11. Jednoznačnost

11.1.

11.1.1. Definice: Budeme říkat, že *řešení rovnice* (10.1.1) *jsou jednoznačně určena počáteční podmínkou*, nebo kratčeji, že *rovnice* (10.1.1) je *jednoznačná*, je-li splněna tato podmínka:

Jsou-li $u^{[i]}: \mathscr{J}_i \to K^n$ řešení rovnice (10.1.1), $i = 1, 2$, a existuje-li $s \in \mathscr{J}_1 \cap \mathscr{J}_2$ takové, že $u^{[1]}(s) = u^{[2]}(s)$, pak $u^{[1]}(t) = u^{[2]}(t)$ pro $t \in \mathscr{J}_1 \cap \mathscr{J}_2$.

Rovnice (2.11.1) je příklad diferenciální rovnice se spojitou pravou stranou, která není jednoznačná.

Budeme se převážně zabývat jednoznačnými diferenciálními rovnicemi pro jejich význam jak pro teorii, tak pro aplikace. V této kapitole odvodíme postačující podmínky pro jednoznačnost.

11.1.2. Definice: Nechť $G \subset R \times K^n$, $f: G \to K^n$. *Rovnice* (10.1.1) se nazývá *jednoznačná v bodě* $(t_0, x^{[0]}) \in G$, je-li splněna tato podmínka:

Jsou-li $u^{[i]}: \mathscr{J}_i \to K^n$ řešení rovnice (10.1.1), $i = 1, 2$, taková, že je $u^{[1]}(t_0) = x^{[0]} = u^{[2]}(t_0)$, potom existuje číslo $\delta > 0$ takové, že je

$$u^{[1]}(t) = u^{[2]}(t) \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{J}_1 \cap \mathscr{J}_2 \cap \langle t_0 - \delta, t_0 + \delta \rangle .$$

11.1.3. Věta: *Nechť rovnice* (10.1.1) *je jednoznačná v každém bodě* $(t_0, x^{[0]})$. *Potom rovnice* (10.1.1) *je jednoznačná.*

Důkaz: Není-li rovnice (10.1.1) jednoznačná, pak existují řešení $u^{[i]}: \mathscr{J}_i \to K^n$, $i = 1, 2$, a čísla $s_1, s_2 \in \mathscr{J}_1 \cap \mathscr{J}_2$ tak, že $u^{[1]}(s_1) = u^{[2]}(s_1)$, $u^{[1]}(s_2) \neq u^{[2]}(s_2)$. Nechť je pro určitost $s_1 < s_2$. Je $\langle s_1, s_2 \rangle \subset \mathscr{J}_1 \cap \mathscr{J}_2$. Položme

$$s_3 = \inf \{ t \in \langle s_1, s_2 \rangle \mid u^{[1]}(t) \neq u^{[2]}(t) \} . \tag{1.1}$$

Ukážeme, že platí

$$u^{[1]}(s_3) = u^{[2]}(s_3) . \tag{1.2}$$

To je zřejmé, je-li $s_3 = s_1$; je-li $s_3 > s_1$, je $u^{[1]}(t) = u^{[2]}(t)$ pro $s_1 \leqq t < s_3$ a (1.2) plyne ze spojitosti funkcí $u^{[1]}$, $u^{[2]}$. Protože rovnice (10.1.1) je jednoznačná v bodě $(s_3, u^{[1]}(s_3))$, existuje $\delta > 0$ takové, že je $u^{[1]}(t) = u^{[2]}(t)$ pro $s_1 \leqq t \leqq \min(s_3 + \delta, s_2)$

a to není možné vzhledem k (1.1). Proto rovnice (10.1.1) je jednoznačná a Věta 11.1.3 je dokázána.

11.1.4. Definice: Nechť množina $G \subset R \times K^n$ je otevřená, $f\colon G \to K^n$. *Funkce f se nazývá lokálně lipschitzovská vzhledem k druhé proměnné,* je-li splněna tato podmínka:

Ke každému bodu $(t_0, x^{[0]}) \in G$ existují čísla $\delta_1, \delta_2, L > 0$ tak, že platí

$$Q(t_0, x^{[0]}, \delta_1, \delta_2) \subset G\,,$$

$$\|f(t, x^{[1]}) - f(t, x^{[2]})\| \leqq L\|x^{[1]} - x^{[2]}\|\,, \tag{1.3}$$

jakmile $(t, x^{[i]}) \in Q(t_0, x^{[0]}, \delta_1, \delta_2)$, $i = 1, 2$.

11.1.5. Věta: *Nechť funkce f je lokálně lipschitzovská vzhledem k druhé proměnné. Potom rovnice* (10.1.1) *je jednoznačná.*

Důkaz: Vzhledem k Větě 11.1.3 postačí, když dokážeme, že rovnice (10.1.1) je jednoznačná v každém bodě $(t_0, x^{[0]}) \in G$.

Nechť je $(t_0, x^{[0]}) \in G$ a nechť $u^{[i]}\colon \mathscr{J}_i \to K^n$, $i = 1, 2$, jsou řešení rovnice (10.1.1), $u^{[1]}(t_0) = x^{[0]} = u^{[2]}(t_0)$. Je-li $\mathscr{J}_1 \cap \mathscr{J}_2 = \{t_0\}$, není co dokazovat. Nechť tedy $\mathscr{J}_1 \cap \mathscr{J}_2 = \mathscr{J}_3$ je nedegenerovaný interval. K bodu $(t_0, x^{[0]})$ najdeme čísla $\delta_1, \delta_2, L > 0$ podle Definice 11.1.4. Protože funkce $u^{[1]}, u^{[2]}$ jsou spojité, existuje takové číslo δ, $0 < \delta \leqq \delta_1$, že je $\|u^{[i]}(t) - x^{[0]}\| \leqq \delta_2$ pro $t \in \mathscr{J}_3 \cap \langle t_0 - \delta, t_0 + \delta\rangle = \mathscr{J}_4$, $i = 1, 2$. Je

$$u^{[i]}(t) = x^{[0]} + \int_{t_0}^{t} f(\tau, u^{[i]}(\tau))\,\mathrm{d}\tau \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{J}_4\,, \quad i = 1, 2\,,$$

tedy [viz (1.3)]

$$\|u^{[2]}(t) - u^{[1]}(t)\| \leqq \left|\int_{t_0}^{t} \|f(\tau, u^{[2]}(\tau)) - f(\tau, u^{[1]}(\tau))\|\,\mathrm{d}\tau\right| \leqq$$

$$\leqq L\left|\int_{t_0}^{t} \|u^{[2]}(\tau) - u^{[1]}(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau\right| \leqq \eta + L\left|\int_{t_0}^{t} \|u^{[2]}(\tau) - u^{[1]}(\tau)\|\,\mathrm{d}\tau\right|,$$

kde η je libovolné kladné číslo. Užijeme-li Gronwallovy nerovnosti [Pomocná věta 4.3.1, klademe $\mathscr{K} = \mathscr{J}_4$, $\xi(t) = \|u^{[2]}(t) - u^{[1]}(t)\|$], dostáváme, že platí

$$\|u^{[2]}(t) - u^{[1]}(t)\| \leqq \eta\, \mathrm{e}^{L|t - t_0|} \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{J}_4\,,$$

a to pro každé $\eta > 0$. Je tedy $u^{[2]}(t) = u^{[1]}(t)$ pro $t \in \mathscr{J}_4$. Tím je dokázáno, že rovnice (10.1.1) je jednoznačná v bodě $(t_0, x^{[0]})$, tj. v každém bodě $(t_0, x^{[0]}) \in G$. Podle Věty 11.1.3 rovnice (10.1.1) je jednoznačná. Důkaz je dokončen.

11.1.6. Věta: *Nechť jsou splněny tyto podmínky: $G \subset R \times K^n$ je otevřená množina, v každém bodě $(t, x) \in G$ existuje $\mathrm{D}^{(2)} f(t, x)$ (viz Dodatek 11.2) a závisí spojitě na (t, x). Potom rovnice* (10.1.1) *je jednoznačná.*

Důkaz: Nechť je $(t_0, x^{[0]}) \in G$. Zvolme čísla $\delta_1, \delta_2 > 0$ tak, aby bylo $Q(t_0, x^{[0]}, \delta_1, \delta_2) \subset G$. Protože $Q(t_0, x^{[0]}, \delta_1, \delta_2)$ je kompaktní množina, existuje L tak, že je $\|D^{[2]} f(t, x)\| \leqq L$ pro $(t, x) \in Q(t_0, x^{[0]}, \delta_1, \delta_2)$ a podle (D11.1.3) je $\|f(t, y^{[2]}) - f(t, y^{[1]})\| \leqq L\|y^{[2]} - y^{[1]}\|$ pro $(t, y^{[1]})$, $(t, y^{[2]}) \in Q(t_0, x^{[0]}, \delta_1, \delta_2)$. Tedy funkce f je lokálně lipschitzovská vzhledem k druhé proměnné a Věta 11.1.6 plyne z Věty 11.1.5.

11.1.7. Poznámka: Je-li G otevřená množina a existují-li parciální derivace

$$\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(t, x)$$

v každém bodě $(t, x) \in G$ a jsou-li spojité, pak $D^{[2]} f(t, x)$ existuje v každém bodě $(t, x) \in G$, závisí spojitě na (t, x) a rovnice (10.1.1) je jednoznačná podle Věty 11.1.6.

11.2. Věta 11.1.5 udává postačující podmínku pro jednoznačnost rovnice (10.1.1); podle výsledků odst. 2.8 [viz (2.8.6)] tato podmínka není nutná. Zde vyložíme obecnou metodu, která umožňuje odvodit jiné postačující podmínky pro jednoznačnost a později odhadnout růst řešení.

11.2.1. Věta: *Nechť množina $H \subset R^2$ je otevřená a funkce $\chi: H \to R$ spojitá. Nechť $\mathscr{J}$ je interval a nechť funkce $\xi, \eta, \mu: \mathscr{J} \to R$ jsou spojité, $(t, \xi(t))$, $(t, \eta(t)) \in H$ pro $t \in \mathscr{J}$. Nechť ξ splňuje diferenciální rovnici*

$$\dot{\xi} = \chi(t, \xi) \tag{2.1}$$

a nechť je

$$\mu(t) < \chi(t, \eta(t)) \quad pro \quad t \in \mathscr{J}, \tag{2.2}$$

$$\eta(t_2) - \eta(t_1) \leqq \int_{t_1}^{t_2} \mu(t)\,\mathrm{d}t \quad pro \quad t_1, t_2 \in \mathscr{J}, \quad t_1 \leqq t_2. \tag{2.3}$$

Pak platí:

(i) *Je-li $\eta(s) < \xi(s)$ v nějakém bodě $s \in \mathscr{J}$, potom je $\eta(t) < \xi(t)$ pro $t \in \mathscr{J}$, $t > s$.*

(ii) *Je-li $\eta(s) > \xi(s)$ v nějakém bodě $s \in \mathscr{J}$, potom je $\eta(t) > \xi(t)$ pro $t \in \mathscr{J}$, $t < s$.*

11.2.2. Poznámka: Má-li ve Větě 11.2.1 funkce η derivaci $\dot{\eta}$ a je-li $\dot{\eta} = \mu$, pak platí (2.3) a podle (2.2) funkce roste v každém bodě pomaleji než řešení rovnice (2.1) procházející tímto bodem, a proto nepřekvapí, že platí tvrzení (i) a (ii).

Důkaz Věty 11.2.1: Dokážeme tvrzení (i). Nechť existuje takové $t \in \mathscr{J}$, že je $\eta(t) \geqq \xi(t)$. Položme $t^* = \inf\{t \in \mathscr{J} \mid t \geqq s, \eta(t) \geqq \xi(t)\}$. Je $t^* > s$, $\eta(t^*) = \xi(t^*)$,

$$\eta(t) < \xi(t), \quad s \leqq t < t^*. \tag{2.4}$$

Zvolme číslo ε, $0 < \varepsilon < [\chi(t^*, \eta(t^*)) - \mu(t^*)]/2$. Ze spojitosti funkcí χ, ξ, μ, η plyne, že existuje takové číslo δ, $0 < \delta < t^* - s$, že je $\chi(t, \xi(t)) > \chi(t^*, \xi(t^*)) - \varepsilon$,

$\mu(t) < \mu(t^*) + \varepsilon$ pro $t^* - \delta \leqq t \leqq t^*$. Je tedy

$$\eta(t^* - \delta) = \eta(t^*) - [\eta(t^*) - \eta(t^* - \delta)] \geqq \eta(t^*) - \int_{t^*-\delta}^{t^*} \mu(t)\,\mathrm{d}t \geqq$$

$$\geqq \eta(t^*) - \mu(t^*)\,\delta - \varepsilon\delta > \xi(t^*) - \chi(t^*, \xi(t^*))\,\delta + \varepsilon\delta \geqq$$

$$\geqq \xi(t^*) - \int_{t^*-\delta}^{t^*} \chi(t, \xi(t))\,\mathrm{d}t =$$

$$= \xi(t^*) - [\xi(t^*) - \xi(t^* - \delta)] = \xi(t^* - \delta)$$

a to odporuje nerovnosti (2.4). Proto platí tvrzení (i). Tvrzení (ii) se dokáže obdobně. Věta 11.2.1 platí.

11.2.3. Poznámka: Věta 11.2.1 zůstane v platnosti, jestliže v tvrzení (i) předpokládáme pouze $\eta(s) \leqq \xi(s)$ a jestliže v tvrzení (ii) předpokládáme pouze $\eta(s) \geqq \xi(s)$. V případě tvrzení (i) se snadno ukáže, že je $\eta(\sigma) < \xi(\sigma)$ pro σ dosti blízká s, $\sigma > s$; původního tvrzení (i) užijeme na intervalu $\mathscr{J} \cap \{t \in R | t \geqq \sigma\}$.

11.2.4. Pomocná věta: *Nechť jsou splněny tyto podmínky:*

Množina $G \subset R \times K^n$ je otevřená a funkce $f\colon G \to K^n$ je spojitá. (2.5)

Funkce $u^{[i]}$, $v\colon \langle\alpha, \beta\rangle \to K^n$ jsou řešení rovnice (10.1.1). (2.6)

Rovnice (10.1.1) *je jednoznačná v bodě $(t, v(t))$ pro $t \in \langle\alpha, \beta\rangle$.* (2.7)

Existuje posloupnost $s_i \in \langle\alpha, \beta\rangle$, $i = 1, 2, 3, \ldots$, a číslo s tak, že platí

$$\lim_{i\to\infty} s_i = s\,, \quad \lim_{i\to\infty} u^{[i]}(s_i) = v(s)\,. \tag{2.8}$$

Funkce $u^{[i]}$ jsou stejně omezené a stejně spojité. (2.9)

Potom platí

$$\lim_{i\to\infty} u^{[i]}(t) = v(t) \quad \textit{pro} \quad t \in \langle\alpha, \beta\rangle\,. \tag{2.10}$$

Důkaz: Nechť neplatí (2.10). Potom existují čísla $t_1 \in \langle\alpha, \beta\rangle$, $\varepsilon > 0$ a vybraná posloupnost $i_1, i_2, i_3, \ldots$ tak, že je

$$\|u^{[i_j]}(t_1) - v(t_1)\| \geqq \varepsilon\,, \quad j = 1, 2, 3, \ldots\,. \tag{2.11}$$

Podle Arzelàovy-Ascoliovy věty (viz Dodatek 10.1) z posloupnosti $u^{[i_j]}$ lze vybrat posloupnost stejnoměrně konvergentní. Označme tuto vybranou posloupnost $w^{[j]}$. Je tedy

$$\lim_{j\to\infty} w^{[j]}(t) = w(t) \quad \text{stejnoměrně pro} \quad t \in \langle\alpha, \beta\rangle\,. \tag{2.12}$$

Funkce w je spojitá. Protože $w^{[j]}$, $j = 1, 2, \ldots$, jsou řešení rovnice (10.1.1), platí

(viz Větu 3.3.2)

$$w^{[j]}(t_3) - w^{[j]}(t_2) = \int_{t_2}^{t_3} f(t, w^{[j]}(t))\,dt \quad \text{pro} \quad t_2, t_3 \in \langle \alpha, \beta \rangle .$$

Limitním přechodem pro $j \to \infty$ dostáváme

$$w(t_3) - w(t_2) = \int_{t_2}^{t_3} f(t, w(t))\,dt \quad \text{pro} \quad t_2, t_3 \in \langle \alpha, \beta \rangle .$$

Podle Věty 3.3.3 $w: \langle \alpha, \beta \rangle \to K^n$ je řešení rovnice (10.1.1). Vzhledem k (2.11) a (2.12) je $\|w(t_1) - v(t_1)\| \geqq \varepsilon$. Podle (2.12) a (2.8) je $w(s) = v(s)$. Nechť je pro určitost $s < t_1$. Položme

$$t^* = \inf \{ t \in \langle s, t_1 \rangle |\, w(t_1) \neq v(t_1) \} . \tag{2.13}$$

Podle definice čísla t^* je $v(t^*) = w(t^*)$ a z podmínky (2.7) plyne, že existuje takové $\delta > 0$, že je $v(t) = w(t)$ pro $t \in \langle t^*, t^* + \delta \rangle$ a to není možné vzhledem k (2.13). Nemůže tedy platit (2.11). Pomocná věta 11.2.4 je dokázána.

11.2.5. Poznámka: Podmínka (2.9) plyne z podmínek (2.5) až (2.8), a proto ji lze v Pomocné větě 11.2.4 vynechat; toto tvrzení však nebudeme dokazovat.

11.2.6. Věta (porovnávací): *Nechť jsou splněny tyto podmínky:*

$G \subset R \times K^n$ je otevřená množina a funkce $f: G \to K^n$ je spojitá. (2.14)

Funkce $\chi: H \to R$ je spojitá; přitom $H = (t_0 - v_1, t_0 + v_1) \times \times (-2v_2, 2v_2)$, $t_0 \in R$, $v_1, v_2 > 0$. Platí $\chi(t, \xi) > 0$ pro $(t, \xi) \in H$, $\xi \neq 0$ a $\chi(t, 0) = 0$ pro $t \in (t_0 - v_1, t_0 + v_1)$. (2.15)

Rovnice (2.1) je jednoznačná v bodě $(t, 0)$ pro $t \in (t_0 - v_1, t_0 + v_1)$. (2.16)

Funkce $\varrho: H \to R$ je spojitá, $0 \leqq \varrho(t, \xi) < \chi(t, \xi)$, pro $(t, \xi) \in H$, $\xi \neq 0$, (2.17)

$\tilde{x} \in K^n$, $Q(t_0, \tilde{x}, v_1, v_2) \subset G$ a platí

$$\|f(t, x^{[2]}) - f(t, x^{[1]})\| \leqq \min \{ \varrho(t, \|x^{[2]} - x^{[1]}\|),\ \varrho(t, -\|x^{[2]} - x^{[1]}\|) \}$$

pro $(t, x^{[i]}) \in Q(t_0, \tilde{x}, v_1, v_2)$, $i = 1, 2$. (2.18)

Potom rovnice (10.1.1) je jednoznačná v bodě $(t_0, \tilde{x})$.

Důkaz: Najděme čísla δ_1, δ_2, $0 < \delta_1 < v_1$, $0 < \delta_2$, podle Věty 10.1.1 tak, aby tvrzení (10.1.4), (10.1.5), kde klademe $\tilde{x} = 0$, platila pro rovnici (2.1); tedy existují řešení $\xi_r: \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle \to \langle -2\delta_2, 2\delta_2 \rangle$ rovnice (2.1) taková, že je $\xi_r(t_0) = \delta_2 r^{-1}$ pro $r = 1, 2, 3, \ldots, -1, -2, -3, \ldots$. Vzhledem k (2.15) funkce

$\xi\colon \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle \to R$ definovaná rovnicí $\xi(t) = 0$ je řešením rovnice (2.1). Je

$$|\xi_r(t_1) - \xi_r(t_2)| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \chi(t, \xi_r(t))\, dt \right| \leqq \varkappa |t_1 - t_2|$$

$$\text{pro } t_1, t_2 \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle ,$$

kde

$$\varkappa = \max \{ |\chi(t, \xi)| \mid |t| \leqq \delta_1 , \quad |\xi| \leqq 2\delta_2 \} .$$

Tedy funkce ξ_r, $r = 1, 2, 3, \ldots$, $r = -1, -2, -3, \ldots$, jsou stejně omezené a stejně spojité, a proto podle Pomocné věty 11.2.4 (kde klademe $s = s_i = t_0$ pro $i = 1, 2, 3, \ldots$) platí

$$\lim_{r \to \infty} \xi_r(t) = 0 = \lim_{r \to -\infty} \xi_r(t) , \quad t \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle . \tag{2.19}$$

Kdyby pro nějaké r a $t_1 \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 \rangle$ bylo $\xi_r(t_1) = 0$, existovalo by t_2, $t_1 \leqq t_2 < t_0$, tak, že by bylo $\xi_r(t_2) = 0$, $\xi_r(t) \neq 0$ pro $t_2 < t \leqq t_0$ a to by odporovalo předpokladu (2.16). Je tedy $\xi_r(t) \neq 0$ pro $r = 1, 2, 3, \ldots$, $r = -1, -2, -3, \ldots$, $t \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 \rangle$ a obdobně je $\xi_r(t) \neq 0$ pro $t \in \langle t_0, t_0 + \delta_1 \rangle$.

Nechť $u^{[i]}\colon \mathscr{J}_i \to K^n$ jsou řešení rovnice (10.1.1), $u^{[i]}(t_0) = \tilde{x}$, pro $i = 1, 2$. Položme $\mathscr{K} = \mathscr{J}_1 \cap \mathscr{J}_2 \cap \langle t_0 - \delta_3, t_0 + \delta_3 \rangle$, kde δ_3, $0 < \delta_3 \leqq \delta_1$, je tak malé, že je $\|u^{[i]}(t) - \tilde{x}\| < v_2$ pro $t \in \mathscr{K}$, $i = 1, 2$. Dokážeme, že je $u^{[2]}(t) = u^{[1]}(t)$ pro $t \in \mathscr{K}$. Předpokládejme naopak, že existuje $t_4 \in \mathscr{K}$ tak, že je $u^{[2]}(t_4) \neq u^{[1]}(t_4)$.

Vyšetřeme nejdříve případ $t_4 < t_0$. Položme

$$\eta(t) = -\|u^{[2]}(t) - u^{[1]}(t)\| \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{K} ,$$

$$t_3 = \inf \{ t \mid t_4 \leqq t \leqq t_0, \eta(t) = 0 \} ,$$

$$\mathscr{J} = \langle t_4, t_3 \rangle , \quad \mu(t) = \varrho(t, \eta(t)) \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{J} .$$

Je

$$\eta(t_3) = 0 , \quad \eta(t_4) < 0 , \quad t_4 < t_3 \leqq t_0 .$$

Je-li

$$t_1, t_2 \in \mathscr{J} , \quad t_1 \leqq t_2 ,$$

je

$$\begin{aligned}
\eta(t_2) - \eta(t_1) &= -\|u^{[2]}(t_2) - u^{[1]}(t_2)\| + \|u^{[2]}(t_1) - u^{[1]}(t_1)\| \leqq \\
&\leqq \|u^{[2]}(t_1) - u^{[1]}(t_1) - u^{[2]}(t_2) + u^{[1]}(t_2)\| = \\
&= \left\| \int_{t_1}^{t_2} [f(t, u^{[2]}(t)) - f(t, u^{[1]}(t))]\, dt \right\| \leqq \\
&\leqq \int_{t_1}^{t_2} \varrho(t, \eta(t))\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \mu(t)\, dt
\end{aligned}$$

[viz (2.18)] a tak platí (2.3). Protože je $\eta(t) < 0$ pro $t \in \mathscr{J}$, plyne z (2.17), že platí (2.2). Podle (2.19) existuje celé číslo $r < 0$ tak, že je $\eta(t_2) < \xi_r(t_2)$. Jak jsme dokázali, je $\xi_r(t) \neq 0$ pro $t \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle$, a protože je $\xi_r(t_0) < 0$ a protože funkce ξ_r je spojitá, je $\xi_r(t) < 0$ pro $t \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle$. Podle tvrzení (i) Věty 11.2.1 je $\eta(t) < \xi_r(t)$ pro $t \in \langle t_4, t_3) = \mathscr{J}$, tedy je $\eta(t_3) \leqq \xi_r(t_3) < 0$ a to odporuje rovnici $\eta(t_3) = 0$.

V případě $t_4 > t_0$ budeme postupovat obdobně. Položíme

$$\eta(t) = \|u^{[2]}(t) - u^{[1]}(t)\| \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{K},$$

$$t_3 = \sup \{t \mid t_0 \leqq t \leqq t_4, \eta(t) = 0\},$$

$$\mathscr{J} = (t_3, t_4\rangle, \quad \mu(t) = \varrho(t, \eta(t)) \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{J}.$$

Je $\eta(t_3) = 0$, $\eta(t_4) > 0$, $t_0 \leqq t_3 \leqq t_4$. Podle (2.19) existuje celé číslo $r > 0$ tak, že je $\xi_r(t_4) < \eta(t_4)$. Je ovšem $\xi_r(t) > 0$ pro $t \in \langle t_0 - \delta_1, t_0 + \delta_1 \rangle$. Užitím tvrzení (ii) Věty 11.2.1 odvodíme, že je $\eta(t) > \xi_r(t)$ pro $t \in (t_3, t_4\rangle = \mathscr{J}$, tedy že je $\eta(t_3) \geqq \geqq \xi_r(t_3) > 0$, což odporuje rovnici $\eta(t_3) = 0$. Proto je $u^{[2]}(t) = u^{[1]}(t)$ pro $t \in \mathscr{K}$. Věta 11.2.6 je dokázána.

11.2.7. Věta: *Nechť platí* (2.14) *a nechť ke každému bodu* $(t_0, x^{[0]}) \in G$ *existují čísla* $v_1, v_2 > 0$ *a spojitá funkce* $\psi: \langle 0, 2v_2 \rangle \to R$ *tak, že je*

$$\psi(\xi) > 0 \quad \textit{pro} \quad \xi \in (0, 2v_2\rangle, \quad \psi(0) = 0,$$

$$\int_0^{2v} \frac{d\xi}{\psi(\xi)} = \infty, \quad Q(t_0, x^{[0]}, v_1, v_2) \subset G$$

a že platí

$$\|f(t, x^{[2]}) - f(t, x^{[1]})\| \leqq \psi(\|x^{[2]} - x^{[1]}\|)$$

$$\textit{pro} \ (t, x^{[1]}), \quad (t, x^{[2]}) \in Q(t_0, x^{[0]}, v_1, v_2).$$

Potom rovnice (10.1.1) *je jednoznačná.*

Důkaz: Položme $\chi(t, \xi) = 2\psi(|\xi|)$ pro $|\xi| < 2v_2$, $|t - t_0| < v_1$. Podle odst. 2.8 je rovnice $\dot{\xi} = \chi(t, \xi)$ jednoznačná a podle Věty 11.2.6, kde klademe $\varrho(t, \xi) = \psi(|\xi|)$, je rovnice (10.1.1) jednoznačná v bodě $(t_0, x^{[0]})$. Je tedy rovnice (10.1.1) jednoznačná v každém bodě $(t_0, x^{[0]}) \in G$ a podle Věty 11.1.3 je rovnice (10.1.1) jednoznačná. Věta 11.2.7 je dokázána.

11.2.8. Poznámka: Základem Věty 11.2.6 je srovnání rovnice (10.1.1) s rovnicí $\dot{\xi} = \chi(t, \xi)$ pomocí podmínky (2.18).

Formálně obecnější než Věta 11.2.6 je

11.2.9. Věta: *Nechť platí* (2.14) *a nechť jsou splněny tyto podmínky:*

Funkce $\varrho: H \to R$ *je spojitá; přitom je*

$$H = (t_0 - v_1, t_0 + v_1) \times (-2v_2, 2v_2), \quad t_0 \in R, \quad v_1, v_2 > 0.$$

Platí

$$\varrho(t, \xi) > 0 \quad \text{pro} \quad (t, \xi) \in H\,, \quad \xi \neq 0\,,$$
$$\varrho(t, 0) = 0 \quad \text{pro} \quad t \in (t_0 - \nu_1, t_0 + \nu_1)\,. \tag{2.20}$$

Rovnice $\dot{\xi} = \varrho(t, \xi)$ *je jednoznačná v bodě* $(t, 0)$

$$\text{pro} \quad t \subset (t_0 - \nu_1, t_0 + \nu_1)\,. \tag{2.21}$$

Nechť ještě platí (2.18). *Potom rovnice* (10.1.1) *je jednoznačná v bodě* $(t_0, x^{[0]})$.

V Dodatku 11.3 je naznačeno, jak lze Větu 11.2.9 převést na Větu 11.2.6.

11.2.10. Poznámka: Jsou známy obecnější postačující podmínky pro jednoznačnost, viz např. [21], [7].

V [21] se využívá pojmů horní a dolní řešení [rovnice (2.1)]; tyto pojmy se však poněkud liší od pojmů zavedených v Poznámce 10.2.4.

11.3. Pomocí Věty 11.2.1 lze odhadnout růst řešení rovnice (10.1.1).

11.3.1. Věta: *Nechť množina* $H \subset R^2$ *je otevřená a funkce* $\chi: H \to R$ *spojitá. Nechť množina* $G \subset R \times K^n$ *je otevřená, funkce* $f: G \to K^n$ *spojitá a nechť platí*

$$(t, \|x\|) \in H\,, \quad \chi(t, \|x\|) > \|f(t, x)\| \quad \text{pro} \quad (x, t) \in G\,. \tag{3.1}$$

Nechť $u: \mathscr{J} \to K^n$ *je řešení rovnice* (10.1.1), *nechť* $\xi: \mathscr{J} \to R$ *je řešení rovnice* (2.1) *a nechť v nějakém bodě* $s \in \mathscr{J}$ *platí* $\|u(s)\| < \xi(s)$. *Potom*

$$\|u(t)\| < \xi(t) \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{J}\,, \quad t > s\,. \tag{3.2}$$

Důkaz: Položme $\eta(t) = \|u(t)\|$, $\mu(t) = \|f(t, u(t))\|$ pro $t \in \mathscr{J}$. Nerovnost (3.2) plyne z tvrzení (i) Věty 11.2.1. Věta 11.3.1 je dokázána.

11.3.2. Poznámka: Nahradíme-li (3.1) podmínkou

$$(t, -\|x\|) \in H\,, \quad \chi(t, -\|x\|) > \|f(t, x)\| \quad \text{pro} \quad (t, x) \in G \tag{3.3}$$

a nerovnost $\|u(s)\| < \xi(s)$ nerovností $-\|u(s)\| > \xi(s)$, odvodíme obdobným způsobem, že platí

$$-\|u(t)\| > \xi(t) \quad \text{pro} \quad t \in \mathscr{J}\,, \quad t < s\,. \tag{3.4}$$