} \quad i, j \geqq m, \quad k = 1, 2, \ldots, l.$$

K libovolnému $t \in \mathscr{J}$ existuje $k \in (1, 2, \ldots, l)$ tak, že je $|t - r_k| < \delta$, a tedy je

$$\|u^{[jj]}(t) - u^{[ii]}(t)\| \leqq \|u^{[jj]}(t) - u^{[jj]}(r_k)\| + \|u^{[jj]}(r_k) - u^{[ii]}(r_k)\| + \\ + \|u^{[ii]}(r_k) - u^{[ii]}(t)\| \leqq \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon\,.$$

Odtud plyne

$$\|u^{[jj]}(t) - u^{[ii]}(t)\| \leqq 3\varepsilon\,, \tag{D10.1.6}$$

jakmile $j, i \geqq m$, $t \in \mathscr{J}$. Posloupnost $u^{[jj]}(t)$, $j = 1, 2, 3, \ldots$, je cauchyovská pro $t \in \mathscr{J}$, tedy existuje $u(t) = \lim_{j \to \infty} u^{[jj]}(t)$ a podle (D10.1.6) platí $\|u^{[ii]}(t) - u(t)\| \leqq 3\varepsilon$ pro $t \in \mathscr{J}$, $i \geqq m$. Posloupnost (D10.1.5) je stejnoměrně konvergentní v $\mathscr{J}$ a Věta D10.1.2 je dokázána.

Dodatek 10.2. V tomto dodatku dokážeme Větu 10.2.1. Nejdříve však dokážeme, že platí

D10.2.1. Věta: *Nechť množina $H \subset R^n$ je kompaktní. Nechť L je kladné číslo. Nechť množina P_k je kontinuum, $P_k \subset H$ pro $k \geqq L$, $k = 1, 2, 3, \ldots$. Nechť P je množina takových $p \in H$, že existuje posloupnost přirozených čísel k_i taková, že je $\lim_{i \to \infty} k_i = \infty$, a posloupnost bodů $p^{[k_i]} \in P_{k_i}$ tak, že je $p = \lim_{i \to \infty} p^{[k_i]}$. Nechť platí $P \subset P_k$ pro $k \geqq L$. Potom P je kontinuum.*

D10.2.2. Poznámka: Ve Větě D10.2.1 lze předpoklad, že množina $H \subset R^n$ je kompaktní, nahradit předpokladem, že H je kompaktní metrický prostor.

Důkaz Věty 10.2.1: Množina P je zřejmě neprázdná. Nechť je $p^{[j]} \in P$ pro $j = 1, 2, \ldots$, $p = \lim_{j \to \infty} p^{[j]}$. Podle definice množiny P ke každému j existuje přirozené číslo s_j a bod $h^{[j]} \in P_{s_j}$ tak, že je $s_j > j$, $\|p^{[j]} - h^{[j]}\| < 1/j$ pro $j = 1, 2, \ldots$. Proto je $p = \lim_{j \to \infty} h^{[j]}$, $\lim_{j \to \infty} s_j = \infty$, a tedy je $p \in P$. Dokázali jsme, že množina P je uzavřená.

Předpokládejme, že množina P není souvislá. V takovém případě existují neprázdné uzavřené množiny W_1, W_2 takové, že je $P = W_1 \cup W_2$, $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Je-li $y \in R^n$, $C \subset R^n$, $C \neq \emptyset$, nechť $d(y, C)$ znamená vzdálenost bodu y od množiny C, tj. $d(y, C) = \inf\{\|y - c\| \mid c \in C\}$. Protože pro $k = 1, 2, \ldots$ je $P \subset P_k$ a protože množiny P_k jsou souvislé, existují body $p^{[k]} \in P_k$ tak, že je $d(p^{[k]}, W_1) = d(p^{[k]}, W_2)$; v opačném případě by množiny

$$\hat{W}_{1k} = \{x \in P_k \mid d(x, W_1) < d(x, W_2)\}\,,$$
$$\hat{W}_{2k} = \{x \in P_k \mid d(x, W_1) > d(x, W_2)\}$$

byly uzavřené a platilo by $\hat{W}_{1k} \cup \hat{W}_{2k} = P_k$, $\hat{W}_{1k} \cap \hat{W}_{2k} = \emptyset$, tj. množina P_k by nebyla sousislá. Protože je $P_k \subset H$ a množina H je kompaktní, lze z posloupnosti $p^{[k]}$ vybrat konvergentní posloupnost $p^{[k_j]}$. Nechť je $p = \lim_{j \to \infty} p^{[k_j]}$. Podle definice množiny

P je $p \in P$. Snadno lze ukázat, že je $d(p, W_1) = d(p, W_2)$. Tedy platí buď

$$d(p, W_1) = d(p, W_2) = 0\,, \tag{D10.2.1}$$

nebo

$$\mathrm{d}(p, W_1) = d(p, W_2) > 0\,. \tag{D10.2.2}$$

Kdyby platilo (D10.2.1), bylo by $p \in W_1 \cap W_2$ (neboť množiny W_1, W_2 jsou uzavřené) a to by odporovalo podmínce $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Kdyby platilo (D10.2.2), bylo by $p \notin W_1 \cup W_2$ a to by odporovalo podmínce $P = W_1 \cup W_2$. Proto množina P je souvislá. Věta D10.2.1 je dokázána.

Důkaz Věty 10.2.1: Nechť je dáno $(t_0, \tilde{x}) \in G$. Zvolme čísla $\delta_1, \delta_2 > 0$ tak jako v Poznámce 10.1.2, tj. tak, aby bylo

$$Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, 2\delta_2) \subset G\,, \quad 2\varkappa\delta_1 < \delta_2\,,$$

kde

$$\varkappa \geqq \max\left\{\|f(t, x)\| \;\middle|\; (t, x) \in Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, 2\delta_2)\right\}.$$

Nechť funkce ω: $\langle 0, 2\delta_1 + 2\delta_2\rangle \to R$ má stejný význam jako v důkazu Věty 10.1.1 [tj. je neklesající, platí (10.1.7) a $\lim_{\xi \to 0} \omega(\xi) = 0$]. Nechť ε_k, $k = 1, 2, \ldots$, jsou taková čísla, že platí

$$\varepsilon_k > \omega(2\delta_1(1 + \varkappa)\,k^{-1})\,, \quad \lim_{k \to \infty} \varepsilon_k = 0\,.$$

Zřejmě existuje takové kladné číslo L, že platí

$$2\delta_1(\varepsilon_k + \varkappa) \leqq \delta_2 \quad \text{pro} \quad k \geqq L\,.$$

Abychom dokázali Větu 10.2.1, máme dokázat, že množina $\mathscr{V}(\zeta, s, y)$ je kontinuum jakmile platí (10.2.1). Přitom se omezíme na případ, že je $s < \zeta$ (případ $s > \zeta$ je obdobný, případ $s = \zeta$ je zřejmý). Nechť tedy platí (10.2.1) a $s < \zeta$. Nechť $k \geqq L$ je přirozené číslo. Pro $l = 0, 1, \ldots, k$ položme $s_{kl} = s + l(\zeta - s)/k$. Zvolme vektory $g^{[l]} \in R^n$ tak, aby bylo $\|g^{[l]}\| \leqq \varepsilon_k$ pro $l = 0, 1, \ldots, k - 1$, a funkci z: $\langle s, \zeta\rangle \to R^n$ definujme takto:

$$\begin{aligned} &z(t) = y + (t - s_{k0})\left[f(s_{k0}, y) + g^{[0]}\right] \quad \text{pro} \quad s_{k0} \leqq t \leqq s_{k1}\,,\\ &z(t) = z(s_{kl}) + (t - s_{kl})\left[f(s_{kl}, z(s_{kl})) + g^{[l]}\right] \quad \text{pro} \quad s_{kl} < t \leqq s_{k,l+1}\,,\\ &l = 1, 2, \ldots, k - 1\,. \end{aligned} \tag{D10.2.3}$$

(Je-li $g^{[l]} = 0$ pro $l = 0, 1, \ldots, k - 1$, $\zeta = t_0 + \delta_1$, je graf funkce z část Eulerovy lomené čáry. Jak ukážeme, funkci z lze považovat za přibližné řešení rovnice 10.1.1.)

Abychom dokázali, že vzorce (D10.2.3) mají smysl, musíme dokázat, že $f(s_{kl}, z(s_{kl}))$ je definováno pro $l = 0, 1, \ldots, k - 1$; proto dokážeme, že je

$$\|z(t_2) - z(t_1)\| \leqq (\varkappa + \varepsilon_k)(t_2 - t_1) \quad \text{pro} \quad t_1, t_2 \in \langle s, \zeta\rangle \tag{D10.2.4}$$

a speciálně

$$\|z(t) - y\| \leqq (\varkappa + \varepsilon_k)(t - s) \quad \text{pro} \quad t \in \langle s, \zeta \rangle . \tag{D10.2.5}$$

(D10.2.4) zřejmě platí pro $t_1, t_2 \in \langle s_{k0}, s_{k1} \rangle$. Je tedy podle (D10.2.5) $\|z(s_{k1}) - y\| \leqq$ $\leqq (\varkappa + \varepsilon_k)(\zeta - s)/k \leqq (\varkappa + \varepsilon_k) 2\delta_1 < \delta_2$, tedy je $\|f(s_{k1}, z(s_{k1}))\| \leqq \varkappa$.

Odtud plyne, že (D10.2.4) platí na intervalu $\langle s, s_{k2} \rangle$. Obdobně se dokáže (indukcí), že (D10.2.4) platí na intervalu $\langle s, s_{kl} \rangle$ pro $l = 1, 2, \ldots, k$; tedy platí (D10.2.4) i (D10.2.5).

Nechť $\mathscr{Z}_k$ je množina všech takto zavedených funkcí z a nechť pro $l =$ $= 0, 1, 2, \ldots, k$ je $Z(k, l) = \{z(s_{kl}) | z \in \mathscr{Z}_k\}$. Abychom dokázali, že množina $\mathscr{V}(\zeta, s, y)$ je kontinuum, položíme $P_k = Z(k, k)$ pro $k = 1, 2, \ldots, H = \bar{B}(y, \delta_2)$ a užijeme Věty D10.2.1; nejdříve ovšem ukážeme, že jsou splněny předpoklady Věty D10.2.1. Zřejmě je $Z(k, 0) = \{y\}$, $Z(k, 1) = \bar{B}(y + f(s, y)(\zeta - s) k^{-1}, \varepsilon_k(\zeta - s) k^{-1})$ a indukcí se dokáže, že pro každé $l = 0, 1, \ldots, k - 1$ platí

$$Z(k, l + 1) = \bigcup \{\bar{B}(u + f(s_{kl}, u)(\zeta - s) k^{-1}, \varepsilon_k(\zeta - s) k^{-1}) | u \in Z(k, l)\} . \tag{D10.2.6}$$

Množiny $Z(k, l)$, $l = 0, 1, \ldots, k$, jsou zřejmě neprázdné. Z (D10.2.5) plyne, že je $Z(k, l) \subset \bar{B}(y, (\varkappa + \varepsilon_k)(\zeta - s)) \subset \bar{B}(y, \delta_2) = H$.

Množiny $Z(k, 0)$, $Z(k, 1)$ jsou zřejmě uzavřené a ze vztahu (D10.2.6) lze dokázat indukcí, že množiny $Z(k, l)$ jsou uzavřené pro $l = 0, 1, 2, \ldots, k$.

Dokážeme, že množiny $Z(k, l)$, $l = 0, 1, \ldots, k$, jsou souvislé. Množiny $Z(k, 0)$, $Z(k, 1)$ zřejmě jsou souvislé (neboť jsou konvexní). Předpokládejme, že není pravda, že všechny množiny $Z(k, l)$, $l = 0, 1, \ldots, k$, jsou souvislé. V takovém případě existuje přirozené číslo j, $1 \leqq j \leqq k - 1$, tak, že množina $Z(k, j)$ souvislá je a množina $Z(k, j + 1)$ souvislá není. Existují tedy neprázdné uzavřené množiny W_1, W_2 tak, že je $W_1 \cup W_2 = Z(k, j + 1)$, $W_1 \cap W_2 = \emptyset$. Nechť $\tilde{W}_i$ je množina takových $u \in Z(k, j)$, že je

$$u + f(s_{kj}, u)(\zeta - s) k^{-1} \in W_i \quad \text{pro} \quad i = 1, 2 .$$

Protože funkce f je spojitá, jsou množiny $\tilde{W}_i$ uzavřené (vzor uzavřené množiny při spojitém zobrazení je uzavřená množina) a zřejmě platí $\tilde{W}_1 \cup \tilde{W}_2 = Z(k, j)$, $\tilde{W}_1 \cap \tilde{W}_2 = \emptyset$. Je-li $u \in \tilde{W}_i$, je $\bar{B}(u + f(s_{kj}, u)(\zeta - s) k^{-1}, \varepsilon_k(\zeta - s) k^{-1}) \subset W_i$ [neboť koule $\bar{B}(x, \delta)$ je souvislá]; kdyby např. množina $\tilde{W}_2$ byla prázdná, bylo by $Z(k, j) = \tilde{W}_1$, $Z(k, j + 1) = W_1$, $W_2 = \emptyset$, a to není možné. Je tedy $\tilde{W}_1 \neq \emptyset \neq \tilde{W}_2$. To však znamená, že množina $Z(k, j)$ není souvislá a to odporuje vlastnostem čísla j. Dokázali jsme, že množiny $Z(k, l)$, $l = 0, 1, \ldots, k$, jsou souvislé. Tedy množiny P_k jsou kontinua. ●

Nechť w: $\langle s, \zeta \rangle \to R^n$ je řešení rovnice (10.1.1), $w(s) = y$. Nechť k je přirozené číslo. Funkci v_k: $\langle s, \zeta \rangle \to R^n$ definujme takto

$$v_k(t) = w(s_{kl}) + (t - s_{kl})(s_{k,l+1}, -s_{kl})^{-1} [w(s_{k,l+1}) - w(s_{kl})]$$
$$\text{pro} \quad s_{kl} \leqq t \leqq s_{k,l+1} , \quad l = 0, 1, \ldots, k - 1 .$$

Ukážeme, že platí

$$v_k \in \mathscr{X}_k \quad \text{pro} \quad k \geqq L. \tag{D10.2.7}$$

Je $v_k(s_{kl}) = w(s_{kl})$ pro $l = 0, 1, \ldots, k$. Položme

$$\tilde{g}^{[l]} = (s_{k,l+1} - s_{kl})^{-1} [w(s_{k,l+1}) - w(s_{kl})] - f(s_{kl}, w(s_{kl}))]$$

$$\text{pro} \quad l = 0, 1, \ldots, k - 1 .$$

Je

$$\tilde{g}^{[l]} = (s_{k,l+1} - s_{kl})^{-1} \int_{s_{kl}}^{s_{k,l+1}} [f(\tau, w(\tau)) - f(s_{kl}, v_k(s_{kl}))] \, d\tau .$$

Podle (10.1.7) je

$$\|f(\tau, w(\tau)) - f(s_{kl}, v_k(s_{kl}))\| \leqq \omega(|\tau - s_{kl}| + \|w(\tau) - w(s_{kl})\|) \leqq$$

$$\leqq \omega(2\delta_1[1 + \varkappa]) < \varepsilon_k , \tag{D10.2.8}$$

tedy je

$$\|\tilde{g}^{[l]}\| \leqq \varepsilon_k \tag{D10.2.9}$$

a tak platí (D10.2.7). Protože w je libovolné řešení rovnice (10.1.1) splňující podmínku $w(s) = y$, plyne z (D10.2.7), že platí

$$\mathscr{V}(\zeta, s, y) \subset Z(k, k) \quad \text{pro} \quad k \geqq L. \tag{D10.2.10}$$

Položme $P_k = Z(k, k)$ pro $k = 1, 2, \ldots$ a definujme P jako ve Větě D.10.2.1. Je

$$\mathscr{V}(\zeta, s, y) \subset \bigcap_{k \geqq L} P_k \subset P . \tag{D10.2.11}$$

Ukážeme, že také platí

$$P \subset \mathscr{V}(\zeta, s, y) . \tag{D10.2.12}$$

Nechť je $p \in P$. Potom existuje posloupnost přirozených čísel k_i a bodů $p^{[k_i]} \in P_{k_i}$ tak, že platí $\lim_{i \to \infty} k_i = \infty$, $\lim_{i \to \infty} p^{[k_i]} = p$. Nechť $z^{[k_i]} \in Z_{k_i}$ je taková funkce, že platí $z^{[k_i]}(\zeta) = p^{[k_i]}$. Vzhledem k (D10.2.4) a (D10.2.5) můžeme z posloupnosti k_i vybrat takovou posloupnost, kterou označíme m_j, že funkce $z^{[m_j]}$ konvergují stejnoměrně na $\langle s, \zeta \rangle$. Položme $u(t) = \lim_{j \to \infty} z^{[m_j]}(t)$. Pro zjednodušení pišme r místo m_j. Nechť je $l \in \{0, 1, \ldots, r - 1\}$, $t \in \langle s_{rl}, s_{r,l+1} \rangle$. Z (D10.2.3) odvodíme [indukcí podle l], že je

$$z^{[r]}(t) = y + \sum_{j=0}^{l-1} [f(s_{rj}, z^{[r]}(s_{rj})) + g^{[j]}] (\zeta - s)/r +$$

$$+ [f(s_{rl}, z^{[r]}(s_{rl})) + g^{[l]}] (t - s_{rl}) .$$

Platí tedy

$$z^{[r]}(t) = y + \int_s^t f(\tau, z^{[r]}(\tau)) \, d\tau + q(r, t) , \tag{D10.2.13}$$

kde

$$q(r, t) = \sum_{j=0}^{l-1} \int_{s_{rj}}^{s_{r,j+1}} [f(s_{rj}, z^{[r]}(s_{rj})) - f(\tau, z^{[r]}(\tau))] \, d\tau +$$

$$+ \int_{s_{rl}}^{t} [f(s_{rl}, z^{[r]}(s_{rl}) - f(\tau, z^{[r]}(\tau))] \, d\tau +$$

$$+ \sum_{j=0}^{l-1} g^{[j]}(\zeta - s)/r + g^{[l]}(t - s_{rl}) .$$

Je [viz (D10.2.8)]

$$\|q(r, t)\| \leqq \sum_{j=0}^{l-1} \varepsilon_r(s_{r,j+1} - s_{rj}) + \varepsilon_r(t - s_{rl}) + \sum_{j=0}^{l-1} \varepsilon_r(\zeta - s)/r +$$

$$+ \varepsilon_r(t - s_{rl}) \leqq 2(\zeta - s)\, \varepsilon_r \quad \text{pro} \quad t \in \langle s, \zeta \rangle .$$

Limitním přechodem pro $j \to \infty$ v (D10.2.13) (je $r = m_j$) dostáváme

$$u(t) = y + \int_s^t f(\tau, u(\tau)) \, d\tau .$$

Je tedy u řešení rovnice (10.1.1), $u(s) = y$. Je též $u(\zeta) = p = \lim_{j \to \infty} p^{[m_j]}$, a tak je $p \in \mathscr{V}(\zeta, s, y)$ a (D10.2.12) platí. Z (D10.2.11) a (D10.2.12) plyne, že je

$$\mathscr{V}(\zeta, s, y) = P \subset P_k \quad \text{pro} \quad k \geqq L .$$

Všechny předpoklady Věty D10.2.1 jsou splněny. Podle Věty D10.2.1 množina $P = \mathscr{V}(\zeta, s, y)$ je kontinuum. Tím je dokončen důkaz Věty 10.2.1.

Dodatek 10.3. V tomto dodatku dokážeme Větu 10.2.5. Obdobně jako v důkazu Věty 10.2.1 budeme se zabývat jen případem, že je $s < \zeta$. Jádro důkazu je obsaženo v následující větě:

D10.3.1. Věta: *Nechť je $(t_0, \tilde{x}) \in G$ a nechť čísla $\delta_1, \delta_2 > 0$ splňují podmínky z Poznámky* 10.1.2. *Položme $\tilde{\delta}_1 = \delta_1/2$, $\tilde{\delta}_2 = \delta_2/2$. Nechť je $(s, y) \in Q(t_0, \tilde{x}, \tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2)$, $s < \xi_1 < \xi_2 \leqq t_0 + \tilde{\delta}_1$, $v \in \partial\mathscr{V}(\xi_2, s, y)$, potom existuje řešení u rovnice* (10.1.1) *takové, že je $u(\xi_2) = v$, $u(\xi_1) \in \partial\mathscr{V}(\xi_1, s, y)$.*

Důkazu Věty D10.3.1 předešleme tři pomocné věty.

D10.3.2. Pomocná věta: *Nechť je $A \subset R^n$. Potom je $\partial A = \partial(R^n - A)$.*

Důkaz: Pomocná věta D10.3.2 plyne bezprostředně z definice množiny ∂A.

D10.3.3. Pomocná věta: *Nechť je $A \subset R^n$, $a_i \in A$ pro $i = 1, 2, \ldots$, $a \in R^n - A$ a nechť platí* $\lim_{i \to \infty} a_i = a$. *Potom $a \in \partial A$.*

Důkaz: To je zřejmé, neboť a nemůže být vnitřním bodem množiny $R^n - A$.

D10.3.4. Pomocná věta: *Nechť je $A \subset R^n$, $D \subset R^n$, $D \cap A \neq \emptyset \neq D \cap (R^n - A)$, $D \cap \partial A = \emptyset$. Nechť množina D je uzavřená. Pak množina D není souvislá.*

Důkaz: Položme $W_1 = D \cap A$, $W_2 = D \cap (R^n - A)$. Zřejmě je $W_1 \cap W_2 = \emptyset$, $W_1 \cup W_2 = D$. Ukážeme, že množina W_1 je uzavřená. V opačném případě by existovala posloupnost bodů $a_i \in W_1$ a bod $a \in R^n - W_1$ tak, že by platilo $a = \lim_{i \to \infty} a_i$. Protože množina D je uzavřená, je $a \in D$, a protože je $a \in R^n - W_1$, je $a \in R^n - A$. Podle Pomocné věty D10.3.3 je $a \in \partial A$, tedy $a \in D \cap \partial A$ a to odporuje předpokladu, že je $D \cap \partial A = \emptyset$. Užitím Pomocných vět D10.3.2 a D10.3.3 se obdobně ukáže, že i množina W_2 je uzavřená. Protože množiny W_1, W_2 nejsou prázdné, množina D není souvislá. Pomocná věta D10.3.4 je dokázaná.

Důkaz Věty D10.3.1: Nechť $w: \langle s, \xi_2 \rangle \to R^n$ je takové řešení rovnice (10.1.1), že je $w(s) = y$, $w(\xi_2) = v$. Je ovšem $w(\xi_1) \in \mathscr{V}(\xi_1, s, y)$.

Podle Věty 10.1.1 je $\|w(\tau) - \tilde{x}\| < 2\delta_2$ pro $\tau \in \langle s, \xi_2 \rangle$, a proto je

$$\|w(\xi_2) - y\| \leqq \left\| \int_s^{\xi_2} f(\tau, w(\tau))\, d\tau \right\| \leqq 2\delta_1 \varkappa = \delta_1 \varkappa < \delta_2/2\,,$$

tedy $\|w(\xi_2) - \tilde{x}\| \leqq \|w(\xi_2) - y\| + \|y - \tilde{x}\| < \delta_2$. Protože je $w(\xi_2) \in \partial\mathscr{V}(\xi_2, s, y)$, existuje posloupnost bodů $v^{[i]} \in R^n - \mathscr{V}(\xi_2, s, y)$, $i = 1, 2, \ldots$, taková, že je $w(\xi_2) = \lim_{i \to \infty} v^{[i]}$. Protože je $\|w(\xi_2) - \tilde{x}\| < \delta_2$, můžeme bez ztráty na obecnosti předpokládat, že je $\|v^{[i]} - \tilde{x}\| < \delta_2$ pro $i = 1, 2, \ldots$. Podle Věty 10.1.1 existují řešení $q^{[i]}: \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle \to R^n$ taková, že je $q^{[i]}(\xi_2) = v^{[i]}$ pro $i = 1, 2, \ldots$; přitom je

$$\|q^{[i]}(\tau) - \tilde{x}\| < 2\delta_2 \quad \text{pro} \quad \tau \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle\,. \tag{D10.3.1}$$

Je tedy

$$\|q^{[i]}(t_2) - q^{[i]}(t_1)\| \leqq \left\| \int_{t_1}^{t_2} f(\tau, q^{[i]}(\tau)\, d\tau \right\| \leqq \varkappa |t_2 - t_1|$$

$$\text{pro} \quad t_1, t_2 \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle\,, \quad i = 1, 2, \ldots\,. \tag{D10.3.2}$$

Ukážeme, že je

$$q^{[i]}(\xi_1) \notin \mathscr{V}(\xi_1, s, y) \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots\,. \tag{D10.3.3}$$

V opačném případě by existovalo přirozené číslo j a řešení $p: \langle s, \xi_1 \rangle \to R^n$ rovnice (10.1.1) takové, že by bylo $p(s) = y$, $p(\xi_1) = q^{[j]}(\xi_1)$. Definovali bychom řešení z rovnicemi $z(t) = p(t)$ pro $t \in \langle s, \xi_1 \rangle$, $z(t) = q^{[j]}(t)$ pro $t \in (\xi_1, \xi_2 \rangle$ a existence řešení z by znamenala, že je $q^{[j]}(\xi_2) = v^{[j]} \in \mathscr{V}(\xi_2, s, y)$; to však není možné, tedy (D10.3.3) platí. Protože platí (D10.3.1) a (D10.3.2), lze podle Arzelàovy-Ascoliovy věty z posloupnosti $q^{[i]}$ vybrat stejnoměrně konvergentní posloupnost $q^{[i_j]}$. Položme

$$q(t) = \lim_{j \to \infty} q^{[i_j]}(t) \quad \text{pro} \quad t \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle\,.$$

Také posloupnost složených funkcí $f(\tau, q^{[i_j]}(\tau))$ proměnné $\tau \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle$

konverguje stejnoměrně k funkci $f(\tau, q(\tau))$; limitním přechodem pro $j \to \infty$ v rovnici

$$q^{[i_j]}(t_2) = q^{[i_j]}(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(\tau, q^{[i_j]}(\tau))\, d\tau \quad \text{pro} \quad t_1, t_2 \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle$$

odvodíme, že platí

$$q(t_2) = q(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} f(\tau, q(\tau))\, d\tau \quad \text{pro} \quad t_1, t_2 \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle .$$

Funkce q je tedy řešením rovnice (10.1.1) a je $q(\xi_2) = v$. Je buď $q(\xi_1) \in \mathscr{V}(\xi_1, s, y)$ nebo je $q(\xi_1) \notin \mathscr{V}(\xi_1, s, y)$. Podle (D10.3.3) $q(\xi_1)$ nemůže být vnitřním bodem množiny $\mathscr{V}(\xi_1, s, y)$. Je-li tedy $q(\xi_1) \in \mathscr{V}(\xi_1, s, y)$, je $q(\xi_1) \in \partial\mathscr{V}(\xi_1, s, y)$ a položíme-li $u = q|_{\langle \xi_1, \xi_2 \rangle}$, tvrzení Věty D10.3.1 je splněno. Je-li $q(\xi_1) \notin \mathscr{V}(\xi_1, s, y)$, užijeme Pomocné věty D10.3.4, kde položíme $A = \mathscr{V}(\xi_1, s, y)$, $D = \mathscr{V}(\xi_1, \xi_2, v)$. Podle Věty 10.2.1 je D kontinuum; dále je $w(\xi_1) \in A \cap D$, $q(\xi_1) \in (R^n - A) \cap D$. Podle Pomocné věty D10.3.4 existuje $\tilde{v} \in \partial A \cap D$ a tedy existuje řešení $u: \langle \xi_1, \xi_2 \rangle \to R^n$ takové, že je $u(\xi_2) = v$, $u(\xi_1) = \tilde{v} \in \partial\mathscr{V}(\xi_1, s, y)$. Věta D10.3.1 je dokázána.

D10.3.5. Pomocná věta: *Nechť je $(t_0, \tilde{x}) \in G$, nechť čísla $\delta_1, \delta_2, \varkappa$ splňují podmínky z Poznámky* 10.1.2. *Nechť je $\tilde{\delta}_1 = \delta_1/2$, $\tilde{\delta}_2 = \delta_2/2$, $(s, y) \in Q(t_0, \tilde{x}, \tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2)$, $s < \eta < t_0 + \tilde{\delta}_1$, nechť b je vnitřní bod množiny $\mathscr{V}(\eta, s, y)$. Potom existují čísla $\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2 > 0$ tak, že je $\eta + \hat{\delta}_1 < t_0 + \tilde{\delta}_1, \varkappa\hat{\delta}_1 < \hat{\delta}_2$ a že $B(b, \hat{\delta}_2) \subset \mathscr{V}(\lambda, s, y)$ pro $\lambda \in \langle \eta, \eta + \hat{\delta}_1 \rangle$.*

Důkaz: Nechť $q: (s, \eta\rangle \to R^n$ je řešení rovnice (10.1.1), $q(s) = y$. Platí (viz 10.1.4))

$$\|q(\eta) - y\| \leqq \left\| \int_s^{\eta} f(\tau, q(\tau))\, d\tau \right\| \leqq \varkappa\, 2\tilde{\delta}_1 < \delta_2/2 ,$$

$\|q(\eta) - \tilde{x}\| \leqq \|q(\eta) - y\| + \|y - \tilde{x}\| < \delta_2$. Je tedy $\mathscr{V}(\eta, s, y) \subset B(\tilde{x}, \delta_2)$. Protože b je vnitřní bod množiny $\mathscr{V}(\eta, s, y)$, existuje takové $\omega > 0$, že je $B(b, \omega) \subset \mathscr{V}(\eta, s, y)$. Položme $\hat{\delta}_2 = \omega/2$ a zvolme $\hat{\delta}_1 > 0$ tak, aby bylo $\eta + \hat{\delta}_1 < t_0 + \delta_1$, $\varkappa\hat{\delta}_1 < \hat{\delta}_2$. Zřejmě je $B(b, \hat{\delta}_2) \subset \mathscr{V}(\eta, s, y)$. Nechť je $\eta < \lambda \leqq \eta + \hat{\delta}_1$, $x \in B(b, \hat{\delta}_2)$. Protože je $B(b, \hat{\delta}_2) \subset B(\tilde{x}, \delta_2)$, $\lambda \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle$, existuje řešení $p: \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle \to R^n$ rovnice (10.1.1) takové, že je $p(\lambda) = x$. Je $\|p(\lambda) - p(\eta)\| \leqq \|\int_\eta^\lambda f(\tau, p(\tau))\, d\tau\| \leqq \varkappa_1\hat{\delta}_1 < \hat{\delta}_2$; $\|p(\eta) - b\| \leqq \|p(\eta) - x\| + \|x - b\| < 2\hat{\delta}_2 = \omega$, tedy $p(\eta) \in B(b, \omega) \subset \mathscr{V}(\eta, s, y)$, a proto existuje takové řešení u rovnice (10.1.1), že je $u(s) = y$, $u(\eta) = p(\eta)$. Funkce z, definovaná rovnicemi $z(t) = u(t)$ pro $t \in \langle s, \eta \rangle$, $z(t) = p(t)$ pro $t \in \langle \eta, \lambda \rangle$ je řešením rovnice (10.1.1), a proto je $x \in \mathscr{V}(\lambda, s, y)$. Je tedy $B(b, \hat{\delta}_2) \subset \mathscr{V}(\lambda, s, y)$ a Pomocná věta D10.3.5 je dokázána.

Důkaz Věty 10.2.4: Nechť je $(t_0, \tilde{x}) \in G$. Čísla $\tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2$ nechť mají stejný význam jako ve Větě D10.3.1. Nechť je $(s, y) \in Q(t_0, \tilde{x}, \tilde{\delta}_1, \tilde{\delta}_2)$, $s < \zeta \leqq t_0 + \tilde{\delta}_1$, $v \in \partial\mathscr{V}(\zeta, s, y)$. Máme dokázat, že existuje takové řešení $w: \langle s, \zeta \rangle \to R^n$ rovnice (10.1.1), že platí $w(s) = y$, $w(\zeta) = v$, $w(t) \in \partial\mathscr{V}(t, s, y)$ pro $t \in \langle s, \zeta \rangle$. Zřejmě stačí, dokážeme-li, že je

$$w(t) \in \partial\mathscr{V}(t, s, y) \quad \text{pro} \quad t \in (s, \zeta)\,. \tag{D10.3.4}$$

Nechť j je celé číslo, $j > 1$. Položme $\sigma(j, k) = s + k\,2^{-j}(\zeta - s)$ pro $k = 0, 1, \ldots, 2^j$. Sestrojíme řešení $w^{[j]}\colon \langle s, \zeta\rangle \to R^n$ rovnice (10.1.1) takové, že je $w^{[j]}(s) = y$, $w^{[j]}(\zeta) = v$, $w^{[j]}(\sigma(j, k)) \in \partial\mathscr{V}(\sigma(j, k), s, y)$ pro $k = 1, 2, \ldots, 2^j - 1$; podle Věty D10.3.1 řešení $w^{[j]}$ najdeme nejdříve na intervalu $(\sigma(j, 2^j - 1), \sigma(j, 2^j)\rangle$, potom je užitím téže věty rozšíříme na interval $\langle\sigma(j, 2^j - 2), \sigma(j, 2^j)\rangle$ atd. Je

$$w^{[j]}(t_2) - w^{[j]}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(\tau, w^{[j]}(\tau))\,\mathrm{d}\tau \quad \text{pro} \quad t_1, t_2 \in \langle s, \zeta\rangle\,; \tag{D10.3.5}$$

odtud dostáváme, že je

$$\|w^{[j]}(t_2) - w^{[j]}(t_1)\| \leqq \varkappa|t_2 - t_1| \quad \text{pro} \quad t_1, t_2 \in \langle s, \zeta\rangle\,.$$

Podle Arzelàovy-Ascoliovy věty lze z posloupnosti $w^{[j]}$, $j = 2, 3, 4, \ldots$, vybrat stejnoměrně konvergentní posloupnosti $w^{[j_i]}$. Položme $w(t) = \lim_{i\to\infty} w^{[j_i]}(t)$ pro $t \in \langle s, \zeta\rangle$. Posloupnost složených funkcí $f(\tau, w^{[j_i]}(\tau))$ proměnné τ konverguje stejnoměrně k funkci $f(\tau, w(\tau))$. Píšeme-li v (D10.3.5) j_i místo j a provedeme-li limitní přechod pro $i \to \infty$, dostáváme, že platí

$$w(t_2) - w(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} f(\tau, w(\tau))\,\mathrm{d}\tau \quad \text{pro} \quad t_1, t_2 \in \langle s, \zeta\rangle\,,$$

tedy w je řešení rovnice (10.1.1). Zřejmě je $w(s) = y$, $w(\zeta) = v$. Protože je

$$\sigma(l, m) = \sigma(r + l, 2^r m) \quad \text{pro} \quad l = 2, 3, \ldots,\ m = 0, 1, \ldots, 2^l,\ r = 0, 1, 2, \ldots,$$

je

$$w^{[j_i]}(\sigma(l, m)) = w^{[j_i]}(\sigma(j_i, 2^{j_i - l}m)) \in \partial\mathscr{V}(\sigma(l, m), s, y)\,,$$

jakmile je $j_i > l$. Protože množina $\partial\mathscr{V}(\sigma(l, m), s, y)$ je uzavřená, je

$$w(\sigma(l, m)) \in \partial\mathscr{V}(\sigma(l, m), s, y) \tag{D10.3.6}$$

pro $l = 2, 3, \ldots, m = 0, 1, \ldots, 2^l$.

Je $w(t) \in \mathscr{V}(t, s, y)$ pro $t \in (s, \zeta)$. Nechť existuje takové $\eta \in (s, \zeta)$, že $w(\eta)$ je vnitřní bod množiny $\mathscr{V}(\eta, s, y)$. Položme $b = w(\eta)$ a najděme čísla $\hat{\delta}_1, \hat{\delta}_2$ podle Pomocné věty D10.3.5. Je $\|w(\lambda) - w(\eta)\| \leqq \varkappa(\lambda - \eta) \leqq \varkappa\hat{\delta}_1 < \hat{\delta}_2$ pro $\lambda \in \langle\eta, \eta + \hat{\delta}_1\rangle$, tedy $w(\lambda) \in B(b, \hat{\delta}_2)$ pro $\lambda \in \langle\eta, \eta + \hat{\delta}_1\rangle$ a podle Pomocné věty D10.3.5 je $w(\lambda)$ vnitřní bod množiny $\mathscr{V}(\lambda, s, y)$ pro $\lambda \in \langle\eta, \eta + \hat{\delta}_1\rangle$. To však není možné, protože existují taková čísla m, l ($l = 2, 3, \ldots, m = 0, 1, \ldots, 2^l$), že je $\sigma(l, m) \in (\eta, \eta + \hat{\delta}_1)$ a protože platí (D10.3.6). Je tedy $w(t) \in \partial\mathscr{V}(t, s, y)$ pro $t \in (s, \zeta)$ a Věta 10.2.4 je dokázána.

Dodatek 11.1. Nechť množina $H \subset K^r$ je otevřená, $h\colon H \to K^s$, $y \in H$, $w \in K^r$. Existuje-li

$$\lim_{\lambda \to 0, \lambda \in K} \lambda^{-1}[h(y + \lambda w) - h(y)], \tag{D11.1.1}$$

nazývá se *derivace funkce h v bodě y ve směru* w a značí se $D_w h(y)$. Je-li $w = e^{[k]}$, kde $e^{[k]} = \mathrm{col}(\delta_{k1}, \delta_{k2}, \dots, \delta_{kr})$ a $\delta_{kk} = 1$, $\delta_{ki} = 0$ pro $i \neq k$, nazývá se $D_w h(y)$ *parciální derivace funkce h* podle y_k a označuje se

$$\frac{\partial h}{\partial y_k}(y).$$

Nechť H_1 je množina takových bodů $x \in H$, že existuje $D_w h(x)$. $D_w h$ znamená funkci, která v každém bodě $x \in H_1$ nabývá hodnotu $D_w h(x)$; je tedy $D_w h \colon H_1 \to K^s$.

Existuje-li $D_w h(x)$ v každém bodě $x \in H$, závisí-li spojitě na x [jinak řečeno: je-li funkce $D_w h \colon H \to K^s$ spojitá], je-li $y + \lambda w \in H$ pro $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$, pak je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda} h(y + \lambda w) = D_w h(y + \lambda w) \quad \text{pro} \quad \lambda \in \langle 0, 1 \rangle,$$

a tedy je

$$h(y + w) - h(y) = \int_0^1 D_w h(y + \lambda w)\, \mathrm{d}\lambda. \tag{D11.1.2}$$

Nechť existuje lineární zobrazení $A \colon K^r \to K^s$ tak, že ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ takové, že je

$$\|h(y + w) - h(y) - Aw\| \leqq \varepsilon \|w\|,$$

jakmile je $\|w\| \leqq \delta$. A se nazývá *diferenciál funkce h v bodě y* a značí se $Dh(y)$. $Dh(y)$ je lineární zobrazení z K^r do K^s. Protože je $h = \mathrm{col}(h_1, h_2, \dots, h_s)$, $w = \mathrm{col}(w_1, w_2, \dots, w_r)$, můžeme zobrazení $Dh(y)$ popsat maticí, v jejímž i-tém řádku a j-tém sloupci je $\partial h_i / \partial y_j$, $i = 1, 2, \dots, s$, $j = 1, 2, \dots, r$.

Snadno se dokáže, že platí: Existuje-li $Df(y)$, pak existuje $D_z f(y)$ pro každé $z \in K^r$ a je $D_z f(y) = (Df(y))\, z$; místo $(Df(y))\, z$ se obvykle píše $Df(y)\, z$.

Nechť H_2 je množina takových $x \in H$, že existuje $Dh(x)$. Dh znamená zobrazení, které každý bod $x \in H_2$ zobrazuje na $Dh(x)$.

Existuje-li $Dh(y)$ v každém bodě $y \in H$ a závisí-li spojitě na y, pak existují parciální derivace $\partial h_i / \partial y_j$ v každém bodě $y \in H$ a jsou spojité. Naopak, existují-li parciální derivace $\partial h_i / \partial y_j$ v každém bodě $y \in H$ a jsou-li spojité, pak lze dokázat, že $Dh(y)$ existuje v každém bodě $y \in H$ a závisí spojitě na y [a také pro každý vektor $w \in K^r$ existuje $D_w h(y)$ a platí $D_w h(y) = (Dh(y))\, w = Dh(y)\, w$].

Nechť $Dh(y)$ existuje v každém bodě $y \in H$ a závisí spojitě na y. Nechť je $y^{[1]} + \lambda(y^{[2]} - y^{[1]}) \in H$ pro $\lambda \in \langle 0, 1 \rangle$. Podle (D11.1.2) je

$$h(y^{[2]}) - h(y^{[1]}) = \int_0^1 Dh(y^{[1]} + \lambda[y^{[2]} - y^{[1]}])\,(y^{[2]} - y^{[1]})\, \mathrm{d}\lambda =$$

$$= \int_0^1 Dh(y^{[1]} + \lambda[y^{[2]} - y^{[1]}])\, \mathrm{d}\lambda (y^{[2]} - y^{[1]}). \tag{D11.1.3}$$

Všimněme si ještě případu, kdy $r = 1$. V tomto případě $\mathrm{D}_1 h(y)$ znamená derivaci funkce h v bodě y ve směru vektoru $1 \in R$, tj.

$$\mathrm{D}_1 h(y) = \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}x}(y) = h'(y) .$$

Pro $a \in R$ zřejmě platí

$$\mathrm{D}_a h(y) = \mathrm{D}_1 h(y)\, a = h'(y)\, a ,$$

a proto diferenciál $\mathrm{D}h(y)$ můžeme ztotožnit s derivací $h'(y)$.

Dodatek 11.2. Nechť L znamená buď C, nebo R a nechť G je podmnožina prostoru $L^l \times K^m$. Je-li $x \in L^l$, nechť

$$G_{(x,.)} = \{y \in K^m | (x, y) \in G\} ;$$

je-li $y \in K^m$, nechť

$$G_{(.,y)} = \{x \in L^l | (x, y) \in G\} .$$

Je-li G otevřená množina, je také množina $G_{(x,.)}$ otevřená v K^m a $G_{(.,y)}$ je otevřená v L^l. Je-li $f: G \to K^s$, $(x, y) \in G$, $x \in L^l$, $y \in K^m$, je $f(x, y)$ hodnota funkce f v bodě (x, y). Je-li $x \in L^l$, je $f(x, .)$ funkce, která vznikne z funkce f tím, že první proměnnou fixujeme na hodnotě x, tedy $f(x, .)$: $G_{(x,.)} \to K^s$, $f(x, .)(y) = f(x, y)$. Obdobně pro $y \in K^m$ je $f(., y)$: $G_{(.,y)} \to K^s$, $f(., y)(x) = f(x, y)$. Nechť množina G je otevřená, $(\tilde{x}, \tilde{y}) \in G$, $u \in L^l$. Má-li funkce $f(., \tilde{y})$ derivaci $D_u f(., \tilde{y})(\tilde{x})$ v bodě $\tilde{x}$ ve směru u, značíme ji $\mathrm{D}_u^{(1)} f(\tilde{x}, \tilde{y})$ a nazýváme ji derivací funkce f podle první proměnné v bodě $(\tilde{x}, \tilde{y})$ ve směru u. Nechť G_1 je množina takových bodů $(x, y) \in G$, že existuje $\mathrm{D}_u^{(1)} f(x, y)$; $\mathrm{D}_u^{(1)} f$ znamená funkci, která v každém bodě $(x, y) \in G_1$ nabývá hodnotu $\mathrm{D}_u^{(1)} f(x, y)$; je tedy $\mathrm{D}_u^{(1)} f$: $G_1 \to K^s$.

Má-li funkce $f(., \tilde{y})$ diferenciál v bodě $\tilde{x}$, značíme jej $\mathrm{D}^{(1)} f(\tilde{x}, \tilde{y})$ a nazýváme jej diferenciálem funkce f vzhledem k první proměnné v bodě $(\tilde{x}, \tilde{y})$. $\mathrm{D}^{(1)} f(\tilde{x}, \tilde{y})$ je lineární zobrazení z L^l do K^s. Snadno lze dokázat, že platí: Existuje-li $\mathrm{D}^{(1)} f(\tilde{x}, \tilde{y})$, pak pro každé $z \in L^l$ existuje $\mathrm{D}_z^{(1)} f(\tilde{x}, \tilde{y})$ a je $\mathrm{D}_z^{(1)} f(\tilde{x}, \tilde{y}) = [\mathrm{D}^{(1)} f(\tilde{x}, \tilde{y})]\, z$. Místo $[\mathrm{D}^{(1)} f(\tilde{x}, \tilde{y})]\, z$ se obvykle píše $\mathrm{D}^{(1)} f(\tilde{x}, \tilde{y})\, z$.

Nechť G_2 je množina takových $(x, y) \in G$, že existuje $\mathrm{D}^{(1)} f(x, y)$. $\mathrm{D}^{(1)} f$ je zobrazení, které každý bod $(x, y) \in G_2$ zobrazuje na $\mathrm{D}^{(1)} f(x, y)$.

Je-li $l = 1$, znamená $\mathrm{D}_1^{(1)} f(\tilde{x}, \tilde{y})$ derivaci funkce f vzhledem k první proměnné v bodě $(\tilde{x}, \tilde{y})$ ve směru vektoru $1 \in R$, tedy

$$\mathrm{D}_1^{(1)} f(\tilde{x}, \tilde{y}) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y)$$

a obdobně jako na konci Dodatku 11.1 lze ukázat, že diferenciál $\mathrm{D}^{(1)} f(\tilde{x}, \tilde{y})$ můžeme ztotožnit s parciální derivací

$$\frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x}, \tilde{y}).$$

Obdobně postupujeme v případě druhé proměnné. Např. je-li $v \in K^m$, znamená $D_v^{(2)} f(\tilde{x}, \tilde{y})$ derivaci funkce f podle druhé proměnné v bodě $(\tilde{x}, \tilde{y})$ ve směru v. Rovněž v případě, že f je funkce více proměnných, užíváme obdobných pojmů a obdobného značení.

Dodatek 11.3. Naznačíme jak Větu 11.2.9 lze převést na Větu 11.2.6. Bez ztráty na obecnosti můžeme předpokládat, že funkce ϱ je omezená (v případě potřeby zmenšíme čísla v_1, v_2). Z (11.2.21) lze odvodit, že ke každému $k = 1, 2, 3, \ldots$ existuje číslo $\mu_k > 0$ takové, že platí: Má-li funkce $\zeta: \langle \alpha, \beta \rangle \to R$ spojitou derivaci, platí-li $|\zeta'(t) - \varrho(t, \zeta(t))| \leqq \mu_k$ pro $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$ a existuje-li $\tau \in \langle \alpha, \beta \rangle$ tak, že $|\zeta(\tau)| \leqq \mu_k$, pak $|\zeta(t)| < v_2/k$ pro $t \in \langle \alpha, \beta \rangle$. Odtud plyne, že stačí zvolit spojitou funkci $\lambda: H \to R$ tak, aby bylo $\lambda(t, \xi) > 0$ pro $(t, \xi) \in H$, $\xi \neq 0$, $\lambda(t, 0) = 0$ pro $t \in (t_0 - v_1, t_0 + v_1)$, $\lambda(t, \xi) < \mu_k$ pro $(t, \xi) \in H$, $|\xi| \leqq v_2/k$, a položit $\chi = \varrho + \lambda$.

Dodatek 12.1. Ukážeme, jak lze pozměnit důkaz Věty 12.1.4 tak, abychom neužili předpokladu, že rovnice (10.1.1) je jednoznačná. Větu 12.1.4 opět dokážeme nepřímo. Tak jako v původním důkazu předpokládáme, že Věta 12.1.4 neplatí, a dokážeme, že existuje posloupnost t_{k_i} tak, že $(t_{k_i}, u(t_{k_i})) \in P$ pro $i = 1, 2, 3, \ldots$, $\lim_{i \to \infty} u(t_{k_i}) = z$, $\lim_{i \to \infty} t_{k_i} = \beta$. Čísla $\delta_1, \delta_2 > 0$ budou opět taková, že tvrzení Věty (10.1.1) platí pro $(t_0, \tilde{x}) = (\beta, z)$ a číslo j bude takové, že $\beta - \delta_1 < t_j < \beta$, $\|u(t_j) - z\| < \delta_2$. Dále postupujeme odlišným způsobem.

Podle tvrzení (10.1.4) je $\|u(t) - \tilde{x}\| < 2\delta_2$ pro $t_j \leqq t < \beta$, tedy

$$(u(t), t) \in Q(\beta, z, \delta_1, 2\delta_2) \quad \text{pro} \quad t_j \leqq t < \beta.$$

Množina $Q(\beta, z, \delta_1, 2\delta_2) \subset G$ je kompaktní, proto existuje $\varkappa \in R$ tak, že je $\|f(t, x)\| \leqq \varkappa$ pro $(t, x) \in Q(\beta, z, \delta_1, 2\delta_2)$. Z rovnice

$$u(s_2) - u(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} f(t, u(t))\, \mathrm{d}t \quad \text{pro} \quad s_1, s_2 \in (\alpha, \beta) \tag{D12.1.1}$$

plyne odhad $\|u(s_2) - u(s_1)\| \leqq \varkappa |s_2 - s_1|$ pro $s_1, s_2 \in \langle t_j, \beta)$. Odtud a z rovnice $\lim_{i \to \infty} u(t_{k_i}) = z$ plyne $\lim_{t \to \beta-} u(t) = z$. Položme $v(t) = u(t)$ pro $t \in (\alpha, \beta)$, $v(\beta) = z$; z (D12.1.1) plyne, že je

$$v(s) - v(t_j) = \int_{t_j}^{s} f(t, v(t))\, \mathrm{d}t \quad \text{pro} \quad s \in (\alpha, \beta\rangle,$$

a podle Věty 3.3.4 funkce $v: (\alpha, \beta\rangle \to K^n$ je řešením rovnice (10.1.1). To však odporuje předpokladu, že řešení u je maximální. Věta 12.1.4 platí tedy i bez předpokladu, že rovnice (10.1.1) je jednoznačná.

Dodatek 13.1. Nechť množina $H \subset C^k$ je otevřená, $\zeta : H \to C$.

D13.1.1. Definice: *Funkce* ζ se nazývá *holomorfní* v H, lze-li ji v jiném okolí každého bodu $w = \text{col}\,(w_1, \ldots, w_k) \in H$ rozvinout v absolutně konvergentní mocninnou řadu o středu w, tj. existují-li $\delta > 0$ a čísla $a_{i_1 \ldots i_k} \in C$ tak, že platí

$$\zeta(z) = \sum_{i_1, \ldots, i_k = 0}^{\infty} a_{i_1 \ldots i_k} (z_1 - w_1)^{i_1} (z_2 - w_2)^{i_2} \ldots (z_k - w_k)^{i_k} \tag{D13.1.1}$$

pro $|z_i - w_i| < \delta$, $i = 1, 2, \ldots, k$, přičemž řada v (D13.1.1) konverguje absolutně.

Základní vlastnosti holomorfních funkcí více komplexních proměnných jsou vyloženy např. v [30], kap. 1. Zejména platí

D13.1.2. Věta: *Funkce* ζ *je holomorfní v* H *právě tehdy, je-li spojitá a má-li spojité parciální derivace* $\partial\zeta/\partial z_1, \ldots, \partial\zeta/\partial z_k$. Viz [30], kap. 1, Větu 13.

D13.1.3. Věta: *Nechť funkce* $\zeta : H \to C$ *je holomorfní,* $w = \text{col}\,(w_1, \ldots, w_k) \in H$, $0 < R_1 \leqq \infty, \ldots, 0 < R_k \leqq \infty$, *a nechť platí*

$$Q = \{z = \text{col}\,(z_1, \ldots, z_k) \in C^k \mid |z_i - w_i| < R_i\,,$$
$$i = 1, 2, \ldots, k\} \subset H\,. \tag{D13.1.2}$$

Potom řada v (D13.1.1) *konverguje absolutně a rovnost platí pro* $t \in Q$.

Viz [30], kap. 1, dodatek k Větě 13. Platí i vzorec obdobný Cauchyovu vzorci. Nechť funkce $\zeta : H \to C$ je holomorfní, $r_1 > 0, \ldots, r_k > 0$. Položme

$$Q_1 = \{z \in C^k \mid |z_i - w_i| < r_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, k\}\,,$$
$$\bar{Q}_1 = \{z \in C^k \mid |z_i - w_i| \leqq r_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, k\}\,,$$
$$S_i = \{y \in C \mid |y - w_i| = r_i\}\,, \; i = 1, 2, \ldots, k\,.$$

Nechť je $\bar{Q}_1 \subset H$. Potom platí

$$\zeta(z) = \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^k \int_{S_1} \left[\int_{S_2} \cdots \left(\int_{S_k} \frac{\zeta(y_1, \ldots, y_k)}{(y_1 - z_1) \ldots (y_k - z_k)}\, dy_k\right) \ldots dy_2\right] dy_1 \tag{D13.1.3}$$

pro $z \in Q_1$ (viz [30], kap. 1, Věty 13, 12).

Ze vzorce (D13.1.3) se odvozují vzorce pro koeficienty $a_{i_1, \ldots, i_k}$ rozvoje (D13.1.1)

$$a_{i_1, \ldots, i_k} = \frac{1}{(2\pi i)^k} \int_{S_1} \left[\int_{S_2} \cdots\right.$$
$$\left.\cdots \left(\int_{S_k} \frac{\zeta(y_1, \ldots, y_k)}{(y_1 - w_1)^{i_1 + 1} \ldots (y_k - w_k)^{i_k + 1}}\, dy_k\right) \ldots dy_2\right] dy_1\,. \tag{D13.1.4}$$

Nechť je $\varkappa > 0$ a nechť je

$$|\zeta(y_1, \ldots, y_k)| \leqq \varkappa \quad \text{pro} \quad y_1 \in S_1, \ldots, y_k \in S_k\,.$$

Potom ze vzorce (D13.1.4) plyne odhad

$$|a_{i_1 \dots i_k}| \leqq \frac{\varkappa}{r_1^{i_1} \dots r_k^{i_k}} \tag{D13.1.5}$$

(viz [30], kap. 1, Větu 12).

Z odhadu (D13.1.5) plyne, že řada v (D13.1.1) konverguje absolutně a stejnoměrně, je-li $|z_1| \leqq \varrho_1, \dots, |z_k| \leqq \varrho_k$, kde $0 < \varrho_1 < r_1, \dots, 0 < \varrho_k < r_k$. (Stále předpokládáme, že je $\bar{Q} \subset H$.)

D13.1.4. Poznámka: Funkci $\Gamma: H \to C^l$, $\Gamma = \mathrm{col}(\Gamma_1, \dots, \Gamma_l)$, kde $\Gamma_j: H \to C$, $j = 1, 2, \dots, l$, nazveme holomorfní v H, jsou-li funkce Γ_j, $j = 1, 2, \dots, l$, holomorfní v H. Na funkci Γ se snadno přenesou všechna tvrzení o funkci ξ včetně vzorců (D13.1.3), (D13.1.4) a odhadu (D13.1.5). Snadno se též dokáže, že funkce $\Xi: H \to C^l$ je holomorfní právě tehdy, jestliže ji lze v jistém okolí každého bodu $w \in H$ rozvinout v absolutně konvergentní mocninnou řadu o středu w, tj. existují-li $\delta > 0$ a body $a_{i_1 \dots i_k} \in C^l$ tak, že platí

$$\Xi(z) = \sum_{i_1, \dots, i_k = 0}^{\infty} a_{i_1 \dots i_k} (z_1 - w_1)^{i_1} (z_2 - w_2)^{i_2} \dots (z_k - w_k)^{i_k}$$

pro $|z_i - w_i| < \delta$, $i = 1, 2, \dots, k$, přičemž konverguje řada

$$\sum_{i_1, \dots, i_k = 0}^{\infty} \|a_{i_1 \dots i_k}\| \, |z_1 - w_1|^{i_1} \, |z_2 - w_2|^{i_2} \dots |z_k - w_k|^{i_k} .$$

Dodatek 13.2. Je-li $(t, t_0, \tilde{x}) \in \hat{G}$, $v, w \in R^n$, položme $\Omega = \Phi(t, t_0, .)$; je $\Omega: \hat{G}(t, t_0, .) \to R^n$. Definujeme $\mathrm{D}_v^{(3)} \mathrm{D}_w^{(3)} \Phi(t, t_0, \tilde{x}) = \mathrm{D}_v(\mathrm{D}_w \Omega(\tilde{x}))$.

Dodatek 13.3. Nechť množina $H \subset R^n$ je otevřená, $g: H \to R^n$ a nechť existuje derivace $\mathrm{D}_y g(x)$ pro každý bod $x \in H$, $y \in R^n$. Funkce g má v bodě $\tilde{x} \in H$ diferenciál druhého řádu, existuje-li $\mathrm{D}_v \mathrm{D}_w g(\tilde{x})$ pro každou dvojici $v, w \in R^n$ a je-li $\mathrm{D}_v \mathrm{D}_w g(\tilde{x})$ symetrická bilineární forma proměnných v, w [tj. existují-li vektory $h^{[ij]} \in R^n$, $h^{[ij]} = h^{[ji]}$, tak, že je $\mathrm{D}_v \mathrm{D}_w g(\tilde{x}) = \sum_{i,j=1}^{n} h^{[ij]} v_i w_j$]. V takovém případě se forma $\mathrm{D}_v \mathrm{D}_w g(\tilde{x})$ proměnných v, w nazývá *diferenciál druhého řádu funkce g v bodě $\tilde{x}$*.

Dodatek 14.1. Důkaz Věty 14.1.3: Pro $\varepsilon > 0$ položme

$$\mathscr{K}(\varepsilon) = \{(t, x) | \, t_0 \leqq t \leqq \delta, \; \|x - u(t)\| \leqq \varepsilon\} .$$

Množina $\mathscr{K}(\varepsilon)$ je kompaktní a existuje takové číslo $\varepsilon_0 > 0$, že je $\mathscr{K}(\varepsilon) \subset G$ pro $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0$. Ukážeme, že ke každému ε, $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0$, existuje číslo $l(\varepsilon)$ tak, že je $\beta_k > \delta$, $(t, u^{[k]}(t)) \in \mathscr{K}(\varepsilon)$ pro $t \in \langle t_0, \delta \rangle$, $k \geqq l(\varepsilon)$. V opačném případě existovalo by číslo ε, $0 < \varepsilon \leqq \varepsilon_0$, vybraná posloupnost k_i a čísla τ_i, $t_0 < \tau_i \leqq \delta$, tak, že by bylo

$$\|u^{[k_i]}(t) - u(t)\| < \varepsilon \quad \text{pro} \quad t_0 \leqq t < \tau_i, \tag{D14.1.1}$$

$$\|u^{[k_i]}(\tau_i) - u(\tau_i)\| = \varepsilon \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, 3, \dots. \tag{D14.1.2}$$

Je

$$u^{[k_i]}(s_2) - u^{[k_i]}(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} f(t, u^{[k_i]}(t))\,\mathrm{d}t \quad \text{pro} \quad s_1, s_2 \in \langle t_0, \tau_i \rangle. \tag{D14.1.3}$$

Protože $f_k \to f$ stejnoměrně na $\mathscr{K}(\varepsilon_0)$ a protože f je omezená na $\mathscr{K}(\varepsilon_0)$, existuje $\varkappa > 0$ tak, že je $\|f_k(t, x)\| \leqq \varkappa$ pro $k = 1, 2, 3, \dots, (t, x) \in \mathscr{K}(\varepsilon_0)$.

Protože platí (D14.1.1), plyne z (D14.1.3)

$$\|u^{[k_i]}(s_2) - u^{[k_i]}(s_1)\| \leqq \varkappa|s_2 - s_1| \quad \text{pro} \quad s_1, s_2 \in \langle t_0, \tau_i \rangle$$

a odtud

$$\tau_i \geqq t_0 + \varkappa^{-1}[\varepsilon - \|u^{[k_i]}(t_0) - \tilde{x}\|]. \tag{D14.1.4}$$

Položme

$$v^{[i]}(t) = u^{[k_i]}(t) \quad \text{pro} \quad t \in \langle t_0, \tau_i \rangle,$$

$$v^{[i]}(t) = u^{[k_i]}(\tau_i) \quad \text{pro} \quad t \in (\tau_i, \delta \rangle, \quad i = 1, 2, 3, \dots.$$

Vzhledem k Arzelàově-Ascoliově větě lze vybrat posloupnost i_j tak, že posloupnost $w^{[j]} = v^{[i_j]}$ konverguje stejnoměrně na $\langle t_0, \delta \rangle$ a že číselná posloupnost $\sigma_j = \tau_{i_j}$ konverguje. Položme $\sigma = \lim_{j \to \infty} \sigma_j$, $w(t) = \lim_{j \to \infty} w^{[j]}(t)$ pro $t \in \langle t_0, \sigma \rangle$. Z (D14.1.4) a z podmínky $\lim_{k \to \infty} u^{[k]}(t_0) = \tilde{x}$ plyne $\sigma \geqq t_0 + \varkappa^{-1}\varepsilon$. Je

$$w^{[j]}(s_2) - w^{[j]}(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} f(t, w^{[j]}(t))\,\mathrm{d}t \quad \text{pro} \quad s_1, s_2 \in \langle t_0, \sigma_j \rangle,$$

s limitním přechodem pro $j \to \infty$ dostáváme

$$w(s_2) - w(s_1) = \int_{s_1}^{s_2} f(t, w(t))\,\mathrm{d}t \quad \text{pro} \quad s_1, s_2 \in \langle t_0, \sigma \rangle.$$

Protože je $\lim_{k \to \infty} u^{[k]}(t_0) = \tilde{x}$, je i $w(t_0) = \tilde{x}$. Z (D14.1.2) plyne $\|w(\sigma) - u(\sigma)\| = \varepsilon$. Je tedy $w\colon \langle t_0, \sigma \rangle \to K^n$ řešení rovnice (14.1.7) takové, že je $w(t_0) = \tilde{x}$, $w(\sigma) \neq u(\sigma)$, a to odporuje podmínce (14.1.8). Tedy je $\beta_k > \delta$ pro všechna dostatečně veliká k a $u^{[k]}(t) \to u(t)$ stejnoměrně na $\langle t_0, \delta \rangle$. Obdobně se dokáže, že je $\alpha_k < \gamma$ pro všechna dostatečně velká k a že $u^{[k]}(t) \to u(t)$ stejnoměrně na $\langle \gamma, t_0 \rangle$. Věta 14.1.3 je dokázána.

Dodatek 14.2. Holomorfní funkce $\eta\colon C \to C$ se nazývá *celistvá funkce*. Existují-li čísla $\alpha, \beta > 0$ tak, že je

$$|\eta(z)| \leqq \alpha\,\mathrm{e}^{\beta|z|} \quad \text{pro} \quad z \in C,$$

pak funkce η se nazývá *funkce exponenciálního typu*.

Dodatek 15.1. Naznačíme důkaz Věty 15.3.2. Důkaz provedeme v několika krocích. Budeme užívat euklidovské normy, tj. pro $x \in K^l$, $A \in M_l$ položíme

$$\|x\| = \sum_{i=1}^{l} |x_i|^2 , \quad \|A\| = \sup \{ \|Ax\| \mid x \in K^l, \|x\| \leqq 1 \} . \tag{D15.1.1}$$

Položme $\mathrm{D}g(0) = \hat{A}$. Kladná čísla ϱ_+, ϱ_- a χ zvolme tak, aby platilo

$\varrho_+ + 2\chi \leqq \operatorname{Re} \lambda$ pro každé takové vlastní číslo λ matice $\hat{A}$, že je $0 < \operatorname{Re} \lambda$,

$\operatorname{Re} \lambda \leqq -(\varrho_- + 2\chi)$ pro každé takové vlastní číslo λ matice $\hat{A}$, že je $\operatorname{Re} \lambda < 0$. (D15.1.2)

Rovnici (15.1.2) zapíšeme ve tvaru

$$\dot{v} = \hat{A}v + \hat{h}(v) ; \tag{D15.1.3}$$

je $\hat{h}(x) = g(x) - \mathrm{D}g(0)\, x$ pro $x \in H$; tedy platí:

V každém bodě x existuje diferenciál $\mathrm{D}\hat{h}(x)$, závisí spojitě na x a je $\hat{h}(0) = 0$, $\mathrm{D}\hat{h}(0) = 0$. (D15.1.4)

Rovnici (D15.1.3) zjednodušíme lineárními substitucemi. Je-li $K = C$, najdeme regulární matici B tak, aby matice $\tilde{A} = B^{-1}\hat{A}B$ byla v Jordanově tvaru [viz odst. 5.1]. Je-li $K = R$, najdeme regulární reálnou matici B tak, aby matice $\tilde{A} = B^{-1}\hat{A}B$ měla tvar (5.2.3). V obou případech je pořádek bloků na diagonále v blokově diagonální matici $\tilde{A}$ libovolný, a tak můžeme předpokládat, že je

$$\begin{aligned} &\lambda_j > 0 , \quad \text{resp.} \quad \mu_j > 0 \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, \ldots, l , \\ &\lambda_j < 0 , \quad \text{resp.} \quad \mu_j < 0 \quad \text{pro} \quad j = l + 1, \ldots, r . \end{aligned} \tag{D15.1.5}$$

Rovnice (D15.1.3) přejde substitucí $v = By$ v rovnici

$$\dot{y} = \tilde{A}y + \tilde{h}(y) . \tag{D15.1.6}$$

Je $\tilde{h}(y) = B^{-1}\, \hat{h}(By)$ a tak funkce $\tilde{h}$ splňuje (D15.1.4). Je

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} \tilde{D}_1 & & & \\ & \tilde{D}_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \tilde{D}_r \end{pmatrix},$$

kde $\tilde{D}_j$ má tvar (5.2.4) nebo (5.2.5). Má-li $\tilde{D}_j$ tvar (5.2.4) a řád k_j, položme

$$F_j = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \chi & & \\ & & \cdots & \\ & & & \chi^{k_j - 1} \end{pmatrix}.$$

Má-li D_j tvar (5.2.5) a řád k_j (k_j je sudé), položme

$$F_j = \begin{pmatrix} 1 & & & & & & \\ & 1 & & & & & \\ & & \chi & & & & \\ & & & \chi & & & \\ & & & & \ldots & & \\ & & & & & \chi^{(k_j-1)/2} & \\ & & & & & & \chi^{(k_j-1)/2} \end{pmatrix}.$$

Nechť je

$$F = \begin{pmatrix} F_1 & & & \\ & F_2 & & \\ & & \ldots & \\ & & & F_r \end{pmatrix}.$$

F je regulární matice řádu n. Rovnice (D15.1.4) přejde substitucí $y = Fx$ v rovnici

$$\dot{x} = Ax + h(x), \tag{D15.1.7}$$

kde $A = F^{-1}\tilde{A}F$, $h(x) = F^{-1}\tilde{h}(Fx)$. Funkce h zřejmě splňuje (D15.1.4). Je

$$A = \begin{pmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ldots & \\ & & & D_r \end{pmatrix}, \tag{D15.1.8}$$

kde

$$D_j = \begin{pmatrix} \lambda_j, & \chi, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & \lambda_j, & \chi, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & \lambda_j \end{pmatrix}$$

nebo

$$D_j = \begin{pmatrix} \mu_j, & \nu_j, & \chi, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ -\nu_j, & \mu_j, & 0, & \chi, & 0, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & \mu_j, & \nu_j, & \chi, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -\nu_j, & \mu_j, & 0, & \chi, & \ldots, & 0, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & \mu_j, & \nu_j \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \ldots, & -\nu_j, & \mu_j \end{pmatrix}.$$

Přitom platí (D15.1.5). Položme $k = \sum_{j=1}^{l} k_j$ [k_j je řád matice D_j]; je $0 < k < n$.

Položme

$$A_+ = \begin{pmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \dots & \\ & & & D_l \end{pmatrix}, \quad A_- = \begin{pmatrix} D_{l+1} & & & \\ & D_{l+2} & & \\ & & \dots & \\ & & & D_r \end{pmatrix},$$

$$V_1(t) = \begin{pmatrix} e^{A_+t}, & 0 \\ 0, & 0 \end{pmatrix}, \quad V_2(t) = \begin{pmatrix} 0, & 0 \\ 0, & e^{A_-t} \end{pmatrix},$$

[V_1, V_2 jsou matice řádu n; je $V_1(t) + V_2(t) = e^{At}$].

$$X_+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) |\ x_i \in K,\ i = 1, 2, \dots, n,\ x_{k+1} = x_{k+2} = \dots = x_n = 0\},$$

$$X_- = \{x = (x_1, \dots, x_n) |\ x_i \in K,\ i = 1, 2, \dots, n,\ x_1 = x_2 = \dots = x_k = 0\},$$

$$U_+ = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in X_+ |\ \sum_{i=1}^{k} |x_i|^2 < \varepsilon^2\},$$

$$U_- = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in X_- |\ \sum_{i=k+1}^{n} |x_i|^2 < \varepsilon^2\};$$

přitom $\varepsilon > 0$ je tak malé, že $h(x)$ je definováno pro $x \in U_+ \dotplus U_-$, a později bude na ε kladena ještě další podmínka. [U_+ a U_- jsou koule; při zpětné transformaci rovnice (D15.1.7) v rovnici (D15.1.3) se z nich stanou elipsoidy.]

Pro $x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n$ pišme

$$x = x_+ + x_-,$$

kde $x_+ = (x_1, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$, $x_- = (0, \dots, 0, x_{k+1}, \dots, x_n)$. Funkce $w: \langle t_0, \infty) \to K^n$ je řešením rovnice (D15.1.7) právě tehdy, platí-li pro libovolné $\sigma, \tau \in \langle t_0, \infty)$

$$w(\tau) = e^{A(\tau-\sigma)} w(\sigma) + \int_\sigma^\tau e^{A(\tau-\xi)} h(w(\xi))\, d\xi.$$

Tuto rovnici můžeme zapsat jako soustavu rovnic

$$w_+(\tau) = V_1(\tau - \sigma)\, w_+(\sigma) + \int_\sigma^\tau V_1(\tau - \xi)\, h(w(\xi))\, d\xi, \tag{D15.1.9}$$

$$w_-(\tau) = V_2(\tau - \sigma)\, w_-(\sigma) + \int_\sigma^\tau V_2(\tau - \xi)\, h(w(\xi))\, d\xi$$

$$\text{pro} \quad \tau, \sigma \in \langle t_0, \infty), \tag{D15.1.10}$$

kde $w_+(\tau) = (w(\tau))_+$, $w_-(\tau) = (w(\tau))_-$. Je $V_1(\alpha)\, V_1(\beta) = V_1(\alpha + \beta)$ pro $\alpha, \beta \in R$. Násobíme-li rovnici (D15.1.9) zleva maticí $V_1(\sigma - \tau)$, upravíme ji na

$$w_+(\sigma) = V_1(\sigma - \tau)\, w_+(\tau) - \int_\sigma^\tau V_1(\sigma - \xi)\, h(w(\xi))\, d\xi. \tag{D15.1.11}$$

Je ovšem $\lim\limits_{t\to\infty} V_1(-t) = 0$. Je-li

$$w(t) \in U_+ \dotplus U_- \quad \text{pro} \quad t \in \langle t_0, \infty) , \tag{D15.1.12}$$

můžeme v rovnici (D15.1.11) přejít k limitě pro $\tau \to \infty$. Dostáváme (nakonec píšeme τ místo σ)

$$w_+(\tau) = -\int_\tau^\infty V_1(\tau - \xi)\, h(w(\xi))\, \mathrm{d}\xi . \tag{D15.1.13}$$

Dokázali jsme, že platí

D15.1.1. Pomocná věta: *Splňuje-li řešení w rovnice* (D15.1.7) *podmínku* (D15.1.12), *pak platí* (D15.1.10), (D15.1.13).

Nechť je

$$0 < L < \tfrac{1}{2}\varrho_+ , \quad L < \tfrac{1}{2}\varrho_- ,$$

$$L[2\varrho_+\varrho_- - L(\varrho_+ + \varrho_-)] \leqq \chi[\varrho_+\varrho_- - L(\varrho_+ + \varrho_-)] . \tag{D15.1.14}$$

Nadále budeme předpokládat, že $\varepsilon > 0$ je tak malé, že platí

$$\|h(u) - h(v)\| \leqq L\|u - v\| \quad \text{pro} \quad u, v \in U_+ \dotplus U_- . \tag{D15.1.15}$$

D15.1.2. Pomocná věta: *Nechť funkce* $w\colon \langle t_0, \infty) \to U_+ \dotplus U_-$ *splňuje soustavu* (D15.1.13), (D15.1.10), *kde* $\sigma = t_0$. *Potom w je řešení rovnice* (D15.1.7) *a platí*

$$\lim_{t\to\infty} w(t) = 0 . \tag{D15.1.16}$$

Důkaz: Nechť $u\colon R \to K^k$ je řešení rovnice $\dot{x} = A_+x$. Z tvaru matice A_+ plyne, že je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \sum_{i=1}^k |u_i(t)|^2 = 2 \operatorname{Re} \sum_{i=1}^k u_i(t)\, \dot{u}_i(t) \geqq 2(\varrho_+ + \chi) \sum_{i=1}^k |u_i(t)|^2 ,$$

tedy je

$$\|u(t)\|^2 \geqq \mathrm{e}^{2(\varrho_+ + \chi)(t-s)} \|u(s)\|^2 \quad \text{pro} \quad t \geqq s ,$$

$$\|u(s)\| \leqq \mathrm{e}^{(\varrho_+ + \chi)s} \|u(0)\| \quad \text{pro} \quad s < 0 ,$$

a proto platí

$$\|V_1(s)\| = \|\mathrm{e}^{A_+s}\| \leqq \mathrm{e}^{(\varrho_+ + \chi)s} \quad \text{pro} \quad s \leqq 0 . \tag{D15.1.17}$$

Obdobně je

$$\|V_2(t)\| = \|\mathrm{e}^{A_-t}\| \leqq \mathrm{e}^{-(\varrho_- + \chi)t} \quad \text{pro} \quad t \geqq 0 . \tag{D15.1.18}$$

Z rovnic (D15.1.13), (D15.1.10) plynou nerovnosti

$$\|w_+(\tau)\| \leqq L \int_\tau^\infty \mathrm{e}^{-\varrho_+(\xi-\tau)} [\|w_+(\xi)\| + \|w_-(\xi)\|]\, \mathrm{d}\xi , \tag{D15.1.19}$$

$$\|w_-(\tau)\| \leqq e^{-\varrho(\tau-t_0)}\|w_-(t_0)\| + L\int_{t_0}^{\tau} e^{-\varrho_-(\tau-\xi)}(\|w_+(\xi)\| +$$
$$+ \|w_-(\xi)\|)\,d\xi\,. \tag{D15.1.20}$$

Položme $\eta = \limsup_{\tau\to\infty} (\|w_+(\tau)\| + \|w_-(\tau)\|)$. Je $0 \leqq \eta < \infty$. Nerovnosti (D15.1.19), (D15.1.20) sečteme a odvodíme [integrál na pravé straně v (D15.1.20) zapíšeme jako součet integrálů

$$\int_{t_0}^{(\tau+t_0)/2} + \int_{(\tau+t_0)/2}^{\tau}$$

a odhadneme výrazem

$$\varrho_-^{-1}\,e^{-\varrho_-\tau/2} \sup_{\xi\geq t_0} (\|w_+(\xi)\| + \|w_-(\xi)\|) +$$
$$+ \varrho_-^{-1} \sup_{(\tau+t_0)/2\leqq\xi\leqq\tau} (\|w_+(\xi)\| + \|w_-(\xi)\|)]\,,$$

že platí $\eta \leqq L(\varrho_+^{-1} + \varrho_-^{-1})\,\eta$. Je tedy $\eta = 0$ a platí (D15.1.16). Derivováním rovnic (D15.1.10), (D15.1.13) se přesvědčíme, že w je řešením rovnice (D15.1.7). Pomocná věta D15.1.2 je dokázána.

Zajímáme-li se o řešení $w: \langle t_0, \infty) \to U_+ \dotplus U_-$ rovnice (D15.1.7), pak podle Pomocných vět D15.1.1, D15.1.2 postačí, vyšetříme-li řešení $w: \langle t_0, \infty) \to U_+ \dotplus U_-$ soustavy (D15.1.13), (D15.1.10).

D15.1.3. Pomocná věta: *Ke každému $a \in U_-$ existuje řešení $w: \langle 0, \infty) \to U_+ \dotplus U_-$ soustavy* (D15.1.13), (D15.1.10), *kde $\sigma = 0$, takové, že je $w_-(0) = a$. Řešení w je určeno jednoznačně.*

Důkaz: Snadno zjistíme, že pro $0 \leqq \gamma \leqq 1$, $\tau \geqq 0$ je

$$e^{-\varrho_-\tau} + \gamma(1 - e^{-\varrho_-\tau}) \leqq 1\,. \tag{D15.1.21}$$

Nechť $\mathscr{P}$ je množina spojitých funkcí $v: \langle 0, \infty) \to U_+ \dotplus U_-$. Definujme zobrazení Γ tak, že pro $v \in \mathscr{P}$ položíme $\Gamma v = z$, kde

$$z_+(\tau) = -\int_{\tau}^{\infty} V_1(\tau - \xi)\,h(v(\xi))\,d\xi\,,$$
$$z_-(\tau) = V_2(\tau)\,v_-(0) + \int_0^{\tau} V_2(\tau - \xi)\,h(v(\xi))\,d\xi\,. \tag{D15.1.22}$$

Je

$$\|z_+(\tau)\| \leqq L\int_{\tau}^{\infty} e^{-\varrho_+(\xi-\tau)}[\|v_+(\xi)\| + \|v_-(\xi)\|]\,d\xi \leqq 2L\varrho_+^{-1}\varepsilon < \varepsilon\,,$$

$$\|z_-(\tau)\| \leqq e^{-\varrho_-\tau}\varepsilon + 2L\varepsilon\int_0^{\tau} e^{-\varrho_-(\tau-\xi)}\,d\xi =$$
$$= \varepsilon[e^{-\varrho_-\tau} + 2L\varrho_-^{-1}(1 - e^{-\varrho_-\tau})] \leqq \varepsilon$$

(viz D15.1.21), tedy je $z \in \mathscr{P}$, zobrazení Γ zobrazuje množinu $\mathscr{P}$ do sebe. Je ovšem

$z_-(0) = v_-(0)$. Nechť je ještě $\hat{v} \in \mathscr{P}$, $\hat{v}_-(0) = v_-(0)$, $\hat{z} = \Gamma \hat{v}$. Ze soustavy (D15.1.22) snadno odvodíme, že je

$$\|\hat{z}_+(\tau) - z_+(\tau)\| + \|\hat{z}_-(\tau) - z_-(\tau)\| \leqq$$
$$\leqq L(\varrho_+^{-1} + \varrho_-^{-1}) \sup_{\sigma \geqq 0} \{\|\hat{v}_+(\sigma) - v_+(\sigma)\| + \|\hat{v}_-(\sigma) - v_-(\sigma)\|\} .$$

Vzhledem k (D15.1.14) plyne odtud přímo, že řešení w je určeno jednoznačně. Že řešení w existuje, dokážeme metodou postupných aproximací [položíme $(w^{[1]}(t))_+ = 0$, $(w^{[1]}(t))_- = a$ pro $t \geqq t_0$, $w^{[i+1]} = \Gamma w^{[i]}$ pro $i = 1, 2, \ldots$]. K důkazu existence a jednoznačnosti řešení w lze též užít věty o kontraktivním zobrazení. Pomocná věta D15.1.3 je dokázána.

Abychom učinili výraznou závislost řešení w na a, pišme $\Xi(t, a)$ místo $w(t)$. Je $\Xi: R \times U_- \to U_+ \dotplus U_-$. Z rovnice (D15.1.10), kde $\sigma = 0$, plyne, že je $(\Xi(0, a))_- = w_-(0) = a$. Položme $p(a) = (\Xi(0, a))_+$, $P = \{a + p(a), a \in U_-\}$. Je $\Xi(0, a) = a + p(a)$, tedy $P = \{\Xi(0, a) | a \in U_-\}$.

Nechť y je maximální řešení rovnice (D15.1.7) a nechť existuje takové $\bar{t} \in R$, že je $y(\bar{t}) \in P$, tj. $y(\bar{t}) = \Xi(0, a)$ pro vhodné $a \in U_-$. y i $\Xi(., a)$ jsou řešení rovnice (D15.1.7) [viz Pomocnou větu D15.1.2], a protože y je maximální řešení a rovnice (D15.1.7) je jednoznačná, je $y(t) = \Xi(t - \bar{t}, a)$ pro $t \geqq \bar{t}$. Podle Pomocné věty D15.1.3 je $\Xi(t, a) \in U_+ \dotplus U_-$ pro $t \geqq 0$. Nechť je $\tau > 0$. Funkce $z(t) = \Xi(t + \tau, a)$, $t \geqq 0$, je řešení rovnice (D15.1.7) splňující podmínku (D15.1.12). Podle Pomocné věty D15.1.1 z splňuje soustavu (D15.1.13), (D15.1.10) pro $\sigma = 0$. Položíme-li $b = (z(0))_-$, je podle Pomocné věty D15.1.3 (jednoznačnost) $z(0) = \Xi(0, b) \in P$, tedy

$$y(\bar{t} + \tau) = \Xi(\tau, a) = z(0) \in P\,, \quad \tau \geqq 0\,, \quad a \in U_-\,. \tag{D15.1.23}$$

Je tedy $y(t) \in P$ pro $t \geqq \bar{t}$. Dokázali jsme, že [pro rovnici (D15.1.7)] platí (15.3.6) kromě odhadu pro $\|y(t)\|$.

Nechť y je maximální řešení rovnice (D15.1.7), $\bar{t} \in R$, a nechť je $y(t) \in U_+ \dotplus U_-$ pro $t \geqq \bar{t}$. Podle Pomocných vět D15.1.1 a D15.1.3 je $y(t) = \Xi(t - \bar{t}, c)$ pro $t \geqq \bar{t}$, kde $c = (y(\bar{t}))_-$, tedy je $y(\bar{t}) = \Xi(0, c) \in P$ a platí (15.3.7).

Nechť $w, \hat{w}: \langle 0, \infty) \to U_+ \dotplus U_-$ jsou řešení soustavy (D15.1.10), (D15.1.3), kde $\sigma = 0$, taková, že $w_-(0) = a$, $\hat{w}_-(0) = \hat{a}$. Je

$$\|w_+(\tau) - \hat{w}_+(\tau)\| + \|w_-(\tau) - \hat{w}_-(\tau)\| \leqq e^{-\varrho_- \tau}\|a - \hat{a}\| +$$
$$+ L\int_0^\tau e^{-\varrho_-(\tau-\xi)}[\|w_+(\xi) - \hat{w}_+(\xi)\| + \|w_-(\xi) - \hat{w}_-(\xi)\|]\,d\xi +$$
$$+ L\int_\tau^\infty e^{-\varrho_+(\xi-\tau)}[\|w_+(\xi) - \hat{w}_+(\xi)\| + \|w_-(\xi) - \hat{w}_-(\xi)\|]\,d\xi.$$

Položíme-li $\Theta = \sup_{\tau \geqq 0} [\|w_+(\tau) - \hat{w}_+(\tau)\| + \|w_-(\tau) - \hat{w}_-(\tau)\|]$, dostaneme

$$\Theta \leqq \|a - \hat{a}\| + L(\varrho_+^{-1} + \varrho_-^{-1})\,\Theta\,,$$

tedy

$$\Theta \leqq \|a - \hat{a}\| \, [1 - L(\varrho_+^{-1} + \varrho_-^{-1})]^{-1} .$$

Tak jsme odvodili, že je

$$\begin{aligned} &\|\Xi_+(\tau, a) - \Xi_+(\tau, \hat{a})\| + \|\Xi_-(\tau, a) - \Xi_-(\tau, \hat{a})\| \leqq \\ &\leqq \|a - \hat{a}\| \, [1 - L(\varrho_+^{-1} + \varrho_-^{-1})]^{-1} \\ &\text{pro} \quad \tau \geqq 0 , \quad a, \hat{a} \in U_- , \end{aligned} \tag{D15.1.24}$$

a speciálně je

$$\begin{aligned} &\|p(a) - p(\hat{a})\| \leqq \|a - \hat{a}\| \, [1 - L(\varrho_+^{-1} + \varrho_-^{-1})]^{-1} \\ &\text{pro} \quad a, \hat{a} \in U_- . \end{aligned} \tag{D15.1.25}$$

Funkce Ξ splňuje Lipschitzovu podmínku vzhledem k druhé proměnné. Metodami obdobnými těm, jimiž byla v kap. 13 vyšetřována funkce Φ, lze dokázat, že diferenciál $D^{(2)}\Xi$ existuje a spojitě závisí na (t, a); to nebudeme dokazovat. Odtud ovšem plyne, že diferenciál $Dp(u)$ existuje pro $u \in U_-$ a spojitě závisí na u. Zřejmě je $\Xi(0, 0) = 0$, tedy i $p(0) = 0$.

Nechť y je maximální řešení rovnice (D15.1.7), $\bar{t} \in R$, $y(\bar{t}) \in P$. Jak jsme dokázali, je $y(t) \in P$ pro $t \geqq \bar{t}$ a y splňuje soustavu (D15.1.13), (D15.1.10) pro $\sigma = \bar{t}$, $t \geqq \bar{t}$. Je tedy

$$\begin{aligned} &y_-(t) = V_2(t - \bar{t})\, y_-(\bar{t}) + \int_{\bar{t}}^{t} V_2(t - \tau)\, h(y_-(\tau) + p(y_-(\tau)))\, d\tau , \\ &\|y_-(t)\| \leqq e^{-(\varrho_- + \chi)(t - \bar{t})} \|y_-(\bar{t})\| + \\ &+ \int_{\bar{t}}^{t} e^{-(\varrho + \chi)(t - \tau)} L \|y_-(\tau)\| \, (1 + [1 - L(\varrho_+^{-1} + \varrho_-^{-1})]^{-1})\, d\tau , \\ &e^{(\varrho_- + \chi)(t - \bar{t})} \|y_-(t)\| \leqq \|y_-(\bar{t})\| + \\ &+ L \frac{2\varrho_+\varrho_- - L(\varrho_+ + \varrho_-)}{\varrho_+\varrho_- - L(\varrho_+ + \varrho_-)} \int_{\bar{t}}^{t} e^{(\varrho_- + \chi)(\tau - \bar{t})} \|y_-(\tau)\| \, d\tau . \end{aligned}$$

Pomocí Gronwallovy nerovnosti (viz Pomocnou větu 4.3.1) a (D15.1.14) plyne, že je

$$\|y_-(t)\| \leqq \|y_-(\bar{t})\| \, e^{-\varrho_-(t - \bar{t})} ,$$

a protože je $y(t) = y_+(t) + y_-(t) = p(y_-(t)) + y_-(t)$ a platí (D15.1.25), platí i odhad pro $\|y(t)\|$ v (15.3.6).

Vzhledem k (D15.1.23), (D15.1.13) je

$$\Xi_+(\tau, a) = -\int_{\tau}^{\infty} V_1(\tau - \xi)\, h(\Xi_-(\xi, a) + p(\Xi_-(\xi, a)))\, d\xi .$$

Protože h splňuje (D15.1.4), lze odtud odvodit, že $\|a\|^{-1} \|\Xi_+(0, a)\| \to 0$ pro $\|a\| \to 0$, a to znamená, že $Dp(0) = 0$.

Dokázali jsme tedy, že [pro rovnici (D15.1.7)] platí (15.3.6), (15.3.7) a ta tvrzení z (15.3.3) a (15.3.4), která se týkají zobrazení p. Obdobným způsobem se dokáže, že [pro rovnici (D15.1.7)] platí (15.3.8), (15.3.9) a ta tvrzení z (15.3.3) a (15.3.4), která se týkají zobrazení q; úlohu soustavy (D15.1.10), (D15.1.13) má přitom soustava

$$w_+(\tau) = V_1(\tau - \sigma)\, w_+(\sigma) + \int_\sigma^\tau V_1(\tau - \xi)\, h(w(\xi))\, d\xi\,,$$

$$w_-(\tau) = \int_{-\infty}^\tau V_2(\tau - \xi)\, h(w(\xi))\, d\xi\,.$$

[K důkazu těchto tvrzení lze též užít obratu z Poznámky 15.1.6.] Zpětným přechodem od rovnice (D15.1.7) k rovnici (15.1.2) odvodíme, že (15.3.3), (15.3.4), (15.3.6) až (15.3.9) platí i pro rovnici (15.1.2). Dokážeme ještě, že platí i (15.3.5). Nechť je $z \in P \cap Q$ a nechť y je maximální řešení rovnice (15.1.2) takové, že je $y(0) = z$. Podle (15.3.6) a (15.3.8) je $y\colon R \to P \cap Q$ a užitím odhadů z (15.3.6) a (15.3.8) se dokáže, že je $y(0) = 0$. Důkaz Věty 15.3.2 je dokončen.

Dodatek 15.2. Dokážeme tvrzení z Poznámky 15.4.2 a Větu 15.4.1. Také v tomto dodatku budeme pracovat s euklidovskými normami vektoru a matice [viz (D15.1.1)]. Bez ztráty na obecnosti můžeme předpokládat, že je $s(0) = 0$. Je tedy $s(t) = \Psi(t, 0)$ a $D^{(2)}\,\Psi(t, 0)$ je fundamentální matice rovnice (15.4.4). Je $D^{(2)}\,\Psi(0, 0) = I$ a tak podle předpokladů číslo 1 je jednoduché vlastní číslo matice $D\,\Psi(T, 0)$ a pro ostatní vlastní čísla μ je $|\mu| < 1$.

Jak jsme ukázali v odst. 15.4, je $\dot{s}(0) \neq 0$, $[D^{(2)}\,\Psi(T, 0) - I]\,\dot{s}(0) = 0$. Je tedy $\dot{s}(0)$ vlastní vektor matice $D^{(2)}\,\Psi(T, 0)$ odpovídající vlastnímu číslu 1. Nechť je $Z_1 = \{\alpha\,\dot{s}(0) |\, \alpha \in R\}$ a nechť Z_2 je takový podprostor v R^n dimenze $n - 1$, že $\dot{s}(0) \notin Z_2$; je tedy $R^n = Z_1 \dotplus Z_2$. Nechť první sloupec matice B je $\dot{s}(0)$ a nechť ostatní sloupce matice B tvoří bázi v Z_2. Substitucí $x = Bz$ přechází rovnice (15.1.2) v rovnici

$$\dot{z} = \tilde{g}(z)\,, \tag{D15.2.1}$$

kde $\tilde{g}(z) = B^{-1}\, g(Bz)$. Nechť $\tilde{\Psi}(., \tilde{z})$ je maximální řešení rovnice (D15.2.1), $\tilde{\Psi}(0, \tilde{z}) = \tilde{z}$. Je

$$\tilde{\Psi}(t, z) = B^{-1}\,\Psi(t, Bz)\,, \quad D_2\,\tilde{\Psi}(t, 0) = B^{-1}\,D_2\,\Psi(t, 0)\,B\,. \tag{D15.2.2}$$

Matice $D^{(2)}\,\tilde{\Psi}(T, 0)$ má táž vlastní čísla jako matice $D^{(2)}\,\Psi(T, 0)$ [včetně jejich násobností]. Prostorům Z_1, Z_2 přitom odpovídají prostory

$$\tilde{Z}_1 = B^{-1}Z_1 = \{B^{-1}z |\, z \in Z_1\} = \{\alpha B^{-1}\,\dot{s}(0) |\, \alpha \in R\} =$$
$$= \{\mathrm{col}\,(\alpha, 0, \ldots, 0) |\, \alpha \in R\}$$

[neboť $B^{-1}\,\dot{s}(0) = \mathrm{col}\,(1, 0, \ldots, 0)$],

$$\tilde{Z}_2 = B^{-1}Z_2 = \{\mathrm{col}\,(0, x_2, \ldots, x_n) |\, x_i \in R,\ i = 2, 3, \ldots, n\}\,.$$

Prostor $\tilde{Z}_1$ je invariantní prostor matice $\mathrm{D}^{(2)}\,\tilde{\Psi}(T, 0)$ odpovídající vlastnímu číslu 1. Proto matice $\mathrm{D}^{(2)}\,\tilde{\Psi}(T, 0)$ má tvar

$$\mathrm{D}^{(2)}\,\tilde{\Psi}(T, 0) = \begin{pmatrix} 1, & b \\ 0, & V \end{pmatrix}, \tag{D15.2.3}$$

kde V je regulární matice řádu $n - 1$, $b = (b_2, b_3, \ldots, b_n)$, $b_i \in R$. Protože matice $\mathrm{D}^{(2)}\,\tilde{\Psi}(T, 0)$ má táž vlastní čísla jako matice $\mathrm{D}^{(2)}\,\Psi(T, 0)$, platí

$$|\mu| < 1 \text{ pro každé vlastní číslo } \mu \text{ matice } V. \tag{D15.2.4}$$

Řešení s přechází v řešení $\tilde{s} = B^{-1}s$ rovnice (D15.2.1); je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\tilde{\Psi}(T, 0) = \dot{\tilde{s}}(T) = B^{-1}\,\dot{s}(T) = B^{-1}\,\dot{s}(0) = \mathrm{col}\,(1, 0, \ldots, 0)\,. \tag{D15.2.5}$$

Nechť $\tilde{\Psi}_i$ znamená i-tou složku funkce $\tilde{\Psi}$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Hledejme řešení ω rovnice

$$\tilde{\Psi}_1(T + \omega, (0, x_\Delta)) = 0 \tag{D15.2.6}$$

pro $x_\Delta \in R^{n-1}$ dosti blízká k 0. Je

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,\tilde{\Psi}_1(T, 0) = 1$$

a podle věty o implicitních funkcích existují kladná čísla $\delta_1, \delta_2, \delta_1 < T/2$ tak, že ke každému x_Δ, $\|x_\Delta\| < \delta_2$, existuje jediné ω v intervalu $\langle -\delta_1, \delta_1 \rangle$ takové, že platí (D15.2.6). Označíme-li toto řešení $\omega(x_\Delta)$, pak funkce ω má diferenciál $\mathrm{D}\omega(x_\Delta)$ v každém bodě x_Δ, $\|x_\Delta\| < \delta_2$, a $\mathrm{D}\omega(x_\Delta)$ závisí spojitě na x_Δ. Definujme zobrazení Ω: $B(0, \delta_2, R^{n-1}) \to R^{n-1}$ rovnicí

$$(0, \Omega(x_\Delta)) = \tilde{\Psi}(T + \omega(x_\Delta), (0, x_\Delta))\,. \tag{D15.2.7}$$

Všimněme si významu zobrazení Ω: Má-li řešení rovnice (D15.2.1) v okamžiku $t = 0$ hodnotu $(0, x_\Delta)$, má v okamžiku $T + \omega(x_\Delta)$ hodnotu $(0, \Omega(x_\Delta))$ (viz obr. 44). Lze říci, že $(0, \Omega(x_\Delta))$ je bod, v němž řešení vycházející z bodu $(0, x_\Delta)$ protne poprvé v blízkosti bodu 0 nadrovinu $x_1 = 0$. Zobrazení Ω se nazývá *Poincaréovo zobrazení.* Pišme

$$\tilde{\Psi}_\Delta(t, y) = \mathrm{col}\,(\tilde{\Psi}_2(t, y), \tilde{\Psi}_3(t, y), \ldots, \tilde{\Psi}_n(t, y))\,.$$

Platí

$$\Omega(x_\Delta) = \tilde{\Psi}_\Delta(T + \omega(x_\Delta), (0, x_\Delta))\,. \tag{D15.2.8}$$

Funkce Ω má diferenciál $\mathrm{D}\Omega(x_\Delta)$ v každém bodě $x_\Delta \in R^{n-1}$, $\|x_\Delta\| < \delta_2$ [neboť funkce ω je diferencovatelná]. Je

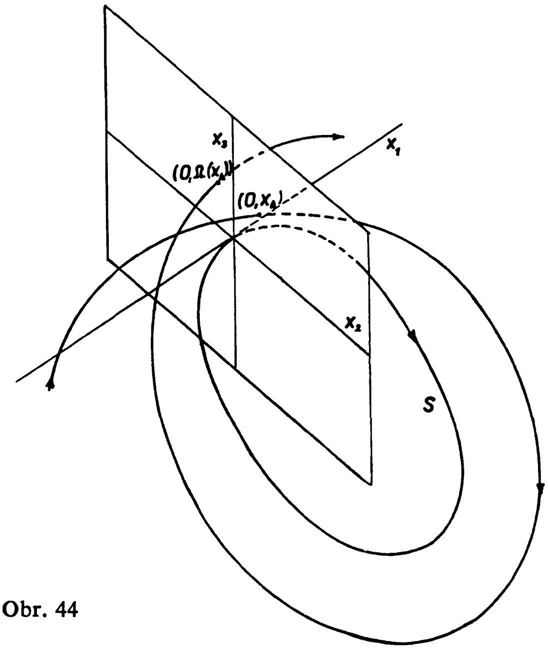
$$\mathrm{col}\,(1, 0, \ldots, 0) = \dot{s}(0) = \dot{s}(T) = \frac{\partial}{\partial t}\,\tilde{\Psi}(t, 0)\big|_{t=T}\,.$$

Proto je $\mathrm{D}^{(1)}\,\tilde{\Psi}_\Delta(T, 0) = 0$. Odtud, z (D15.2.3) a (D15.2.8) plyne, že je $\mathrm{D}\Omega(0) = \dot{V}$.

Vzhledem k (D15.2.4) existuje takové přirozené k, že je $\|V^k\| < \vartheta < 1$. (Je-li $V = E^{-1}QE$, kde Q je v Jordanově tvaru, je $V^j = E^{-1}Q^jE$ a $Q^j \to 0$ pro $j \to \infty$.) Položme

$$\Omega^0(x_\Delta) = x_\Delta\,, \quad \Omega^1(x_\Delta) = \Omega(x_\Delta)\,, \quad \Omega^{j+1}(x_\Delta) = \Omega(\Omega^j(x_\Delta))$$

všude, kde je definována pravá strana, $j = 1, 2, 3, \ldots$.



Obr. 44

Na jisté otevřené množině v R^{n-1}, která obsahuje počátek, je definována funkce Ω^k, má tam v každém bodě diferenciál $D\Omega^k(x_\Delta)$ a $D\Omega^k(x_\Delta)$ závisí spojitě na x_Δ. Je $D\Omega^k(0) = V^k$. Podle Pomocné věty 15.1.3 existuje takové číslo δ_3, $0 < \delta_3 \leqq \delta_2$, že $\Omega^{kj}(x_\Delta)$ je definováno pro $\|x_\Delta\| \leqq \delta_3$, a je

$$\|\Omega^{kj}(x_\Delta)\| \leqq \vartheta^j \|x_\Delta\| \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, \ldots . \tag{D15.2.9}$$

Funkce Ω má spojitý diferenciál. Existují tedy $\delta_4 > 0$ a $\varkappa > 0$ tak, že $\Omega^m(x_\Delta)$ je definováno pro $m = 1, 2, 3, \ldots$, $x_\Delta \in B(0, \delta_4, R^{n-1})$ a platí

$$\|\Omega^{kj+l}(x_\Delta)\| \leqq \varkappa\vartheta^j \|x_\Delta\| \quad \text{pro} \quad l = 0, 1, \ldots, k-1\,, \quad j = 1, 2, \ldots, \|x_\Delta\| < \delta_4\,.$$

Je [viz (D15.2.8)]

$$(0, \Omega^m(x_\Delta)) = \tilde{\Psi}(T + \omega(\Omega^{m-1}(x_\Delta)), (0, \Omega^{m-1}(x_\Delta)))\,.$$

Odtud plyne

$$(0, \Omega^m(x_\Delta)) = \tilde{\Psi}((mT) + \sum_{i=0}^{m-1} \omega(\Omega^i(x_\Delta)), (0, x_\Delta))$$

$$\text{pro} \quad m = 1, 2, 3, \ldots . \tag{D15.2.10}$$

Protože je $\omega(0) = 0$ a také diferenciál $D\omega(x_\Delta)$ závisí spojitě na x_Δ, řada $\sum_{i=0}^{\infty} \omega(\Omega^i(x_\Delta))$ konverguje. Podle (D15.2.10) je

$$\tilde{\Psi}(mT + \sum_{i=0}^{\infty} \omega(\Omega^i(x_\Delta)), (0, x_\Delta)) = \tilde{\Psi}(\sum_{i=m}^{\infty} \omega(\Omega^i(x_\Delta)), (0, \Omega^m(x_\Delta))) .$$

Je

$$\tilde{\Psi}(0, 0) = 0 , \quad \sum_{i=m}^{\infty} \omega(\Omega^i(x_\Delta)) \to 0 , \quad \Omega^m(x_\Delta) \to 0 \quad \text{pro} \quad m \to \infty ,$$

funkce $\tilde{\Psi}$ je spojitá, tedy

$$\tilde{\Psi}(mT + \sum_{i=0}^{\infty} \omega(\Omega^i(x_\Delta)), (0, x_\Delta)) \to 0 \quad \text{pro} \quad m \to \infty .$$

Protože je $\tilde{\Psi}(mT, 0) = \tilde{s}(mT) = 0$ pro $m = 1, 2, \ldots$, je

$$\lim_{m \to \infty} \|\tilde{\Psi}(mT + \sum_{i=0}^{\infty} \omega(\Omega^i(x_\Delta)), (0, x_\Delta)) - \tilde{s}(mT)\| = 0 . \tag{D15.2.11}$$

Ze spojitosti funkce $\tilde{\Psi}$, ze vztahů $\tilde{s}(mT + \tau) = \tilde{\Psi}(\tau, \tilde{s}(mT))$, $\tilde{\Psi}(\xi + \tau, y) = \tilde{\Psi}(\tau, \tilde{\Psi}(\xi, y))$ a z (D15.2.11) plyne, že platí

$$\lim_{t \to \infty} \|\tilde{\Psi}(t, (0, x_\Delta)) - \tilde{s}(t - \sum_{i=0}^{\infty} \omega(\Omega^i(x_\Delta)))\| = 0 , \quad \|x_\Delta\| \leqq \delta_4 . \tag{D15.2.12}$$

Protože je

$$\frac{\partial}{\partial t} \tilde{\Psi}_1(0, 0) = 1 ,$$

existují podle Věty o implicitních funkcích čísla $\delta_5, \delta_6 > 0$ tak, že pro každé $y \in B(0, \delta_5, R^n)$ rovnice $\tilde{\Psi}_1(\tau, y) = 0$ má jediné řešení $\tau = \tau(y)$ v intervalu $(-\delta_6, \delta_6)$, a platí $\|\tilde{\Psi}(\tau(y), y)\| < \delta_4$. Je $0 = \tilde{s}(T) = \tilde{\Psi}(T, 0) = \tilde{\Psi}(T - \xi, \tilde{\Psi}(\xi, 0))$ pro $0 \leqq \xi \leqq T$. Ze spojitosti funkce $\tilde{\Psi}$ plyne, že existuje číslo $\alpha > 0$ tak, že platí: Je-li $z \in R^n$, $0 \leqq \xi \leqq T$, $\|z - \tilde{s}(\xi)\| < \alpha$, je $\|\tilde{\Psi}(T - \xi, z)\| < \delta_5$. Položíme-li $\mathfrak{y} = \tilde{\Psi}(T - \xi, z)$, je $\tilde{\Psi}_1(\tau(\mathfrak{y}), \mathfrak{y}) = 0$. Můžeme tedy psát $\tilde{\Psi}(\tau(\mathfrak{y}), \mathfrak{y}) = (0, x_\Delta)$ a je $\|x_\Delta\| < \delta_4$. Vzhledem k (D15.2.12) platí

$$\lim_{t \to \infty} \|\tilde{\Psi}(t, \mathfrak{y}) - \tilde{s}(t - \tau(\mathfrak{y}) - \sum_{i=0}^{\infty} \omega(\Omega^i(x_\Delta)))\| = 0$$

a

$$\lim_{t \to \infty} \|\tilde{\Psi}(t, z) - \tilde{s}(t - T + \xi - \tau(\mathfrak{y}) - \sum_{i=0}^{\infty} \omega(\Omega^i(x_\Delta)))\| = 0 .$$

Odtud plyne, že platí tvrzení z Poznámky 15.4.2 – je

$$w(t) = \Psi(t - t_0, z) , \quad \sigma = -t_0 - T + \xi - \tau(\mathfrak{y}) - \sum_{i=0}^{\infty} \omega(\Omega^i(x_\Delta)) .$$

Ještě dokážeme Větu 15.4.1. Nechť je $q \in Y_{st}(g, S)$. Najdeme $\vartheta > 0$ tak, aby bylo $\varrho(\tilde{\Psi}(\vartheta, q), S) < \alpha$. Ze spojitosti funkce $\tilde{\Psi}$ plyne, že existuje číslo β tak, že je $\varrho(\tilde{\Psi}(\vartheta, p), S) < \alpha$, jakmile je $\|p - q\| < \beta$. Jak jsme již dokázali, existuje číslo σ tak, že je

$$\lim_{t \to \infty} \|\tilde{\Psi}(t, \tilde{\Psi}(\vartheta, p)) - \tilde{s}(t + \sigma)\| = 0,$$

tedy je

$$\lim_{t \to \infty} \varrho(\tilde{\Psi}(t + \vartheta, p), S) = \lim_{t \to \infty} \varrho(\tilde{\Psi}(t, p), S) = 0, \quad B(q, \beta) \subset Y_{st}(g, S).$$

Množina $Y_{st}(g, S)$ je otevřená.

Dodatek 15.3. Velmi stručně se zmíníme o tom, že tvrzení Poznámky 15.4.3 lze dokázat obdobným způsobem jako Větu 15.3.2. Nechť $\tilde{s}$, Ω, V má stejný význam jako v Dodatku 15.2. Nechť je $0 < \varrho < \frac{1}{2}$, $\big||\lambda| - 1\big| > 2\varrho$ pro každé vlastní číslo λ matice V. Lineární transformací v prostoru R^{n-1} můžeme dosáhnout toho, že V má tvar (D15.1.8), kde $\sum_{j=1}^{\infty} k_j = n - 1$, a platí

$$\begin{aligned} |\lambda_j| &> 1 + 2\varrho, \quad \text{resp.} \quad \mu_j^2 + \nu_j^2 > (1 + 2\varrho)^2 \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, \ldots, l, \\ |\lambda_j| &< 1 - 2\varrho, \quad \text{resp.} \quad \mu_j^2 + \nu_j^2 < (1 - 2\varrho)^2 \quad \text{pro} \quad j = l + 1, l + 2, \ldots, r. \end{aligned}$$

Položme

$$V_1 = \begin{pmatrix} D_1 & & & & & \\ & D_2 & & & & \\ & & D_l & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & \ldots & \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}, \quad V_2 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & \\ & \ldots & & & & \\ & & 0 & & & \\ & & & D_{l+1} & & \\ & & & & D_{l+2} & \\ & & & & & D_r \end{pmatrix}$$

a pišme

$$\Omega(x_\Delta) = V x_\Delta + \Gamma(x_\Delta), \quad V = V_1 + V_2.$$

Matice V_1 má hodnost $k = \sum_{j=1}^{l} k_j$, matice V_2 má hodnost $n - 1 - k$. Funkce Γ má spojitý diferenciál, je $\Gamma(0) = 0$, $\mathrm{D}\Gamma(0) = 0$. Diferenciál $\mathrm{D}\Gamma(x_\Delta)$ závisí spojitě na x_Δ. Místo úlohy najít maximální řešení $\tilde{w}$ rovnice (D15.2.1) tak, aby platilo $\lim_{t \to \infty} \varrho(w(t), \tilde{S}) = 0$, zabývejme se úlohou najít bod $y \in R^{n-1}$ tak, aby platilo $\Omega^j(y) \to 0$ pro $j \to \infty$. Pišme $y^{[j]}$ místo $\Omega^j(y)$. Je $y^{[j+1]} = V y^{[j]} + \Gamma(y^{[j]})$ a odtud plyne indukcí, že platí

$$y^{[m]} = V^{m-j} y^{[j]} + \sum_{i=j}^{m-1} V^{m-1-i} \Gamma(y^{[i]}) \tag{D15.3.1}$$

pro všechna j, m, pro něž obě strany mají smysl. Pro $y = (y_2, \ldots, y_n)$ pišme $y =$

$= y_+ + y_-$, kde $y_+ = (y_2, \ldots, y_{k+1}, 0, \ldots, 0)$, $y_- = (0, \ldots, 0, y_{k+2}, \ldots, y_n)$. (D15.3.1) můžeme zapsat jako soustavu

$$y_+^{[m]} = V_1^{m-j}\, y_+^{[j]} + \sum_{i=j}^{m-1} V_1^{m-1-i}\, \Gamma(y^{[i]}) , \tag{D15.3.2}$$

$$y_-^{[m]} = V_2^{m-j}\, y_-^{[j]} + \sum_{i=j}^{m-1} V_2^{m-1-i}\, \Gamma(y^{[i]}) . \tag{D15.3.3}$$

Je-li $\sup_{i \geqq j} \|y^{[i]}\| < \infty$, můžeme rovnici (D15.3.2) násobit V_1^{j-m} a provést limitní přechod pro $m \to \infty$. Nakonec budeme psát m místo j. Tak dostáváme rovnici

$$y_+^{[m]} = -\sum_{i=m}^{\infty} V_1^{m-1-i}\, \Gamma(y^{[i]}) . \tag{D15.3.4}$$

Soustavu (D15.3.4), (D15.3.3) lze vyšetřovat obdobným způsobem jako soustavu (D15.1.13), (D15.1.10) a tak se otevírá cesta k důkazu tvrzení z Poznámky 15.4.3.

Dodatek 16.1. V tomto dodatku budeme užívat normy zavedené rovnicí

$$\|x\| = \max\{|x_i| \mid i = 1, 2, \ldots, n\} \quad \text{pro} \quad x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n.$$

To znamená, že je

$$B(y, \eta) = \{x \in R^n \mid |x_i - y_i| < \eta,\ i = 1, 2, \ldots, n\} \quad \text{pro} \quad y \in R^n, \quad \eta > 0 .$$

Nechť funkce Ψ má ve vztahu k rovnici (16.2.3) obvyklý význam, tj. pro $v \in R^n$, $\eta \in R$, $(v, \eta) \in W$ bude $\Psi(., (v, \eta))$ znamenat takové maximální řešení rovnice (16.2.3), že je $\Psi_i(0, (v, \eta)) = v_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, $\Psi_{n+1}(0, (v, \eta)) = \eta$. Z následující pomocné věty snadno plyne, že řešení ξ rovnice (16.2.1) splňující podmínku $\xi(v) = \lambda(v)$ existuje lokálně, tj. v okolí U_u bodu $u \in \mathscr{U}$ [viz (D16.1.9) a (D16.1.10)]. Odtud a z tvrzení (16.2.5) o jednoznačnosti dokážeme Větu 16.2.3. Protože v definici plochy $\mathscr{U}$ se užívá lokálního popisu ve tvaru $v_j = \omega_u(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n)$, přičemž index j se může měnit v závislosti na u, je podstatné, že ve formulaci pomocné věty je úloha soustavy souřadnic potlačena.

D16.1.1. Pomocná věta: *Nechť jsou splněny předpoklady Věty* 16.2.3. *Potom ke každému bodu $u \in \mathscr{U}$ existují kladná čísla α, β a otevřená množina $U_u \subset R^n$ tak, že platí:*

$$u \in U_u \subset B(u, \alpha, R^n) . \tag{D16.1.1}$$

Je-li $z \in U_u$, pak existuje bod $v \in \mathscr{U} \cap B(u, \beta, R^n)$ a číslo $t \in (-\beta, \beta)$ tak, že je

(i) $z_i = \Psi_i(t, (v, \lambda(v)))$ *pro* $i = 1, 2, \ldots, n$,

(ii) $(\Psi_1(\tau, (v, \lambda(v))), \ldots, \Psi_n(\tau, (v, \lambda(v)))) \in U_u$ *pro* $t \leqq \tau \leqq 0$, *resp.* $0 \leqq \tau \leqq t$ *podle toho, zda je* $t < 0$, *resp.* $t > 0$. (D16.1.2)

Dvojice (t, v) *je určena jednoznačně a funkce, které popisují závislost souřadnic bodu* (t, v) *na souřadnicích bodu* z, *mají spojité parciální derivace.* (D16.1.3)

$$\begin{aligned}
&Je\text{-}li\ w, \tilde{w} \in \mathscr{U},\ z \in B(u, 3\alpha, R^n),\ t, s \in R,\\
&z_i = \Psi_i(t, (w, \lambda(w))) = \Psi_i(s, (\tilde{w}, \lambda(\tilde{w})))\quad pro\quad i = 1, 2, \ldots, n\,,\\
&(\Psi_1(\tau, (w, \lambda(w))), \ldots, \Psi_n(\tau, (w, \lambda(w)))) \in B(u, 3\alpha)\\
&pro\quad t \leqq \tau \leqq 0,\quad resp.\quad 0 \leqq \tau \leqq t\,,\\
&(\Psi_1(\sigma, (\tilde{w}, \lambda(\tilde{w}))), \ldots, \Psi_n(\sigma, (\tilde{w}, \lambda(\tilde{w})))) \in B(u, 3\alpha)\\
&pro\quad s \leqq \sigma \leqq 0\,,\quad resp.\quad 0 \leqq \sigma \leqq s\,,\\
&pak\ je\quad s = t\,,\quad \tilde{w} = w\,.
\end{aligned}\tag{D16.1.4}$$

Důkaz: Nechť je $u \in \mathscr{U}$. Nechť čísla $\varepsilon, \varepsilon' > 0$, index j a funkce ω_u jsou určeny podle (16.2.7). Položme

$$\begin{aligned}
&\Gamma_i(t, v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n) =\\
&= \Psi_i(t, v_1, \ldots, v_{j-1}, \omega_u(v_1, \ldots, v_n), v_{j+1}, \ldots, v_n, \lambda(v_1, \ldots, \omega_u(\ldots), \ldots v_n))\,,\\
&i = 1, 2, \ldots, n\,,
\end{aligned}\tag{16.1.5}$$

pro takové body $(t, v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n)$, že pravá strana je definována. Funkce Γ_i jsou definovány na otevřené množině $Q \subset R^n$ a mají tam spojité parciální derivace. Zřejmě je $(0, u_1, \ldots, u_{j-1}, u_{j+1}, \ldots, u_n) \in Q$. Označme $\Gamma = (\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_n)$. Je $\Gamma\colon Q \to R^n$. Z (D16.1.5) plyne, že je

$$\frac{\partial \Gamma_i}{\partial t}(0, \hat{u}) = \lambda_i(u, \lambda(u)) \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

kde

$$\hat{u} = (u_1, \ldots, u_{j-1}\,,\ u_{j+1}, \ldots, u_n)\,.$$

Protože $D^{(2)}\,\Psi(0, (u, \lambda(u)))$ je identické zobrazení z R^{n+1} do R^{n+1} a je reprezentováno jednotkovou maticí, je

$$\frac{\partial}{\partial v_k}\,\Gamma_i(0, \hat{u}) = \delta_{ik} + \delta_{ij}\,\frac{\partial \omega_u}{\partial v_k}(\hat{u}) \quad \text{pro} \quad i, k = 1, 2, \ldots, n\,, \quad k \neq j\,.$$

Odtud plyne, že pro jakobián zobrazení Γ platí

$$\det\begin{pmatrix}
\dfrac{\partial}{\partial t}\Gamma_1(0, \hat{u}), & \dfrac{\partial}{\partial v_1}\Gamma_1(0, \hat{u}), & \ldots, & \dfrac{\partial}{\partial v_n}\Gamma_1(0, \hat{u})\\[2ex]
\dfrac{\partial}{\partial t}\Gamma_n(0, \hat{u}), & \dfrac{\partial}{\partial v_1}\Gamma_n(0, \hat{u}), & \ldots, & \dfrac{\partial}{\partial v_n}\Gamma_n(0, \hat{u})
\end{pmatrix} =$$

$$= (-1)^j \left[g_j(u, \lambda(u)) - \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} \lambda_k(u, \lambda(u))\,\frac{\partial \omega}{\partial v_k}(\hat{u})\right] \neq 0$$

[viz (16.2.10)].

Je $\Gamma_i(0, \hat{u}) = u_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Podle věty o implicitních funkcích (viz [28], kap. VIII) soustava rovnic

$$\Gamma_i(t, v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n) = z_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, n\,, \tag{D16.1.6}$$

je řešitelná pro $z = (z_1, \ldots, z_n)$ dosti blízká k u. Podrobněji řečeno, existují čísla $\delta, \Delta > 0$ a zobrazení $\Xi: B(u, \delta, R^n) \to B((0, \hat{u}), \Delta, R^n)$ inverzní k zobrazení Γ [tj. $\Gamma(\Xi(z)) = z$ pro $z \in B(u, \delta)$]. Přitom $\Xi(z)$ je jediné řešení soustavy (D16.1.6), které leží v $B((0, \hat{u}), \Delta, R^n)$ pro $z \in B(u, \delta, R^n)$ a funkce Ξ má spojité parciální derivace. Čísla δ, Δ jsou tak malá, že platí:

Zobrazení $\Gamma|_{B((0,\hat{u}),\Delta,R^n)}$ je prosté, má jakobián všude různý od nuly a je $\Delta < \min(\varepsilon\, \varepsilon')$,

$$\begin{aligned} &|\Gamma_k(t, v_1, \ldots, v_n) - u_k| < \varepsilon\,,\\ &|\Gamma_j(t, v_1, \ldots, v_n) - u_j| < \varepsilon'\\ &\text{pro} \quad |t| < \Delta\,, \quad |v_k - u_k| < \Delta\,, \quad k = 1, 2, \ldots, n\,, \quad k \neq j\,. \end{aligned} \tag{D16.1.7}$$

Zvolme číslo β, $0 < \beta < \Delta$, a číslo α, $0 < \alpha < \min\{\delta/3, \beta/3\}$, tak, aby platilo:

Je-li $t = \beta$ nebo $t = -\beta$, $v \in \mathcal{U} \cap \bar{B}(u, \beta)$, pak je

$$\max_{i=1,2,\ldots,n} |\Psi_i(t, (v, \lambda(v)))| > 3\alpha\,. \tag{D16.1.8}$$

[Takové číslo α existuje, protože pro $t = \beta$ i pro $t = -\beta$ funkce na levé straně nerovnosti je spojitá funkce proměnné v a nabývá pouze kladných hodnot na kompaktní množině $\mathcal{U} \cap \bar{B}(u, \beta)$.] Pro $\varrho \in (0, \Delta)$ položme

$$\begin{aligned} Y(\varrho) = \{&(\Psi_1(t, (v, \lambda(v))), \ldots, \Psi_n(t, (v, \lambda(v)))) \in R^n \mid |t| < \varrho\,,\\ &v \in \mathcal{U}, \|v - u\| < \varrho\}\,. \end{aligned}$$

Snadno se zjistí, že $Y(\varrho)$ je obraz při zobrazení Γ množiny takových bodů $(t, v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, , \ldots, v_n)$, že je

$$\begin{aligned} &|t| < \varrho\,, \quad |v_k - u_k| < \varrho \quad \text{pro} \quad k \neq j\,,\\ &|\omega_u(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n) - u_j| < \varrho\,. \end{aligned}$$

Z (D16.1.7) plyne, že množina $Y(\varrho)$ je otevřená. Najděme takové číslo $\gamma \in (0, \Delta)$, že je $Y(\gamma) \subset B(u, \alpha)$, a položme $U_u = Y(\gamma)$. Je zřejmé, že platí (D16.1.1) a že množina U_u je otevřená. Nechť $w, \tilde{w}, z, t, s$ splňují všechny podmínky z (D16.1.4). Je $w = (\Psi_1(0, (w, \lambda(w))), \ldots, \Psi_n(0, (w, \lambda(w))))$, a proto je $w \in B(u, 3\alpha)$. Protože je $3\alpha < \beta$, je $w \in B(u, \beta)$. Obdobně je $\tilde{w} \in B(u, \beta)$. Kdyby bylo $|t| \geqq \beta$, nemohlo by platit

$$(\Psi_1(\tau, (w, \lambda(w))), \ldots, \Psi_n(\tau, (w, \lambda(w)))) \in B(u, 3\alpha)$$

pro $\tau \in \langle t, 0\rangle$, resp. $\tau \in \langle 0, t\rangle$ [srovnej (D16.1.8)]. Je tedy $|t| < \beta$ a obdobně je $|s| < \beta$.

Protože je $3\alpha < \delta$, $z \in B(u, 3\alpha, R^n)$, $\beta < \Delta_x < \min(\varepsilon, \varepsilon')$, $w \in \mathscr{U} \cap B(u, \beta, R^n)$, je

$$w_j = \omega_u(w_1, \ldots, w_{j-1}, w_{j+1}, \ldots, w_n)\,,$$
$$(t, w_1, \ldots, w_{j-1}, w_{j+1}, \ldots, w_n) = \Xi(z)\,.$$

Obdobně je

$$\tilde{w}_j = \omega_u(\tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_{j-1}, \tilde{w}_{j+1}, \ldots, \tilde{w}_n)\,,$$
$$(s, \tilde{w}_1, \ldots, \tilde{w}_{j-1}, \tilde{w}_{j+1}, \ldots, \tilde{w}_n) = \Xi(z)\,.$$

Je tedy $t = s$, $w = \tilde{w}$ a tak jsme dokázali, že platí (D16.1.4). Že platí (D16.1.2), plyne z Definice množiny U_u. Je-li $z \in U_u$, $v \in \mathscr{U} \cap B(u, \beta, R^n)$, $t \in (-\beta, \beta)$, $z_i = \Psi_i(t, (v, \lambda(v))$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, je $(t, v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n)$ řešení soustavy (D16.1.6). Je tedy

$$(t, v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n) = \Xi(z)\,, \quad v_j = \omega_u(v_1, \ldots, v_{j-1}, v_{j+1}, \ldots, v_n)\,.$$

Proto platí (D16.1.3). Pomocná věta D16.1.1 je dokázána.

D ů k a z Věty 16.2.3: Ke každému $u \in \mathscr{U}$ najdeme množinu U_u podle Pomocné věty D16.2.1 a funkci $\xi_u : U_u \to R$ definujeme takto: Je-li $z \in U_u$, pak podle (D16.1.2) a (D16.1.3) existuje jediný bod $(t, v) \in (-\beta, \beta) \times [U \cap B(u, \beta, R^n)]$ tak, že platí (i) a (ii) z (D16.1.2); položme

$$\xi_u(z) = \Psi_{n+1}(t, (v, \lambda(v)))\,.$$

Funkce ξ_u má spojité parciální derivace [viz (D16.1.3)] a užitím Věty 16.2.2 zjistíme, že

$$\xi_u \text{ je řešení rovnice (16.2.1).} \tag{D16.1.9}$$

Je-li $z \in \mathscr{U} \cap U_u$, pak $t = 0$, $v = z$, a tak platí

$$\xi_u(z) = \lambda(z) \quad \text{pro} \quad z \in \mathscr{U} \cap U_u\,. \tag{D16.1.10}$$

Položme

$$U = \bigcup_{u \in \mathscr{U}} U_u\,.$$

Dokážeme, že platí:

Je-li $z \in U$ a existují-li body $u, u' \in \mathscr{U}$ tak, že je $z \in U_u \cap U_{u'}$, pak je
$$\xi_u(z) = \xi_{u'}(z). \tag{D16.1.11}$$

Nechť je $u, u' \in \mathscr{U}$, $z \in U_u \cap U_{u'}$, nechť čísla α, β, t a bod $v \in \mathscr{U} \cap B(u, \beta)$ odpovídají bodu z podle Pomocné věty D16.1.1 a nechť čísla α', β', t' a bod $v' \in \mathscr{U} \cap B(u', \beta')$ odpovídají bodu z podle Pomocné věty D16.1.1, píšeme-li u' místo u. Beze ztráty na obecnosti můžeme předpokládat, že je $\alpha' \leqq \alpha$ (v opačném případě bychom zaměnili body u a u'). Je $z \in U_u \cap U_{u'} \subset B(u, \alpha) \cap B(u', \alpha')$. Je-li

$$y \in B(u', \alpha'), \quad \text{je} \quad \|y - z\| < 2\alpha' \leqq 2\alpha\,,$$
$$\|y - u\| \leqq \|y - z\| + \|z - u\| \leqq 3\alpha\,, \quad \text{tedy je} \quad B(u', \alpha') \subset B(u, 3\alpha)\,.$$

Je

$$(\Psi_1(\tau, (v, \lambda(v))), \ldots, \Psi_n(\tau, (v, \lambda(v)))) \in U_u \subset B(u, 3\alpha)$$
$$\text{pro} \quad \tau \in \langle t, 0\rangle\,, \quad \text{resp. pro} \quad \tau \in \langle 0, t\rangle\,,$$
$$(\Psi_1(\sigma, (v', \lambda(v'))), \ldots, \Psi_n(\sigma, (v', \lambda(v')))) \in U_{u'} \subset B(u, 3\alpha)$$
$$\text{pro} \quad \sigma \in \langle t', 0\rangle\,, \quad \text{resp. pro} \quad \sigma \in \langle 0, t'\rangle\,.$$

Podle (D16.1.4) je $t' = t$, $v' = v$ a tedy je

$$\xi_u(z) \overset{\bullet}{=} \Psi_{n+1}(t, (v, \lambda(v))) = \Psi_{n+1}(t', (v', \lambda(v'))) = \xi_{u'}(z)\,.$$

Dokázali jsme, že platí (D16.1.11).

Funkci $\xi: U \to R$ definujeme takto: Ke každému bodu $z \in U$ najdeme bod $u \in \mathscr{U}$ tak, aby bylo $z \in U_u$, a položíme $\xi(z) = \xi_u(z)$. Podle (D16.1.11) je $\xi|_{U_u} = \xi_u$ pro každé $u \in \mathscr{U}$. Z (D16.1.9) plyne, že ξ je řešení rovnice (16.2.1) a z (D16.2.10) plyne, že je $\xi(z) = \lambda(z)$ pro $z \in \mathscr{U}$. Věta 16.2.3 je dokázána.

Dodatek 18.1. Dokážeme Větu 18.1.18. *Funkci* $q: \mathscr{I} \to K^n$ nazveme *jednoduchou*, nabývá-li jenom konečného počtu hodnot. Nechť funkce q je jednoduchá a nechť $a^{[1]}, a^{[2]}, \ldots, a^{[k]}$ jsou všechny její hodnoty; položme $M_i = \{t \in \mathscr{I} \mid q(t) = a^{[i]}\}$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Je známo, že je $q \in L(\mathscr{I}, K^n)$ právě tehdy, jsou-li množiny M_i měřitelné a je-li $m(M_i) < \infty$, jakmile je $a^{[i]} \neq 0$, $i = 1, 2, \ldots, k$. Je-li $q \in L(\mathscr{I}, K^n)$ je

$$\int_{\mathscr{I}} q \,\mathrm{d}t = \sum_{i=1}^{k} a_i\, m(M_i)\,.$$

Odtud plyne [viz (3.2.3), (3.2.4)], že:

Věta 18.1.18 platí, je-li funkce h jednoduchá. (D18.1.1)

Dokážeme tvrzení:

Věta 18.1.18 *platí, připojíme-li předpoklad, že interval $\mathscr{I}$ je omezený a že funkce h je omezená.* (D18.1.2)

Toto tvrzení dokážeme pro případ $K = R$; postup v případě $K = C$ je obdobný [pracujeme v prostoru R^{2n}, který tvoří reálné a imaginární části složek x_i vektoru $x \in C^n$]. Nechť je $\varkappa \in R$, $|h_i(t)| < \varkappa$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Pro $m = 1, 2, 3, \ldots$ a celá $l_1, l_2, \ldots, l_n$ položme

$$H(m, l_1, \ldots, l_n) = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n \mid \varkappa l_i/m \leqq x_i < \varkappa(l_i + 1)/m\,,$$
$$i = 1, 2, \ldots, n\}\,. \tag{D18.1.3}$$

Snadno se zjistí, že množiny

$$N(m, l_1, \ldots, l_n) = h^{-1}(H(m, l_1, \ldots, l_n)) =$$
$$= \{t \in \mathscr{I} \mid h(t) \in H(m, l_1, \ldots, l_n)\}\,,$$

kde $-m \leqq l_i < m$, $i = 1, 2, \ldots, n$, jsou měřitelné, mají konečnou Lebesgueovu míru a jsou navzájem disjunktní. Zřejmě je

$$\bigcup\{N(m, l_1, \ldots, l_n) \mid -m \leqq l_i < m,\ i = 1, 2, \ldots, n\} = \mathscr{I}\,.$$

Položme

$$\chi_{(m,l_1,\ldots,l_n)}(t) = 1 \quad \text{pro} \quad t \in N(m, l_1, \ldots, l_n)\,,$$

$$\chi_{(m,l_1,\ldots,l_n)}(t) = 0 \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{I} - N(m, l_1, \ldots, l_n)\,,$$

$$a(m, l_1, \ldots, l_n) = (\varkappa l_1/m, \varkappa l_2/m, \ldots, \varkappa l_n/m) \in R^n\,,$$

$$q^{[m]}(t) = \sum_{\substack{-m \leqq l_i < m \\ i = 1,\ldots,n}} a(m, l_1, \ldots, l_n)\, \chi_{(m,l_1,\ldots,l_n)}(t) \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{I}.$$

Funkce $q^{[m]}(t)$ jsou jednoduché a integrovatelné a je $h(t) = \lim_{m \to \infty} q^{[m]}(t)$ pro $t \in \mathscr{I}$. Podle (D18.1.1) je

$$\left\| \int_{\mathscr{I}} q^{[m]}(t)\, \mathrm{d}t \right\| \leqq \int_{\mathscr{I}} \|q^{[m]}(t)\|\, \mathrm{d}t\,.$$

Protože funkce $q^{[m]}(t)$, $\|q^{[m]}(t)\|$ jsou omezené a $\mathscr{I}$ je omezený interval, je podle Věty 18.1.17

$$\int_{\mathscr{I}} h(t)\, \mathrm{d}t = \lim_{m \to \infty} \int_{\mathscr{I}} q^{[m]}(t)\, \mathrm{d}t\,,$$

$$\int_{\mathscr{I}} \|h(t)\|\, \mathrm{d}t = \lim_{m \to \infty} \int_{\mathscr{I}} \|q^{[m]}(t)\|\, \mathrm{d}t\,,$$

a tedy (D18.1.2) platí.

Abychom dokázali Větu 18.1.18, definujme posloupnost funkcí $h^{[m]}: \mathscr{I} \to K^n$, $m = 1, 2, 3, \ldots$, tímto předpisem: Je-li

$$t \in \mathscr{I} \cap \langle -m, m \rangle\,, \quad \sum_{i=1}^{n} |h_i(t)| < m\,, \quad \text{položme } h^{[m]}(t) = h(t)\,;$$

pro ostatní t nechť je $h^{[m]}(t) = 0$. Funkce $h^{[m]}$ je omezená, měřitelná a rovna nule mimo kompaktní interval $\langle -m, m \rangle$. Proto podle (D18.1.2) můžeme užít Věty 18.1.18, je $h^{[m]} \in L(\mathscr{I}, K^n)$, $\|h^{[m]}(.)\| \in L(\mathscr{I}, R)$ a platí

$$\left\| \int_{\mathscr{I}} h^{[m]}(t)\, \mathrm{d}t \right\| \leqq \int_{\mathscr{I}} \|h^{[m]}(t)\|\, \mathrm{d}t\,. \tag{D18.1.4}$$

Podle Věty 18.1.6 je $|h_i| \in L(\mathscr{I}, R)$ a podle (3.2.8) je

$$\|h(t)\| \leqq \eta_1 \sum_{i=1}^{n} |h_i(t)| \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{I}\,. \tag{D18.1.5}$$

Je ovšem $\|h^{[m]}(t)\| \leqq \|h(t)\|$, tedy také

$$\|h^{[m]}(t)\| \leqq \eta_1 \sum_{i=1}^{n} |h_i(t)| \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{I}\,, \quad m = 1, 2, \ldots\,.$$

Protože funkce na pravé straně je integrovatelná, je podle Věty 18.1.17

$$\int_{\mathscr{I}} h(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathscr{I}} h^{[m]}(t)\,\mathrm{d}t\,.$$

Je $\|h^{[m+1]}(t)\| \geqq \|h^{[m]}(t)\|$, $\|h(t)\| = \lim_{m\to\infty}{}^{r} \|h^{[m]}(t)\|$ pro $t \in \mathscr{I}$, $m = 1, 2, \ldots$. Podle Věty 18.1.7 existuje integrál $\int_{\mathscr{I}} \|h(t)\|\,\mathrm{d}t$ a je

$$\int_{\mathscr{I}} \|h(t)\|\,\mathrm{d}t = \lim_{m\to\infty} \int_{\mathscr{I}} \|h^{[m]}(t)\|\,\mathrm{d}t\,.$$

Vzhledem k (D18.1.5) je $\int_{\mathscr{I}} \|h(t)\|\,\mathrm{d}t \in R$ a limitním přechodem v (D18.1.4) plyne, že platí (18.1.10). Věta 18.1.18 platí i v tomto případě.

Dodatek 18.2. Dokážeme Větu 18.4.16. Pro $i = 1, 2, \ldots$ nechť je $y^{[i]} \in \bar{B}(\tilde{x}, \Delta_2, R^n)$ a nechť posloupnost $y^{[i]}$ je hustá v $\bar{B}(\tilde{x}, \Delta_2, R^n)$. Položme

$$\psi_k(t) = \sup\left\{\|h(t, y^{[i]}) - h(t, y^{[j]})\| \;\middle|\; \|y^{[i]} - y^{[j]}\| \leqq 1/k\right\},\quad k = 1, 2, \ldots.$$

Při pevných i, j funkce $\|h(., y^{[i]}) - h(., y^{[j]})\|$ je měřitelná, a proto i funkce ψ_k jsou měřitelné. Protože funkce $h(t, .)$ je spojitá a koule $\bar{B}(\tilde{x}, \Delta_2, R^n)$ je kompaktní, je $h(t, .)$ stejnoměrně spojitá a platí $\psi_k(t) \to 0$ pro $k \to \infty$ v každém bodě $t \in \langle t_0 - \Delta_1, t_0 + \Delta_1\rangle$. Pro $\eta > 0$, $k = 1, 2, \ldots$ položme

$$C(\eta, k) = \{t \in \langle t_0 - \Delta_1, t_0 + \Delta_1\rangle \mid \psi_k(t) > \eta\}\,.$$

Pro každé $\eta > 0$ platí

$$\lim_{k\to\infty} m(C(\eta, k)) = 0$$

[$m(E)$ je Lebesgueova míra množiny $E \subset R$]. Proto ke každému přirozenému číslu j existuje přirozené číslo k_j takové, že je $m(C(2^{-j}, k_j)) < 2^{-j}$. Pro $l = 1, 2, \ldots$ položme $\tilde{D}_l = \bigcup_{j>l} C(2^{-j}, k_j)$. Zřejmě je $m(\tilde{D}_l) < 2^{-l}$. Nechť D_l je taková otevřená množina, že je $\tilde{D}_l \subset D_l$, $m(D_l) < 2^{-l}$. Z definice množiny D_l plyne, že platí:

$$\begin{aligned}&\text{Je-li } t \in \langle t_0 - \Delta_1, t_0 + \Delta_1\rangle - D_l,\ j > l,\ u, v \in \bar{B}(\tilde{x}, \Delta_2),\\ &\|u - v\| \leqq 1/k_j,\ \text{pak je } \|h(t, u) - h(t, v)\| \leqq 2^{-j}.\end{aligned} \tag{18.2.1}$$

Nechť je $\zeta > 0$. Podle Luzinovy věty (viz [29], kap. II, § 4) ke každému i existuje uzavřená množina $E_i \subset \langle t_0 - \Delta_1, t_0 + \Delta_1\rangle$ taková, že je

$$m(\langle t_0 - \Delta_1, t_0 + \Delta_1\rangle - E_i) < \zeta 2^{-i-1}$$

a že funkce $f(., y^{[i]})$ je spojitá na E_i.

Určeme přirozené číslo l tak, aby bylo $2^{-l} < \zeta/2$ a položme

$$A_\zeta = \bigcap_{i=1}^{\infty} E_i - D_l\,.$$

Množina A_ζ je zřejmě kompaktní a protože je

$$\langle t_0 - \Delta_1, t_0 + \Delta_1 \rangle - A_\zeta \subset D_l \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} [\langle t_0 - \Delta_1, t_0 + \Delta_1 \rangle - E_i] ,$$

platí (18.4.23). Dokážeme, že platí (18.4.24). Nechť je $\varepsilon > 0$. Přirozené číslo j určíme tak, aby bylo $2^{-j} < \varepsilon/4$ a přirozené číslo r tak, aby bylo $\bar{B}(\tilde{x}, \Delta_2) \subset \bigcup_{i=1}^{r} B(y^{[i]}, 1/k_j)$. Dále najdeme číslo $\delta_1 > 0$ tak, aby platilo

$$\|h(t, y^{[i]}) - h(s, y^{[i]})\| < \varepsilon/4 ,$$

jakmile je $i \in \{1, 2, \ldots, r\}$, $t, s \in A_\zeta$, $|t - s| \leqq \delta_1$. Položíme

$$\delta = \min \{\delta_1, 1/k_j\} .$$

Nechť je $t, s \in A_\zeta$, $|t - s| < \delta$, $u, v \in \bar{B}(\tilde{x}, \Delta_2)$, $\|u - v\| \leqq \delta$. K bodu u nalezneme $m \in \{1, 2, \ldots, r\}$ tak, že je $\|u - y^{[m]}\| < \varepsilon/4$. Je

$$\|h(t, u) - h(s, v)\| \leqq \|h(t, u) - h(t, y^{[m]})\| + \|h(t, y^{[m]}) - h(s, y^{[m]})\| +$$
$$+ \|h(s, y^{[m]}) - h(s, u)\| + \|h(s, u) - h(s, v)\| .$$

Každý člen na pravé straně je menší než $1/(4\varepsilon)$ [při odhadu prvního, třetího a čtvrtého členu užijeme (D18.2.1), při odhadu druhého členu užijeme definice čísla δ_1 a nerovnosti $\delta \leqq \delta_1$]. Je tedy $\|h(t, u) - h(s, v)\| < \varepsilon$. To znamená, že funkce $h|_{A_\zeta \times B(\tilde{x}, \Delta_2)}$ je spojitá. Věta 18.4.16 je dokázána.

Dodatek 18.3. V tomto dodatku dokážeme Větu 18.5.5. Nejdříve zčásti připomeneme a zčásti odvodíme některé výsledky o konvexních množinách. *Množina $Z \subset R^n$ se nazývá konvexní,* jestliže platí: Je-li $x, y \in Z$, pak množina Z obsahuje úsečku spojující body x, y, tj. množinu $\{\alpha x + (1 - \alpha) y | 0 \leqq \alpha \leqq 1\}$. Přirozeně prázdná množina je konvexní a přímo z definice konvexní množiny plyne, že průnik libovolné soustavy konvexních množin je konvexní množina. Nechť je $Y \subset R^n$. Nechť množina V má tyto vlastnosti:

$$Y \subset V. \tag{D18.3.1}$$

$$V \text{ je uzavřená a konvexní}. \tag{D18.3.2}$$

Je-li Z uzavřená konvexní množina taková, že je $Y \subset Z$, pak je

$$V \subset Z. \tag{D18.3.3}$$

Pak V se nazývá *uzavřený konvexní obal množiny Y.* Protože průnik libovolné soustavy uzavřených konvexních množin je uzavřená konvexní množina, je množina

V rovna průniku všech uzavřených konvexních množin, které obsahují Y; množina V tedy existuje pro každou množinu $Y \subset R^n$ a je určena jednoznačně. Uzavřený konvexní obal množiny Y označujeme $\overline{\mathrm{Co}}\, Y$. Nechť je $u \in R^n$, $u \neq 0$, $\gamma \in R$. Množinu $\{x \in R^n \mid (u, x) = \gamma\}$ nazýváme *nadrovinou*, množiny $\{x \in R^n \mid (u, x) \leqq \gamma\}$, $\{x \in R^n \mid (u, x) \geqq \gamma\}$ nazýváme *(uzavřenými) poloprostory*. Nechť R_0 je množina racionálních čísel.

D18.3.1. Věta (o oddělitelnosti kompaktních konvexních množin): *Nechť je $X, Y \in \mathscr{K}_n$, $X \cap Y = \emptyset$. Potom existují $\tilde{u} \in R^n$, $\tilde{u} \neq 0$, a $\gamma_1, \gamma_2 \in R$, $\gamma_1 < \gamma_2$, tak, že je $(\tilde{u}, x) \leqq \gamma_1$ pro $x \in X$, $(\tilde{u}, x) \geqq \gamma_2$ pro $x \in Y$.*

Důkaz: Pro $u = (u_1, \ldots, u_n)$ položme $\|u\|_2 = (u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2)^{1/2}$. Protože množiny X, Y jsou kompaktní, existují body $\tilde{x} \in X$, $\tilde{y} \in Y$ takové, že je $\|\tilde{x} - \tilde{y}\|_2 = \inf\{\|x - y\|_2 \mid x \in X, y \in Y\}$, a protože je $X \cap Y = \emptyset$, je $\tilde{x} \neq \tilde{y}$.
Položme $\bar{B}_2 = \{x \in R^n \mid \|x - \tilde{x}\|_2 \leqq \|\tilde{y} - \tilde{x}\|_2\}$. Je $\bar{B}_2 \cap Y = \{\tilde{y}\}$. Odtud plyne, že je

$$Y \cap \{x \in R^n \mid (\tilde{y} - \tilde{x}, x) < (\tilde{y} - \tilde{x}, \tilde{y})\} = \emptyset$$

[v opačném případě by existoval bod $y \in Y$ takový, že by bylo $(\tilde{y} - \tilde{x}, y) < (\tilde{y} - \tilde{x}, \tilde{y})$ a pro všechna dosti malá $\lambda > 0$ by body $\tilde{y} + \lambda(y - \tilde{y})$ patřily do množiny $\bar{B}_2 \cap Y$]. Je tedy $Y \subset \{x \in R^n \mid (\tilde{y} - \tilde{x}, x) \geqq (\tilde{y} - \tilde{x}, \tilde{y})\}$, tj. $(\tilde{y} - \tilde{x}, x) \geqq (\tilde{y} - \tilde{x}, \tilde{y})$ pro $x \in Y$. Obdobně je $(\tilde{x} - \tilde{y}, x) \geqq (\tilde{x} - \tilde{y}, \tilde{x})$ pro $x \in X$, tedy $(\tilde{y} - \tilde{x}, x) \leqq (\tilde{y} - \tilde{x}, \tilde{x})$ pro $x \in X$. Je $(\tilde{y} - \tilde{x}, \tilde{y} - \tilde{x}) > 0$, tedy $(\tilde{y} - \tilde{x}, \tilde{y}) > (\tilde{y} - \tilde{x}, \tilde{x})$ a Věta D18.3.1 platí, položíme-li $\tilde{u} = \tilde{y} - \tilde{x}$, $\gamma_1 = (\tilde{y} - \tilde{x}, \tilde{x})$, $\gamma_2 = (\tilde{y} - \tilde{x}, \tilde{y})$.

Poznamenejme, že Větu D18.3.1 lze odvodit z podstatně hlubší věty o oddělitelnosti konvexních uzavřených množin (viz [42], kap. 3, § 2, Větu 5).

D18.3.2. Věta: *Nechť je $X, Y \in \mathscr{K}_n$, $X \cap Y = \emptyset$. Potom existují $u \in R_0^n$, $\gamma \in R_0$ tak, že je $(u, x) < \gamma$ pro $x \in X$, $(u, x) > \gamma$ pro $x \in Y$.*

Důkaz: Najděme $\tilde{u}, \gamma_1, \gamma_2$ podle Věty D18.3.1. Nechť je $\gamma_1 < \gamma < \gamma_2$, $\gamma \in R_0$. Protože množiny X, Y jsou omezené, stačí, zvolíme-li $u \in R_0^n$ dostatečně blízko k $\tilde{u}$. Věta D18.3.2 je dokázána.

D18.3.3. Věta: *Nechť je $X \in \mathscr{K}_n$ a nechť $\mathscr{U}(X)$ je množina takových dvojic (u, γ), $u \in R_0^n$, $u \neq 0$, $\gamma \in R_0$, že je $(u, x) \leqq \gamma$ pro $x \in X$. Potom je*

$$X = \bigcap_{(u,\gamma) \in \mathscr{U}(X)} \{x \in R^n \mid (u, x) \leqq \gamma\}. \tag{D18.3.4}$$

Důkaz: Zřejmě je $X \subset \bigcap_{(u,\gamma) \in \mathscr{U}(X)} \{x \in R^n \mid (u, x) \leqq \gamma\}$. Je-li $y \in R^n - X$, pak podle Věty D18.3.2 existují $u \in R_0^n$, $u \neq 0$, $\gamma \in R_0$ tak, že je $(u, x) < \gamma$ pro

$x \in X$, $(u, y) > \gamma$. To znamená, že $y \notin \bigcap_{(u,\gamma)\in\mathscr{U}(X)} \{x \in R^n \mid (u, x) \leqq \gamma\}$ a (D18.3.4) platí. Věta D18.3.3 je dokázána.

Nechť je $\emptyset \neq X \subset R^n$, nechť množina X je omezená, $u \in R^n$, $u \neq 0$. Položme $\omega(u, X) = \sup \{(u, x) \mid x \in X\}$.

D18.3.4. Věta: *Je-li $X \in \mathscr{K}_n$, platí*

$$X = \bigcap_{u\in R_0{}^n, u\neq 0} \{x \in R^n \mid (u, x) \leqq \omega(u, X)\}.$$

Důkaz: Pro $u \in R_0^n$, $u \neq 0$, je $\omega(u, X) = \inf \{\gamma \in R_0 \mid (u, \gamma) \in \mathscr{U}(X)\}$ a Věta D18.3.4 plyne z Věty D18.3.3.

D18.3.5. Věta: *Nechť je $\emptyset \neq X \subset R^n$ a nechť množina X je omezená. Položme $Y = \bigcap_{u\in R_0{}^n, u\neq 0} \{x \in R^n \mid (u, x) \leqq \omega(u, X)\}$. Potom je $Y = \overline{\mathrm{Co}}X$.*

Důkaz: Množina Y je konvexní, uzavřená, $X \subset Y$, a snadno se ukáže, že Y je omezená. Je tedy $Y \in \mathscr{K}_n$, $\overline{\mathrm{Co}}X \subset Y$. Podle Věty D18.3.4 je

$$\overline{\mathrm{Co}}X = \bigcap_{u\in R_0{}^n, u\neq 0} \{x \in R^n \mid (u, x) \leqq \omega(u, \overline{\mathrm{Co}}X)\}.$$

Na druhé straně je $\omega(u, \overline{\mathrm{Co}}X) \geqq \omega(u, X)$ pro $u \in R^n$, $u \neq 0$, a tedy je $Y \subset \overline{\mathrm{Co}}X$. Věta D18.3.5 je dokázána.

D18.3.6. Definice: Nechť množina $A \subset R$ je měřitelná. Bod $\xi \in R$ se nazývá *bod metrické hustoty množiny A*, jestliže ke každému číslu $v < 1$ existuje $\eta > 0$ tak, že je $m(A \cap \langle\alpha, \beta\rangle) > v(\beta - \alpha)$, jakmile je $\xi - \eta \leqq \alpha \leqq \xi \leqq \beta \leqq \xi + \eta$, $\alpha \neq \beta$.

Snadno se dokáže, že platí

D18.3.7. Věta: *Nechť množina $A \subset R$ je měřitelná, $\chi: R \to R$, $\chi(t) = 1$ pro $t \in A$, $\chi(t) = 0$ pro $t \in R - A$, $\Theta(t) = \int_0^t \chi(\sigma)\, d\sigma$. Potom bod ξ je bodem metrické hustoty množiny A právě tehdy, je-li číslo 1 derivace funkce Θ v bodě ξ.*

Z Vět 18.1.11 a D18.3.7 plyne, že platí

D18.3.8. Věta: *Nechť množina $A \subset R$ je měřitelná, $m(A) > 0$. Potom skoro každý bod množiny A je bodem její metrické hustoty.*

Euklidovskou normu bodu $x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n$ označíme $\|x\|_2$, tj. $\|x\|_2 = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$. Je

D18.3.9. Věta: *Nechť $\mathscr{J}$ je interval, $\tau \in \mathscr{J}$, $\varkappa > 0$, $p^{[k]}: \in \mathscr{J} \to R^n$ jsou měřitelné* *a nechť je* $\|p^{[k]}(t)\|_2 \leqq \varkappa$ *pro* $t \in \mathscr{I}$, $k = 1, 2, \ldots$. *Pro* $t \in \mathscr{I}$, $l = 1, 2, \ldots$ *položme*

$$P_l(t) = \overline{\mathrm{Co}}\,\{p^{[l]}(t), p^{[l+1]}(t), p^{[l+2]}(t), \ldots\},$$

$$P(t) = \bigcap_{l=1,2,\ldots} P_l(t),\ q^{[k]}(t) = \int_\tau^t p^{[k]}(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma. \tag{D18.3.5}$$

Nechť pro každé $t \in \mathscr{I}$ *posloupnost* $q^{[k]}(t)$ *konverguje,* $q(t) = \lim_{k\to\infty} q^{[k]}(t)$. *Položme*

$$\dot{q}(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}(t)$$

ve všech bodech $t \in \mathscr{I}$, *v nichž funkce* q *má derivaci, a nechť je* $\dot{q}(t) = 0$ *v těch bodech* $t \in \mathscr{I}$, *v nichž funkce* q *nemá derivaci. Potom je*

$$\|q(t) - q(s)\|_2 \leqq \varkappa|t - s| \quad \textit{pro} \quad t, s \in \mathscr{I}, \tag{D18.3.6}$$

$$\dot{q}(t) \in P(t) \textit{ skoro všude v } \mathscr{I} \tag{D18.3.7}$$

[*pro každé* $t \in \mathscr{I}$ *je ovšem* $\emptyset \neq P(t) \in \mathscr{K}_n$, *neboť je* $\emptyset \neq P_l(t) \in \mathscr{K}_n$, $P_l(t) \supset P_{l+1}(t)$ *pro* $l = 1, 2, 3, \ldots$].

Důkaz: Je $\|q^{[k]}(t) - q^{[k]}(s)\|_2 \leqq \int_s^t \|p^{[k]}(\sigma)\|_2\,\mathrm{d}\sigma \leqq \varkappa(t - s)$ pro $s < t$, $k = 1, 2, \ldots$, a tedy platí (D18.3.6). Vzhledem k definici funkce $\dot{q}$ a k (D18.3.6) platí $\|\dot{q}(t)\|_2 \leqq \varkappa$ pro $t \in \mathscr{I}$. Nechť $\mathfrak{P}$ je graf zobrazení P, tj. $\mathfrak{P} = \{(t, x) |\ t \in \mathscr{I}, x \in P(t)\}$. Pro $u \in R_0^n$, $u \neq 0$, $l = 1, 2, \ldots$ položme

$$\varphi_{ul}(t) = \sup_{j\geqq l}\,(u, p^{[j]}(t)), \quad \psi_u(t) = \lim_{l\to\infty} \varphi_{ul}(t) \tag{D18.3.8}$$

[limita existuje, protože $\varphi_{ul}(t) \geqq \varphi_{u,l+1}(t)$]. Funkce φ_{ul}, ψ_u jsou měřitelné a je

$$|\varphi_{ul}(t)| \leqq \varkappa\|u\|_2, \quad |\psi_u(t)| \leqq \varkappa\|u\|_2. \tag{D18.3.9}$$

Podle Věty D18.3.5 je

$$P_l(t) = \bigcap_{u\in R_0^n, u\neq 0} \{x \in R^n |\ (u, x) \leqq \varphi_{ul}(t)\} \quad \text{pro} \quad l = 1, 2, \ldots.$$

$$P(t) = \bigcap_{u\in R_0^n, u\neq 0} \{x \in R^n |\ (u, x) \leqq \psi_u(t)\}.$$

Položme $\mathfrak{P}_u = \{(t, x) |\ t \in \mathscr{I}, (u, x) \leqq \psi_u(t)\}$ pro $u \in R_0^n$, $u \neq 0$. Je

$$\mathfrak{P} = \bigcap_{u\in R_0^n, u\neq 0} \mathfrak{P}_u. \tag{D18.3.10}$$

Pro $u \in R_0^n$, $u \neq 0$, nechť je $T_u = \{t \in \mathscr{I} |\ (u, \dot{q}(t)) > \psi_u(t)\}$. Protože platí (D18.3.6), je funkce $\dot{q}$ měřitelná, a tedy i množina T_u je měřitelná. Dokážeme, že pro každé $u \in R_0^n$, $u \neq 0$, je

$$m(T_u) = 0. \tag{D18.3.11}$$

Nechť naopak existuje takové $u \in R_0^n$, $u \neq 0$, že je $m(T_u) > 0$. Pro $\vartheta > 0$ položme

$$V_\vartheta = \{t \in I \mid (u, \dot{q}(t)) > \psi_u(t) + \vartheta\}.$$

Množina V_ϑ je měřitelná. Protože je

$$T_u = \bigcup_{m=1,2,\ldots} V_{1/m}, \quad m(T_u) > 0,$$

existuje takové číslo $\delta > 0$, že je $m(V_\delta) > 0$. Nechť ξ je bod metrické hustoty množiny V_δ [takový bod existuje podle Věty D18.3.8]. Zvolme číslo ν, $0 < \nu < 1$, tak, aby bylo $\delta\nu > 2\varkappa\|u\|_2 (1 - \nu)$, a najdeme číslo $\eta > 0$ podle Definice D18.3.6. Nechť je $\xi - \eta \leqq \alpha \leqq \xi \leqq \beta \leqq \xi + \eta$, $\alpha \neq \beta$, $\langle\alpha, \beta\rangle \subset \mathscr{I}$. Je

$$(u, q(\beta)) - (u, q(\alpha)) = \int_\alpha^\beta (u, \dot{q}(\sigma))\, d\sigma = \int_{V_\delta \cap \langle\alpha,\beta\rangle} (u, \dot{q}(\sigma))\, d\sigma +$$
$$+ \int_{\langle\alpha,\beta\rangle - V_\delta} (u, \dot{q}(\sigma))\, d\sigma \geqq \delta\nu(\beta - \alpha) +$$
$$+ \int_{V_\delta \cap \langle\alpha,\beta\rangle} \psi_u(\sigma)\, d\sigma - \varkappa\|u\|_2 (1 - \nu)(\beta - \alpha), \tag{D18.3.12}$$

$$(u, q^{[k]}(\beta)) - (u, q^{[k]}(\alpha)) = \int_{V_\delta \cap \langle\alpha,\beta\rangle} (u, p^{[k]}(\sigma))\, d\sigma +$$
$$+ \int_{\langle\alpha,\beta\rangle - V_\delta} (u, p^{[k]}(\sigma))\, d\sigma \leqq$$
$$\leqq \int_{V_\delta \cap \langle\alpha,\beta\rangle} \varphi_{uk}(\sigma)\, d\sigma + \varkappa\|u\|_2 (1 - \nu)(\beta - \alpha). \tag{D18.3.13}$$

Vzhledem k (D18.3.8) a (D18.3.9) je

$$\int_{V_\delta \cap \langle\alpha,\beta\rangle} \psi_u(\sigma)\, d\sigma = \lim_{k\to\infty} \int_{V_\delta \cap \langle\alpha,\beta\rangle} \varphi_{uk}(\sigma)\, d\sigma.$$

Limitním přechodem pro $k \to \infty$ v (D18.3.13) obdržíme

$$(u, q(\beta)) - (u, q(\alpha)) \leqq \int_{V_\delta \cap \langle\alpha,\beta\rangle} \psi_u(\sigma)\, d\sigma + \varkappa\|u\|_2 (1 - \nu)(\beta - \alpha).$$

Podle (D18.3.12) má být

$$\int_{V_\delta \cap \langle\alpha,\beta\rangle} \psi_u\, d\sigma + \delta\nu(\beta - \alpha) - \varkappa\|u\|_2 (1 - \nu)(\beta - \alpha) \leqq$$
$$\leqq \int_{V_\delta \cap \langle\alpha,\beta\rangle} \psi_u\, d\sigma + \varkappa\|u\|_2 (1 - \nu)(\beta - \alpha)$$

a to není možné vzhledem k volbě čísla ν. Tedy (D18.3.11) platí pro každé $u \in R_0^n$,

$u \neq 0$. Položme

$$T = \bigcup_{u \in R_0^n, u \neq 0} T_u .$$

Je $m(T) = 0$. Je-li $t \in \mathscr{I} - T$, je $t \in \mathscr{I} - T_u$ pro každé u, tedy $(t, \dot{q}(t)) \in \mathfrak{P}_u$ pro každé $u \in R_0^n$, $u \neq 0$, a vzhledem k (D18.3.10) je $(t, \dot{q}(t)) \in \mathfrak{P}$, tj. $\dot{q}(t) \in P(t)$. Věta D18.3.9 je dokázána.

D18.3.10. Věta: *Nechť $\mathscr{J}$ je omezený interval, $\tilde{\tau} \in \mathscr{J}$, $\tilde{\varrho} \in L(\mathscr{J}, R)$, $\tilde{p}^{[k]} \in L(\mathscr{J}, R^n)$ pro $k = 1, 2, \ldots$ a nechť je $\|\tilde{p}^{[k]}(t)\|_2 \leqq \tilde{\varrho}(t)$ pro $t \in \mathscr{J}$, $k = 1, 2, \ldots$. Pro $t \in \mathscr{J}$, $l = 1, 2, \ldots$ položme*

$$\tilde{P}_l(t) = \overline{\mathrm{Co}}\, \{\tilde{p}^{[l]}(t), \tilde{p}^{[l+1]}(t), \ldots\} ,$$

$$\tilde{P}(t) = \bigcap_{l=1,2,\ldots} \tilde{P}_l(t), \quad \tilde{q}^{[k]}(t) = \int_{\tilde{\tau}}^{t} \tilde{p}^{[k]}(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma .$$

Nechť pro každé $t \in \mathscr{J}$ posloupnost $\tilde{q}^{[k]}(t)$ konverguje, $\tilde{q}(t) = \lim_{k \to \infty} \tilde{q}^{[k]}(t)$. Položme

$$\dot{\tilde{q}}(t) = \frac{\mathrm{d}\tilde{q}}{\mathrm{d}t}(t)$$

ve všech bodech $t \in \mathscr{J}$, v nichž funkce $\tilde{q}$ má derivaci, a nechť je $\dot{\tilde{q}}(t) = 0$ v těch bodech $t \in \mathscr{J}$, v nichž funkce $\tilde{q}$ nemá derivaci. Potom je

$$\|\tilde{q}(t) - \tilde{q}(s)\|_2 \leqq \int_s^t \tilde{\varrho}\, \mathrm{d}\sigma \quad \textit{pro} \quad s, t \in \mathscr{J}, \quad s < t , \tag{D18.3.14}$$

$$\dot{\tilde{q}}(t) \in \tilde{P}(t) \textit{ skoro všude v } \mathscr{J}. \tag{D18.3.15}$$

D ů k a z: Je

$$\|\tilde{q}^{[k]}(t) - \tilde{q}^{[k]}(s)\|_2 \leqq \int_s^t \|\tilde{p}^{[k]}(\sigma)\|_2\, \mathrm{d}\sigma \leqq \int_s^t \tilde{\varrho}(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma$$

pro $s, t \in \mathscr{J}$, $s < t$, a tedy platí (D18.3.14) a je

$$\tilde{q}(t) - \tilde{q}(s) = \int_s^t \dot{\tilde{q}}(\sigma)\, \mathrm{d}\sigma .$$

Položme

$$\varphi(t) = \int_{\tilde{\tau}}^t [1 + \tilde{\varrho}(\sigma)]\, \mathrm{d}\sigma .$$

Funkce φ je rostoucí, absolutně spojitá a zobrazuje interval $\mathscr{J}$ na interval, který označíme $\mathscr{I}$. Nechť $\psi\colon \mathscr{I} \to \mathscr{J}$ je inverzní k funkci φ. Je $|\psi(\lambda_1) - \psi(\lambda_2)| \leqq |\lambda_1 - \lambda_2|$ pro $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathscr{I}$, tedy funkce ψ je absolutně spojitá. Lze dokázat, že pro skoro všechna $\lambda \in I$ je

$$\frac{\mathrm{d}\psi}{\mathrm{d}\lambda}(\lambda) = [1 + \tilde{\varrho}(\psi(\lambda))]^{-1} .$$

Položme

$$q^{[k]}(\zeta) = \tilde{q}^{[k]}(\psi(\zeta)), \quad q(\zeta) = \tilde{q}(\psi(\zeta)) \quad \text{pro} \quad \zeta \in \mathscr{I}, \quad k = 1, 2, \ldots .$$

Je $\varphi(\tilde{\tau}) = 0$ a podle Věty 18.1.24 je

$$q^{[k]}(\zeta) = \int_0^\zeta \frac{\tilde{p}^{[k]}(\psi(\lambda))}{1 + \tilde{\varrho}(\psi(\lambda))} \, d\lambda \, , \quad q(\zeta) = \int_0^\zeta \frac{\dot{\tilde{q}}(\psi(\lambda))}{1 + \tilde{\varrho}(\psi(\lambda))} \, d\lambda \, .$$

Položme $p^{[k]}(\zeta) = \tilde{p}^{[k]}(\psi(\zeta)) \left[1 + \tilde{\varrho}(\psi(\zeta))\right]^{-1}$ a zaveďme množiny $P_l(\zeta)$, $P(\zeta)$ a funkci $\dot{q}$ jako ve Větě D18.3.9. Je $\dot{q}(\zeta) = \dot{\tilde{q}}(\psi(\zeta)) \left[1 + \tilde{\varrho}(\psi(\zeta))\right]^{-1}$ pro skoro všechna $\zeta \in \mathscr{I}$. Podle Věty D18.3.9 je $\dot{\tilde{q}}(\psi(\zeta)) \left[1 + \tilde{\varrho}(\psi(\zeta))\right]^{-1} \in P(\zeta)$ pro skoro všechna $\zeta \in \mathscr{I}$. Je-li $\zeta \in \mathscr{I}$, $t = \psi(\zeta)$, $\dot{\tilde{q}}(\psi(\zeta)) \left[1 + \tilde{\varrho}(\psi(\zeta))\right]^{-1} \in P(\zeta)$, je $\dot{\tilde{q}}(t) \in \tilde{P}(t)$, a protože funkce ψ zobrazuje množinu míry nula v $\mathscr{I}$ na množinu míry nula v $\mathscr{J}$, je $\dot{\tilde{q}}(t) \in \tilde{P}(t)$ skoro všude v $\mathscr{J}$. Věta D18.3.10 je dokázána.

Pro $\zeta > 0$ označíme $B_2(0, \zeta, R^n)$ kouli v R^n o středu 0 a poloměru ζ při užití euklidovské normy, tj.

$$B_2(0, \zeta, R^n) = \{x \in R^n \mid \|x\|_2 < \zeta\} \, .$$

D18.3.11. Věta: *Nechť $\mathscr{I} \subset R$ je omezený interval, $\varrho \in L(\mathscr{I}, R)$, nechť funkce $S: \mathscr{I} \to \mathscr{K}_n$ je měřitelná a nechť je $S(t) \subset B(0, \varrho(t), R^n)$ pro $t \in \mathscr{I}$. Potom existuje funkce $p \in L(\mathscr{I}, R^n)$ tak, že je $p(t) \in S(t)$ skoro všude v $\mathscr{I}$.*

Důkaz: Nechť l je přirozené číslo. Pro $k_j = 0, 1, \ldots, 2l^2$, $j = 1, 2, \ldots, n$, položme

$$W_{l,k_1,\ldots,k_n} = \left\{x = (x_1, \ldots, x_n) \in R^n \,\middle|\, \frac{k_j - l^2 - 1}{l} \leqq x_j \leqq \frac{k_j - l^2 + 1}{l} \, , \right.$$
$$\left. j = 1, 2, \ldots, n \right\} .$$

Ke každému celému číslu $m = 0, 1, 2, \ldots, (2l^2 + 1)^n - 1$ existuje právě jedna n-tice $(k_1, \ldots, k_n)$, kde $k_j = 0, 1, \ldots, 2l^2$ tak, že je

$$m = k_1 + (2l^2 + 1) k_2 + (2l^2 + 1)^2 k_3 + \ldots + (2l^2 + 1)^{n-1} k_n \, . \quad \text{(D18.3.16)}$$

Položme $V_{lm} = W_{lk_1\ldots k_n}$; tím jsme množiny $W_{lk_1\ldots k_n}$ uspořádali. Zřejmě je

$$\bigcup_{m=0}^{(2l^2+1)^n-1} V_{lm} = \bigcup_{\substack{k_1,\ldots,k_n \\ 0 \leqq k_j \leqq 2l^2}} W_{lk_1\ldots k_n} =$$
$$= \left\{x \in R^n \,\middle|\, -l - \frac{1}{l} \leqq x_j \leqq l + \frac{1}{l}, \; j = 1, 2, \ldots, n\right\} .$$

Položme

$$T_{lm} = \{t \in \mathscr{I} \mid S(t) \cap V_{lm} \neq \phi\} \, , \quad A_{lm} = T_{lm} - (T_{l0} \cup T_{l1} \cup \ldots \cup T_{l,m-1}) \, .$$

Množiny T_{lm}, A_{lm} jsou měřitelné, $A_{lm} \cap A_{lk} = \emptyset$ pro $m \neq k$ a je

$$\bigcup_{l=1,2,\dots} \bigcup_{m=0}^{(2l^2+1)^n-1} A_{lm} = \mathscr{I}.$$

Funkce $p^{[l]}: \mathscr{I} \to R^n$ zaveďme předpisem

$$p^{[l]}(t) = \left(\frac{k_1 - l^2}{l}, \frac{k_2 - l^2}{l}, \dots, \frac{k_n - l^2}{l}\right),$$

je-li $t \in A_{lm}$ a platí-li (D18.3.16); $p^{[l]}(t) = 0$, je-li

$$t \in \mathscr{I} - \bigcup_{m=0}^{(2l^2+1)^n-1} A_{lm}.$$

Funkce $p^{[l]}$ jsou měřitelné, $\|p^{[l]}(t)\|_2 \leqq \varrho(t) + n^{1/2}l^{-1}$ pro $t \in \mathscr{I}$, $l = 1, 2, \dots$, tedy je $p^{[l]} \in L(\mathscr{I}, R^n)$ pro $l = 1, 2, \dots$. Zvolme $\tau \in \mathscr{I}$ a položme

$$q^{[l]}(t) = \int_\tau^t p^{[l]}(\sigma)\, d\sigma \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{I}.$$

Je

$$\|q^{[l]}(t) - q^{[l]}(s)\| \leqq \int_s^t \|p^{[l]}(\sigma)\|\, d\sigma \leqq \int_s^t \varrho\, d\sigma + n^{1/2}(t - s)\, l^{-1}$$

$$\text{pro} \quad t, s \in \mathscr{I}, \quad s < t,$$

a podle Arzelàovy-Ascoliovy věty lze vybrat stejnoměrně konvergentní posloupnost $q^{[l_i]}$. Položme $q(t) = \lim_{i\to\infty} q^{[l_i]}(t)$ pro $t \in \mathscr{I}$,

$$\tilde{P}_j(t) = \overline{\mathrm{Co}}\,\{p^{[l_j]}(t), p^{[l_{j+1}]}(t), \dots\}, \quad \tilde{P}(t) = \bigcap_{j=1,2,\dots} \tilde{P}_j(t).$$

Podle Věty D18.3.10 funkce q je absolutně spojitá a je $\dot{q}(t) \in \tilde{P}(t)$ skoro všude. Ke každému $\varepsilon > 0$ a $t \in \mathscr{I}$ existuje číslo $N(\varepsilon, t)$ tak, že je $p^{[l]}(t) \in \bar{\Omega}(S(t), \varepsilon)$ pro $l > N(\varepsilon, t)$, tedy $\tilde{P}_l(t) \subset \bar{\Omega}(S(t), \varepsilon)$, neboť množina $\bar{\Omega}(S(t), \varepsilon)$ je konvexní. Je tedy $\tilde{P}(t) \subset \subset \bigcap_{\varepsilon>0} \bar{\Omega}(S(t), \varepsilon) = S(t)$ pro $t \in \mathscr{I}$, $\dot{q}(t) \in S(t)$ skoro všude v $\mathscr{I}$. Položíme $p = \dot{q}$. Věta D18.3.11 je dokázána.

D18.3.12. Věta: *Nechť jsou splněny tyto podmínky*: $\tilde{F} \in \mathrm{USC}(G)$, $\mathscr{I}$ *je interval, funkce* $u: \mathscr{I} \to R^n$ *je spojitá*, $(t, u(t)) \in G$ *pro* $t \in \mathscr{I}$. *Potom složená funkce* $\tilde{F}(t, u(t))$ *je měřitelná* (*viz Definici* 18.5.14).

Důkaz: Nechť množina $E \subset R^n$ je uzavřená. Pro $k = 1, 2, 3, \dots$ položme $E_k = E \cap \bar{B}(0, k)$. Množiny E_k jsou kompaktní a platí $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$. Položme

$$W_k = \{t \in \mathscr{I} \mid F(t, u(t)) \cap E_k \neq \emptyset\}, \quad W = \{t \in \mathscr{I} \mid F(t, u(t)) \cap E \neq \emptyset\}.$$

Zřejmě je $W = \bigcup_{k=1}^{\infty} W_k$. Podle Definice 18.5.3 pro $j = 1, 2, 3, \dots$ existují množiny

$A_j \subset R$ takové, že platí $m(R - A_j) < 1/j$ a že funkce $\tilde{F}|_{G \cap (A_j \times R^n)}$ jsou polospojité shora. Odtud plyne, že množina $W_k \cap A_j$ je uzavřená v A_j a tedy měřitelná pro $k, j = 1, 2, \ldots$. Je tedy i množina $W_k \cap (\bigcup_{j=1}^{\infty} A_j)$ měřitelná, a protože je $m(R - \bigcup_{j=1}^{\infty} A_j) = 0$, je množina W_k měřitelná. To znamená, že množina W je měřitelná, a tak složená funkce $F(t, u(t))$ je měřitelná. Věta D18.3.12 je dokázána.

Důkaz Věty 18.5.5: Hlavní myšlenky jsou obdobné jako v důkazu Věty 18.4.2. K bodu $(t_0, \tilde{x}) \in G$ najdeme čísla $\Delta_1, \Delta_2 > 0$ a funkci ϱ podle (18.5.6), položíme $\delta_2 = \Delta_2/2$ a číslo $\delta_1 > 0$ najdeme tak, aby bylo

$$\delta_1 \leqq \Delta_1 , \quad \int_{t_0 - \delta_1}^{t_0 + \delta_1} \varrho \, d\sigma < \delta_2 .$$

(18.5.7) zřejmě platí. (18.5.8) se dokáže obdobně jako v důkazu Věty 18.4.2.

Dokážeme, že platí (18.5.9). Nechť je $s < t_0 + \delta_1$; sestrojíme řešení $q: \langle s, t_0 + \delta_1 \rangle \to R^n$ diferenciální relace (18.5.1), $q(s) = y$. Nechť l je přirozené číslo, $l > 1$. Položme $s_j = s + j(t_0 + \delta_1 - s) \, l^{-1}$ pro $j = 0, 1, \ldots, l$.

Ukážeme, že existuje funkce $q^{[l]}: \langle s, t_0 + \delta_1 \rangle \to R^n$ splňující tyto podmínky:

$$\text{Funkce } q^{[l]} \text{ je absolutně spojitá na intervalu } \langle s, t_0 + \delta_1 \rangle. \tag{D18.3.17}$$

$$q^{[l]}(t) = y \quad \text{pro} \quad s \leqq t \leqq s_1 . \tag{D18.3.18}$$

$$\dot{q}^{[l]}(t) \in F(t, q^{[l]}(t - [t_0 + \delta_1 - s] \, l^{-1})) \text{ skoro všude v } \langle s_1, t_0 + \delta_1 \rangle. \tag{D18.3.19}$$

[$\dot{q}^{[l]}(t)$ je derivace funkce $q^{[l]}$ v každém takovém bodě t, v němž $q^{[l]}$ má derivaci, v ostatních bodech t je $\dot{q}^{[l]}(t) = 0$.] Jak uvidíme, funkce $q^{[l]}$ nemusí být podmínkami (D18.3.17) až (D18.3.19) určena jednoznačně, platí však

$$(t, q^{[l]}(t)) \in Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, 2\delta_2) \quad \text{pro} \quad t \in \langle s, t_0 + \delta_1 \rangle . \tag{D18.3.20}$$

Funkce $q^{[l]}$ je podmínkou (D18.3.18) určena na intervalu $\langle s, s_1 \rangle$. Předpokládáme, že pro nějaké $j = 1, 2, \ldots, l - 1$ známe funkci $q^{[l]}$ na intervalu $\langle s, s_j \rangle$ a že platí (D18.3.18), že na intervalu $\langle s, s_j \rangle$ platí (D18.3.17) a (D18.3.20) a že platí (D18.3.19) na intervalu $\langle s_1, s_j \rangle$, je-li $j > 1$. Podle Věty D18.3.12 složená funkce $F(t, q^{[l]}(t - [t_0 + \delta_1 - s] \, l^{-1}))$ je na intervalu $\langle s_j, s_{j+1} \rangle$ měřitelná, je

$$F(t, q^{[l]}(t - [t_0 + \delta_1 - s] \, l^{-1})) \subset \bar{B}(0, \varrho(t)) \cdot \text{ pro } \quad t \in \langle s_j, s_{j+1} \rangle ,$$

a tak podle Věty D18.3.11 existuje funkce $w \in L(\langle s_j, s_{j+1} \rangle, R^n)$ taková, že je $w(t) \in F(t, q^{[l]}(t - [t_0 + \delta_1 - s] \, l^{-1}))$ skoro všude v $\langle s_j, s_{j+1} \rangle$. Pro $t \in \langle s_j, s_{j+1} \rangle$ položíme

$$q^{[l]}(t) = q^{[l]}(s_j) + \int_{s_j}^{t} w(\tau) \, d\tau .$$

Odtud plyne, že (D18.3.17) platí na intervalu $\langle s, s_{j+1}\rangle$ a že (D18.3.19) platí na intervalu $\langle s_1, s_{j+1}\rangle$. Je tedy $\|\dot{q}^{[l+1]}(t)\| \leqq \varrho(t)$ pro $t \in \langle s, s_{j+1}\rangle$,

$$\|q^{[l]}(t) - \tilde{x}\| \leqq \|q^{[l]}(t) - q^{[l]}(s)\| + \|y - \tilde{x}\| \leqq \int_s^t \|\dot{q}^{[l]}(\tau)\| \, d\tau + \delta_2 \leqq 2\delta_2 ,$$

a tedy i (D18.3.20) platí na intervalu $\langle s, s_{j+1}\rangle$. Takto postupně určíme funkci $q^{[l]}$ na intervalu $\langle s, t_0 + \delta_1\rangle$.

Protože funkce $q^{[l]}$, $l = 2, 3, \ldots$, splňují (D18.3.17) až (D18.3.20), platí

$$\|q^{[l]}(t_2) - q^{[l]}(t_1)\| \leqq \int_{t_1}^{t_2} \|\dot{q}^{[l]}(\tau)\| \, d\tau \leqq \int_{t_1}^{t_2} \varrho \, d\tau \tag{D18.3.21}$$

pro $t_1, t_2 \in \langle s, t_0 + \delta_1\rangle$, $t_1 < t_2$, a podle Arzelàovy-Ascoliovy věty vybereme stejnoměrně konvergentní $q^{[l_k]}$ a položíme $q(t) = \lim_{i\to\infty} q^{[l_k]}(t)$ pro $t \in \langle s, t_0 + \delta_1\rangle$. Užijeme Věty D18.3.10; položíme $\mathscr{J} = \langle s, t_0 + \delta_1\rangle$, $\tilde{\varrho} = \varrho$, $\tilde{p}^{[k]} = \dot{q}^{[l_k]}$, $\tau = s$, $\tilde{q}^{[k]}(t) = q^{[l_k]}(t) - q^{[l_k]}(s)$. Je $\tilde{q}(t) = q(t) - q(s)$ a podle Věty D18.3.10 je

$$\|q(t_2) - q(t_1)\| \leqq \int_{t_1}^{t_2} \varrho \, d\tau \quad \text{pro} \quad t_1, t_2 \in \langle s, t_0 + \delta_1\rangle , \quad t_1 < t_2 ,$$

$$\dot{q}(t) \in \tilde{P}(t) \quad \text{skoro všude v} \quad \langle s, t_0 + \delta_1\rangle . \tag{D18.3.22}$$

Nechť A je množina takových $t \in \langle s, t_0 + \delta_1\rangle$, že pro přirozená l, $l \geqq (t_0 + \delta_1 - s)(t - s)^{-1}$, platí $\dot{q}^{[l]}(t) \in F(t, q^{[l]}(t - (t_0 + \delta_1 - s) l^{-1}))$; zřejmě je $m(A) = t_0 + \delta_1 - s$. Nechť je $t \in A$, $t > s$, $\varepsilon > 0$. Protože funkce $F(t, .)$ je polospojitá shora, existuje číslo $\delta > 0$ tak, že je $F(t, z) \subset \bar{\Omega}(F(t, q(t)), \varepsilon)$, jakmile je $\|z - q(t)\| < \delta$. Protože je $q(t) = \lim_{k\to\infty} q^{[l_k]}(t)$ a protože platí (D18.3.21), je $q(t) = \lim_{k\to\infty} q^{[l_k]}(t - [t_0 + \delta_1 - s] (l_k)^{-1})$, a tedy existuje číslo m tak, že je

$$F(t, q^{[l_k]}(t - [t_0 + \delta_1 - s] (l_k)^{-1})) \subset \bar{\Omega}(F(t, q(t)), \varepsilon) \quad \text{pro} \quad k \geqq m .$$

Je $\tilde{p}^{[k]}(t) \in \bar{\Omega}(F(t, q(t)), \varepsilon)$ pro $k \geqq m$. Protože množina $\bar{\Omega}(F(t, q(t)), \varepsilon)$ je uzavřená a konvexní, je $\tilde{P}_k(t) \subset \bar{\Omega}(F(t, q(t)), \varepsilon)$ pro $k \geqq m$, tedy $\tilde{P}(t) \subset \bar{\Omega}(F(t, q(t)), \varepsilon)$, a protože tato inkluze platí pro $\varepsilon > 0$, je $\tilde{P}(t) \subset F(t, q(t))$. Dokázali jsme, že je $\tilde{P}(t) \subset F(t, q(t))$ pro $t \in A$, $t > s$. Odtud a z (D18.3.22) plyne, že je $\dot{q}(t) \in F(t, q(t))$ skoro všude v $\langle s, t_0 + \delta_1\rangle$. Zřejmě je $q(s) = y$. Je-li $s > t_0 - \delta_1$, najdeme obdobně řešení $\hat{q}: \langle t_0 - \delta_1, s\rangle \to R^n$ takové, že je $\hat{q}(s) = y$, a položíme $w_{(s,y)}(t) = \hat{q}(t)$ pro $t \in \langle t_0 - \delta_1, s\rangle$, $w_{(s,y)}(t) = q(t)$ pro $t \in \langle s, t_0 + \delta_1\rangle$. Věta 18.5.5 je dokázána.

Dodatek 18.4. Dokážeme Větu 18.5.9. Zvolme $t_0 \in \mathscr{J}$, položme $\tilde{x} = u(t_0)$ a najděme čísla $\delta_1, \delta_2 > 0$ podle Věty 18.5.5. Protože množina $Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, \delta_2) \subset G$ je kompaktní, existuje funkce $\tilde{\varrho} \in L(\langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1\rangle, R)$ tak, že je $F(t, x) \subset B(0, \tilde{\varrho}(t), R^n)$ pro $(t, x) \in Q(t_0, \tilde{x}, \delta_1, \delta_2)$. Je

$$\|u^{[k]}(t) - u^{[k]}(s)\| \leqq \int_s^t \|\dot{u}^{[k]}(\sigma)\| \, d\sigma \leqq \int_s^t \tilde{\varrho}(\sigma) \, d\sigma$$

pro $s, t \in \mathscr{I} \cap \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle$, $s < t$, a limitním přechodem pro $k \to \infty$ plyne, že tutéž nerovnost splňuje i funkce u; je tedy funkce u absolutně spojitá na $\mathscr{I} \cap \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle$. Položme $\tilde{p}^{[k]}(t) = \dot{u}^{[k]}(t)$ pro $t \in \mathscr{I} \cap \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle$, $k = 1, 2, \ldots$, a zaveďme množiny $\tilde{P}_k(t)$, $\tilde{P}(t)$ jako ve Větě D18.3.10. Podle Věty D18.3.10 je $\dot{u}(t) \in \tilde{P}(t)$ skoro všude v $\mathscr{I} \cap \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle$. Z konvergence $u^{[k]}(t) \to u(t)$ pro $k \to \infty$ a z předpokladů o funkci F plyne, že ke každému $\varepsilon > 0$ a $t \in \mathscr{I} \cap \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle$ existuje číslo $N(\varepsilon, t)$ tak, že je $F(t, u^{[k]}(t)) \subset \subset \Omega(F(t, u(t)), \varepsilon)$ pro $k > N(\varepsilon, t)$. Je tedy $\tilde{P}_k(t) \subset \Omega(F(t, u(t)), \varepsilon)$, jakmile $t \in \mathscr{I} \cap \cap \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle$ je takové, že je $\tilde{p}^{[j]}(t) = \dot{u}^{[j]}(t) \in F(t, u^{[j]}(t))$ pro $j = 1, 2, \ldots$, a jakmile je $k > N(\varepsilon, t)$. Tedy pro skoro všechna $t \in \mathscr{I} \cap \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle$ je $\dot{u}(t) \in P(t) \subset \bigcap_{\varepsilon > 0} \Omega(F(t, u(t)), \varepsilon) = F(t, u(t))$. To znamená, že funkce u je na intervalu $\mathscr{I} \cap \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle$ řešením diferenciální relace (18.5.1), a tedy $u: \mathscr{I} \to K^n$ je řešením diferenciální relace (18.5.1).

Dodatek 18.5. Dokážeme Větu 18.6.1. Nejdříve zavedeme některé pomocné pojmy a vyšetříme jejich vlastnosti. Symbolem $\mathfrak{N}$ označíme množinu takových $N \subset R^n$, že je $m(N) = 0$. [Zde m znamená Lebesqueovu míru v R^n]. Nechť je $H \subset R^n$, $\xi: H \to R$. [Pro $A \subset R$ je $\xi^{-1}(A) = \{x \in H \mid \xi(x) \in A\}$.] Pro $V \subset H$ definujme

$$\operatorname{sup\,ess} \xi|_V = \inf \{\alpha \in R \mid \xi^{-1}((\alpha, \infty)) \cap V \in \mathfrak{N}\} .$$

Místo $\operatorname{sup\,ess} \xi|_V$ budeme též psát $\operatorname{sup\,ess} \{\xi(x) \mid x \in V\}$. Stručně lze říci, že $\operatorname{sup\,ess} \xi|_V$ je supremum funkce ξ na množině V, zanedbáme-li podmnožiny množiny V, které mají míru nula. V případě, že je $\xi^{-1}((\alpha, \infty)) \cap V \notin \mathfrak{N}$ pro každé $\alpha \in R$, je ovšem $\operatorname{sup\,ess} \xi|_V = \infty$. Snadno se zjistí, že platí:

$$\operatorname{sup\,ess} \xi|_V \leqq \sup \{\xi(x) \mid x \in V\} . \tag{D18.5.1}$$

Je-li $V_1 \subset V_2 \subset H$, *je* $\operatorname{sup\,ess} \xi|_{V_1} \leqq \operatorname{sup\,ess} \xi|_{V_2}$. (D18.5.2)

Je-li $N \in \mathfrak{N}$, *je* $\operatorname{sup\,ess} \xi|_{V \cap (R^n - N)} = \operatorname{sup\,ess} \xi|_V$. (D18.5.3)

Položme $N_{\xi,V} = \{x \in V \mid \xi(x) > \operatorname{sup\,ess} \xi|_V\}$. Snadno se dokáže, že je:

$$N_{\xi,V} \in \mathfrak{N} . \tag{D18 5.4}$$

$$\operatorname{sup\,ess} \xi|_V = \sup \{\xi(x) \mid x \in V - N_{\xi,V}\} . \tag{D18.5.5}$$

Dále platí:

Je-li $N_1, N_2 \in \mathfrak{N}$, $N_2 \supset N_1$,

$\operatorname{sup\,ess} \xi|_V = \sup \{\xi(x) \mid x \in V - N_1\}$,

potom je

$$\operatorname{sup\,ess} \xi|_V = \sup \{\xi(x) \mid x \in V - N_2\} . \tag{D18.5.6}$$

Podle (D18.5.3), (D18.5.1) a (D18.5.5) je totiž

$$\begin{aligned}&\sup\operatorname{ess}\xi|_V = \sup\operatorname{ess}\xi|_{V\cap(R^n-N_2)} \leqq \sup\{\xi(x)|\ x \in V\cap(R^n - N_2)\} \leqq \\ &\leqq \sup\{\xi(x)|\ x \in V - N_1\} = \sup\operatorname{ess}\xi|_V\,.\end{aligned}$$

Nechť je $g: H \to R^n$, $V \subset H$. Pro $u \in R^n$ položme

$$\begin{aligned}&\tilde{\omega}(u, g, V) = \sup\operatorname{ess}\{(u, g(x))|\ x \in V\}\,,\\ &\mathscr{C}(g, V) = \bigcap_{u\in R_0{}^n, u\neq 0}\{y \in R^n|\ (u, y) \leqq \tilde{\omega}(u, g, V)\}\,.\end{aligned}$$

Zřejmě množina $\mathscr{C}(g, V)$ je uzavřená a konvexní a je

$$\mathscr{C}(g, V_1) \subset \mathscr{C}(g, V_2) \quad \text{pro} \quad V_1 \subset V_2 \subset H\,. \tag{D18.5.7}$$

Předpokládejme, že je

$$\sup\operatorname{ess}\{\|g(x)\|\ |\ x \in V\} < \infty\,. \tag{D18.5.8}$$

Pro $v \in R^n$ označme

$$\|v\|_2 = \Big(\sum_{i=1}^{n}|v_i|^2\Big)^{1/2}\,.$$

Podle (D18.5.8) existuje $\varkappa \in R$ tak, že je $\|g(x)\|_2 \leqq \varkappa$ pro skoro všechna $x \in V$; je tedy $\tilde{\omega}(u, g, V) \leqq \varkappa\|u\|_2$. Nechť je $z \in \mathscr{C}(g, V)$. Pro $u \in R_0^n$, $u \neq 0$, $\|u\|_2 \leqq 1$, je $(u, z) \leqq \varkappa$, a protože je $\|z\|_2 = \sup\{(u, z)|\ u \in R_0^n,\ u \neq 0,\ \|u\|_2 \leqq 1\}$, je $\|z\|_2 \leqq \varkappa$. Množina $\mathscr{C}(g, V)$ je tedy omezená, a proto:

Množina $\mathscr{C}(g, V)$ je kompaktní a konvexní (D18.5.9)

[může ovšem být $\mathscr{C}(g, V) = \emptyset$].

Položme $\xi_u(x) = (u, g(x))$ pro $x \in H$ a při pevném V pišme N_u místo $N_{\xi_u, V}$ a položme

$$M = \bigcup\{N_u|\ u \in R_0^n,\ u \neq 0\}\,.$$

Podle (D18.5.4) a (D18.5.5) je $N_u \in \mathfrak{N}$ a $\tilde{\omega}(u, g, V) = \sup\{(u, g(x))|\ x \in V - N_u\}$.

Protože je $M \in \mathfrak{N}$, $M \supset N_u$, je podle (D18.5.6)

$$\tilde{\omega}(u, g, V) = \sup\{(u, g(x))|\ x \in V - M\}\,, \quad u \in R_0^n\,, \quad u \neq 0\,. \tag{D18.5.10}$$

Je ovšem

$$\sup\{(u, g(x))|\ x \in V - M\} = \omega(u, \{g(x)|\ x \in V - M\}) \tag{D18.5.11}$$

[funkce ω byla zavedena před Větou D18.3.4] a podle Věty D18.3.5 je

$$\begin{aligned}\mathscr{C}(g, V) &= \bigcap_{u\in R_0{}^n, u\neq 0}\{y \in R^n|\ (u, y) \leqq \omega(u, \{g(x)|\ x \in V - M\})\} = \\ &= \overline{\mathrm{Co}}\,\{g(x)|\ x \in V - M\}\,.\end{aligned} \tag{D18.5.12}$$

Podle (D18.5.10) až (D18.5.12) je

$$\omega(u, \mathscr{C}(g, V)) = \tilde{\omega}(u, g, V) . \tag{D18.5.13}$$

Je též $g(x) \in \mathscr{C}(g, V)$ pro $x \in V - M$ a speciálně je

$$\mathscr{C}(g, V) \neq 0 , \quad \text{je-li} \quad V \notin \mathfrak{N} . \tag{D18.5.14}$$

Je-li $N \in \mathfrak{N}$, $N \supset M$, je $N \supset N_u$ pro $u \in R_0^n$, $u \neq 0$, a podle (D18.5.6) je $\tilde{\omega}(u, g, V) = \omega(u, \{g(x), x \in V - N\})$, a tedy je $\mathscr{C}(g, V) = \overline{\text{Co}}\,\{g(x) | \, x \in V - N\}$. Odtud plyne, že je

$$\mathscr{C}(g, V) = \bigcap_{N \in \mathfrak{N}} \overline{\text{Co}}\,\{g(x) | \, x \in V - N\} . \tag{D18.5.15}$$

D18.5.1. Pomocná věta: *Nechť množina $H \subset R^n$ je otevřená, $\xi: H \to R$. Potom existuje množina $A \in \mathfrak{N}$, $A \subset H$, taková, že pro každou otevřenou množinu $V \subset H$ je* $\sup \text{ess}\, \xi|_V = \sup \{\xi(x) | \, x \in V \cap (R^n - A)\}$.

Důkaz: Nechť $\mathfrak{W}$ je spočetná otevřená báze v H [tj. množina $\mathfrak{W}$ je spočetná, její elementy jsou otevřené podmnožiny v H a ke každé dvojici (x, V), kde množina $V \subset H$ je otevřená a $x \in V$, existuje $W \in \mathfrak{W}$ tak, že je $x \in W \subset V$; za $\mathfrak{W}$ můžeme vzít systém n-rozměrných intervalů $(\alpha_1, \beta_1) \times (\alpha_2, \beta_2) \times \ldots \times (\alpha_n, \beta_n)$ obsažených v H takových, že čísla $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ jsou racionální] a nechť $\tilde{\mathfrak{W}}$ je spočetná otevřená báze v R. Nechť je $W \in \mathfrak{W}$, $\tilde{W} \in \tilde{\mathfrak{W}}$. Je-li $\xi^{-1}(\tilde{W}) \cap W \in \mathfrak{N}$, položme $D(W, \tilde{W}) = \xi^{-1}(\tilde{W}) \cap W$; je-li $\xi^{-1}(\tilde{W}) \cap W \notin \mathfrak{N}$, položme $D(W, \tilde{W}) = \emptyset$. Položme ještě $A = \bigcup\{D(W, \tilde{W}) | \, (W, \tilde{W}) \in \mathfrak{W} \times \tilde{\mathfrak{W}}\}$. Protože je $D(W, \tilde{W}) \in \mathfrak{N}$ a množina $\mathfrak{W} \times \tilde{\mathfrak{W}}$ je spočetná, je $A \in \mathfrak{N}$. Nechť množina $V \subset H$ je otevřená. Zřejmě je $\sup \text{ess}\, \xi|_V \leqq \sup \{\xi(x) | \, x \in V \cap (R^n - A)\}$. Nechť je $x \in V \cap (R^n - A)$, $\varepsilon > 0$; najděme $W \in \mathfrak{W}$, $\tilde{W} \in \tilde{\mathfrak{W}}$ tak, aby platilo $x \in W \subset V$, $\xi(x) \in \tilde{W} \subset (\xi(x) - \varepsilon, \xi(x) + \varepsilon)$; to znamená $x \in \xi^{-1}(\tilde{W}) \cap W$. Protože je $x \notin A \supset D(W, \tilde{W})$, je $\xi^{-1}(\tilde{W}) \cap W \notin \mathfrak{N}$ [v opačném případě by bylo $D(W, \tilde{W}) = \xi^{-1}(\tilde{W}) \cap W$, tedy $x \in D(W, \tilde{W})$]. Proto je $\xi^{-1}(\tilde{W}) \cap V \notin \mathfrak{N}$ a odtud plyne, že je $\sup \text{ess}\, \xi|_V \geqq \xi(x) - \varepsilon$. Tato nerovnost platí pro každé $\varepsilon > 0$ a každé $x \in V \cap (R^n - A)$, tedy $\sup \text{ess}\, \xi|_V \geqq \xi(x)$ pro každé $x \in V \cap (R^n - A)$. To znamená, že je $\sup \text{ess}\, \xi|_V \geqq \sup \{\xi(x) | \, x \in V \cap (R^n - A)\}$. Že platí opačná nerovnost, plyne přímo z definice $\sup \text{ess}\, \xi|_V$. Pomocná věta D18.5.1 je dokázána.

D18.5.2. Pomocná věta: *Nechť množina $H \subset R^n$ je otevřená, $g: H \to R^n$. Potom existuje množina $\mathscr{E} \in \mathfrak{N}$, $\mathscr{E} \subset H$, taková, že platí: Je-li množina $V \subset H$ otevřená a je-li splněno* (D18.5.8), *pak je*

$$\mathscr{C}(g, V) = \bigcap_{u \in R_0{}^n, u \neq 0} \{y \in R^n | \, (u, y) \leqq \sup \{(u, g(x)) | \, x \in V \cap (R^n - \mathscr{E})\} .$$

Důkaz: Podle Pomocné věty D18.5.1 ke každému $u \in R_0^n$, $u \neq 0$, najdeme množinu $A_u \in \mathfrak{N}$, $A_u \subset H$, že pro každou otevřenou množinu $V \subset H$ je $\tilde{\omega}(u, g, V) = \sup \{(u, g(x)) | \, x \in V \cap (R^n - A_u)\}$. Položme $\mathscr{E} = \bigcup\{A_u | \, u \in R_0^n, u \neq 0\}$. Je $\mathscr{E} \in \mathfrak{N}$, podle (D18.5.6) je $\tilde{\omega}(u, g, V) = \sup \{(u, g(x)) | \, x \in V \cap (R^n - \mathscr{E})\}$, $u \in R_0^n$, $u \neq 0$, a Pomocná věta D18.5.2 je dokázána.

Z Pomocné věty D18.5.2 přímo plyne, že pro každou otevřenou množinu $V \subset H$ takovou, že platí (D18.5.8), a pro každé $x \in V \cap (R^n - \mathscr{E})$ platí

$$g(x) \in \mathscr{C}(g, V). \tag{D18.5.16}$$

Dále budeme předpokládat, že množina $H \subset R^n$ je otevřená a že funkce $g: H \to R^n$ splňuje (18.6.7). Je-li tedy $\tilde{x} \in H$ a mají-li δ_1 a $\varkappa$ stejný význam jako v (18.6.7) a je-li množina $V \subset B(\tilde{x}, \delta_1)$ otevřená, je $V \notin \mathfrak{N}$ a platí (D18.5.8); podle (D18.5.9) a (D18.5.14) je $\mathscr{C}(g, V) \in \mathscr{K}_n$. Nyní přistoupíme k vlastnímu důkazu Věty 18.6.1. Položme

$$V_g(x) = \bigcap_{l = 1,2,\dots} \mathscr{C}(g, H \cap B(x, 2^{-l})) \quad \text{pro} \quad x \in H. \tag{D18.5.17}$$

Vzhledem k (D18.5.7) je $V_g(x) \in \mathscr{K}_n$ pro $x \in H$. [Není nesnadné ukázat, že množina $V_g(x)$ nezávisí na tom, s jakou normou pracujeme; jinými slovy: Přejdeme-li k jiné normě v R^n, množiny $B(x, 2^{-l})$ se sice změní, ale $V_g(x)$ zůstane beze změny.] Je-li $x \in H - \mathscr{E}$, je podle Pomocné věty D18.5.2 a (D18.5.7) $g(x) \in \mathscr{C}(g, H \cap B(x, 2^{-l}))$ pro $l = 1, 2, \dots$, a tedy je $g(x) \in V_g(x)$ a platí (18.6.8).

Nechť je $x \in H$; ukážeme, že funkce V_g je polospojitá v bodě x. Nechť je $\varepsilon > 0$. Množina $V_g(x)$ je kompaktní a rovněž množiny $\mathscr{C}(g, H \cap B(x, 2^{-l}))$ jsou kompaktní pro dosti velké l. Položme

$$\Omega(V_g(x), \varepsilon) = \{y \in R^n | \, d(y, V_g(x)) < \varepsilon\}$$

[$d(y, V_g(y))$ je vzdálenost bodu y od množiny $V_g(x)$, viz odst. 18.5]. Množina $\Omega(V_g(x), \varepsilon)$ je otevřená, tedy množina $[R^n - \Omega(V_g(x), \varepsilon)] \cap \mathscr{C}(g, H \cap B(x, 2^{-l})) = F_l$ je kompaktní pro dosti velká l. Je ovšem $F_{l+1} \subset F_l$, $l = 1, 2, \dots$, a proto existuje přirozené číslo m takové, že je $F_m = \emptyset$ [v opačném případě by bylo

$$\bigcap_{l=1,2,\dots} F_l \neq \emptyset,$$

neboť jde o průnik klesající posloupnosti kompaktních množin; zřejmě však je

$$\bigcap_{l=1,2,\dots} F_l \subset V_g(x),$$

$$\bigcap_{l=1,2,\dots} F_l \subset R^n - \Omega(V_g(x), \varepsilon),$$

tedy

$$\bigcap_{l=1,2,\dots} F_l \subset V_g(x) \cap [R^n - \Omega(V_g(x), \varepsilon)] = \emptyset$$

a to je spor]. Bez ztráty na obecnosti můžeme ještě předpokládat, že je $B(x, 2^{-m}) \subset H$. Podle (D18.5.12) existuje množina $M \in \mathfrak{N}$, $M \subset B(x, 2^{-m})$ tak, že je $\mathscr{C}(g, B(x, 2^{-m})) = \overline{\text{Co}} \{g(y) | \, y \in B(x, 2^{-m}) - M\}$. Je-li $z \in B(x, 2^{-m-1})$, je $B(z, 2^{-m-1}) \subset B(x, 2^{-m})$, tedy je $V_g(z) \subset \mathscr{C}(g, B(z, 2^{-m-1})) \subset \mathscr{C}(g, B(x, 2^{-m})) \subset \Omega(V_g(x), \varepsilon)$ [poslední inkluze platí proto, že je $F_m = \emptyset$]. Dokázali jsme, že funkce V_g je polospojitá shora v bodě x. Funkce V_g je polospojitá shora v každém bodě $x \in H$ a platí (18.6.9).

Dokážeme ještě, že platí (18.6.10). Položme $F = \{y \in H | \, g(y) \notin S(y)\}$; podle předpokladu v (18.6.10) je $F \in \mathfrak{N}$. Nechť je $x \in H$, $\varepsilon > 0$. Protože funkce S je polospojitá, existuje přirozené číslo l takové, že je $S(y) \subset \bar{\Omega}(S(x), \varepsilon)$ pro $y \in B(x, 2^{-l})$. Je tedy $\{g(y) | \, y \in B(x, 2^{-l}) \cap (R^n - F)\} \subset \bar{\Omega}(S(x), \varepsilon)$. Je $S(x) \in \mathscr{K}_n$, a proto je i $\bar{\Omega}(S(x), \varepsilon) \in \mathscr{K}_n$; odtud plyne, že je

$$\overline{\mathrm{Co}}\, \{g(y) | \, y \in B(x, 2^{-l}) \cap (R^n - F)\} \subset \bar{\Omega}(S(x), \varepsilon) .$$

Podle (D18.5.15) je $\mathscr{C}(g, B(x, 2^{-l})) \subset \bar{\Omega}(S(x), \varepsilon)$, tedy $V_g(x) \subset \bar{\Omega}(S(x), \varepsilon)$. Je ovšem $\bigcap\limits_{\varepsilon > 0} \bar{\Omega}(S(x), \varepsilon) = S(x)$. Proto je $V_g(x) \subset S(x)$ a (18.6.10) platí. Věta 18.6.1 je dokázána.

Dodatek 18.6. Dokážeme Větu 18.6.3. Budeme přitom užívat označení a výsledků z Dodatku 18.5. Přímo z Definice 18.6.2 a z Věty 18.6.1 plyne, že funkce E splňuje (18.5.4). Zbývá tedy dokázat, že funkce E splňuje (18.5.3). Nejdříve dokážeme několik pomocných vět.

D18.6.1. Pomocná věta: *Nechť množiny* $Y_k \subset R^n$ *jsou kompaktní,* $Y_k \supset Y_{k+1}$, $k = 1, 2, \ldots$, $Y = \bigcap\limits_{k=1,2,\ldots} Y_k$, $u \in R^n$, $u \neq 0$. *Potom je*

$$\omega(u, Y) = \lim_{k \to \infty} \omega(u, Y_k) \tag{D18.6.1}$$

(*funkce* ω *byla zavedena před Větou* D18.3.4).

Důkaz: Protože je $Y \subset Y_{k+1} \subset Y_k$, je $\omega(u, Y_k) \geqq \omega(u, Y_{k+1}) \geqq \omega(u, Y)$, $\lim\limits_{k \to \infty} \omega(u, Y_k) \geqq \omega(u, Y)$. Nechť je $\lim\limits_{k \to \infty} \omega(u, Y_k) = \gamma > \omega(u, Y)$; pak existují body $y^{[k]} \in Y_k$ tak, že je $(u, y^{[k]}) \geqq \gamma$ pro $k = 1, 2, \ldots$ a lze vybrat konvergentní posloupnost $y^{[k_i]}$, $y = \lim\limits_{i \to \infty} y^{[k_i]}$. Je $y \in Y$, $(u, y) = \lim\limits_{i \to \infty} (u, y^{[k_i]}) \geqq \gamma$ a to není možné. Tedy platí (D18.6.1) a Pomocná věta D18.6.1 je dokázána.

D18.6.2. Pomocná věta: *Nechť* $\mathscr{I} \subset R$ *je interval,* $x \in R^n$, $\delta > 0$, $\xi\colon \mathscr{I} \times B(x, \delta) \to R$ *a nechť funkce* ξ *je měřitelná. Definujme funkci* $\vartheta\colon \mathscr{I} \to R$ *rovnicí*

$$\vartheta(t) = \sup \operatorname{ess} \{\xi(t, y) | \, y \in B(x, \delta)\} .$$

Potom funkce ϑ *je měřitelná.*

Důkaz: Máme dokázat, že pro každé číslo $\alpha \in R$ množina $\vartheta^{-1}((\alpha, \infty))$ je měřitelná. Zaveďme množinu $\Xi \subset R^{n+2}$ a pro $\alpha \in R$ množinu $\Xi(\alpha) \subset R^{n+2}$ rovnicemi

$$\Xi = \{t, y_1, \ldots, y_n, \lambda) | \, t \in \mathscr{I}, \, y = (y_1, \ldots, y_n) \in B(x, \delta), \, \lambda \leqq \xi(t, y)\} ,$$
$$\Xi(\alpha) = \{(t, y_1, \ldots, y_n, \lambda) | \, t \in \mathscr{I}, \, y \in B(x, \delta), \, \alpha \leqq \lambda \leqq \xi(t, y)\} .$$

Protože ξ je měřitelná funkce, je množina Ξ měřitelná, a tedy je měřitelná množina

$\Xi(\alpha)$ pro $\alpha \in R$. V souhlase s dříve zavedeným označením je

$$\Xi(\alpha)(t, .) = \{(y_1, \ldots, y_n, \lambda) | (t, y_1, \ldots, y_n, \lambda) \in \Xi(\alpha)\} .$$

Množina $\Xi(\alpha)(t, .) \subset R^{n+1}$ je měřitelná pro skoro všechna $t \in \mathscr{I}$. Pro $\zeta \in R$ položme $\zeta_+ = \max(\zeta, 0)$. Je-li množina $\Xi(\alpha)(t, .)$ měřitelná, je

$$m(\Xi(\alpha)(t, .)) = \int_{B(x,\delta)} (\xi(t, y) - \alpha)_+ \, dy ,$$

kde integrál na pravé straně je n-rozměrný Lebesgueův integrál. Je-li $m(\Xi(\alpha)(t, .)) = 0$, je $\xi(t, y) \leqq \alpha$ pro skoro všechna $y \in B(x, \delta)$, a tedy je $\vartheta(t) \leqq \alpha$. Je-li $m(\Xi(\alpha)(t, .)) > 0$, existuje číslo $\beta > \alpha$ a množina $W \subset B(x, \delta)$ taková, že je $m(W) > 0$, $\xi(t, y) \geqq \beta$ pro $y \in W$; je tedy $\vartheta(t) \geqq \beta$. To znamená: Je-li množina $\Xi(\alpha)(t, .)$ měřitelná, je $\vartheta(t) > \alpha$ právě tehdy, je-li $m(\Xi(\alpha)(t, .)) > 0$. Položme $\mu(t) = m(\Xi(\alpha)(t, .))$; funkce μ je definována skoro všude v $\mathscr{I}$. Protože množina $\Xi(\alpha)$ je měřitelná, je funkce μ měřitelná, a tedy i množina $\{t \in \mathscr{I} | \mu(t) > 0\}$ je měřitelná. Jak jsme dokázali, je

$$\{t \in \mathscr{I} | \vartheta(t) > \alpha\} \supset \{t \in \mathscr{I} | \mu(t) > 0\} ,$$
$$m(\{t \in \mathscr{I} | \vartheta(t) > \alpha\} - \{t \in \mathscr{I} | \mu(t) > 0\}) = 0 .$$

Je tedy množina $\vartheta^{-1}((\alpha, \infty))$ měřitelná. Pomocná věta D18.6.2 je dokázána.

Funkci χ: $R \to R$ definujeme předpisem $\chi(\xi) = 1$ pro $|\xi| \leqq 1$, $\chi(\xi) = 2 - |\xi|$ pro $1 < |\xi| \leqq 2$, $\chi(\xi) = 0$ pro $|\xi| > 2$.

D18.6.3. Pomocná věta: *Nechť je* $\tilde{x} \in R^n$, $\Delta_4, \tilde{K}, \sigma > 0$, Θ: $\bar{B}(\tilde{x}, \Delta_4) \to \langle -\tilde{K}, \tilde{K} \rangle$. *Pro* $x \in \bar{B}(\tilde{x}, \Delta_4/2)$ *položme*

$$\Xi(x) = \sup \operatorname{ess} \{\Theta(y) \chi(\|y - x\|/\sigma) | y \in \bar{B}(\tilde{x}, \Delta_4)\} .$$

Potom funkce Ξ *je spojitá.*

Důkaz: Pro $u, v \in \bar{B}(x, \Delta_4/2)$, $y \in \bar{B}(\tilde{x}, \Delta_4)$ je

$$\Theta(y) \chi(\|y - u\|/\sigma) \leqq \Theta(y) \chi(\|y - v\|/\sigma) +$$
$$+ \Theta(y) [\chi(\|y - u\|/\sigma) - \chi(\|y - v\|/\sigma)] ,$$

tedy

$$\Xi(u) \leqq \Xi(v) + \sup \operatorname{ess} \{\Theta(y) [\chi(\|y - u\|/\sigma) - \chi(\|y - v\|/\sigma)] | y \in \bar{B}(\tilde{x}, \Delta_4)\} .$$

Protože je $| \|y - u\| - \|y - v\| | \leqq \|u - v\|$, je $\Xi(u) \leqq \Xi(v) + \tilde{K}\|u - v\|/\sigma$. Obdobně platí $\Xi(v) \leqq \Xi(u) + \tilde{K}\|u - v\|/\sigma$. Funkce Ξ je spojitá, Pomocná věta D18.6.3 je dokázána.

D18.6.4. Pomocná věta: *Nechť je* $(t_0, \tilde{x}) \in G$, $\Delta_3, \Delta_4 > 0$, ϱ: $\langle t_0 - \Delta_3, t_0 + \Delta_3 \rangle \to R$ *a nechť je* $\|f(t, x)\| \leqq \varrho(t)$ *pro* $(t, x) \in Q(t_0, \tilde{x}, \Delta_3, \Delta_4)$. *Nechť je* $u \in R^n$, $\sigma > 0$. *Pro* $(t, x) \in Q(t_0, \tilde{x}, \Delta_3, \Delta_4/2)$ *položme*

$$\psi(t, x, u, \sigma) = \sup \operatorname{ess} \{(f(t, y), u) \chi(\|y - x\|/\sigma) | y \in \bar{B}(\tilde{x}, \Delta_4)\} .$$

[*Přirozeně předpokládáme, že platí* (18.6.16) *až* (18.6.18).] *Potom platí*:

$$\text{Funkce } \psi(., x, u, G) \text{ je měřitelná.} \tag{D18.6.2}$$

$$\text{Funkce } \psi(t, ., u, \sigma) \text{ je spojitá.} \tag{D18.6.3}$$

Důkaz: (D18.6.2) plyne z Pomocné věty D18.6.2, (D18.6.3) plyne z Pomocné věty D18.6.3.

Následující pomocná věta je hlavní krok k důkazu Věty 18.6.3.

D18.6.5. Pomocná věta: *Nechť je* $(t_0, \tilde{x}) \in G$, $\Delta_3, \Delta_4 > 0$, $\varrho: \langle t_0 - \Delta_3, t_0 + \Delta_3\rangle \to R$ *a nechť je* $\|f(t, x)\| \leqq \varrho(t)$ *pro* $(t, x) \in Q(t_0, \tilde{x}, \Delta_3, \Delta_4)$. *Potom platí: Ke každému* $\eta > 0$ *existuje měřitelná množina* $D_\eta \subset \langle t_0 - \Delta_3, t_0 + \Delta_3\rangle$ *taková, že je* $m(\langle t_0 - \Delta_3, t_0 + \Delta_3\rangle - D_\eta) < \eta$ *a že funkce* $E|_{D_\eta \times B(\tilde{x}, \Delta_4/2)}$ *je shora polospojitá.*

Důkaz: Podle definice funkce E (viz Definici 18.6.2), (D18.5.17) a definice množiny $\mathscr{C}(g, V)$ a funkce $\tilde{\omega}$ [před tvrzením (D18.5.7)] je pro $(t, x) \in G$

$$E(t, x) = \bigcap_{l=1,2,\dots} \bigcap_{\substack{u \in R_0{}^n \\ u \neq 0}} \{y \in R^n \mid (u, y) \leqq \tilde{\omega}(u, f(t, .), B(x, 2^{-l}) \cap G(t, .))\}.$$

Pro $(t, x) \in Q(t_0, \tilde{x}, \Delta_3, \Delta_4/2)$ můžeme se omezit na taková celá l, že je $2^{-l} < \Delta_4/4$, takže je

$$E(t, x) = \bigcap_{2^{-l+2} < \Delta_4} \bigcap_{\substack{u \in R_0{}^n \\ u \neq 0}} \{y \in R^n \mid (u, y) \leqq \tilde{\omega}(u, f(t, .), B(x, 2^{-l}))\}.$$

Vzhledem k definicím funkcí $\tilde{\omega}$ a ψ je

$$\tilde{\omega}(u, f(t, .), B(x, 2^{-l})) \leqq \psi(t, x, u, 2^{-l}) \leqq \tilde{\omega}(u, f(t, .), B(x, 2^{-l+1})), \tag{D18.6.4}$$

a tedy je

$$E(t, x) = \bigcap_{2^{-l+2} < \Delta_4} \bigcap_{\substack{u \in R_0{}^n \\ u \neq 0}} \{y \in R^n \mid (u, y) \leqq \psi(t, x, u, 2^{-l})\}. \tag{D18.6.5}$$

Nechť je $\eta > 0$. Položme

$$L = \{(l, u) \mid l \text{ celé, } 2^{-l+2} \leqq \Delta_4, u \in R_0^n, u \neq 0\}.$$

Protože L je spočetná množina, existuje prosté zobrazení Λ množiny L do množiny přirozených čísel [uspořádáme-li množinu L v posloupnosti, můžeme např. zobrazení Λ definovat takto: Dvojice (l, u) je $\Lambda(l, u)$-tým členem posloupnosti]. Podle Pomocné věty D18.6.4 a Věty 18.4.16 ke každému $(l, u) \in L$ existuje měřitelná množina $A_{(l,u)} \subset \langle t_0 - \Delta_3, t_0 + \Delta_3\rangle$ tak, že je $m(\langle t_0 - \Delta_3, t_0 + \Delta_3\rangle - A_{(l,u)}) < \eta 2^{-\Lambda(l,u)-1}$ a že funkce

$$\psi(., ., u, 2^{-l})|_{A(l,u) \times B(\tilde{x}, \Delta_4/2)} \text{ je spojitá.} \tag{D18.6.6}$$

Položme $D_\eta = \bigcap_{(l,u) \in L} A_{(l,u)}$. Zřejmě množina D_η je měřitelná a je

$$m(\langle t_0 - \Delta_3, t_0 + \Delta_3\rangle - D_\eta) < \eta/2.$$

Ukážeme, že funkce

$$E|_{D_\eta \times B(\tilde{x}, \Delta_4/2)} \text{ je polospojitá shora.} \tag{D18.6.7}$$

Předpokládejme naopak, že (D18.6.7) neplatí. Potom existuje takový bod $(t, x) \in D_\eta \times B(\tilde{x}, \Delta_4/2)$, že $E|_{D_\eta \times B(\tilde{x}, \Delta_4/2)}$ není polospojitá shora v bodě (t, x). To znamená, že existuje číslo $\varkappa > 0$, body $(t^{[i]}, x^{[i]}) \in D_\eta \times B(\tilde{x}, \Delta_4/2)$ a $v^{[i]} \in R^n$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, tak, že je

$$\lim_{i \to \infty} (t^{[i]}, x^{[i]}) = (t, x),$$

$$v^{[i]} \in E(t^{[i]}, x^{[i]}) - \Omega(E(t, x), \varkappa) \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots. \tag{D18.6.8}$$

Nechť l je přirozené číslo, $2^{-l+2} < \Delta_4$, $u \in R^n$. Podle (D18.5.17), definice množiny $\mathscr{C}(g, V)$ a (D18.6.4) je

$$\begin{aligned}
&(u, v^{[i]}) \leqq \sup \{(u, z) | \; z \in E(t^{[i]}, x^{[i]})\} \leqq \\
&\leqq \sup \{(u, z) | \; z \in \mathscr{C}(f(t^{[i]}, .), B(x^{[i]}, 2^{-l}))\} \leqq \\
&\leqq \tilde{\omega}(u, f(t^{[i]}, .), B(x^{[i]}, 2^{-l})) \leqq \psi(t^{[i]}, x^{[i]}, u, 2^{-l}), \\
&\text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots.
\end{aligned} \tag{D18.6.9}$$

Podle (D18.6.6) funkce $\psi(., ., u, 2^{-l})|_{D_\eta \times B(\tilde{x}, \Delta_4/2)}$ je spojitá. Z (D18.6.9) tedy plyne, že pro každé $u \in R^n$ posloupnost $(u, v^{[i]})$ je omezená. To ovšem znamená, že posloupnost $v^{[i]}$ je omezená. Vybereme tedy konvergentní posloupnost $v^{[i_j]}$, $\lim_{j \to \infty} v^{[i_j]} = v$. Protože platí (D18.6.8), je $v \notin \Omega(E(t, x), \varkappa)$. Podle Věty D18.3.2 [kde klademe $X = E(t, x)$, $Y = \{v\}$] existují $u \in R_0^n$, $\gamma \in R_0$ tak, že je

$$(u, y) < \gamma \quad \text{pro} \quad y \in E(t, x), \quad (u, v) > \gamma. \tag{D18.6.10}$$

Je tedy $\lim_{j \to \infty} (u, v^{[i_j]}) > \gamma$ a podle (D18.6.9) je

$$\limsup_{i \to \infty} \psi(t^{[i]}, x^{[i]}, u, 2^{-l}) \geqq (u, v) > \gamma \quad \text{pro přirozená } l \text{ taková,}$$
$$\text{že je } 2^{-l+2} < \Delta_4. \tag{D18.6.11}$$

Podle (D18.5.17) a Pomocné věty D18.6.1 [klademe

$$Y = E(t, x), \; Y_k = \mathscr{C}(f(t, .), B(x, 2^{-k}))]$$

je

$$\omega(u, E(t, x)) = \lim_{l \to \infty} \omega(u, \mathscr{C}(f(t, .), B(x, 2^{-l}))).$$

Podle (D18.5.13) je

$$\omega(u, \mathscr{C}(f(t, .), B(x, 2^{-l}))) = \tilde{\omega}(u, f(t, .), B(x, 2^{-l})),$$

tedy je

$$\omega(u, E(t, x)) = \lim_{l \to \infty} \tilde{\omega}(u, f(t, .), B(x, 2^{-l})),$$

a protože platí (D18.6.4), je

$$\omega(u, E(t, x)) = \lim_{l \to \infty} \psi(t, x, u, 2^{-l}) . \tag{D18.6.12}$$

Z definice funkce ω (před Větou 18.3.4) a z (D18.6.10) plyne, že je $\omega(u, E(t, x)) \leqq \gamma$. Podle (D18.6.12) existuje takové přirozené m, že je $2^{-m+2} < \Delta_4$ a $\psi(t, x, u, 2^{-m}) < < \gamma < (u, v)$. Současně však je [viz (D18.6.11)]

$$\limsup_{i \to \infty} \psi(t^{[i]}, x^{[i]}, u, 2^{-m}) \geqq (u, v) . \tag{D18.6.13}$$

Je ovšem $(t, x), (t^{[i]}, x^{[i]}) \in D_\eta \times B(\tilde{x}, \Delta_4/2), (t, x) = \lim_{i \to \infty} (t^{[i]}, x^{[i]})$ a funkce

$$\psi(., ., u, 2^{-m})|_{D_\eta \times B(\tilde{x}, \Delta_4/2)}$$

je spojitá [srovnej (D18.6.6)], tedy je

$$\lim_{i \to \infty} \psi(t^{[i]}, x^{[i]}, u, 2^{-m}) = \psi(t, x, u, 2^{-m}) < (u, v)$$

a to odporuje nerovnosti (D18.6.13). To znamená, že platí (D18.6.7). Pomocná věta D18.6.5 je dokázána.

Důkaz Věty 18.6.3: Dokážeme, že funkce E splňuje (18.5.3). Z (18.6.18) plyne [užitím pokrývací věty Lindelöfovy – viz [28], kap. VI, § 15], že existují body $(t_0^{[i]}, x^{[i]}) \in G$, čísla $\Delta_3^{[i]}, \Delta_4^{[i]}$ a funkce

$$\varrho^{[i]}: \langle t_0^{[i]} - \Delta_3^{[i]}, t_0^{[i]} + \Delta_3^{[i]} \rangle \to R , \quad i = 1, 2, 3, \ldots ,$$

tak, že platí

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} (t_0^{[i]} - \Delta_3^{[i]}, t_0^{[i]} + \Delta_3^{[i]}) \times B(\tilde{x}^{[i]}, \Delta_4^{[i]}/2) = G ,$$

$$Q(t_0^{[i]}, \tilde{x}^{[i]}, \Delta_3^{[i]}, \Delta_4^{[i]}) \subset G , \quad i = 1, 2, \ldots ,$$

$$\|f(t, x)\| \leqq \varrho^{[i]}(t) \quad \text{pro} \quad (t, x) \in Q(t_0^{[i]}, \tilde{x}^{[i]}, \Delta_3^{[i]}, \Delta_4^{[i]}) . \tag{D18.6.14}$$

Nechť je $\varepsilon > 0$. Podle Pomocné věty D18.6.5 ke každému i existuje měřitelná množina $D^{[i]} \subset \langle t_0^{[i]} - \Delta_3^{[i]}, t_0^{[i]} + \Delta_3^{[i]} \rangle$ tak, že je $m(\langle t_0^{[i]} - \Delta_3^{[i]}, t_0^{[i]} + \Delta_3^{[i]} \rangle - D^{[i]}) < \varepsilon 2^{-i-1}$ a že

$$\text{funkce } E|_{D^{[i]} \times B(\tilde{x}^{[i]}, \Delta_4^{[i]}/2} \text{ je polospojitá shora.} \tag{D18.6.15}$$

Položme

$$A_\varepsilon = R - \bigcup_{i=1}^{\infty} (\langle t_0^{[i]} - \Delta_3^{[i]}, t_0^{[i]} + \Delta_3^{[i]} \rangle - D^{[i]}) .$$

Množina A_ε je měřitelná, zřejmě je $m(A_\varepsilon) < \varepsilon$ a pro $i = 1, 2, \ldots$ je

$$A_\varepsilon \cap \langle t_0^{[i]} - \Delta_3^{[i]}, t_0^{[i]} + \Delta_3^{[i]} \rangle \subset D^{[i]} . \tag{D18.6.16}$$

Nechť je $(\tau, y) \in G \cap (A_\varepsilon \times R^n)$. Podle (D18.6.14) existuje přirozené číslo j tak, že je

$(\tau, y) \in (t_0^{[j]} - \Delta_3^{[j]}, t_0^{[j]} + \Delta_3^{[j]}) \times B(\tilde{x}^{[j]}, \Delta_4^{[j]}/2)$, a funkce $E|_{G \cap (A_* \times R^n)}$ je polospojitá shora v bodě (τ, y), protože platí (D18.6.15) pro $i = j$ a (D18.6.16). Tedy funkce E splňuje (18.5.3). Jak jsme poznamenali na začátku tohoto dodatku, funkce E splňuje (18.5.4). Věta 18.6.3 je dokázána.

Dodatek 18.7. Při důkazu Věty 18.5.20 lze postupovat obdobně jako při důkazu Věty 10.2.1 v Dodatku 10.2; hlavní rozdíl je v tom, jak jsou definovány funkce z, které lze považovat za přibližné řešení diferenciální relace (18.5.1).

D18.7.1. Poznámka: Nechť A, D jsou metrické prostory. Nechť r je metrika na A [tj. $r(a, b)$ je vzdálenost bodů a, b pro $a, b \in A$] a nechť d je metrika na D. Nechť $\mathscr{D}$ je množina neprázdných podmnožin v D. Pro $E \in \mathscr{D}$, $c \in D$, $\varepsilon > 0$ položme

$$d(c, E) = \inf \{d(c, e) |\ e \in E\},$$

$$\Omega(E, \varepsilon) = \{x \in D |\ d(x, E) < \varepsilon\}.$$

Funkce $\Xi: A \to \mathscr{D}$ se nazývá *polospojitá shora*, jestliže ke každému bodu $a \in A$ a číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ tak, že je $\Xi(x) \subset \Omega(\Xi(a), \varepsilon)$, jakmile je $x \in A$, $r(x, a) < \delta$.

D18.7.2. Pomocná věta: *Nechť A, D jsou metrické prostory. Nechť* Kont (D) *je množina kontinuí v D [tj. množina neprázdných, kompaktních a souvislých podmnožin v D]. Nechť A je kontinuum, nechť D je kompaktní a nechť funkce $\Xi: A \to$ Kont (D) je polospojitá shora [viz Poznámku* D18.7.1 *– je* Kont $(D) \subset \mathscr{D}$]. *Potom množina $B = \bigcup_{a \in A} \Xi(a)$ je kontinuum.*

Nástin důkazu: Je $B \neq \emptyset$ a snadno se dokáže, že množina B je kompaktní. Předpokládejme, že množina B není souvislá. Pak existují neprázdné kompaktní množiny G_i, $i = 1, 2$, tak, že je $B = G_1 \cup G_2$, $G_1 \cap G_2 = \emptyset$. Je-li $x \in A$, pak je buď $\Xi(x) \subset G_1$, nebo $\Xi(x) \subset G_2$. Položme $H_i = \{x \in A |\ \Xi(x) \subset G_i\}$ pro $i = 1, 2$. Množiny H_1, H_2 jsou kompaktní, $H_1 \neq \emptyset \neq H_2$ a je $H_1 \cup H_2 = A$, $H_1 \cap H_2 = \emptyset$. To však není možné, protože množina A je souvislá. Pomocná věta D18.7.2 je dokázána.

Nástin důkazu Věty 18.5.20: Obdobně jako v Dodatku 10.2 ukážeme jen, že množina $\mathscr{V}(\zeta, s, y)$ je kontinuum pro $\zeta > s$. Nechť tedy platí (18.5.19), kde čísla δ_1, δ_2 jsou zvolena k bodu $(t_0, \tilde{x})$ podle Poznámky 18.5.6 a je $s < \zeta$. Pro $k = 2, 3, \ldots$, $l = 0, 1, \ldots, k$ položme $s_{kl} = s + l(\zeta - s)/k$.

Zvolme přirozené číslo $k > 1$. Přibližné řešení $z: \langle s, \zeta \rangle \to R^n$ diferenciální relace (18.5.1) sestrojíme takto: Zvolíme funkci $v^{[1]}: \langle s_{k0}, s_{k1} \rangle \to R^n$ tak, aby bylo $v^{[1]}(s) = y$,

$$\|v^{[1]}(t_2) - v^{[1]}(t_1)\| \leqq \int_{t_1}^{t_2} \varrho(\tau)\, d\tau \quad \text{pro} \quad t_1 < t_2\,, \quad t_1, t_2 \in \langle s_{k0}, s_{k1} \rangle$$

[funkce ϱ byla zavedena v (18.5.6)]. Podle Vět D18.3.12 a D18.3.11 existuje měřitelná funkce $u^{[1]}: \langle s_{k0}, s_{k1} \rangle \to R^n$ tak, že je $u^{[1]}(t) \in F(t, v^{[1]}(t))$ skoro všude v $\langle s_{k0}, s_{k1} \rangle$.

Položíme

$$z(t) = y + \int_{s_{k0}}^{t} u^{[1]}(\tau)\,d\tau \quad \text{pro} \quad t \in \langle s_{k0}, s_{k1} \rangle .$$

Dále zvolíme funkci $v^{[2]}: \langle s_{k1}, s_{k2} \rangle \to R^n$ tak, aby bylo $v^{[2]}(s_{k1}) = z(s_{k1})$,

$$\|v^{[2]}(t_2) - v^{[2]}(t_1)\| \leqq \int_{t_1}^{t_2} \varrho(\tau)\,d\tau \quad \text{pro} \quad t_1 < t_2 , \quad t_1, t_2 \in \langle s_{k1}, s_{k2} \rangle .$$

Opět existuje měřitelná funkce $u^{[2]}: \langle s_{k1}, s_{k2} \rangle \to R^n$ tak, že je $u^{[2]}(t) \in F(t, v^{[2]}(t))$ skoro všude v $\langle s_{k1}, s_{k2} \rangle$. Položíme

$$z(t) = z(s_{k1}) + \int_{s_{k1}}^{t} u^{[2]}(\tau)\,d\tau \quad \text{pro} \quad t \in (s_{k1}, s_{k2} \rangle .$$

Tak postupně definujeme přibližné řešení $z: \langle s, \zeta \rangle \to R^n$ diferenciální relace (18.5.1). Množinu takových přibližných řešení z označíme $\mathscr{Z}_k$.

Nechť $\mathscr{E}$ je množina řešení $e: \langle s, \zeta \rangle \to R^n$ diferenciální relace (18.5.1) takových, že je $e(s) = y$. Snadno se zjistí, že je $\mathscr{E} \subset \mathscr{Z}_k$ pro $k = 2, 3, \ldots$. [Je-li $e \in \mathscr{E}$, položíme

$$v^{[j]} = e_{\langle s_{k,j-1}, s_{kj} \rangle} , \quad u^{[j]} = \dot{e}|_{\langle s_{k,j-1}, s_{kj} \rangle} \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, \ldots, k] .$$

Nechť $\mathscr{P}$ je množina takových funkcí $\tilde{p}: \langle s, \zeta \rangle \to R^n$, že existuje posloupnost přirozených čísel k_j, $\lim_{j\to\infty} k_j = \infty$, a posloupnost funkcí $z^{[k_j]} \in \mathscr{Z}_{k_j}$ tak, $z^{[k_j]}(t) \to \tilde{p}(t)$ stejnoměrně na $\langle s, \zeta \rangle$ pro $j \to \infty$. Užitím podmínky (18.5.4) a Věty D18.3.10 zjistíme, že je $\mathscr{P} \subset \mathscr{E}$. Protože je $\mathscr{E} \subset \mathscr{Z}_k$ pro $k = 2, 3, \ldots$, je též $\mathscr{E} \subset \mathscr{P}$, tedy je $\mathscr{E} = \mathscr{P}$ [a proto funkce $z \in \mathscr{Z}_k$ můžeme považovat za přibližná řešení diferenciální relace (18.5.1)].

Pro $k = 2, 3, \ldots, l = 0, 1, \ldots, k$ položme

$$Z(k, l) = \{z(s_{kl}) |\ z \in \mathscr{Z}_k\} , \quad P_k = Z(k, k) .$$

Nechť P je množina takových bodů $p \in R^n$, že existuje posloupnost přirozených čísel k_j, $\lim_{j\to\infty} k_j = \infty$, a posloupnost bodů $p^{[k_j]} \in P_{k_j}$ tak, že je $p = \lim_{j\to\infty} p^{[k_j]}$. Platí

$$P = \{\tilde{p}(\zeta) |\ \tilde{p} \in \mathscr{P}\} = \{e(\zeta) |\ e \in \mathscr{E}\} ,$$

tedy je

$$P = \mathscr{V}(\zeta, s, y) . \tag{D18.7.1}$$

Abychom dokázali, že množina P je kontinuum, užijeme Věty D10.2.1. Proto ověříme, že množiny P_k jsou kontinua. Dokážeme, že platí:

Nechť k je přirozené číslo, $k > 1$. Potom množiny $Z(k, l)$,

$l = 0, 1, \ldots, k$, jsou kontiuua. (D18.7.2)

To dokážeme indukcí. Množina $Z(k, 0) = \{y\}$ zřejmě je kontinuum. Nechť je $j \in \{0, 1, \ldots, k - 1\}$. Předpokládejme, že již víme, že množina $Z(k, j)$ je kontinuum; dokážeme, že $Z(k, j + 1)$ je kontinuum.

Nechť $\mathscr{H}$ je množina takových funkcí $h: \langle s_{kj}, s_{k,j+1} \rangle \to R^n$, že platí

$$h(s_{kj}) \in Z(k, j), \quad \|h(t_2) - h(t_1)\| \leqq \int_{t_1}^{t_2} \varrho(\tau) \, d\tau$$

pro $t_1 < t_2$, $t_1, t_2 \in \langle s_{kj}, s_{k,j+1} \rangle$. $\mathscr{H}$ je metrický prostor [metriku $r_{\mathscr{H}}$ na množině $\mathscr{H}$ zavedeme vztahem

$$r_{\mathscr{H}}(h^{[1]}, h^{[2]}) = \sup \{\|h^{[1]}(t) - h^{[2]}(t)\| \mid t \in \langle s_{kj}, s_{k,j+1} \rangle\}$$

pro $h^{[1]}, h^{[2]} \in \mathscr{H}$]. Položíme-li v Pomocné větě D18.7.2 $A = Z(k, j)$, $\Xi(a) = \{h \in \mathscr{H} \mid h(s_{kj}) = a\}$, odvodíme, že $\mathscr{H}$ je kontinuum.

Pro $h \in \mathscr{H}$ nechť $\Gamma(h)$ je množina takových bodů $w \in R^n$, že existuje absolutně spojitá funkce $f: \langle s_{kj}, s_{k,j+1} \rangle \to R^n$ tak, že je $f(s_{kj}) = h(s_{kj})$, $f(s_{k,j+1}) = w$, $\dot{f}(t) \in F(t, h(t))$ skoro všude v $\langle s_{kj}, s_{k,j+1} \rangle$. Snadno lze dokázat, že $\Gamma(h)$ je neprázdná, konvexní a kompaktní pro $h \in H$, tedy $\Gamma(h)$ je kontinuum. Též lze dokázat, že funkce Γ je polospojitá shora. Je $Z(k, j + 1) = \bigcup\{\Gamma(h) \mid h \in \mathscr{H}\}$. Užijeme-li Pomocné věty D18.7.2 [pro $A = \mathscr{H}$, $\Xi = \Gamma$], dostáváme, že $Z(k, j + 1)$ je kontinuum. Tedy platí (D18.7.2), množiny P_k, $k = 2, 3, \ldots$, jsou kontinua a podle Věty D10.2.1 [viz též (D18.7.1)] je $\mathscr{V}(\zeta, s, y)$ kontinuum.