Obyčejné diferenciální rovnice

14. Závislost řešení na parametru

In: Jaroslav Kurzweil (author): Obyčejné diferenciální rovnice. (Czech). Praha: SNTL - Nakladatelství technické literatury, 1978. pp. 241--264.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402092

Terms of use:

© Jaroslav Kurzweil, 1978

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

14. Závislost řešení na parametru

14.1. Při aplikacích diferenciálních rovnic je běžná situace, že parametry (konstanty), které se vyskytují na pravé straně diferenciální rovnice, známe jen přibližně [např. konstanty α, β v soustavě (1.1.1) nebo konstanty m_1, m_2, α, β v soustavě 1.5.2)]. Proto nás zajímá otázka, jak se změní řešení diferenciální rovnice, změní-li se tyto parametry jen málo. Hlavní výsledek je obsažen ve Větě 14.1.1. Z Věty 14.1.1 jsou odvozeny rovnice (2.8), (2.9), z nichž lze počítat derivace řešení podle souřadnic vektorového parametru q. V případě, že $K = C$, má funkce Φ spojité derivace v komplexním oboru podle složek $\tilde{x}_i$ počátečního vektoru $\tilde{x}$ i podle složek q_j vektorového parametru q, a je tedy v těchto proměnných holomorfní. Tento případ je vyšetřen v odst. 14.3. V odst. 14.4 až 14.8 jsou probrány některé základní úlohy na hledání periodického řešení v teorii tzv. malého parametru.

Budeme vyšetřovat rovnici

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = f(t, x, q), \tag{1.1}$$

v níž úlohu parametru má proměnná $q \in K^m$. Budeme předpokládat, že:

Množina $G \subset R \times K^n \times K^m$ je otevřená a funkce $f: G \to K^n$ je spojitá. (1.2)

Rovnice (1.1) je (při pevném q) jednoznačná. (1.3)

Je-li $q \in K^m$, je $G(.,.,q)$ otevřená množina. Nechť je $(t_0, \tilde{x}, q) \in G$; vzhledem k (1.2) a (1.3) existuje podle Věty 12.1.1 maximální řešení $\varphi_{(t_0,\tilde{x},q)}$ rovnice (1.1), $\varphi_{(t_0,\tilde{x},q)}(t_0) = \tilde{x}$; přitom řešení $\varphi_{(t_0,\tilde{x},q)}$ je určeno jednoznačně. Funkci Φ definujme takto: Je-li $(t_0, \tilde{x}, q) \in G$ a je-li definováno $\varphi_{(t_0,\tilde{x},q)}(t)$, položme $\Phi(t, t_0, \tilde{x}, q) = \varphi_{(t_0,\tilde{x},q)}(t)$.

14.1.1. Věta (o spojité závislosti řešení na parametru): *Nechť platí* (1.2) *a* (1.3). *Potom definiční obor funkce Φ je otevřená podmnožina v $R^2 \times K^n \times K^m$ a funkce Φ je spojitá.*

Věta 14.1.1 vyjadřuje spojitou závislost řešení rovnice (1.1) na počáteční podmínce i parametru. Lze ji jednoduchým obratem odvodit z Věty 12.2.6.

14.1.2. Pomocná věta: *Soustava*

$$\dot{x} = f(t, x, q)\,,$$
$$\dot{q} = 0 \tag{1.4}$$

je jednoznačná.

Důkaz: Nechť $\mathscr{J}_i$ jsou intervaly v R, $x^{[i]}: \mathscr{J}_i \to K^n$, $q^{[i]}: \mathscr{J}_i \to K^m$, a nechť funkce $\operatorname{col}(x^{[i]}, q^{[i]}): \mathscr{J}_i \to K^{n+m}$ je řešením soustavy (1.4). Nechť existuje $t_0 \in \mathscr{J}_1 \cap \mathscr{J}_2$ tak, že je $x^{[1]}(t_0) = x^{[2]}(t_0)$, $q^{[1]}(t_0) = q^{[2]}(t_0)$. Zřejmě je $q^{[1]}(t) = q^{[1]}(t_0)$ pro $t \in \mathscr{J}_1$, $q^{[2]}(t) = q^{[2]}(t_0) = q^{[1]}(t_0)$ pro $t \in \mathscr{J}_2$, a tedy $x^{[1]}$, $x^{[2]}$ jsou řešení rovnice

$$\dot{x} = f(t, x, q^{[1]}(t_0))\,. \tag{1.5}$$

Rovnice (1.5) je podle předpokladu jednoznačná, tedy $x^{[1]}(t) = x^{[2]}(t)$ pro $t \in \mathscr{J}_1 \cap \mathscr{J}_2$. Pomocná věta 14.1.2 je dokázána.

Důkaz Věty 14.1.1: Vzhledem k Pomocné větě 14.1.2 existuje funkce Ξ taková, že

$$\Xi\left(\cdot, t_0, \begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{q}\end{pmatrix}\right)$$

je maximální řešení soustavy (1.4),

$$\Xi\left(t_0, t_0, \begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{q}\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{q}\end{pmatrix} \quad \text{pro} \quad (t_0, \tilde{x}, \tilde{q}) \in G$$

(viz Větu 12.1.1 a Definici 12.2.1). Podle Věty 12.2.6 je funkce Ξ definovaná a spojitá na otevřené podmnožině v $R^2 \times K^{n+m}$. Z tvaru soustavy (1.4) plyne, že je

$$\Xi\left(t, t_0, \begin{pmatrix}\tilde{x}\\ \tilde{q}\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\Phi(t, t_0, \tilde{x}, \tilde{q})\\ \Gamma(t, t_0, \tilde{x}, \tilde{q})\end{pmatrix}, \tag{1.6}$$

kde funkce Γ je definována pro všechna $(t, t_0, \tilde{x}, \tilde{q})$, pro něž je definována funkce Φ, a je $\Gamma(t, t_0, \tilde{x}, \tilde{q}) = \tilde{q}$. Odtud a z Věty 12.2.6 plyne, že funkce Φ je definována na otevřené množině v $R^2 \times K^{n+m}$ a že je spojitá. Věta 14.1.1 je dokázána.

Věta o spojité závislosti na parametru má několik variant; např. parametr může být diskrétní a předpoklady o jednoznačnosti lze podstatně oslabit. Jednou z variant věty o spojité závislosti řešení na parametru je

14.1.3. Věta: *Nechť množina $G \subset R \times K^n$ je otevřená a nechť funkce $f, f_k: G \to K^n$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, jsou spojité, $(t_0, \tilde{x}) \in G$. Nechť $u: (\alpha, \beta) \to K^n$ je maximální řešení rovnice*

$$\dot{x} = f(t, x)\,, \tag{1.7}$$

$u(t_0) = \tilde{x}$, *a nechť*

rovnice (1.7) je jednoznačná v každém bodě $(s, u(s))$, kde $\alpha < s < \beta$. (1.8)

Nechť $f_k \to f$ pro $k \to \infty$ stejnoměrně na každé kompaktní podmnožině v G. Nechť $u^{[k]}: (\alpha_k, \beta_k) \to K^n$ je maximální řešení rovnice

$$\dot{x} = f_k(t, x), \tag{1.9}$$

nechť $t_0 \in (\alpha, \beta)$, $k = 1, 2, 3, \ldots$, a nechť $\lim_{k \to \infty} u^{[k]}(t_0) = \tilde{x}$. Nechť ještě je $\alpha < \gamma \leqq \leqq t_0 \leqq \delta < \beta$. Potom platí:

$$\alpha_k < \gamma,\ \delta < \beta_k \text{ pro všechna dosti velká } k. \tag{1.10}$$

$$u^{[k]}(t) \to u(t) \text{ stejnoměrně na } \langle \gamma, \delta \rangle. \tag{1.11}$$

Důkaz je naznačen v Dodatku 14.1.

14.2. Dokážeme, že funkce Φ má spojité parciální derivace podle všech proměnných; funkce f musí ovšem splňovat silnější předpoklady než v odst. 14.1; G, f, Φ, Ξ, Γ bude mít stejný význam jako v odst. 14.1.

14.2.1. Věta (o diferencovatelnosti řešení podle parametru): *Nechť platí* (1.2) *a nechť jsou splněny tyto podmínky:*

Pro každý vektor $w \in K^n$ existuje derivace $\mathrm{D}_w^{(2)} f: G \to K^n$ funkce f vzhledem k druhé proměnné ve směru w a je spojitá. (2.1)

Pro každý vektor $p \in K^m$ existuje derivace $\mathrm{D}_p^{(3)} f: G \to K^n$ funkce f vzhledem k třetí proměnné ve směru p a je spojitá. (2.2)

Potom je definována funkce Φ (viz odst. 14.1) *a existují derivace*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t_0}, \quad \mathrm{D}_w^{(3)} \Phi, \quad \mathrm{D}_p^{(4)} \Phi \quad (\text{pro každé } w \in K^n,\ p \in K^m),$$

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial t\, \partial t_0}, \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial t_0\, \partial t}, \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{D}_w^{(3)} \Phi, \quad \mathrm{D}_w^{(3)} \frac{\partial}{\partial t} \Phi, \quad \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{D}_p^{(4)} \Phi, \quad \mathrm{D}_p^{(4)} \frac{\partial}{\partial t} \Phi,$$

všechny jsou spojité a platí

$$\frac{\partial^2}{\partial t_0\, \partial t} \Phi = \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial t_0} \Phi, \tag{2.3}$$

$$\mathrm{D}_w^{(3)} \frac{\partial}{\partial t} \Phi = \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{D}_w^{(3)} \Phi, \quad \mathrm{D}_p^{(4)} \frac{\partial}{\partial t} \Phi = \frac{\partial}{\partial t} \mathrm{D}_p^{(4)} \Phi. \tag{2.4}$$

Podmínky (2.1) a (2.2) jsou splněny právě tehdy, jestliže platí:
Funkce f má spojité parciální derivace $\partial f / \partial x_i: G \to K^n$, $i = 1, 2, \ldots, n$, a $\partial f / \partial q_j: G \to K^n$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Důkaz: Stejným obratem, jako jsme převedli Větu 14.1.1 na Větu 12.1.4, převedeme i Větu 14.2.1 na Větu 13.1.1. Rovnice (1.1) je jednoznačná (při pevném q) podle Věty 11.1.6; proto je definována funkce Φ. Nechť Ξ má stejný význam jako v odst. 14.1. Z podmínek (2.1), (2.2) plyne, že derivace $D_z^{(3)} f$ existuje a je spojitá, považujeme-li $\operatorname{col}(x, q)$, $z = \operatorname{col}(w, p) \in K^{n+m}$ za jediný vektor; tedy pravá strana soustavy (1.4) splňuje předpoklady Věty 13.1.1. Podle Věty 13.1.1 existuje funkce Ξ, má spojité derivace

$$\frac{\partial}{\partial t_0} \Xi, \quad D_z^{(3)} \Xi, \quad \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial t_0} \Xi, \quad \frac{\partial^2}{\partial t_0\, \partial t} \Xi, \quad \frac{\partial}{\partial t} D_z^{(3)} \Xi, \quad D_z^{(3)} \frac{\partial}{\partial t} \Xi,$$

a platí

$$\frac{\partial^2}{\partial t_0\, \partial t} \Xi = \frac{\partial^2}{\partial t\, \partial t_0} \Xi, \quad D_z^{(3)} \frac{\partial}{\partial t} \Xi = \frac{\partial}{\partial t} D_z^{(3)} \Xi .$$

Vzhledem k (1.6) a k rovnici $z = \operatorname{col}(w, p)$ plynou odtud všechna tvrzení Věty 14.2.1.

Funkce Φ splňuje diferenciální rovnici

$$\frac{\partial}{\partial t} \Phi(t, t_0, \tilde{x}, q) = f(t, \Phi(t, t_0, \tilde{x}, q), q) \tag{2.5}$$

a z Věty 14.2.1 plyne, že rovnici (2.5) můžeme derivovat podle proměnné q v libovolném směru $p \in K^m$. Podle pravidel pro derivování složené funkce dostáváme vzhledem k (2.4)

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} D_p^{(4)} \Phi(t, t_0, \tilde{x}, q) &= D^{(2)} f(t, \Phi(t, t_0, \tilde{x}, q), q)\, D_p^{(4)} \Phi(t, t_0, \tilde{x}, q) + \\ &+ D_p^{(3)} f(t, \Phi(t, t_0, \tilde{x}, q), q) . \end{aligned} \tag{2.6}$$

Je ovšem $\Phi(t_0, t_0, \tilde{x}, q) = \tilde{x}$ pro $(t_0, \tilde{x}, q) \in G$; tedy je

$$D_p^{(4)} \Phi(t_0, t_0, \tilde{x}, q) = 0 \quad \text{pro} \quad (t_0, \tilde{x}, q) \in G, \quad p \in K^n . \tag{2.7}$$

Rovnice (2.6), (2.7) umožňují v některých případech vypočítat $D_p^{(4)} \Phi(t, t_0, \tilde{x}, q)$, i když neumíme pro všechna $(t, t_0, \tilde{x}, q)$ vypočítat $\Phi(t, t_0, \tilde{x}, q)$. Při pevném $(t_0, \tilde{x}, q) \in G$, $p \in K^m$ položme $\Phi(t, t_0, \tilde{x}, q) = u(t)$, $D_p^{(4)} \Phi(t, t_0, \tilde{x}, q) = v(t)$.

Při tomto označení je

$$\dot{v}(t) = D^{(2)} f(t, u(t), q)\, v(t) + D_p^{(3)} f(t, u(t), q) , \tag{2.8}$$

$$v(t_0) = 0 . \tag{2.9}$$

Příklad 1: Vyšetřujme rovnici

$$\dot{x} = 1 + (t - x) + (t - x)^2 + \varepsilon \sin x ,$$

kde $\varepsilon \in R$ je parametr. Máme vypočítat

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Phi(\pi, 0, 0, 0)$$

[je ovšem $\partial\Phi/\partial\varepsilon = \mathrm{D}_1^{(4)}\Phi$]. Je $u(t) = \Phi(t, 0, 0, 0) = t$,

$$\mathrm{D}^{(2)} f(t, x, \varepsilon) = \mathrm{D}_1^{(2)} f(t, x, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial x} f(t, x, \varepsilon) =$$

$$= -1 - 2(t - x) + \varepsilon \cos x ,$$

$$\mathrm{D}_1^{(3)} f(t, x, \varepsilon) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} f(t, x, \varepsilon) = \sin x , \quad \mathrm{D}^{(2)} f(t, u(t), 0) = -1 ,$$

$$\mathrm{D}_1^{(3)} f(t, u(t), \varepsilon) = \sin t .$$

Pro funkci

$$v(t) = \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Phi(t, 0, 0, 0)$$

dostáváme rovnici $\dot{v} = -v + \sin t$, $v(0) = 0$, tedy

$$v(t) = \int_0^t \mathrm{e}^{-t+\tau} \sin \tau \, \mathrm{d}\tau ,$$

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Phi(\pi, 0, 0, 0) = v(\pi) = \mathrm{e}^{-\pi} \int_0^\pi \mathrm{e}^\tau \sin \tau \, \mathrm{d}\tau = \tfrac{1}{2}(1 + \mathrm{e}^{-\pi}) .$$

Příklad 2: Vyšetřujme rovnici

$$\ddot{x} - \varepsilon(1 - x^2) \dot{x} + x = 0 , \tag{2.10}$$

kde $\varepsilon \in R$ je parametr a $x(t) \in R$. Rovnici (2.10) odpovídá soustava

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 , \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \varepsilon(1 - x_1^2) x_2 . \end{aligned} \tag{2.11}$$

Zavedeme tzv. polární souřadnice (viz odst. 2.20), tj. položíme $x_1 = \varrho \cos \psi$, $x_2 = \varrho \sin \psi$. Soustavě (2.11) odpovídá soustava

$$\begin{aligned} \dot{\varrho} &= \varepsilon(1 - \varrho^2 \cos^2 \psi) \varrho \sin^2 \psi , \\ \dot{\psi} &= -1 + \varepsilon(1 - \varrho^2 \cos^2 \psi) \sin \psi \cos \psi . \end{aligned} \tag{2.12}$$

Funkce f, Φ, v budeme vztahovat k soustavě (2.12). Pro $a > 0$ zřejmě je

$$\Phi\left(t, 0, \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, 0\right) = \begin{pmatrix} a \\ -t \end{pmatrix}.$$

Protože je $\mathrm{D}^{(2)} f(t, x, 0) = 0$, dostáváme pro v rovnici [viz (2.8)]

$$\dot{v}(t) = \begin{pmatrix} (1 - a^2 \cos^2 t) \, a \sin^2 t \\ -(1 - a^2 \cos^2 t) \sin t \cos t \end{pmatrix}$$

s počáteční podmínkou $v(0) = 0$. Odtud vypočteme

$$v(t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a(1 - \frac{1}{4}a^2)\,t - \frac{1}{4}a \sin 2t + \frac{1}{32}a^3 \sin 4t \\ -\frac{1}{2}\sin^2 t + a^2(\frac{1}{4}\sin^2 t + \frac{1}{16}\sin^2 2t) \end{pmatrix}.$$

Přímo z definice derivace plyne, že je

$$\Phi(t, 0, \tilde{x}, \varepsilon) = \Phi(t, 0, \tilde{x}, 0) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Phi(t, 0, \tilde{x}, 0) + z(t, \tilde{x}, \varepsilon)\,,$$

kde $\varepsilon^{-1}\, z(t, \tilde{x}, \varepsilon) \to 0$ pro $\varepsilon \to 0$. Proto

$$\Phi\left(t, 0, \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, 0\right) + v(t) =$$

$$= \begin{pmatrix} a \\ -t \end{pmatrix} + \varepsilon \begin{pmatrix} \frac{1}{2}a(1 - \frac{1}{4}a^2)\,t - \frac{1}{4}a \sin 2t + \frac{1}{32}\, a^3 \sin 4t \\ -\frac{1}{2}\sin^2 t + a^2(\frac{1}{4}\sin^2 t + \frac{1}{16}\sin^2 2t) \end{pmatrix} \tag{2.13}$$

vyjadřuje přibližně

$$\Phi\left(t, 0, \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon\right)$$

pro malá ε. Z (2.13) plyne, že

$$\Phi\left(2\pi, 0, \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \varepsilon\right)$$

je přibližně rovno

$$\begin{pmatrix} a \\ -2\pi \end{pmatrix} + \varepsilon\pi \begin{pmatrix} a(1 - a^2/4) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Nechť $w(t, \varepsilon) = \operatorname{col}(w_1(t, \varepsilon), w_2(t, \varepsilon))$ znamená maximální řešení soustavy (2.11), $w_1(0, \varepsilon) = a$, $w_2(0, \varepsilon) = 0$. Je-li $\varepsilon = 0$, trajektorie soustavy (2.11) jsou kružnice a je $w_1(2\pi, 0) = a$, $w_2(2\pi, 0) = 0$. Je-li $\varepsilon \neq 0$, je $w_1(2\pi, \varepsilon)$ přibližně rovno $a + \varepsilon\pi\, a(1 - a^2/4)$ a $w_2(2\pi, \varepsilon)$ je přibližně rovno 0. Tyto výsledky napovídají, že pro $0 < a < 2$ a pro $\varepsilon > 0$ (dostatečně malé) bod $\operatorname{col}(w_1(t, \varepsilon), w_2(t, \varepsilon))$ putuje po spirále a přitom po jednom oběhu se jeho vzdálenost od počátku zvětší. Pro $a > 2$ a pro $\varepsilon > 0$ (dostatečně malé) bod $\operatorname{col}(w_1(t, \varepsilon), w_2(t, \varepsilon))$ putuje po spirále a přitom po jednom oběhu se jeho vzdálenost od počátku zmenší.

Příklad 3: Vyšetřujme soustavu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1^3 + x_2^3 + \varepsilon t\,, \\ \dot{x}_2 &= 1 - x_2^3 + \varepsilon\,, \end{aligned} \tag{2.14}$$

kde $\varepsilon \in R$ je parametr. Nechť je

$$t_0 = 0\,, \quad \tilde{x} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Hledáme funkci

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon} \Phi(t, 0, \tilde{x}, 0) = v(t) .$$

Je

$$\Phi(t, 0, \tilde{x}, 0) = u(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{D}^{(2)} f(t, x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} 3x_1^2, & 3x_2^2 \\ 0, & -3x_2^2 \end{pmatrix}, \quad \mathrm{D}^{(2)} f(t, u(t), \varepsilon) = \begin{pmatrix} 3, & 3 \\ 0, & -3 \end{pmatrix} = A ,$$

$$\mathrm{D}_1^{(3)} f(t, x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Pro funkci v dostáváme rovnici

$$\dot{v}(t) = A\, v(t) + \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v(0) = 0 .$$

Tedy je [viz (4.6.4) a Větu 5.6.1]

$$v(t) = \mathrm{e}^{At} \int_0^t \mathrm{e}^{-A\tau} \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau .$$

Je

$$\mathrm{e}^{At} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{3t}, & \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^{-3t}) \\ 0, & \mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix},$$

$$\mathrm{e}^{-A\tau} \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tau \mathrm{e}^{-3\tau} + \frac{1}{2}(\mathrm{e}^{-3\tau} - \mathrm{e}^{3\tau}) \\ \mathrm{e}^{3\tau} \end{pmatrix},$$

$$\int_0^t \mathrm{e}^{-A\tau} \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix} \mathrm{d}\tau = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} t\, \mathrm{e}^{-3t} - \frac{5}{18} \mathrm{e}^{-3t} - \frac{1}{6} \mathrm{e}^{3t} + \frac{4}{9} \\ \frac{1}{3} \mathrm{e}^{3t} - \frac{1}{3} \end{pmatrix},$$

$$v(t) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} t - \frac{4}{9} + \frac{5}{18} \mathrm{e}^{3t} + \frac{1}{6} \mathrm{e}^{-3t} \\ \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \mathrm{e}^{-3t} \end{pmatrix}.$$

14.2.2. Poznámka: Existují-li všechny derivace druhého řádu funkce f vzhledem k proměnným $\tilde{x}$, q (v libovolných směrech w, p) a jsou-li spojité, pak lze užitím Věty 13.3.1 dokázat, že funkce $\Phi(t, t_0, \tilde{x}, q)$ má všechny derivace druhého řádu vzhledem k proměnným $\tilde{x}$, q (v libovolných směrech w, p), že tyto derivace jsou spojité a že kterékoliv dva z operátorů

$$\mathrm{D}_w^{(3)}, \quad \mathrm{D}_v^{(3)}, \quad \mathrm{D}_p^{(4)}, \quad \mathrm{D}_{\tilde{p}}^{(4)}, \tag{2.15}$$

kde $w, v \in K^n$, $p, \tilde{p} \in K^m$, lze navzájem zaměnit. Pomocí úvah naznačených v Poznámce 13.2.2 lze ukázat, že tyto derivace druhého řádu funkce Φ mají ještě spojité derivace podle proměnné t a že operátor $\partial/\partial t$ lze zaměnit s kterýmkoliv z operátorů (2.15). Tak lze derivováním rovnice (2.6) [resp. (2.5)] odvodit diferenciální rovnice, které splňují derivace funkce druhého řádu vzhledem k proměnným $\tilde{x}, q$; jsou to lineární nehomogenní diferenciální rovnice. Derivováním rovnice $\Phi(t_0, t_0, \tilde{x}, q) = \tilde{x}$ odvodíme, že všechny derivace druhého řádu funkce Φ vzhledem k proměnným $\tilde{x}, q$ mají v bodech $(t_0, t_0, \tilde{x}, q)$ hodnotu 0. Odtud lze v některých případech zmíněné derivace druhého řádu funkce Φ vypočítat. V případě derivací vyšších řádů je situace obdobná.

14.3. V tomto odstavci budeme předpokládat, že je $K = C$. Je $\tilde{x} = \operatorname{col}(\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n)$, $q = \operatorname{col}(q_1, \dots, q_m)$, kde $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n$ jsou komplexní složky vektoru $\tilde{x}$ a $q_1, \dots, q_m$ jsou komplexní složky vektoru q. Je

$$\Phi = \operatorname{col}(\Phi_1, \Phi_2, \dots, \Phi_n), \quad \frac{\partial}{\partial t}\Phi = \operatorname{col}\left(\frac{\partial}{\partial t}\Phi_1, \frac{\partial}{\partial t}\Phi_2, \dots, \frac{\partial}{\partial t}\Phi_n\right),$$

funkce $\Phi_1, \dots, \Phi_n, \partial\Phi_1/\partial t, \dots, \partial\Phi_n/\partial t$ jsou spojité a existují parciální derivace

$$\frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j}\Phi_k, \quad \frac{\partial}{\partial q_l}\Phi_k, \quad \frac{\partial}{\partial \tilde{x}_j}\frac{\partial}{\partial t}\Phi_k, \quad \frac{\partial}{\partial q_l}\frac{\partial}{\partial t}\Phi_k$$

$$\text{pro} \quad j, k = 1, 2, \dots, n, \quad l = 1, 2, \dots, m$$

podle komplexních proměnných $\tilde{x}_j, q_l$ [neboť v (D11.1.1) je $\lambda \in C$] a jsou spojité. Tedy funkce $\Phi_k(t, t_0, \tilde{x}, q)$, $\partial\Phi_k(t, t_0, \tilde{x}, q)/\partial t$, $k = 1, 2, \dots, n$, jsou při pevných t, t_0 holomorfní funkce $n + m$ komplexních proměnných $\tilde{x}_1, \dots, \tilde{x}_n, q_1, \dots, q_m$ všude, kde jsou definovány, a lze je tedy v jistém okolí každého bodu $\tilde{x}, q$ (v němž jsou definovány) rozvinout v absolutně konvergentní mocninnou řadu o středu $(\tilde{x}, q)$ (srovnej Větu D13.1.2 a Definici D13.1.1). Nechť $\mathscr{J}, \mathscr{J}_0$ jsou kompaktní intervaly v R,

$$\tilde{w} = \operatorname{col}(\tilde{w}_1, \dots, \tilde{w}_n) \in K^n, \quad p = \operatorname{col}(p_1, \dots, p_m) \in K^m,$$

$$0 < R_j \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, \dots, n + m$$

a nechť $\Phi(t, t_0, \tilde{x}, q)$ je definováno, jestliže je

$$t \in \mathscr{J}, \quad t_0 \in \mathscr{J}_0, \tag{3.1}$$

$$|\tilde{x}_i - \tilde{w}_i| < R_i, \quad |q_j - p_j| < R_{n+j}$$
$$\text{pro} \quad i = 1, 2, \dots, n, \; j = 1, 2, \dots, m. \tag{3.2}$$

Potom platí [viz (D13.1.1)]

$$\Phi_k(t, t_0, \tilde{x}, q) = \sum_{i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_m = 0}^{\infty} a_{ki_1 \dots i_n j_1 \dots j_m}(t, t_0) \times$$
$$\times (\tilde{x}_1 - \tilde{w}_1)^{i_1} \dots (\tilde{x}_n - \tilde{w}_n)^{i_n} (q_1 - p_1)^{j_1} \dots (q_m - p_m)^{j_m}. \tag{3.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi_k(t, t_0, \tilde{x}, q) = \sum_{i_1, \dots, i_n, j_1, \dots, j_m = 0}^{\infty} b_{ki_1 \dots i_n j_1 \dots j_m}(t, t_0) \times$$
$$\times (\tilde{x}_1 - \tilde{w}_1)^{i_1} \dots (\tilde{x}_n - \tilde{w}_n)^{i_n} (q_1 - p_1)^{j_1} \dots (q_m - p_m)^{j_m}, \tag{3.4}$$

kde řady v (3.3), (3.4) konvergují absolutně. Ze spojitosti funkcí Φ, $\partial\Phi/\partial t$ plyne užitím vzorce (D13.1.4), že funkce $a_{ki_1\ldots i_nj_1\ldots j_m}(t, t_0)$, $b_{ki_1\ldots i_nj_1\ldots j_m}(t, t_0)$ jsou spojité. Nechť je $0 < \varrho_i < r_i < R_i$ pro $i = 1, 2, \ldots, n + m$,

$$\left|\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, t_0, \tilde{x}, q)\right| \leqq \varkappa$$

pro $t \in \mathscr{I}$, $t_0 \in \mathscr{I}_0$, $|\tilde{x}_i - \tilde{w}_i| = r_i$, $|q_j - p_j| = r_{n+j}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Podle vzorce (D13.1.5) je

$$|b_{ki_1\ldots i_nj_1\ldots j_m}(t, t_0)| \leqq \frac{\varkappa}{r_1^{i_1} \ldots r_n^{i_n} r_{n+1}^{j_1} \ldots r_{n+m}^{j_m}}\,.$$

Odtud plyne, že řada v (3.4) konverguje absolutně a stejnoměrně vzhledem k t, t_0, $\tilde{x}$, q pro $t \in \mathscr{I}$, $t_0 \in \mathscr{I}_0$, $|\tilde{x}_i - w_i| \leqq \varrho_i$, $|q_j - p_j| \leqq \varrho_{n+j}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $j = 1, 2, \ldots, m$. Proto řadu v (3.4) můžeme integrovat podle t člen po členu, a protože koeficienty v rozvoji funkce Φ jsou určeny jednoznačně [viz (D13.1.4)], dostáváme

$$a_{ki_1\ldots i_nj_1\ldots j_m}(t, t_0) = a_{ki_1\ldots i_nj_1\ldots j_m}(t_1, t_0) + \int_{t_1}^{t} b_{ki_1\ldots i_nj_1\ldots j_m}(\tau, t_0)\,\mathrm{d}\tau$$

pro $t, t_1 \in \mathscr{I}$, $t_0 \in \mathscr{I}_0$, tedy

$$b_{ki_1\ldots i_nj_1\ldots j_m}(t, t_0) = \frac{\partial}{\partial t} a_{ki_1\ldots i_nj_1\ldots j_m}(t, t_0) \tag{3.5}$$

pro $t \in \mathscr{I}$, $t_0 \in \mathscr{I}_0$.

Nechť funkce $A, B\colon \langle\alpha, \beta\rangle \to M_n(C)$ jsou spojité. Vyšetřujme lineární diferenciální rovnici

$$\dot{x} = [A(t) + \xi\, B(t)]\, x\,, \tag{3.6}$$

kde $\xi \in C$ je parametr. Protože jde o lineární rovnici, je definičním oborem funkce Φ množina $H = \langle\alpha, \beta\rangle \times \langle\alpha, \beta\rangle \times C^n \times C$, a jak jsme již dokázali, funkce $\Phi(t, t_0, \tilde{x}, .)\colon C \to C$ je holomorfní pro $t, t_0 \in \langle\alpha, \beta\rangle$, $\tilde{x} \in C^n$. Je tedy $\Phi(t, t_0, \tilde{x}, .)$ celistvá funkce. Z rovnice

$$\Phi(t, t_0, \tilde{x}, \xi) = \tilde{x} + \int_{t_0}^{t} [A(\tau) + \xi B(\tau)]\, \Phi(\tau, t_0, x, \xi)\,\mathrm{d}\tau$$

a z Věty 4.3.1 plyne, že platí

$$\|\Phi(t, t_0, \tilde{x}, \xi)\| \leqq \|\tilde{x}\|\, \mathrm{e}^{\delta|\xi|+\gamma} \quad \text{pro} \quad (t, t_0, \tilde{x}, \xi) \in H\,,$$

kde

$$\gamma = \int_\alpha^\beta \|A(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau\,, \quad \delta = \int_\alpha^\beta \|B(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau\,.$$

Z (3.3) vyplývá, že $\Phi(t, t_0, \tilde{x}, .)$ je celistvá funkce exponenciálního typu (viz Dodatek 14.1).

Zvolme pevně $t_0 \in \langle\alpha, \beta\rangle$ a bázi $\tilde{x}^{[1]}, \tilde{x}^{[2]}, \ldots, \tilde{x}^{[n]}$ v C^n a položme $u^{[i]}(t, \xi) = \Phi(t, t_0, \tilde{x}^{[i]}, \xi)$, $i = 1, 2, \ldots, n$, $U(t, \xi) = ((u^{[1]}(t, \xi), \ldots, u^{[n]}(t, \xi)))$. $U(., \xi)$ je fundamentální matice rovnice (3.6) a její elementy jsou (při pevném t) celistvé funkce exponenciálního typu proměnné ξ. Je ovšem $\Phi(t, t_0, \tilde{x}, \xi) = U(t, \xi)\,[U(t_0, \xi)]^{-1}\,\tilde{x}$, $(t, t_0, \tilde{x}, \xi) \in H$. [Snadno se zjistí, že elementy funkce $U^{-1}(t_0, \xi)$ jsou celistvé funkce exponenciálního typu, a tedy totéž tvrzení platí i o elementech funkce $U(t, \xi)\,U^{-1}(t_0, \xi)$.]

Ve speciálním případě, kdy je

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0, & 1, & \ldots, 0 \\ 0, & 0, & \ldots, 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, 1 \\ -a_n(t)/a_0(t), & -a_{n-1}(t)/a_0(t), & \ldots, -a_1(t)/a_0(t) \end{pmatrix},$$

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0, & 0, \ldots, 0 \\ 0, & 0, \ldots, 0 \\ \ldots & \ldots \\ 0, & 0, \ldots, 0 \\ 1/a_0(t), & 0, \ldots, 0 \end{pmatrix}$$

a funkce $a_j\colon \langle\alpha, \beta\rangle \to C$ jsou spojité, $a_0(t) \neq 0$ pro $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$, jsou první komponenty $u_1^{[j]}(., \xi)$ funkcí $u^{[j]}(., \xi)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, lineárně nezávislá řešení rovnice

$$a_0(t)\,x^{[n]} + a_1(t)\,x^{[n-1]} + \ldots + a_n(t)\,x = \xi x\,;$$

funkce $u_1^{[j]}(t, .)$ jsou celistvé funkce exponenciálního typu.

14.3.1. Poznámka: Vyšetřujme slabě nelineární oscilátor popsaný rovnicí

$$\ddot{x} + x + \varepsilon x^3 = \sigma(t)\,, \tag{3.7}$$

kde funkce $\sigma\colon R \to R$ je spojitá. Rovnice (3.7) je ekvivalentní soustavě

$$\dot{x} = f(t, x, \varepsilon)\,, \tag{3.8}$$

kde

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad f(t, x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \sigma(t) - x_1 - \varepsilon x_1^3 \end{pmatrix} \quad \text{pro} \quad t, x_1, x_2, \varepsilon \in R\,. \tag{3.9}$$

Vzhledem k interpretaci rovnice (3.7) se zajímáme pouze o reálná řešení, a proto f je v (3.9) definována jako funkce, která zobrazuje $R \times R^2 \times R$ do R^2. Abychom mohli užít výsledků tohoto odstavce, položíme

$$\hat{f}(t, x, \varepsilon) = \begin{pmatrix} x_2 \\ \sigma(t) - x_1 - \varepsilon x_1^3 \end{pmatrix} \quad \text{pro} \quad t \in R\,, \quad x_1, x_2, \varepsilon \in C \tag{3.10}$$

a vyšetřujme diferenciální rovnici

$$\dot{x} = \hat{f}(t, x, \varepsilon)\,. \tag{3.11}$$

Funkce $\hat{f}$ splňuje podmínky (1.2), (2.1) a (2.2) [pro $q = \varepsilon$] a proto funkce $\hat{\Phi}(t, t_0, \tilde{x}, \varepsilon)$, která odpovídá rovnici (3.11), je holomorfní funkce proměnných $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \varepsilon$ a lze ji rozvinout v okolí každého bodu $(x_1^*, x_2^*, \varepsilon^*)$, v němž je definována, v konvergentní mocninnou řadu podle mocnin $(\tilde{x}_1 - x_1^*)$, $(\tilde{x}_2 - x_2^*)$, $(\varepsilon - \varepsilon^*)$. Je-li $\tilde{x}$ reálný vektor a ε reálné číslo, je funkce $\hat{\Phi}(., t_0, \tilde{x}, \varepsilon)$ reálná a je řešením rovnice (3.8). Není těžké dokázat, že platí: Je-li $x^* = \operatorname{col}(x_1^*, x_2^*)$ reálný vektor a ε^* reálné číslo, pak všechny koeficienty v rozvoji funkce $\hat{\Phi}(t, t_0, ., .)$ v mocninnou řadu podle mocnin $(\tilde{x}_1 - x_1^*)$, $(\tilde{x}_2 - x_2^*)$, $(\varepsilon - \varepsilon^*)$ jsou reálné vektory. Přirozeně první složka $\hat{\Phi}_1$ funkce $\hat{\Phi}$ je řešení rovnice (3.7) a speciálně platí, že funkci $\hat{\Phi}_1(t, t_0, ., ., .)$ lze rozvinout v okolí každého bodu $(x_1^*, x_2^*, \varepsilon^*)$, v němž je definována, v konvergentní mocninnou řadu podle mocnin $(\tilde{x}_1 - x_1^*)$, $(\tilde{x}_2 - x_2^*)$, $(\varepsilon - \varepsilon^*)$.

14.3.2. Poznámka: Nechť jsou splněny předpoklady Věty 14.1.3. Funkci $f(t_1, ., .)$ můžeme rozvinout v mocninnou řadu podle mocnin $(x_i - \Phi_i(t, t_0, \tilde{w}, p))$, $(q_j - p_j)$. V řadě (3.4) dosaďme podle (3.5) a řady (3.3) a (3.4) dosaďme do rovnice (1.1). Pravou stranu upravme v mocninnou řadu podle mocnin $(\tilde{x}_i - \tilde{w}_i)$, $(q_j - p_j)$. Porovnáme-li odpovídající členy mocninných řad na obou stranách, odvodíme diferenciální rovnice pro funkce $a_{ki_1 \ldots i_n j_1 \ldots j_m}$. Počáteční podmínky odvodíme z rovnice $\Phi(t_0, t_0, \tilde{x}, q) = \tilde{x} = \tilde{w} + (\tilde{x} - \tilde{w})$, na levou stranu dosadíme podle (3.3). V některých případech tyto rovnice dovedeme řešit a tak dostaneme konkrétní vyjádření pro funkci Φ. Tyto úvahy osvětlíme na příkladě.

Příklad: Vyšetřujme rovnici

$$\dot{x} = x + \varepsilon x^3\,. \tag{3.12}$$

Hledejme rozvoj odpovídající funkce $\Phi(t, 0, ., .)$ v okolí bodu $(1, 0)$. Položme $\xi = \tilde{x} - 1$,

$$\Phi(t, 0, 1 + \xi, \varepsilon) = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}(t)\, \xi^i \varepsilon^j\,, \tag{3.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\Phi(t, 0, 1 + \xi, \varepsilon) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \dot{a}_{ij}(t)\, \xi^i \varepsilon^j\,. \tag{3.14}$$

Položme $t = 0$ v (3.13). Dostáváme $1 + \xi = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij}(0)\, \xi^i \varepsilon^j$, a proto je

$$a_{00}(0) = 1\,, \quad a_{10}(0) = 1\,, \quad a_{ij}(0) = 0 \quad \text{pro ostatní dvojice } (i, j)\,. \tag{3.15}$$

(3.15) jsou hledané počáteční podmínky pro funkce $a_{ij}(t)$. Dosadíme-li (3.13) a (3.14) do (3.12), odvodíme úpravou na pravé straně a porovnáním odpovídajících členů mocninných řad na obou stranách, že platí

$$\dot{a}_{j0}(t) = a_{j0}(t) \quad \text{pro} \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{3.16}$$

$$\dot{a}_{01}(t) = a_{01}(t) + a_{00}^3(t),$$

$$\dot{a}_{11}(t) = a_{11}(t) + 3a_{00}^2(t)\, a_{10}(t), \tag{3.17}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\dot{a}_{02}(t) = a_{02}(t) + 3a_{00}^2(t)\, a_{01}(t), \tag{3.18}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Z rovnic (3.15) až (3.18) vypočteme, že je

$$a_{00}(t) = \mathrm{e}^t, \quad a_{10}(t) = \mathrm{e}^t, \quad a_{j0}(t) = 0 \quad \text{pro} \quad j = 2, 3, \ldots,$$

$$a_{01}(t) = (\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^t)/2, \quad a_{11}(t) = 3(\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^t)/2,$$

$$a_{02}(t) = 3\,\mathrm{e}^{6t}/10 - \mathrm{e}^{4t}/2 + \mathrm{e}^t/5.$$

Tak dostáváme počáteční členy rozvoje

$$\Phi(t, 0, \tilde{x}, \varepsilon) = \mathrm{e}^t + \mathrm{e}^t(\tilde{x} - 1) + [(\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^t)/2]\, \varepsilon +$$

$$+ [3(\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^t)/2]\,(\tilde{x} - 1)\, \varepsilon + [3\,\mathrm{e}^{6t}/10 - \mathrm{e}^{4t}/2 + \mathrm{e}^t/5]\, \varepsilon^2 + \ldots.$$

I v těch případech, kdy dovedeme vypočítat koeficienty rozvoje na pravé straně v (3.3), pro praktické účely je nevýhodné, že pracnost výpočtu koeficientů vzrůstá se stupněm mocniny. Také obvykle nelze určit množinu $P(t_0, t)$ těch bodů (x, q), pro něž při daných t_0, t řada v (3.3) konverguje. Metodou tzv. majorantních řad lze však často najít taková čísla $\alpha, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$, že řada v (3.3) konverguje, je-li $|\tilde{x}_i - \tilde{w}_i| < \alpha_i, |q_j - p_j| < \beta_j$ pro $i = 1, 2, \ldots, n, j = 1, 2, \ldots, m$. Metoda majorantních řad umožňuje najít jistou podmnožinu množiny $P(t_0, t)$, obvykle však neumožňuje množinu $P(t_0, t)$ přesně popsat.

14.4. Výsledků z odst. 14.2 a 14.3 lze užít k vyšetřování tzv. *perturbačních úloh*: v nich jde o to, abychom z vlastností dané (jednodušší) úlohy usoudili na vlastnosti jiné blízké (složitější) úlohy. Perturbace (neboli porucha) se často zapisuje tím způsobem, že některé členy na pravé straně vyšetřované diferenciální rovnice (popř. v počátečních nebo okrajových podmínkách) jsou vynásobeny parametrem ε, o kterém se předpokládá, že nabývá jen malých hodnot [pro $\varepsilon = 0$ máme danou (jednodušší) úlohu a pro malé hodnoty parametru ε máme úlohu k ní blízkou (složitější)]. V obecnějším případě soudíme z vlastností rovnice $\dot{x} = f(t, x, 0)$ na vlastnosti rovnice $\dot{x} = f(t, x, \varepsilon)$ pro malá ε. Proto se též mluví o *metodě malého parametru*. V tomto odstavci se budeme zabývat existencí periodického řešení diferenciální rovnice v závislosti na parametru. Perturbační úlohy jsou podrobně vyšetřeny v [19] (viz též [20]).

Nechť H je otevřená množina v K^n a nechť funkce $f\colon R \times H \times K \to K^n$ splňuje podmínky (1.2), (1.3), (2.1), (2.2). Jednodimenzionální parametr budeme místo q značit ε, takže podmínku (2.2) můžeme krátce vyslovit: Funkce $\partial f/\partial \varepsilon$ je spojitá. Nechť je $T > 0$ a nechť platí

$$f(t + T, x, \varepsilon) = f(t, x, \varepsilon) \quad \text{pro} \quad (t, x, \varepsilon) \in R \times H \times K. \tag{4.1}$$

Nechť $\varepsilon \in K$ a nechť funkce $u: (\alpha, \beta) \to H$ je maximální řešení rovnice

$$\dot{x} = f(t, x, \varepsilon), \tag{4.2}$$

nechť je $t_0, t_0 + T \in (\alpha, \beta)$, $\tilde{x} \in H$, $u(t_0) = \tilde{x} = u(t_0 + T)$. Ukážeme, že v takovém případě je

$$(\alpha, \beta) = R, \quad u(t + T) = u(t) \quad \text{pro} \quad t \in R. \tag{4.3}$$

Snadno se totiž zjistí, že funkce $v: (\alpha - T, \beta - T) \to K^n$ definovaná rovnicí $v(t) = u(t + T)$ je maximální řešení rovnice (4.2) splňující podmínku $v(t_0) = \tilde{x}$, a protože rovnice (4.2) je jednoznačná, platí (4.3). Je ovšem $u(t) = \Phi(t, t_0, \tilde{x}, \varepsilon)$. Tak jsme dokázali, že platí

14.4.1. Věta: *Nechť jsou splněny podmínky* (1.2), (2.1), (2.2) *a* (4.1). *Potom platí: Maximální řešení* $u: (\alpha, \beta) \to H$ *rovnice* (4.2) *splňující podmínku* $u(t_0) = \tilde{x}$ *je periodické s periodou* T *právě tehdy, jestliže platí*

$$\tilde{x} - \Phi(t_0 + T, t_0, \tilde{x}, \varepsilon) = 0. \tag{4.4}$$

Budeme řešit tuto úlohu: Hledáme řešení u rovnice $\dot{x} = f(t, x, 0)$ periodické s periodou T takové, aby je bylo možné spojitě měnit v závislosti na ε a abychom tak dostali periodické řešení s periodou T rovnice (4.2). Jinými slovy: Hledáme spojitou funkci $v = v(t, \varepsilon)$, tak aby pro všechna dosti malá ε (též pro $\varepsilon = 0$) funkce $v(., \varepsilon)$ byla řešením rovnice (4.2) a aby přitom $v(., \varepsilon)$ byla periodická funkce s periodou T.

14.4.2. Věta: *Nechť jsou splněny podmínky* (1.2), (2.1), (2.2) *a* (4.1). *Nechť je* $\tilde{y} \in H$, $\tilde{y} = \operatorname{col}(\tilde{y}_1, \ldots, \tilde{y}_n)$,

$$\tilde{y} - \Phi(T, 0, \tilde{y}, 0) = 0 \tag{4.5}$$

a nechť platí:

$$\text{Matice } I - \mathrm{D}^{(3)}\Phi(T, 0, \tilde{y}, 0) \text{ je regulární.} \tag{4.6}$$

Potom existují čísla $\delta > 0$, $\Delta > 0$ *tak, že ke každému* ε, $-\delta < \varepsilon < \delta$, *existuje v množině* $\{\tilde{x} = \operatorname{col}(\tilde{x}_1, \ldots, \tilde{x}_n) \mid |\tilde{x}_i - \tilde{y}_i| < \Delta\}$ *právě jediné řešení* $\tilde{x}$ *rovnice* $\tilde{x} - \Phi(T, 0, \tilde{x}, \varepsilon) = 0$. *Píšeme-li* $\tilde{x} = \tilde{v}(\varepsilon)$, *pak funkce* $\tilde{v}$ *má spojitou derivaci* $\mathrm{d}\tilde{v}/\mathrm{d}\varepsilon$.

Věta 14.4.2 plyne přímo ze základní věty o implicitních funkcích [viz např. [28], Větu 210, kde klademe $F(\tilde{y}, \varepsilon) = \tilde{y} - \Phi(T, 0, \tilde{y}, \varepsilon)$].

14.4.3. Poznámka: Položme $v(t, \varepsilon) = \Phi(t, 0, \tilde{v}(\varepsilon), \varepsilon)$. Funkce v je spojitá a $v(., \varepsilon)$ je pro $|\varepsilon| < \delta$ periodické řešení rovnice (4.2). Tak jsme sestrojili řešení problému, vysloveného za Větou 14.4.1.

Nechť jsou splněny tyto podmínky:

Funkce $A: R \to M_n$, $g: R \to K^n$ jsou spojité.

Funkce $h: R \times K^n \to K^n$ je spojitá a pro každé $w \in K^n$ funkce $\mathrm{D}_w^{(2)} h: R \times K^n \to K^n$ je spojitá. (4.7)

$$A(t + T) = A(t), \quad g(t + T) = g(t), \quad h(t + T, x) = h(t, x)$$
$$\text{pro} \quad t \in R, \quad x \in H. \tag{4.8}$$

Na rovnici

$$\dot{x} = A(t)\, x + g(t) + \varepsilon\, h(t, x) \tag{4.9}$$

můžeme užít Věty 14.4.2. Nechť U je fundamentální matice rovnice

$$\dot{x} = A(t)\, x\,. \tag{4.10}$$

Předpokládejme ještě, že platí:

Rovnice (4.10) nemá netriviální periodické řešení s periodou T. (4.11)

Užitím Věty 14.4.1 na rovnici (4.10) snadno zjistíme, že (4.11) platí právě tehdy, je-li matice $I - U(T)\, U^{-1}(0)$ regulární.

Podle Poznámky 4.6.2 lze všechna maximální řešení rovnice

$$\dot{x} = A(t)\, x + g(t) \tag{4.12}$$

zapsat ve tvaru

$$u(t) = U(t)\, U^{-1}(0)\, \tilde{x} + \int_0^t U(t)\, U^{-1}(\tau)\, g(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,.$$

Podle Věty 14.4.1 u je periodické řešení rovnice (4.9) s periodou T právě tehdy, je-li

$$\tilde{x} = U(T)\, U^{-1}(0)\, \tilde{x} + \int_0^T U(T)\, U^{-1}(\tau)\, g(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,. \tag{4.13}$$

Protože matice $U(T)\, U^{-1}(0)$ je regulární, má rovnice (4.13) jediné řešení

$$\tilde{y} = [I - U(T)\, U^{-1}(0)]^{-1} \int_0^T U(T)\, U^{-1}(\tau)\, g(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,. \tag{4.14}$$

Je (viz Poznámku 4.6.2)

$$\Phi(t, 0, \tilde{y}, 0) = U(t)\, U^{-1}(0)\, \tilde{y} + \int_0^t U(t)\, U^{-1}(\tau)\, g(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,, \tag{4.15}$$

kde Φ se vztahuje k rovnici (4.9) a $\tilde{y}$ splňuje (4.5). Pravá strana rovnice (4.9) také splňuje (1.2), (2.1), (2.2) a (4.1). Podle (13.4.15) je

$$\mathrm{D}^{(3)}\, \Phi(t, 0, \tilde{x}, 0) = U(t)\, U^{-1}(0) \tag{4.16}$$

a tak podle (4.11) platí (4.6). Z Věty 14.4.2 plyne, že platí

14.4.4. Věta: *Nechť jsou splněny podmínky* (4.7), (4.8), (4.11) *a nechť $\tilde{y}$ splňuje* (4.14). *Potom existují čísla δ, $\Delta > 0$ tak, že pro každé ε, $-\delta < \varepsilon < \delta$, existuje řešení $v(., \varepsilon)$ rovnice* (4.9) *periodické s periodou T, $|v_i(0, \varepsilon) - \tilde{y}_i| < \Delta$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$. Řešení $v(., \varepsilon)$ je těmito podmínkami určeno jednoznačně.*

14.4.5. Poznámka: Ze základní věty o implicitních funkcích plyne, že pro derivaci

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{v}}{\mathrm{d}\varepsilon}(0)$$

funkce $\tilde{v}$ z Věty 14.4.2 platí vzorce

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{v}}{\mathrm{d}\varepsilon}(0) = \left[I - \mathrm{D}^{(3)}\,\Phi(T, 0, \tilde{y}, 0)\right]^{-1} \mathrm{D}_1^{(4)}\,\Phi(T, 0, \tilde{y}, 0)\,. \tag{4.17}$$

V případě rovnice (4.9) je podle (2.6), (2.7)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left[\mathrm{D}_1^{(4)}\,\Phi(t, 0, \tilde{y}, 0)\right] = A(t)\left[\mathrm{D}_1^{(4)}\,\Phi(t, 0, \tilde{y}, 0)\right] + h(t, \Phi(t, 0, \tilde{y}, 0))\,,$$

$$\mathrm{D}_1^{(4)}\,\Phi(0, 0, \tilde{y}, 0) = 0\,.$$

Odtud dostáváme

$$\mathrm{D}_1^{(4)}\,\Phi(t, 0, \tilde{y}, 0) = \int_0^t U(t)\,U^{-1}(\tau)\,h(\tau, \Phi(\tau, 0, \tilde{y}, 0))\,\mathrm{d}\tau\,, \tag{4.18}$$

tedy [viz (4.17), (4.16) a (4.18)]

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{v}}{\mathrm{d}\varepsilon}(0) = \left[I - U(T)\,U^{-1}(0)\right]^{-1} \int_0^T U(T)\,U^{-1}(\tau)\,h(\tau, \Phi(\tau, 0, \tilde{y}, 0))\,\mathrm{d}\tau\,. \tag{4.19}$$

Je $v(t, \varepsilon) = \Phi(t, 0, \tilde{v}(\varepsilon), \varepsilon)$. Derivujeme-li podle ε, dostáváme

$$\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\,v(t, 0) = \mathrm{D}^{(3)}\,\Phi(t, 0, \tilde{y}, 0)\,\frac{\mathrm{d}\tilde{v}}{\mathrm{d}\varepsilon}(0) + \mathrm{D}_1^{(4)}\,\Phi(t, 0, \tilde{y}, 0)\,.$$

Odtud, z (4.16) a (4.18) plyne

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\,v(t, 0) &= U(t)\,U^{-1}(0)\left[I - U(T)\,U^{-1}(0)\right]^{-1} \cdot \\ &\cdot \int_0^T U(T)\,U^{-1}(\tau)\,h(\tau, \Phi(\tau, 0, \tilde{y}, 0))\,\mathrm{d}\tau\, + \\ &+ \int_0^t U(t)\,U^{-1}(\tau)\,h(\tau, \Phi(\tau, 0, \tilde{y}, 0))\,\mathrm{d}\tau\,.\end{aligned} \tag{4.20}$$

[$\Phi(\tau, 0, \tilde{y}, 0)$ je určeno vzorci (4.14), (4.15)]. Platí

$$v(t, \varepsilon) = \Phi(t, 0, \tilde{y}, 0) + \varepsilon\,\frac{\partial}{\partial\varepsilon}\,v(t, 0) + z(t, \varepsilon)\,,$$

$$\varepsilon^{-1}\,z(t, \varepsilon) \to 0 \quad \text{pro } \varepsilon \to 0\,. \tag{4.21}$$

Proto

$$\Phi(t, 0, \tilde{y}, 0) + \varepsilon \frac{\partial}{\partial \varepsilon} v(t, 0),$$

kam za $\partial v(t, 0)/\partial \varepsilon$ dosadíme z (4.20), je tzv. *první přiblížení pro periodické řešení* $v(t, \varepsilon)$.

14.5. V postupu, kterého jsme užili v odst. 14.4 k vyšetřování existence periodických řešení rovnice (4.9), měla podstatnou úlohu podmínka (4.11). V tomto odstavci budeme hledat periodická řešení s periodou T rovnice

$$\dot{x} = A(t)\, x + \varepsilon f(t, x), \tag{5.1}$$

kde T je dané kladné číslo. Obdobně jako v odst. 14.4 budeme předpokládat, že platí:

Funkce $A: R \to M_n$ je spojitá, funkce $f: R \times K^n \to K^n$ je spojitá a pro každé $w \in K^n$ derivace $D_w^{(2)} f: R \times K^n \to K^n$ je spojitá. (5.2)

$$A(t + T) = A(t), \quad f(t + T, x) = f(t, x) \quad \text{pro} \quad t \in R, \quad x \in K^n. \tag{5.3}$$

Na rozdíl od odst. 14.4 budeme předpokládat, že platí:

Všechna maximální řešení rovnice (4.10) jsou periodická s periodou T. (5.4)

Snadno zjistíme, že podmínka (5.4) je splněna právě tehdy, je-li $I - U(T)\, U^{-1}(0) = 0$, kde U znamená fundamentální matici rovnice (4.10).

Opět hledáme spojitou funkci $v(t, \varepsilon)$ tak, aby $v(., \varepsilon)$ bylo periodické řešení rovnice (5.1) s periodou T. Tedy podle Věty 14.4.1 máme řešit rovnici (4.4). V případě rovnice (4.9) rovnice (4.4) pro $\varepsilon = 0$ měla právě jediné řešení [srovnej (4.13), (4.14)]. V případě rovnice (5.1) je

$$\Phi(t, 0, \tilde{x}, 0) = U(t)\, U^{-1}(0)\, \tilde{x}, \tag{5.5}$$

a tedy rovnice $\tilde{x} - \Phi(T, 0, \tilde{x}, 0) = 0$ je splněna se zřetelem na podmínku (5.4) pro všechna $\tilde{x} \in K^n$. V případě rovnice (5.1) však je (viz Poznámku 4.6.2)

$$\Phi(t, 0, \tilde{x}, \varepsilon) = U(t)\, U^{-1}(0)\, \tilde{x} + \varepsilon \int_0^t U(t)\, U^{-1}(\tau)\, f(\tau, \Phi(\tau, 0, \tilde{x}, \varepsilon))\, d\tau.$$

Je tedy [se zřetelem na (5.4)]

$$\tilde{x} - \Phi(T, 0, \tilde{x}, \varepsilon) = -\varepsilon\, U(T) \int_0^T U^{-1}(\tau)\, f(\tau, \Phi(\tau, 0, \tilde{x}, \varepsilon))\, d\tau.$$

Matice $U(T)$ je regulární. Pro $\varepsilon \neq 0$ je tedy $\tilde{x}$ řešením rovnice (4.4) právě tehdy, je-li řešením rovnice

$$\int_0^T U^{-1}(\tau)\, f(\tau, \Phi(\tau, 0, \tilde{x}, \varepsilon))\, d\tau = 0. \tag{5.6}$$

Položme

$$\Theta(\tilde{x}) = \int_0^T U^{-1}(\tau) f(\tau, U(\tau)\, U^{-1}(0)\, \tilde{x})\, d\tau\,.$$

Vzhledem k (5.5) rovnice (5.6) přechází pro $\varepsilon = 0$ v rovnici

$$\Theta(\tilde{x}) = 0\,. \tag{5.7}$$

Předpokládejme, že platí:

Rovnice (5.7) má řešení $\tilde{y}$ a matice D $\Theta(\tilde{y})$ je regulární. (5.8)

Položme ještě

$$\Omega(\tilde{x}, \varepsilon) = \int_0^T U^{-1}(\tau) f(\tau, \Phi(\tau, 0, \tilde{x}, \varepsilon))\, d\tau\,.$$

Funkce Ω je spojitá (podle Věty 14.1.1) a pro každé $w \in K^n$ existuje derivace $\mathrm{D}_w^{(1)}\, \Omega$ a je spojitá.

Z těchto skutečností plyne, že v případě rovnice (5.6) můžeme užít základní věty o implicitních funkcích (viz např. [28], Větu 210). Dostáváme tak, že platí:

Existují čísla $\delta > 0$, $\Delta > 0$ tak, že ke každému ε, $-\delta < \varepsilon < \delta$, existuje v množině $\{\tilde{x} \mid |\tilde{x}_i - \tilde{y}_i| < \Delta\}$ právě jediné řešení $\tilde{x}$ rovnice $\Omega(\tilde{x}, \varepsilon) = 0$. Píšeme-li $\tilde{x} = \tilde{v}(\varepsilon)$, pak funkce $\tilde{v}$ má spojitou derivaci $d\tilde{v}/d\varepsilon$. (5.9)

Podle Věty 14.4.1 funkce $\Phi(t, 0, \tilde{v}(\varepsilon), \varepsilon) = v(t, \varepsilon)$ je periodické řešení rovnice (5.1). Dosažené výsledky shrneme. Platí

14.5.1. Věta: *Nechť platí* (5.2), (5.3), (5.4) *a* (5.8). *Potom existují čísla* $\delta > 0$, $\Delta > 0$ *tak, že pro každé* ε, $-\delta < \varepsilon < \delta$, *existuje periodické řešení* $v(., \varepsilon)$ *s periodou* T *rovnice* (5.1), $|v_i(0, \varepsilon) - \tilde{y}_i| < \Delta$ *pro* $i = 1, 2, \ldots, n$. *Řešení* $v(., \varepsilon)$ *je těmito podmínkami určeno jednoznačně.*

Příklad: Vyšetřujme soustavu

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2\,, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \varepsilon(\sin t + x_2 + x_1^2) \end{aligned} \tag{5.10}$$

v případě $T = 2\pi$. Podmínky (5.2), (5.3), (5.4) jsou zřejmě splněny. Dále je

$$U(t) = \begin{pmatrix} \cos t, & \sin t \\ -\sin t, & \cos t \end{pmatrix},$$

$$U^{-1}(\tau) = \begin{pmatrix} \cos \tau, & -\sin \tau \\ \sin \tau, & \cos \tau \end{pmatrix},$$

$$\Theta(\tilde{x}) = \int_0^{2\pi} \begin{pmatrix} \cos \tau, & -\sin \tau \\ \sin \tau, & \cos \tau \end{pmatrix} .$$

$$. \begin{pmatrix} 0 \\ \sin \tau - \tilde{x}_1 \sin \tau + \tilde{x}_2 \cos \tau + (\tilde{x}_1 \cos \tau + \tilde{x}_2 \sin \tau)^2 \end{pmatrix} d\tau = \pi \begin{pmatrix} -1 + \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix}.$$

Je tedy

$$\tilde{y}_1 = 1\,, \quad \tilde{y}_2 = 0\,, \quad \mathrm{D}\,\Theta(\tilde{y}) = \begin{pmatrix} 1, & 0 \\ 0, & 1 \end{pmatrix},$$

(5.8) je splněno, a tedy lze užít Věty 14.5.1.

14.5.2. Poznámka: Obdobně jako v Poznámce 14.4.4 můžeme určit

$$\frac{\mathrm{d}\tilde{v}}{\mathrm{d}\varepsilon}(0)\,, \quad \frac{\partial}{\partial\varepsilon} v(t, 0)$$

a najít tzv. první přiblížení pro periodické řešení $v(t, \varepsilon)$.

14.6. Vyšetříme rovnici (4.9) pro případ, který tvoří mezistupeň mezi případy vyšetřenými v odst. 14.4 a 14.5. Postupovat budeme již stručně. Nechť platí (4.7) a (4.8). Předpokládejme, že matice $A(t)$ má tvar

$$A(t) = \begin{pmatrix} A_\alpha(t), & 0 \\ 0, & A_\beta(t) \end{pmatrix} \quad \text{pro} \quad t \in R\,,$$

kde $A_\alpha(t) \in M_k$, $A_\beta(t) \in M_{n-k}$ a k je přirozené číslo, $1 \leqq k \leqq n - 1$. Rovnice

$$\dot{x} = A(t)\,x \tag{6.1}$$

se rozpadá na nezávislé rovnice

$$\dot{x}_\alpha = A_\alpha(t)\,x_\alpha\,, \tag{6.2}$$

$$\dot{x}_\beta = A_\beta(t)\,x_\beta\,. \tag{6.3}$$

Nechť jsou splněny tyto podmínky:

Všechna řešení rovnice (6.2) jsou periodická s periodou T. (6.4)

Rovnice (6.3) nemá netriviální periodické řešení s periodou T. (6.5)

Nechť U_α je fundamentální matice rovnice (6.2) a nechť U_β je fundamentální matice rovnice (6.3). Podmínka (6.4) je splněna právě tehdy, je-li $U_\alpha(T)\,U_\alpha^{-1}(0) = I_k$ [I_k je jednotková matice řádu k], a podmínka (6.5) je splněna právě tehdy, je-li matice $I_{n-k} - U_\beta(T)\,U_\beta^{-1}(0)$ regulární. Rovnici (4.9) zapíšeme jako soustavu

$$\begin{aligned} \dot{x}_\alpha &= A_\alpha(t)\,x_\alpha + g_\alpha(t) + \varepsilon f_\alpha(t, x)\,, \\ \dot{x}_\beta &= A_\beta(t)\,x_\beta + g_\beta(t) + \varepsilon f_\beta(t, x)\,, \end{aligned} \tag{6.6}$$

kde první z rovnic zahrnuje prvních k řádků rovnice (4.9) a druhá představuje posledních $n - k$ řádků rovnice (4.9). Nechť je

$$g_\alpha(t) = 0 \quad \text{pro} \quad t \in R\,. \tag{6.7}$$

Budeme opět vyšetřovat rovnici

$$\tilde{x} - \Phi(T, 0, \tilde{x}, \varepsilon) = 0\,. \tag{6.8}$$

Rovnici (6.8) zapíšeme jako soustavu

$$\begin{aligned} \tilde{x}_\alpha - \Phi_\alpha(T, 0, \tilde{x}_\alpha, \tilde{x}_\beta, \varepsilon) &= 0\,, \\ \tilde{x}_\beta - \Phi_\beta(T, 0, \tilde{x}_\alpha, \tilde{x}_\beta, \varepsilon) &= 0\,, \end{aligned} \tag{6.9}$$

kde opět první z rovnic zahrnuje prvních k řádků rovnice (6.9) a druhá představuje posledních $n - k$ řádků rovnice (6.9). Z první z rovnic (6.6) plyne, že platí [viz Poznámku 4.6.2 a (6.7)]

$$\Phi_\alpha(t, 0, \tilde{x}_\alpha, \tilde{x}_\beta, \varepsilon) = U_\alpha(t)\, U_\alpha^{-1}(0)\, \tilde{x}_\alpha + \varepsilon \int_0^t U_\alpha(t)\, U_\alpha^{-1}(\tau)\, f_\alpha(\tau, \Phi(\tau, 0, \tilde{x}, \varepsilon))\, \mathrm{d}\tau\,.$$

Vzhledem k podmínce (6.4) je

$$\tilde{x}_\alpha - \Phi_\alpha(T, 0, \tilde{x}_\alpha, \tilde{x}_\beta, \varepsilon) = -\varepsilon\, U_\alpha(T) \int_0^T U_\alpha^{-1}(\tau)\, f_\alpha(\tau, \Phi(\tau, 0, \tilde{x}, \varepsilon))\, \mathrm{d}\tau\,.$$

Je-li $\varepsilon \neq 0$, je první z rovnic (6.9) splněna právě tehdy, je-li

$$\int_0^T U_\alpha^{-1}(\tau)\, f_\alpha(\tau, \Phi(\tau, 0, \tilde{x}, \varepsilon))\, \mathrm{d}\tau = 0\,.$$

Místo soustavy (6.9) budeme vyšetřovat soustavu

$$\begin{aligned} \int_0^T U_\alpha^{-1}(\tau)\, f_\alpha(\tau, \Phi(\tau, 0, \tilde{x}, \varepsilon))\, \mathrm{d}\tau &= 0\,, \\ \tilde{x}_\beta - \Phi_\beta(T, 0, \tilde{x}_\alpha, \tilde{x}_\beta, \varepsilon) &= 0\,. \end{aligned} \tag{6.10}$$

Je

$$\Phi_\beta(t, 0, \tilde{x}_\alpha, \tilde{x}_\beta, 0) = U_\beta(t)\, U_\beta^{-1}(0)\, \tilde{x}_\beta + \int_0^t U_\beta(t)\, U_\beta^{-1}(\tau)\, g_\beta(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,. \tag{6.11}$$

Položme

$$\tilde{y}_\beta = [I_{n-k} - U_\beta(T)\, U_\beta^{-1}(0)]^{-1} \int_0^T U_\beta(T)\, U_\beta^{-1}(\tau)\, g_\beta(\tau)\, \mathrm{d}\tau\,.$$

Rovnice $\tilde{x}_\beta - \Phi_\beta(T, 0, \tilde{x}_\alpha, \tilde{x}_\beta, 0) = 0$ je zřejmě splněna právě tehdy, je-li $\tilde{x}_\beta = \tilde{y}_\beta$. Je také

$$\Phi_\alpha(t, 0, \tilde{x}_\alpha, \tilde{x}_\beta, 0) = U_\alpha(t)\, U_\alpha^{-1}(0)\, \tilde{x}_\alpha\,. \tag{6.12}$$

Položme

$$\Theta(\tilde{x}_\alpha, \tilde{x}_\beta) = \int_0^T U_\alpha^{-1}(\tau)\, f_\alpha(\tau, \Phi(\tau, 0, \tilde{x}, 0))\, \mathrm{d}\tau\,;$$

přitom na pravé straně za $\Phi(\tau, 0, \tilde{x}, 0)$ dosadíme z rovnic (6.12), (6.11).

Nechť je ještě splněna tato podmínka:

Rovnice $\Theta(\tilde{x}_\alpha, \tilde{y}_\beta) = 0$ má řešení $\tilde{x}_\alpha = \tilde{y}_\alpha$ a matice $\mathrm{D}^{(1)}\, \Theta(\tilde{y}_\alpha, \tilde{y}_\beta)$ je regulární. (6.13)

Soustava (6.10) má pro $\varepsilon = 0$ tvar

$$\Theta(\tilde{x}_\alpha, \tilde{x}_\beta) = 0\,,$$

$$\tilde{x}_\beta - U_\beta(T)\,U_\beta^{-1}(0)\,\tilde{x}_\beta - \int_0^T U_\beta(T)\,U_\beta^{-1}(\tau)\,g_\beta(\tau)\,\mathrm{d}\tau = 0\,. \tag{6.14}$$

Soustava (6.14) má řešení $(\tilde{y}_\alpha, \tilde{y}_\beta)$ a matice

$$\begin{pmatrix} \mathrm{D}^{(1)}\,\Theta(\tilde{y}_\alpha, \tilde{y}_\beta), & \mathrm{D}^{(2)}\,\Theta(\tilde{y}_\alpha, \tilde{y}_\beta) \\ 0, & I_{n-k} - U_\beta(T)\,U_\beta^{-1}(0) \end{pmatrix}$$

je regulární. Proto lze v případě soustavy (6.10) užít hlavní věty o implicitních funkcích. Tak odvodíme, že platí

14.6.1. Věta: *Nechť platí* (4.7), (4.8), (6.4), (6.5), (6.7), (6.13). *Potom existují čísla* $\delta > 0$, $\Delta > 0$ *tak, že pro každé* ε, $-\delta < \varepsilon < \delta$, *existuje periodické řešení* $v(.,\varepsilon)$ *rovnice* (4.9), $|v_i(0,\varepsilon) - y_i| < \Delta$. *Řešení* $v(.,\varepsilon)$ *je těmito podmínkami určeno jednoznačně.*

14.7. Budeme se nyní zabývat autonomní rovnicí

$$\dot{x} = g(x, \varepsilon)\,. \tag{7.1}$$

Budeme předpokládat, že:

Množina $H \subset K^n$ je otevřená. (7.2)

Funkce $g\colon H \times K \to K^n$ je spojitá a pro každé $w \in K^n$ existuje derivace $\mathrm{D}_w^{(1)}\,g\colon H \times K \to K^n$ a je spojitá. (7.3)

Obdobně jako v odst. 14.4 budeme hledat periodické řešení u rovnice $\dot{x} = g(x, 0)$, které by bylo možné spojitě měnit tak, abychom dostali periodické řešení rovnice (7.1) pro $\varepsilon \neq 0$. Přesněji, budeme hledat spojitou funkci $v = v(t, \varepsilon)$ tak, aby pro všechna ε dostatečně malá (tedy i pro $\varepsilon = 0$) funkce $v(.,\varepsilon)$ byla periodickým řešením rovnice (7.1). Přirozeně pro rovnici (7.1) platí Věty 14.4.1 a 14.4.2. Podle Věty 14.4.1 maximální řešení $u\colon (\alpha, \beta) \to H$ rovnice (7.1) splňující podmínku $u(t_0) = \tilde{x}$ je periodické s periodou T právě tehdy, jestliže platí $\tilde{x} - \Phi(T + t_0, t_0, \tilde{x}, \varepsilon) = 0$, kde funkce Φ se vztahuje k rovnici (7.1). Protože rovnice (7.1) je autonomní, je

$$\Phi(t_0 + T, t_0, \tilde{x}, \varepsilon) = \Psi(T, \tilde{x}, \varepsilon)\,.$$

Funkce Ψ souvisí s funkcí Φ rovnicí

$$\Psi(t, \tilde{x}, \varepsilon) = \Phi(t, 0, \tilde{x}, \varepsilon)\,. \tag{7.4}$$

Je tedy maximální řešení $u\colon (\alpha, \beta) \to H$ rovnice (7.1), které splňuje počáteční podmínku $u(t_0) = \tilde{x}$, periodické s periodou T právě tehdy, je-li

$$\tilde{x} - \Psi(T, \tilde{x}, \varepsilon) = 0\,. \tag{7.5}$$

Vzhledem k (7.4) funkce Ψ je spojitá podle Věty 14.1.1 a má spojité derivace prvního řádu (viz Větu 14.2.1). Všimněme si ještě, že rovnice (7.1) je jednoznačná podle Věty 11.1.6.

Nechť $\tilde{y} \in H$ splňuje rovnici

$$\tilde{y} - \Psi(T, \tilde{y}, 0) = 0 \,. \tag{7.6}$$

Budeme rozlišovat dva případy:

$$g(\tilde{y}, 0) = 0 \,, \tag{7.7}$$

$$g(\tilde{y}, 0) \neq 0 \,. \tag{7.8}$$

Nechť platí (7.7). Protože rovnice (7.1) je jednoznačná, je funkce $u(t) = \tilde{y}$ pro $t \in R$ jediné maximální řešení rovnice (7.1) splňující podmínku $u(0) = \tilde{y}$ a je

$$\tilde{y} - \Psi(t, \tilde{y}, 0) = 0 \quad \text{pro} \quad t \in R \,.$$

Nechť ještě platí:

$$\text{Matice } \mathrm{D}^{(1)}\, g(\tilde{y}, 0) \text{ je regulární.} \tag{7.9}$$

Na rovnici $g(\tilde{x}, \varepsilon) = 0$ můžeme užít základní věty o implicitních funkcích. Odtud plyne, že platí

14.7.1. Věta: *Nechť platí* (7.2), (7.3), (7.7), (7.9). *Potom existují čísla* $\delta > 0$, $\Delta > 0$ *taková, že pro každé* ε, $-\delta < \varepsilon < \delta$, *existuje řešení rovnice* $g(\tilde{x}, \varepsilon) = 0$, $|x_i - y_i| < \Delta$ *pro* $i = 1, 2, \ldots, n$. *Těmito podmínkami je řešení* $\tilde{x}$ *určeno jednoznačně. Píšeme-li* $\tilde{x} = \tilde{v}(\varepsilon)$, *pak funkce* $\tilde{v}$ *má spojitou derivaci* $\mathrm{d}\tilde{v}/\mathrm{d}\varepsilon$. *Funkce* v *definovaná rovnicí* $v(t, \varepsilon) = \Psi(t, \tilde{v}(\varepsilon), \varepsilon)$ *je spojitá v proměnných* t, ε *a funkce* $v(., \varepsilon)$ *je konstantní řešení rovnice* (7.1).

14.7.2. Poznámka: Nechť jsou splněny předpoklady Věty 14.7.1. Nechť T je kladné číslo. Položme $A = \mathrm{D}^{(1)}\, g(\tilde{y}, 0)$. Je $\mathrm{D}^{(3)}\, \Phi(T, 0, \tilde{y}, 0) = \mathrm{D}^{(2)}\, \Psi(T, \tilde{y}, 0) = \mathrm{e}^{AT}$.

Nechť je matice $I - \mathrm{e}^{AT}$ regulární. Potom lze užít Věty 14.4.2. Podle této věty existuje v blízkosti řešení $\Psi(t, \tilde{y}, 0)$ právě jedno periodické řešení rovnice (7.1) s periodou T pro dosti malá ε; podle Věty 14.7.1 existuje v blízkosti řešení $\Psi(t, \tilde{y}, 0)$ konstantní řešení rovnice (7.1) pro dosti malá ε. Protože konstantní řešení je periodické s periodou T, plyne odtud, že pro dosti malá ε v blízkosti řešení $\Psi(t, \tilde{y}, 0)$ neexistuje nekonstantní periodické řešení s periodou T.

Nechť platí všechny předpoklady kromě (7.9), tj. nechť matice A je singulární. Potom existuje $w \in K^n$, $w \neq 0$, tak, že $Aw = 0$. Je $\mathrm{e}^{AT}w = w$, tedy matice $I - \mathrm{e}^{AT}$ je singulární a Věty 14.4.2 užít nelze.

Obraťme se k případu, kdy platí (7.8) [a ovšem také (7.6)]. Funkce $u(t) = \Psi(t, \tilde{y}, 0)$ je nekonstantní periodické řešení rovnice $\dot{x} = g(x, 0)$ s periodou T. Dokážeme, že je

$$u(t) - \Psi(T, u(t), 0) = 0 \quad \text{pro} \quad t \in R \,. \tag{7.10}$$

Je totiž (viz Větu 12.3.6)

$$\begin{aligned}\Psi(T, u(t), 0) &= \Psi(T, \Psi(t, \tilde{y}, 0), 0) = \Psi(T + t, \tilde{y}, 0) = \\ &= \Psi(t, \Psi(T, \tilde{y}, 0), 0) = \Psi(t, \tilde{y}, 0) = u(t)\end{aligned}$$

a rovnice (7.10) platí. Derivujeme-li rovnici (7.10) podle t v bodě $t = 0$, dostáváme $\dot{u}(0) - D^{(2)}\,\Psi(T, u(0), 0)\,\dot{u}(0) = 0$, tj. $[I - D^{(2)}\,\Psi(T, \tilde{y}, 0)]\,g(\tilde{y}, 0) = 0$ a vzhledem k (7.8) matice $I - D^{(2)}\,\Psi(T, \tilde{y}, 0)$ je singulární. Proto nelze užít Věty 14.4.2.

Věta 14.4.2 zaručuje existenci periodických řešení o předem dané periodě T. Tento přístup je nevhodný pro rovnici (7.1), neboť můžeme očekávat, že i perioda hledaných periodických řešení se bude měnit v závislosti na ε. Úlohu, kterou jsme vyslovili na začátku tohoto odstavce, přeformulujeme takto: Hledáme spojité funkce $v = v(t, \varepsilon)$, $\nu = \nu(\varepsilon)$ tak, aby funkce $v(., \varepsilon)$ byla periodickým řešením rovnice (7.1) s periodou $T + \nu(\varepsilon)$, $\nu(0) = 0$.

Podle Věty 14.4.1 máme hledat řešení $(\nu, \tilde{x})$ rovnice

$$\tilde{x} - \Psi(T + \nu, \tilde{x}, \varepsilon) = 0\,. \tag{7.11}$$

Touto úlohou se budeme zabývat v případě soustavy

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= \quad x_2 + \varepsilon\,h_1(x_1, x_2)\,,\\ \dot{x}_2 &= -x_1 + \varepsilon\,h_2(x_1, x_2)\,,\end{aligned} \tag{7.12}$$

kterou budeme též zapisovat ve vektorovém tvaru

$$\dot{x} = Ax + \varepsilon\,h(x)\,, \tag{7.13}$$

kde

$$A = \begin{pmatrix} 0, & 1 \\ -1, & 0 \end{pmatrix}.$$

Budeme předpokládat, že:

Funkce $h: R^2 \to R^2$ je spojitá a pro každé $w \in R^2$ existuje derivace $D_w\,h: R^2 \to R^2$ a je spojitá. (7.14)

Podle (7.13) a Poznámky 4.6.2 funkce Ψ splňuje rovnici

$$\Psi(t, \tilde{x}, \varepsilon) = e^{At}\tilde{x} + \varepsilon \int_0^t e^{A(t-\tau)}\,h(\Psi(\tau, \tilde{x}, \varepsilon))\,d\tau\,. \tag{7.15}$$

Je

$$e^{At} = \begin{pmatrix} \cos t, & \sin t \\ -\sin t, & \cos t \end{pmatrix}, \quad \Psi(t, \tilde{x}, 0) = e^{At}\tilde{x}\,,$$

a proto položíme $T = 2\pi$.

Rovnici (7.11) upravíme užitím (7.15) a rovnice $e^{A(2\pi+\nu)} = e^{A\nu}$. Dostaneme

$$(I - e^{A\nu})\,\tilde{x} - \varepsilon \int_0^{2\pi+\nu} e^{-A\tau}\,h(\Psi(\tau, \tilde{x}, \varepsilon))\,d\tau = 0\,. \tag{7.16}$$

Je

$$I - e^{A\nu} = -\int_0^{\nu} A\, e^{A\sigma}\, d\sigma .$$

Má-li rovnice (7.16) řešení $\nu = \nu(\varepsilon)$, $\tilde{x} = \tilde{x}(\varepsilon)$ taková, že $\lim_{\varepsilon\to 0} \nu(\varepsilon) = 0$, $\lim_{\varepsilon\to 0} \tilde{x}(\varepsilon) = \tilde{y} \neq 0$, pak z rovnice (7.16) plyne, že existuje $\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-1} \nu(\varepsilon)$. Proto budeme funkci $\nu(\varepsilon)$ hledat ve tvaru $\varepsilon\, \mu(\varepsilon)$, tj. v (7.16) položíme $\nu = \varepsilon\mu$. Položme

$$\Lambda(\mu, \tilde{x}, \varepsilon) = \int_0^{\mu} A\, e^{A\varepsilon\sigma}\, d\sigma\, \tilde{x} + \int_0^{2\pi + \varepsilon\mu} e^{A\varepsilon\mu}\, e^{-A\tau}\, h(\Psi(\tau, \tilde{x}, \varepsilon))\, d\tau ,$$

$$\Lambda = \operatorname{col}(\Lambda_1, \Lambda_2) .$$

Rovnici (7.16) vydělme číslem $-\varepsilon$ a užijme vztahu

$$\varepsilon^{-1}(e^{A\mu\varepsilon} - I) = \int_0^{\mu} A\, e^{A\varepsilon\sigma}\, d\sigma .$$

Rovnice (7.16) tak přejde v rovnici

$$\Lambda(\mu, \tilde{x}, \varepsilon) = 0 . \tag{7.17}$$

Budeme hledat taková periodická řešení $u(t) = \Psi(t, \tilde{x}, \varepsilon)$ rovnice (7.13), $u = \operatorname{col}(u_1, u_2)$, pro něž je $u_2(0) = 0$. Položíme tedy $\tilde{x} = \operatorname{col}(\tilde{x}_1, 0)$, kde $\tilde{x}_1 \in R$.

Abychom na rovnici (7.17) mohli užít základní věty o implicitních funkcích, musí být splněny tyto podmínky:

Existují $\eta \in R$, $\tilde{y} = \operatorname{col}(\tilde{y}_1, 0)$ tak, že je $\Lambda(\eta, \tilde{y}, 0) = 0$. (7.18)

Matice $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial \Lambda_1}{\partial \mu}, & \dfrac{\partial \Lambda_1}{\partial \tilde{x}_1} \\ \dfrac{\partial \Lambda_2}{\partial \mu}, & \dfrac{\partial \Lambda_2}{\partial \tilde{x}_1} \end{pmatrix}$ v bodě $(\eta, \tilde{y}, 0)$ je regulární. (7.19)

Položme

$$\lambda(\tilde{x}_1) = \int_0^{2\pi} [\cos\tau\, h_1(\tilde{x}_1 \cos\tau, -\tilde{x}_1 \sin\tau) - \sin\tau\, h_2(\tilde{x}_1 \cos\tau, -\tilde{x}_1 \sin\tau)]\, d\tau .$$

Je

$$\begin{aligned} \Lambda_1(\mu, \tilde{x}, 0) &= \lambda(\tilde{x}_1) , \\ \Lambda_2(\mu, \tilde{x}, 0) &= -\mu\tilde{x}_1 + \int_0^{2\pi} (\sin\tau\, h_1(\tilde{x}_1 \cos\tau, -\tilde{x}_1 \sin\tau) + \\ &\quad + \cos\tau\, h_2(\tilde{x}_1 \cos\tau, -\tilde{x}_1 \sin\tau))\, d\tau . \end{aligned} \tag{7.20}$$

Z (7.20) plyne, že podmínky (7.18), (7.19) jsou splněny právě tehdy, jestliže platí:

Existuje $\tilde{y}_1 \in R$ takové, že je $\lambda(\tilde{y}_1) = 0$,

$$\frac{d\lambda}{d\tilde{x}_1}(\tilde{y}_1) \neq 0\,, \quad \tilde{y}_1 \neq 0\,. \tag{7.21}$$

Užitím základní věty o implicitních funkcích na rovnici (7.17) dojdeme k této větě:

14.7.3. Věta: *Nechť platí* (7.14), (7.21). *Potom existuje číslo* $\delta > 0$ *takové, že pro* ε, $-\delta < \varepsilon < \delta$, *existuje řešení* $\mu = \xi(\varepsilon)$, $\tilde{x} = \tilde{v}(\varepsilon) = \operatorname{col}(\tilde{v}_1(\varepsilon), 0)$ *rovnice* (7.17); *přitom funkce* ξ, $\tilde{v}$ *mají spojité derivace* $d\xi/d\varepsilon$, $d\tilde{v}/d\varepsilon$.

Dvojice $v = \varepsilon\,\xi(\varepsilon)$, $\tilde{x} = \tilde{v}(\varepsilon)$ *splňuje rovnici* (7.16), *funkce* $v = v(t, \varepsilon) = \Psi(t, \tilde{v}(\varepsilon), \varepsilon)$ *je spojitá a* $v(., \varepsilon)$ *je periodické řešení rovnice* (7.13) *s periodou* $2\pi + \varepsilon\,\xi(\varepsilon)$.

14.7.4. Poznámka: Je-li $h_1(x_1, x_2) = x_1 - x_1^3$, $h_2(x_1, x_2) = 0$, je

$$\lambda(\tilde{x}_1) = \tilde{x}_1 \int_0^{2\pi} \cos^2 \tau \, d\tau - \tilde{x}_1^3 \int_0^{2\pi} \cos^4 \tau \, d\tau = \tilde{x}_1 \pi - \tilde{x}_1^3 \tfrac{3}{4}\pi\,.$$

Podmínka (7.21) je splněna pro $\tilde{y}_1 = \pm\, 2(\sqrt{3})/3$.