5. Autonomní lineární diferenciální rovnice

V této kapitole ukážeme, jak lze řešit autonomní lineární diferenciální rovnice, dovedeme-li řešit jisté algebraické úlohy.

5.1. Nechť je $A \in M_n(C)$. Hledejme řešení $x(t)$ rovnice

$$\dot{x} = Ax \tag{1.1}$$

ve tvaru

$$x(t) = Hy(t), \tag{1.2}$$

kde $H \in M_n(C)$ je regulární matice. Funkce y musí splňovat rovnici

$$H\dot{y}(t) = AHy(t),$$

tj. y musí být řešením rovnice

$$\dot{y} = Qy, \tag{1.3}$$

kde $Q = H^{-1}AH$. Naopak, nalezneme-li řešení y rovnice (1.3), je funkce x definovaná vztahem (1.2) řešením rovnice (1.1). V rovnici (1.3) volíme matici H tak, aby rovnice (1.3) byla co nejjednodušší. Podle věty o Jordanově tvaru existuje taková regulární matice $H \in M_n(C)$, že platí $Q = H^{-1} AH$; matice Q má speciální tvar a je zapsána na str. 109 nahoře. Čísla λ_i, $i = 1, 2, \ldots, r$, která se vyskytují v zápisu matice Q, nemusejí být navzájem různá a je ovšem $\lambda_i \in C$. (Viz [6], [17] kap. VII, [18] §§ 9, 29, [60] § 36, [52] kap. IV.) Vztahy mezi maticemi A a Q spolu se speciálním tvarem matice Q se vyjadřují rčením „*Q je Jordanův tvar matice A*“. *Matice Q* je *blokově diagonální* (tj. lze ji svislými a vodorovnými čarami rozdělit na bloky tak, že jenom diagonální bloky mohou být nenulové).

Nechť I_k znamená jednotkovou matici řádu k a nechť P_k je matice řádu k,

$$P_k = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & & \ldots, & 1 \\ 0, & 0, & & \ldots, & 0 \end{pmatrix}.$$

$$Q = \left(\begin{array}{l|l|l|r}
\lambda_1, 1, 0, \ldots, & & & 0 \\
0, \lambda_1, 1, 0, \ldots, & & & 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . & & \\
0, \ldots, \quad 0, \lambda_1, 1, & 0, \ldots, & & 0 \\
0, \ldots, \quad 0, \lambda_1, & 0, \ldots, & & 0 \\
\hline
0, \ldots, \quad 0, & \lambda_2, 1, 0, \ldots, & & 0 \\
0, \ldots, & 0, \lambda_2, 1, 0, \ldots, & & 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . & & \\
0, \ldots, & 0, \lambda_2, & 0, \ldots, & 0 \\
\hline
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . & & \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . & & \\
\hline
0, \ldots, & & 0, & \lambda_r, 1, 0, \ldots, 0 \\
0, \ldots, & & & 0, \lambda_r, 1, 0, \ldots, 0 \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & . & & \\
0, \ldots, & & & 0, \lambda_r
\end{array}\right).$$

Matici Q můžeme zapsat

$$Q = \begin{pmatrix} \lambda_1 I_{k_1} + P_{k_1} & & & \\ & \lambda_2 I_{k_2} + P_{k_2} & & \\ & & \ldots & \\ & & & \lambda_r I_{k_r} + P_{k_r} \end{pmatrix}. \tag{1.4}$$

5.1.1. Poznámka: V lineární algebře se dokazuje, že matice Q je určena jednoznačně až na pořádek matic $\lambda_j I_{k_j} + P_{k_j}$ v zápisu (1.4), tj. bloky $\lambda_j I_{k_j} + P_{k_j}$ na diagonále matice Q mohou být uspořádány libovolným způsobem.

Zapišme ve složkách rovnici (1.3):

$$\begin{aligned}
\dot{y}_1 &= \lambda_1 y_1 + y_2 , \\
\dot{y}_2 &= \lambda_1 y_2 + y_3 , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dot{y}_{k_1 - 1} &= \lambda_1 y_{k_1 - 1} + y_{k_1} , \\
\dot{y}_{k_1} &= \lambda_1 y_{k_1} , \\
\dot{y}_{s_2 + 1} &= \lambda_2 y_{s_2 + 1} + y_{s_2 + 2} , \\
\dot{y}_{s_2 + 2} &= \lambda_2 y_{s_2 + 2} + y_{s_2 + 3} , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dot{y}_{s_2 + k_2} &= \lambda_2 y_{s_2 + k_2} , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dot{y}_{s_r + 1} &= \lambda_r y_{s_r + 1} + y_{s_r + 2} , \\
\dot{y}_{s_r + 2} &= \lambda_r y_{s_r + 2} + y_{s_r + 3} , \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\dot{y}_{s_r + k_r} &= \lambda_r y_{s_r + k_r} .
\end{aligned} \tag{1.5}$$

Při tom klademe

$$s_1 = 0\,,\quad s_2 = k_1\,,\quad s_3 = k_1 + k_2, \ldots, s_r = k_1 + k_2 + \ldots + k_{r-1}\,. \tag{1.6}$$

Soustava (1.5) se rozpadá na r skupin [rovnice první až k_1-tá, $(s_2 + 1)$-ní až s_3-tá,..., $(s_r + 1)$-ní až n-tá], které můžeme řešit každou zvlášť. Zaveďme matice

$$U_{\lambda k}(t) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t}, & t\,e^{\lambda t}, & \frac{1}{2}t^2\,e^{\lambda t}, & \ldots, & \dfrac{1}{(k-1)!}\,t^{k-1}\,e^{\lambda t} \\ 0, & e^{\lambda t}, & t\,e^{\lambda t}, & \ldots, & \dfrac{1}{(k-2)!}\,t^{k-2}\,e^{\lambda t} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & \ldots, & & & e^{\lambda t} \end{pmatrix}. \tag{1.7}$$

Jak jsme ukázali v Poznámce 4.4.11, je $U_{\lambda_j k_j}(t)$ fundamentální matice j-té skupiny soustavy (1.5) [tj. rovnice $(s_j + 1)$-ní až s_{j+1}-té]. Proto blokově diagonální matice

$$U(t) = \begin{pmatrix} U_{\lambda_1 k_1}(t) & & & \\ & U_{\lambda_2 k_2}(t) & & \\ & & \cdots & \\ & & & U_{\lambda_r k_r}(t) \end{pmatrix} \tag{1.8}$$

je fundamentální matice rovnice (1.3) a $HU(t)$ je fundamentální matice rovnice (1.1). Abychom mohli tímto způsobem fundamentální matici rovnice (1.1) vypočítat, všimněme si ještě vztahů, které splňuje matice H. Rovnice $Q = H^{-1}AH$ je splněna právě tehdy, jestliže platí

$$HQ = AH\,. \tag{1.9}$$

Nechť $h^{[m]}$ znamená m-tý sloupec matice H, tj. $H = ((h^{[1]}, h^{[2]}, \ldots, h^{[n]}))$. Z rovnice (1.9) plyne, že platí

$$\begin{aligned} \lambda_j h^{[s_j+1]} &= Ah^{[s_j+1]}\,, \\ h^{[s_j+1]} + \lambda_j h^{[s_j+2]} &= Ah^{[s_j+2]}\,, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ h^{[s_j+k_j-1]} + \lambda_j h^{[s_j+k_j]} &= Ah^{[s_j+k_j]}\,, \end{aligned} \tag{1.10}$$

$j = 1, 2, \ldots, r$ [první z rovnic (1.10) znamená, že $(s_j + 1)$-ní sloupec matice HQ se rovná $(s_j + 1)$-nímu sloupci matice AH, druhá z rovnic (1.10) má obdobný význam pro sloupce $(s_j + 2)$-hé a poslední pro sloupce $(s_j + k_j)$-té]. Rovnice (1.10) můžeme zapsat ve tvaru

$$\begin{aligned} (A - \lambda_j I)\,h^{[s_j+1]} &= 0\,, \\ (A - \lambda_j I)\,h^{[s_j+2]} &= h^{[s_j+1]}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ (A - \lambda_j I)\,h^{[s_j+k_j]} &= h^{[s_j+k_j-1]}\,, \end{aligned} \tag{1.11}$$

$j = 1, 2, \ldots, r$. Naopak, platí-li (1.11), pak platí také (1.9). Z rovnic (1.7) a (1.8) plyne, že $(s_j + m)$-tý sloupec matice $HU(t)$ je

$$w^{[s_j+m]}(t) = h^{[s_j+1]} e^{\lambda_j t} \frac{t^{m-1}}{(m-1)!} + h^{[s_j+2]} e^{\lambda_j t} \frac{t^{m-2}}{(m-2)!} + \ldots +$$
$$+ h^{[s_j+m]} e^{\lambda_j t} . \tag{1.12}$$

Vzorec (1.12) pro $j = 1, 2, \ldots, r$, $m = 1, 2, \ldots, k_j$ dává fundamentální soustavu rovnice (1.1); abychom ji nalezli, musíme určit čísla r, k_j, λ_j, kde $j = 1, 2, \ldots, r$, a lineárně nezávislé vektory $h^{[1]}, \ldots, h^{[n]}$ tak, aby platilo (1.11) a (1.6). Všimněme si ještě, že z první rovnice (1.11) plyne, že λ_j je vlastní číslo matice A a $h^{[s_j+1]}$ je vlastní vektor matice A, který odpovídá vlastnímu číslu λ_j, $j = 1, 2, \ldots, r$ (viz Dodatek 5.1).

Skupina vektorů $h^{[s_j+1]}, \ldots, h^{[s_j+k_j]}$ splňujících (1.11) se nazývá ***řetěz patřící k vlastnímu číslu λ_j matice A***. Číslo k_j je ***délka*** tohoto ***řetězu***. Stručně můžeme říci, že hledáme bázi složenou z řetězů.

5.1.2. Poznámka: Čísla $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r$ nemusí být ovšem navzájem různá. Je-li $\lambda \in C$ a jsou-li $i_1, i_2, \ldots, i_l$ všechny indexy j takové, že $\lambda = \lambda_j$, pak $k_{i_1} + k_{i_2} + \ldots + k_{i_l}$ je zřejmě násobnost vlastního čísla λ matice Q. Matice Q a A mají týž charakteristický polynom [je $\operatorname{Det}(\lambda I - Q) = \operatorname{Det}(H^{-1}(\lambda I - A) H) = \operatorname{Det}(\lambda I - A)$], a proto $k_{i_1} + k_{i_2} + \ldots + k_{i_l}$ je násobnost vlastního čísla λ matice A. Počet matic $\lambda_j I_{k_j} + P_{k_j}$ v (1.4) takových, že $\lambda_j = \lambda$, je roven $n - \operatorname{rank}(\lambda I - Q)$; $\operatorname{rank} B$ znamená hodnost matice B. Je $\lambda I - Q = H^{-1}(\lambda I - A) H$, a proto je $\operatorname{rank}(\lambda I - Q) = \operatorname{rank}(\lambda I - A)$. Je tedy počet řetězů patřících k vlastnímu číslu λ roven $n - \operatorname{rank}(\lambda I - A)$ a pro počet r všech řetězů platí vzorec

$$r = \sum_{\lambda} [n - \operatorname{rank}(\lambda I - A)] ,$$

kde sčítáme přes všechna vlastní čísla matice A.

Příklad (i): Hledejme fundamentální matici soustavy

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 3x_1 + 5x_2 + 3x_3 , \\ \dot{x}_2 &= -4x_1 - 9x_2 - 6x_3 , \\ \dot{x}_3 &= 6x_1 + 15x_2 + 10x_3 . \end{aligned} \tag{1.13}$$

Charakteristická rovnice je $\lambda^3 - 4\lambda^2 + 5\lambda - 2 = 0$ a vlastní čísla jsou 2 (jednoduché) a 1 (dvojnásobné). Vlastnímu číslu 2 odpovídá vlastní vektor $\operatorname{col}(1, -2, 3)$ a vlastnímu číslu 1 odpovídají vlastní vektory $\operatorname{col}(3, -6, 8)$ a $\operatorname{col}(1, -1, 1)$ (a ovšem též jejich lineární kombinace). Položíme $h^{[1]} = \operatorname{col}(1, -2, 3)$, $\lambda_1 = 2$, $k_1 = 1$, $h^{[2]} = \operatorname{col}(3, -6, 8)$, $\lambda_2 = 1$, $k_2 = 1$ a $h^{[3]} = \operatorname{col}(1, -1, 1)$, $\lambda_3 = 1$, $k_3 = 1$. Vektory $h^{[1]}, h^{[2]}, h^{[3]}$ jsou lineárně nezávislé a rovnice (1.11) jsou splněny. Je

$$Q = \begin{pmatrix} 2, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

a podle vzorce (1.12) dostáváme fundamentální matici rovnice (1.13) ve tvaru

$$\begin{pmatrix} e^{2t}, & 3\,e^t, & e^t \\ -2\,e^{2t}, & -6\,e^t, & -e^t \\ 3\,e^{2t}, & 8\,e^t, & e^t \end{pmatrix}.$$

Příklad (ii): Hledejme fundamentální matici rovnice

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 13x_1 - 28x_2 + 3x_3\,, \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 - 8x_2 + x_3\,, \\ \dot{x}_3 &= -x_1 + 4x_2 + x_3\,. \end{aligned} \tag{1.14}$$

Charakteristická rovnice je $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$, vlastní číslo 2 je trojnásobné; vlastní vektory jsou násobky vektoru col $(2, 1, 2)$. Položíme $h^{[1]} = \operatorname{col}(2, 1, 2)$ a vektory $h^{[2]}$, $h^{[3]}$ hledáme z rovnic

$$(A^{[1]} - 2I)\,h^{[2]} = h^{[1]}\,, \quad (A^{[1]} - 2I)\,h^{[3]} = h^{[2]}\,,$$

kde

$$A^{[1]} = \begin{pmatrix} 13, & -28, & 3 \\ 4, & -8, & 1 \\ -1, & 4, & 1 \end{pmatrix}.$$

Najdeme $h^{[2]} = \operatorname{col}(5, 2, 1)$, $h^{[3]} = \operatorname{col}(3, 1, 0)$. Položíme $r = 1$, $\lambda_1 = 2$, $k_1 = 3$. Rovnice (1.11) jsou splněny, je

$$Q = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 0 \\ 0, & 2, & 1 \\ 0, & 0, & 2 \end{pmatrix}$$

a podle vzorce (1.12) dostáváme fundamentální matici rovnice (1.14) ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 2\,e^{2t}, & (2t + 5)\,e^{2t}, & (t^2 + 5t + 3)\,e^{2t} \\ e^{2t}, & (t + 1)\,e^{2t}, & (\tfrac{1}{2}t^2 + t + 1)\,e^{2t} \\ 2\,e^{2t}, & (2t + 2)\,e^{2t}, & (t^2 + 2t)\,e^{2t} \end{pmatrix}.$$

5.1.3. Poznámka: Matice H není určena jednoznačně; to ukážeme na příkladě (ii). Za vektor $h^{[1]}$ můžeme volit kterékoliv nenulové řešení rovnice $(A^{[1]} - 2I)\,h^{[1]} = 0$, tj. kterýkoliv násobek vektoru col $(2, 1, 2)$. Je-li $h^{[1]}$ již zvoleno, můžeme za $h^{[2]}$ volit libovolné řešení rovnice $(A^{[1]} - 2I)\,h^{[2]} = h^{[1]}$; matice $A^{[1]} - 2I$ je singulární, a proto $h^{[2]}$ není určeno jednoznačně – je-li $h^{[2]}$ řešení, je také $h^{[2]} + c \operatorname{col}(2, 1, 2)$, $c \in C$, řešení. Obdobná poznámka platí i pro $h^{[3]}$. Naproti tomu číslo r je určeno jednoznačně. Do podrobných výkladů se nebudeme pouštět a zájemce o tyto otázky odkazujeme na knihy o lineární algebře [6], [18], [52].

Příklad (iii): Hledejme fundamentální matici rovnice

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= 4x_1 + 4x_2\,, \\ \dot{x}_2 &= -x_1\,, \\ \dot{x}_3 &= -2x_1 - 4x_2 + 2x_3\,. \end{aligned} \tag{1.15}$$

Charakteristická rovnice je $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 12\lambda - 8 = 0$, vlastní číslo 2 má násobnost 3. Vlastní vektory jsou lineární kombinace vektorů col $(2, -1,0)$, col $(0, 0, 1)$. V tomto případě je $r = 2$, $k_1 + k_2 = 3$, $k_1 \geqq 1$, $k_2 \geqq 1$, tj. $k_1 = 2$, $k_2 = 1$, a hledáme řetěz $h^{[1]}$, $h^{[2]}$ a řetěz $h^{[3]}$. Je $h^{[1]} = \alpha$ col $(2, -1, 0) +$ $+ \beta$ col $(0, 0, 1)$, kde $\alpha, \beta \in C$, $|\alpha| + |\beta| > 0$. Čísla α, β budeme volit tak, aby rovnice

$$(A^{[2]} - 2I)\, h^{[2]} = h^{[1]}\,, \tag{1.16}$$

z níž počítáme $h^{[2]}$, měla řešení; přitom je

$$A^{[2]} = \begin{pmatrix} 4, & 4, & 0 \\ -1, & 0, & 0 \\ -2, & -4, & 2 \end{pmatrix}.$$

Položme $h^{[2]} = \mathrm{col}\,(y_1, y_2, y_3)$. Rovnici (1.16) zapíšeme ve složkovém tvaru:

$$\begin{aligned} 2y_1 + 4y_2 &= 2\alpha\,, \\ -y_1 - 2y_2 &= -\alpha\,, \\ -2y_1 - 4y_2 &= \beta\,. \end{aligned} \tag{1.17}$$

Soustava (1.17) má řešení právě tehdy, mají-li matice soustavy a matice rozšířená, tj. matice

$$\begin{pmatrix} 2, & 4, & 0 \\ -1, & -2, & 0 \\ -2, & -4, & 0 \end{pmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{pmatrix} 2, & 4, & 0, & 2\alpha \\ -1, & -2, & 0, & -\alpha \\ -2, & -4, & 0, & \beta \end{pmatrix}$$

stejnou hodnost. Matice nalevo má hodnost 1; první řádek je záporným dvojnásobkem druhého, třetí je dvojnásobkem druhého. Tytéž vztahy musí platit i mezi řádky matice napravo. To nastane právě tehdy, je-li $\beta = -2\alpha$. Zvolme tedy $\alpha = 1$, $\beta = -2$, tedy $h^{[1]} = \mathrm{col}\,(2, -1, -2)$, a vypočtěme $h^{[2]} = \mathrm{col}\,(-1, 1, 1)$. Vektor $h^{[3]}$ zvolíme tak, aby to byl vlastní vektor lineárně nezávislý na $h^{[1]}$, např. $h^{[3]} =$ $= (0, 0, 1)$. Je $r = 2$, $\lambda_1 = 2 = \lambda_2$, $k_1 = 2$, $k_2 = 1$. Rovnice (1.11) jsou splněny, je

$$Q = \begin{pmatrix} 2, & 1, & 0 \\ 0, & 2, & 0 \\ 0, & 0, & 2 \end{pmatrix}$$

a podle vzorce (1.12) dostáváme fundamentální matici rovnice (1.15) ve tvaru

$$\begin{pmatrix} 2\,e^{2t}, & (2t-1)\,e^{2t}, & 0 \\ -\;e^{2t}, & (-\;t+1)\,e^{2t}, & 0 \\ -2\,e^{2t}, & (-2t+1)\,e^{2t}, & e^{2t} \end{pmatrix}.$$

Příklad (iv): Hledejme fundamentální matici rovnice

$$\dot{x} = A^{[4]}x\,, \tag{1.18}$$

kde

$$A^{[4]} = \begin{pmatrix} 4, & 3, & 2, & -8 \\ 6, & 9, & 4, & -8 \\ -3, & -4, & -1, & 4 \\ 9, & 9, & 6, & -8 \end{pmatrix}.$$

Charakteristická rovnice je $(\lambda - 1)^4 = 0$. Matice

$$A^{[4]} - I = \begin{pmatrix} 3, & 3, & 2, & -1 \\ 6, & 8, & 4, & -8 \\ -3, & -4, & -2, & 4 \\ 9, & 9, & 6, & -9 \end{pmatrix}$$

má hodnost 2 [čtvrtý řádek je trojnásobkem prvního, druhý je (-2)-násobkem třetího]. Proto bude $r = 2$, $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $k_1 + k_2 = 4$, $k_1 \geqq 1$, $k_2 \geqq 1$; dosud nevíme, zda bude $k_1 = 3$, $k_2 = 1$, nebo $k_1 = 2$, $k_2 = 2$.

Všechna řešení rovnice

$$(A^{[4]} - I)\,z = 0 \tag{1.19}$$

jsou lineární kombinace vektorů $u^{[1]} = \mathrm{col}\,(0, 1, 0, 1)$, $u^{[2]} = \mathrm{col}\,(-2, 0, 3, 0)$. Hledejme vektor $h^{[1]}$, který je prvním vektorem řetězu, jehož délka je větší než 1. Je $h^{[1]} = \alpha\,u^{[1]} + \beta\,u^{[2]}$, kde $\alpha, \beta \in C$, $|\alpha| + |\beta| > 0$, tedy $h^{[1]} = \mathrm{col}\,(-2\beta, \alpha, 3\beta, \alpha)$. Druhý vektor řetězu $h^{[2]}$ splňuje rovnici

$$(A^{[4]} - I)\,h^{[2]} = h^{[1]}\,. \tag{1.20}$$

Rovnice (1.20) má řešení právě tehdy, jestliže hodnost matice $A^{[4]} - I$ a hodnost matice rozšířené [tj. matice $A^{[4]} - I$ rozšířené o sloupec $\mathrm{col}\,(-2\beta, \alpha, 3\beta, \alpha)$] jsou si rovny. To nastane právě tehdy, je-li $\alpha = -6\beta$. Zvolme např. $\alpha = -6$, $\beta = 1$, tedy $h^{[1]} = (-2, -6, 3, -6)$. Vektor $h^{[1]}$ je určen jednoznačně až na multiplikativní faktor; proto existuje pouze jeden řetěz délky větší než 1, a tak bude $k_1 = 3$, $k_2 = 1$,

$$Q = \begin{pmatrix} 1, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}.$$

Z rovnice (1.20) vypočteme, že je $h^{[2]} = u^{[3]} + \alpha_1 u^{[1]} + \beta_1 u^{[2]}$, kde $u^{[3]} = \text{col}(1/3, -1, 0, 0)$, tj. $h^{[2]} = \text{col}(1/3 - 2\beta_1, -1 + \alpha_1, 3\beta_1, \alpha_1)$. Čísla α_1 a β_1 určíme tak, aby existoval vektor $h^{[3]}$ splňující rovnici $(A^{[4]} - I)\,h^{[3]} = h^{[2]}$. To nastane právě tehdy, jestliže $\alpha_1 = 1 - 6\beta_1$. Zvolme např. $\alpha_1 = 1$, $\beta_1 = 0$, tedy $h^{[2]} = \text{col}(1/3, 0, 0, 1)$. Najdeme $h^{[3]} = (0, 0, 2/3, 1/3)$. Řetěz délky 1 se skládá z jediného vektoru $h^{[4]}$, který splňuje (1.19) a je lineárně nezávislý na $h^{[1]}$; můžeme např. položit $h^{[4]} = \text{col}(0, 1, 0, 1)$. Došli jsme tak k fundamentální matici rovnice (1.18)

$$\begin{pmatrix} -2\,e^t, & (-2t + 1/3)\,e^t, & (-t^2 + t/3)\,e^t, & 0 \\ -6\,e^t, & -6t\,e^t, & -3t^2\,e^t, & e^t \\ 3\,e^t, & 3t\,e^t, & (3t^2/2 + 2/3)\,e^t, & 0 \\ -6\,e^t, & (-6t + 1)\,e^t, & (-3t^2 + t + 1/3)\,e^t, & e^t \end{pmatrix}.$$

Příklad (v): Hledejme fundamentální matici rovnice

$$\dot{x} = A^{[5]}x\,, \tag{1.21}$$

kde

$$A^{[5]} = \begin{pmatrix} -13, & 5, & 4, & 2 \\ 0, & -1, & 0, & 0 \\ -20, & 12, & 9, & 5 \\ -12, & 6, & 4, & 1 \end{pmatrix}.$$

Charakteristická rovnice je $(\lambda + 1)^4 = 0$. Matice

$$A^{[5]} + I = \begin{pmatrix} -12, & 5, & 4, & 2 \\ 0, & 0, & 0, & 0 \\ -20, & 12, & 10, & 5 \\ -12, & 6, & 4, & 2 \end{pmatrix}$$

má hodnost 2 (čtvrtý řádek je šestinásobek prvního minus dvojnásobek třetího). Proto bude $r = 2$, $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $k_1 + k_2 = 4$, $k_1 \geqq 1$, $k_2 \geqq 1$. Všechna řešení rovnice

$$(A^{[5]} + I)\,z = 0 \tag{1.22}$$

jsou lineární kombinace vektorů $u^{[1]} = \text{col}(1, 0, 3, 0)$, $u^{[2]} = \text{col}(0, 0, 1, -2)$. Hledejme vektor $h^{[1]}$, který je prvním vektorem řetězu, jehož délka je větší než 1. Je $h^{[1]} = \alpha\,u^{[1]} + \beta\,u^{[2]}$, kde $\alpha, \beta \in C$, $|\alpha| + |\beta| > 0$, tedy $h^{[1]} = \text{col}(\alpha, 0, 3\alpha + \beta, -2\beta)$. Druhý vektor řetězu $h^{[2]}$ splňuje rovnici

$$(A^{[5]} + I)\,h^{[2]} = h^{[1]}\,. \tag{1.23}$$

Rovnice (1.23) má řešení právě tehdy, jestliže hodnost matice $A^{[5]} + I$ je rovna hodnosti matice rozšířené. To však nastane při libovolné volbě čísel α, β. Proto můžeme zvolit $\alpha = 1$, $\beta = 0$, tedy $h^{[1]} = u^{[1]}$; také vektor $h^{[3]} = u^{[2]}$ je prvním vektorem řetězu, jehož délka je větší než 1. Proto je $k_1 = 2 = k_2$,

$$Q = \begin{pmatrix} -1, & 1, & 0, & 0 \\ 0, & -1, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & -1, & 1 \\ 0, & 0, & 0, & -1 \end{pmatrix}.$$

Vektor $h^{[2]}$ najdeme z rovnice (1.23), $h^{[2]} = \mathrm{col}\,(0, -1, 0, 3)$. Vektor $h^{[4]}$ najdeme z rovnice $(A^{[5]} + I)\, h^{[4]} = h^{[3]}$; $h^{[4]} = \mathrm{col}\,(0, -2, 0, 5)$. Dospíváme tak k fundamentální matici rovnice (1.21)

$$\begin{pmatrix} \mathrm{e}^{-t}, & t\,\mathrm{e}^{-t}, & 0, & 0 \\ 0, & -\mathrm{e}^{-t}, & 0, & -2\,\mathrm{e}^{-t} \\ 3\,\mathrm{e}^{-t}, & 3t\,\mathrm{e}^{-t}, & \mathrm{e}^{-t}, & t\,\mathrm{e}^{-t} \\ 0, & 3\,\mathrm{e}^{-t}, & -2\,\mathrm{e}^{-t}, & (-2t + 5)\,\mathrm{e}^{-t} \end{pmatrix}.$$

5.2. Budeme říkat, že *vektor* $z = \mathrm{col}\,(z_1, \ldots, z_n) \in C^n$ je *reálný*, jsou-li čísla $z_1, \ldots, z_n$ reálná. Obdobně budeme říkat, že *matice* $D = (D_{ij}) \in M_n(C)$ je *reálná*, jsou-li čísla D_{ij}, $i, j = 1, 2, \ldots, n$, reálná. Také *funkci* $w\colon \mathscr{I} \to C^n$ [$Q\colon \mathscr{I} \to M_n(C)$] budeme nazývat *reálnou*, je-li vektor $w(t)$ reálný [matice $Q(t)$ reálná] pro $t \in \mathscr{I}$. Je-li $u \in C$, pak $\bar{u}$ znamená číslo komplexně sdružené; je-li $v = \mathrm{col}\,(v_1, \ldots, v_n) \in C^n$, $B = (B_{ij}) \in M_n(C)$, pak vektor $\bar{v} \in C^n$ a matice $\bar{B} \in M_n(C)$ jsou definovány rovnicemi $\bar{v} = \mathrm{col}\,(\bar{v}_1, \ldots, \bar{v}_n)$, $\bar{B} = (\bar{B}_{ij})$ a nazývají se *komplexně sdružený vektor k* v (*komplexně sdružená matice k* B).

V metodě vyložené v odst. 5.1 musíme pracovat v oboru komplexních čísel. Je-li totiž matice A reálná a existuje-li alespoň jedno vlastní číslo, které není reálné, potom fundamentální matice rovnice (1.1) sestavená z řešení (1.12) nemůže být reálná [v Poznámce 5.1.2 jsme dokázali, že charakteristický polynom matice Q je roven charakteristickému polynomu matice A, tedy každé vlastní číslo matice A je současně vlastním číslem matice Q a naopak; jedno z řešení (1.12) je funkce

$$h^{[s_j+1]}\,\mathrm{e}^{\lambda_j t}, \quad \text{kde} \quad h^{[s_j+1]} \neq 0$$

a λ_j není reálné, a proto také funkce $h^{[s_j+1]}\,\mathrm{e}^{\lambda_j t}$ není reálná]. Přitom z odst. 4.4 víme, že v případě reálné matice A existuje reálná fundamentální matice rovnice (1.1). V tomto odstavci vyložíme, jak lze modifikovat postup z odst. 5.1, abychom dostali reálný fundamentální systém v případě reálné matice A.

Snadno se lze přesvědčit, že platí toto tvrzení: *Je-li* $A \in M_n(R)$ *a je-li* λ *vlastní číslo matice* A, $\mathrm{Im}\,\lambda \neq 0$, *pak také* $\bar{\lambda}$ *je vlastní číslo matice* A *a násobnosti obou vlastních čísel jsou stejné.*

Dále platí toto silnější znění věty o Jordanově kanonickém tvaru matice A (viz [60], Větu 30):

Nechť $A \in M_n(R)$. *Potom existuje taková regulární matice*

$$H = ((h^{[1]}, \ldots, h^{[n]})) \in M_n(C),$$

že platí $Q = H^{-1}AH$, *kde* Q *má tvar* (1.4), *tj. platí* (1.10). *Přitom jsou splněny ještě tyto dvě podmínky:*

(i) *Jestliže řetěz*

$$h^{[s_j+1]}, \ldots, h^{[s_j+k_j]}$$

patří k reálnému vlastnímu číslu λ_j, *pak vektory* $h^{[s_j+1]}, \ldots, h^{[s_j+k_j]}$ *jsou reálné.*

(ii) *Řetězy, které patří k vlastním číslům s imaginární částí různou od nuly, lze rozdělit do dvojic tak, že oba řetězy v každé dvojici patří ke komplexně sdruženým vlastním číslům, mají stejnou délku a m-tý vektor prvního řetězu z dvojice je komplexně sdružený s m-tým vektorem druhého řetězu dvojice.*

Je-li

$$h^{[s_j+1]}, \ldots, h^{[s_j+k_j]}$$

řetěz patřící k reálnému λ_j, pak řešení (1.12) jsou reálná. Je-li

$$h^{[s_j+1]}, \ldots, h^{[s_j+k_j]} \quad \text{a} \quad h^{[s_l+1]}, \ldots, h^{[s_l+k_l]}$$

dvojice řetězů popsaná v (ii), je

$$\lambda_j = \bar{\lambda}_l\,, \quad k_j = k_l \quad \text{a} \quad h^{[s_j+m]} = \overline{h^{[s_l+m]}}\,, \quad m = 1, 2, \ldots, k_j\,.$$

V tomto případě ve fundamentální soustavě $w^{[1]}, \ldots, w^{[n]}$ [viz (1.12)] funkce $w^{[s_l+m]}$, je komplexně sdružená k $w^{[s_j+m]}$; dvojici $w^{[s_j+m]}$, $w^{[s_l+m]}$, $m = 1, 2, \ldots, k_j$, nahradíme dvojicí

$$\tfrac{1}{2}\left(w^{[s_j+m]} + w^{[s_l+m]}\right), \quad \frac{1}{2\mathrm{i}}\left(w^{[s_j+m]} - w^{[s_l+m]}\right). \tag{2.1}$$

(2.1) je dvojice reálných řešení rovnice (1.1). Použijeme-li tohoto postupu pro všechny dvojice řetězů popsané v (ii), pak z fundamentální soustavy $w^{[1]}, \ldots, w^{[n]}$ odvodíme n reálných řešení rovnice (2.1). Tato reálná řešení tvoří fundamentální systém, neboť z nich lze lineárními operacemi odvodit řešení $w^{[1]}, \ldots, w^{[n]}$; o těch víme, že fundamentální systém tvoří.

Příklad: Hledejme fundamentální matici rovnice

$$\dot{x} = A^{[1]}x\,, \tag{2.2}$$

kde

$$A^{[1]} = \begin{pmatrix} -7, & 2, & -1, & 0 \\ -23, & 3, & -8, & 1 \\ 10, & -2, & 3, & 0 \\ -24, & 4, & -7, & 1 \end{pmatrix}.$$

Charakteristický polynom je $\lambda^4 + 2\lambda^2 + 1$, má kořeny $\lambda_1 = \mathrm{i} = \sqrt{(-1)}$, $\lambda_2 = -\mathrm{i}$, oba s násobností 2. Matice $A^{[1]} - \mathrm{i}I$, $A^{[1]} + \mathrm{i}I$ mají hodnost 3; proto existují 2 řetězy, $r = 2$, $\lambda_1 = \mathrm{i}$, $\lambda_2 = -\mathrm{i}$, $k_1 = k_2 = 2$ [řetězy tvoří jednu dvojici popsanou v (ii)].

Z rovnice $(A^{[1]} - \mathrm{i}I)\, h^{[1]} = 0$ vypočteme

$$h^{[1]} = \operatorname{col}\left(1, \tfrac{2}{5}[2 + \mathrm{i}], -\tfrac{1}{5}[2 + \mathrm{i}], 3\right),$$

z rovnice $(A^{[1]} - \mathrm{i}I)\, h^{[2]} = h^{[1]}$ vypočteme

$$h^{[2]} = \operatorname{col}\left(0, \tfrac{1}{25}[11 - 2\mathrm{i}], \tfrac{1}{25}[-3 - 4\mathrm{i}], \tfrac{1}{5}[3 - \mathrm{i}]\right).$$

Položíme $h^{[3]} = \overline{h^{[1]}}$, $h^{[4]} = \overline{h^{[2]}}$; $h^{[3]}, h^{[4]}$ je řetěz patřící k číslu $-\mathrm{i}$. Vektory $h^{[1]}, h^{[2]}, h^{[3]}, h^{[4]}$ jsou lineárně nezávislé a tak dostáváme řešení

$$w^{[1]}(t) = \operatorname{col}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \tfrac{2}{5}[2 + \mathrm{i}]\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, -\tfrac{1}{5}[2 + \mathrm{i}]\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, 3\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right),$$

$$w^{[2]}(t) = \operatorname{col}\left(t\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \left[t\, \tfrac{2}{5}(2 + \mathrm{i}) + \tfrac{1}{25}(11 - 2\mathrm{i})\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}t},\right.$$
$$\left.\left[-t\, \tfrac{1}{5}(2 + \mathrm{i}) - \tfrac{1}{25}(3 + 4\mathrm{i})\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}, \left[3t + \tfrac{1}{5}(3 - \mathrm{i})\right] \mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right),$$

která spolu s řešením $w^{[3]}(t) = \overline{w^{[1]}(t)}$, $w^{[4]}(t) = \overline{w^{[2]}(t)}$ tvoří fundamentální soustavu rovnice (2.2). Reálná fundamentální soustava je

$$\tfrac{1}{2}(w^{[1]} + w^{[3]}), \quad \frac{1}{2\mathrm{i}}(w^{[1]} - w^{[3]}), \quad \tfrac{1}{2}(w^{[2]} + w^{[4]}), \quad \frac{1}{2\mathrm{i}}(w^{[2]} - w^{[4]}),$$

tj.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ \frac{14}{5} \\ -\frac{7}{5} \\ 3 \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \sin t, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{14}{5} \\ -\frac{7}{5} \\ 3 \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{21}{5} \\ -\frac{1}{5} \\ 0 \end{pmatrix} \cos t,$$

$$\begin{pmatrix} t \\ \frac{14}{5}t + \frac{11}{25} \\ -\frac{7}{5}t - \frac{3}{25} \\ 3t - \frac{3}{5} \end{pmatrix} \cos t - \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{5}t - \frac{2}{25} \\ -\frac{1}{5}t - \frac{4}{25} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \sin t,$$

$$\begin{pmatrix} t \\ \frac{14}{5}t + \frac{11}{25} \\ -\frac{7}{5}t - \frac{3}{25} \\ 3t - \frac{3}{5} \end{pmatrix} \sin t + \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{2}{5}t - \frac{2}{25} \\ -\frac{1}{5}t - \frac{4}{25} \\ -\frac{1}{5} \end{pmatrix} \cos t.$$

5.2.1. Poznámka: Nechť matice $A \in M_n(R)$. Reálnou fundamentální matici rovnice (1.1) můžeme sestrojit také tak, že užijeme zobecnění věty o Jordanově normálním tvaru (viz [52], kap. V, § 4, Větu 4). Postup je obdobný jako v odst. 5.1, a proto bude vyložen jen stručně. Podle této modifikace existuje k dané matici A regulární matice $\tilde{H} \in M_n(R)$ tak, že matice $\tilde{Q} = \tilde{H}^{-1} A \tilde{H}$ má blokově diagonální tvar

$$\tilde{Q} = \begin{pmatrix} D_1 & & & \\ & D_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & D_s \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

kde každá matice D_j má buď tvar

$$\begin{pmatrix} \lambda_j, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & \lambda_j, & 1, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & \lambda_j \end{pmatrix} \tag{2.4}$$

(λ_j je reálné vlastní číslo matice A, $\lambda_j \neq 0$), nebo

$$\begin{pmatrix} \mu_j, & \nu_j, & 1, & 0, & \ldots, & & 0 \\ -\nu_j, & \mu_j, & 0, & 1, & \ldots, & & 0 \\ 0, & 0, & \mu_j, & \nu_j, & 1, 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 0, & -\nu_j, & \mu_j, & 0, 1, & \ldots, & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & 0, & \ldots, & & & \mu_j, & \nu_j \\ 0, & 0, & \ldots, & & & -\nu_j, & \mu_j \end{pmatrix} . \tag{2.5}$$

($\mu_j + i\nu_j$ je vlastní číslo matice A, $\nu_j \neq 0$). Dále postupujeme obdobně jako v odst. 5.1. Využijeme přitom té skutečnosti, že $V_{\mu\upsilon 2k}(t)$ je fundamentální matice soustavy (2.6); matice $V_{\mu\upsilon 2k}(t)$ a soustava (2.6) jsou zapsány na str. 121.

Proto fundamentální matici W rovnice $\dot{x} = \tilde{Q}x$ můžeme zapsat jako blokově diagonální matici

$$W(t) = \begin{pmatrix} Z_1(t) & & & \\ & Z_2(t) & & \\ & & \cdots & \\ & & & Z_m(t) \end{pmatrix},$$

kde $Z_j(t) = U_{\lambda_j k_j}(t)$ [viz (1.7)] nebo $Z_j(t) = V_{\mu_j \nu_j 2k}(t)$, a fundamentální matici S rovnice (1.1) můžeme napsat ve tvaru $S(t) = HW(t)$.

5.3. Způsob, jakým jsme sestrojili řešení rovnice (1.1) v odst. 5.1 a 5.2, umožňuje nám vyšetřit některé důležité vlastnosti těchto rovnic. Budeme stále užívat téhož označení jako v odst. 5.1. Položme

$$\varrho_1 = \min \{\operatorname{Re} \lambda_i | \ i = 1, 2, \ldots, r\} ,$$
$$\varrho_2 = \max \{\operatorname{Re} \lambda_i | \ i = 1, 2, \ldots, r\}$$

[viz (1.4)]. Nechť $j_1, j_2, \ldots, j_l$ jsou všechny indexy j takové, že $\varrho_1 = \operatorname{Re} \lambda_{j_s}$ pro $s = 1, 2, \ldots, l$; položme

$$\mu_1 = \max \{k_j | \ j = j_1, j_2, \ldots, j_l\} .$$

Nechť $i_1, i_2, \ldots, i_p$ jsou všechny indexy i takové, že $\varrho_2 = \operatorname{Re} \lambda_{i_s}$ pro $s = 1, 2, \ldots, p$; položme

$$\mu_2 = \max \{k_i | \ i = i_1, i_2, \ldots, i_p\} .$$

5.3.1. Věta: *Existují* $\varkappa_1, \varkappa_2 \in R$ *tak, že platí*

$$\|U(t)\| \leqq \varkappa_1(1 + |t^{\mu_1}|)\, e^{\varrho_1 t} \quad pro \quad t \leqq 0\,, \tag{3.1}$$

$$\|U(t)\| \leqq \varkappa_2(1 + t^{\mu_2})\, e^{\varrho_2 t} \quad pro \quad t \geqq 0\,, \tag{3.2}$$

kde U je definováno v (1.8).

Důkaz: Položme $U(t) = (U_{ij}(t))$; podle (1.7) existuje $\varkappa_3 > 0$ tak, že je $|U_{ij}(t)| \leqq \varkappa_3(1 + |t|^{\mu_1})\, e^{\varrho_1 t}$ pro $t \leqq 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Obdobně existuje $\varkappa_4$ tak, že je $|U_{ij}(t)| \leqq \varkappa_4(1 + t^{\mu_2})\, e^{\varrho_2 t}$ pro $t \geqq 0$, $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Podle (3.2.13) platí (3.1) a (3.2), kde $\varkappa_1 = n^2\eta_3\varkappa_3$, $\varkappa_2 = n^2\eta_3\varkappa_4$. Důkaz je dokončen.

Položme

$$W(t) = HU(t)\, H^{-1}\,; \tag{3.3}$$

$HU(t)$ je fundamentální matice rovnice (1.1) a podle Věty 4.4.10 je $W(t)$ fundamentální matice rovnice (1.1). Protože je $U(0) = I$, je i $W(0) = I$.

5.3.2. Věta: *Existují čísla* $\varkappa_5, \varkappa_6$ *tak, že platí*

$$\|W(t)\| \leqq \varkappa_5(1 + |t|^{\mu_1})\, e^{\varrho_1 t} \quad pro \quad t \leqq 0\,, \tag{3.4}$$

$$\|W(t)\| \leqq \varkappa_6(1 + t^{\mu_2})\, e^{\varrho_2 t} \quad pro \quad t \geqq 0\,. \tag{3.5}$$

Pro každé maximální řešení x rovnice (1.1) *platí*

$$\|x(t)\| \leqq \|x(0)\|\, \varkappa_5(1 + |t|^{\mu_1})\, e^{\varrho_1 t} \quad pro \quad t \leqq 0\,, \tag{3.6}$$

$$\|x(t)\| \leqq \|x(0)\|\, \varkappa_6(1 + t^{\mu_2})\; e^{\varrho_2 t} \quad pro \quad t \geqq 0\,. \tag{3.7}$$

Důkaz: (3.4) plyne z (3.3) a (3.1), položíme-li $\varkappa_5 = \varkappa_1 \|H\|\, \|H\|^{-1}$. Obdobně plyne (3.5) z (3.3) a (3.2). Protože je $W(0) = I$, je $W(t)\, x(0)$ řešení rovnice (1.1), které je rovno $x(0)$ pro $t = 0$, tedy je $W(t)\, x(0) = x(t)$ pro $t \in R$, (3.6) plyne z (3.4) a (3.7) plyne z (3.5).

5.3.3. Věta: (i) *Jestliže platí*

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0 \tag{3.8}$$

pro každé maximální řešení rovnice (1.1), *pak platí*

$$\operatorname{Re} \lambda < 0 \textit{ pro každé vlastní číslo } \lambda \textit{ matice } A. \tag{3.9}$$

(ii) *Platí-li* (3.9), *pak je*

$$\varrho_2 = \max \{\operatorname{Re} \lambda |\ \lambda \textit{ je vlastní číslo matice } A\} < 0$$

a ke každému ϱ, $\varrho_2 < -\varrho < 0$ *existuje* $\varkappa(\varrho)$ *tak, že je*

$$\|x(t)\| \leqq \varkappa(\varrho)\, e^{-\varrho t} \|x(0)\| \quad pro \quad t \geqq 0 \tag{3.10}$$

pro každé maximální řešení x rovnice (1.1).

$$
V_{\mu\nu 2k}(t) = \begin{pmatrix}
e^{\mu t}\cos\nu t, & e^{\mu t}\sin\nu t, & te^{\mu t}\cos\nu t, & te^{\mu t}\sin\nu t, & \dots, & \dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}\,e^{\mu t}\cos\nu t, & \dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}\,e^{\mu t}\sin\nu t \\
-e^{\mu t}\sin\nu t, & e^{\mu t}\cos\nu t, & -te^{\mu t}\sin\nu t, & te^{\mu t}\cos\nu t, & \dots, & -\dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}\,e^{\mu t}\sin\nu t, & \dfrac{t^{k-1}}{(k-1)!}\,e^{\mu t}\cos\nu t \\
0, & 0, & e^{\mu t}\cos\nu t, & e^{\mu t}\sin\nu t, & \dots, & \dfrac{t^{k-2}}{(k-2)!}\,e^{\mu t}\cos\nu t, & \dfrac{t^{k-2}}{(k-2)!}\,e^{\mu t}\sin\nu t \\
0, & 0, & -e^{\mu t}\sin\nu t, & e^{\mu t}\cos\nu t, & \dots, & -\dfrac{t^{k-2}}{(k-2)!}\,e^{\mu t}\sin\nu t, & \dfrac{t^{k-2}}{(k-2)!}\,e^{\mu t}\cos\nu t \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
0, & 0, & 0, & 0, & \dots, & e^{\mu t}\cos\nu t, & e^{\mu t}\sin\nu t \\
0, & 0, & 0, & 0, & \dots, & -e^{\mu t}\sin\nu t, & e^{\mu t}\cos\nu t
\end{pmatrix}.
$$

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= \mu x_1 + \nu x_2 + x_3, \\
\dot{x}_2 &= -\nu x_1 + \mu x_2 + x_4, \\
\dot{x}_3 &= \mu x_3 + \nu x_4 + x_5, \\
\dot{x}_4 &= -\nu x_3 + \mu x_4 + x_6, \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\dot{x}_{2k-1} &= \mu x_{2k-1} + \nu x_{2k}, \\
\dot{x}_{2k} &= -\nu x_{2k-1} + \mu x_{2k}.
\end{aligned} \tag{2.6}
$$

Důkaz: (i) Neplatí-li (3.9), pak existuje $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$ tak, že $\operatorname{Re} \lambda_j \geqq 0$, a řešení $w_{s_j+1}(t) = h_{s_j+1} \, e^{\lambda_j t}$ [viz (1.12)] nesplňuje (3.8).

(ii) Jestliže platí (3.9), pak platí (3.7), tedy

$$\|x(t)\| \leqq \|x(0)\| \, e^{-\varrho t} \varkappa_4 (1 + t^{\mu_2}) \, e^{(\varrho + \varrho_2)t}, \quad \varrho + \varrho_2 < 0, \quad t \geqq 0,$$

a (3.10) platí, položíme-li

$$\varkappa(\varrho) = \varkappa_4 \max \{(1 + t^{\mu_2}) \, e^{(\varrho + \varrho_2)t} \mid t \geqq 0\}.$$

5.3.4. Poznámka: Z Věty 5.3.3 plyne, že (3.8) platí právě tehdy, platí-li (3.9). Chceme-li zjistit, že platí (3.8), nemusíme hledat vlastní čísla matice A; vypočteme charakteristický polynom matice A a užijeme Hurwitzovy věty (viz Dodatek 5.2).

5.3.5. Věta: *Každé maximální řešení x rovnice (1.1) je ohraničené pro $t \to \infty$ (tj. $\limsup_{t \to \infty} \|x(t)\| < \infty$) právě tehdy, je-li splněna tato podmínka:*

$$\operatorname{Re} \lambda_j \leqq 0 \quad \textit{pro} \quad j = 1, 2, \ldots, r, \quad \textit{a je-li} \operatorname{Re} \lambda_j = 0, \quad \textit{pak} \quad k_j = 1. \tag{3.11}$$

Důkaz: Platí-li (3.11), pak je $\limsup_{t \to \infty} \|w^{[j]}(t)\| < \infty$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$ [viz (1.12)], a protože $w^{[1]}, \ldots, w^{[n]}$ je fundamentální systém rovnice (1.1), je $\limsup_{t \to \infty} \|x(t)\| < \infty$ pro každé maximální řešení x rovnice (1.1). Neplatí-li (3.11), pak buď existuje takové $j \in \{1, 2, \ldots, r\}$, že je $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$, nebo $\operatorname{Re} \lambda_j = 0$, $k_j > 1$. V prvním případě je

$$\lim_{t \to \infty} \|w^{[s_j+1]}(t)\| = \infty,$$

v druhém případě je

$$\lim_{t \to \infty} \|w^{[s_j+2]}(t)\| = \infty.$$

5.3.6. Věta: *Nutná a postačující podmínka, aby každé maximální řešení x rovnice (1.1) bylo omezené (na R), je*

$$\operatorname{Re} \lambda_j = 0, \quad k_j = 1, \quad j = 1, 2, \ldots, r. \tag{3.12}$$

Věta 5.3.6 se dokáže obdobně jako Věta 5.3.5.

5.3.7. Definice: Nechť $B \in M_n(C)$. Definujme množiny $Y_{st}(B)$, $Y_0(B)$, $Y_{nest}(B)$.

(i) $Y_{st}(B)$ je množina takových $z \in C^n$, že platí: Je-li x maximální řešení rovnice

$$\dot{x} = Bx \tag{3.13}$$

splňující podmínku $x(0) = z$, pak $\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$.

(ii) $Y_0(B)$ je množina takových $z \in C^n$, že platí: Je-li x maximální řešení rovnice

(3.13) splňující podmínku $x(0) = z$, pak funkce $(1 + |t|^n)^{-1} \|x(t)\|$ je omezená (na R).

(iii) $Y_{nest}(B)$ je množina takových $z \in C^n$, že platí: Je-li x maximální řešení rovnice (3.13) splňující podmínku $x(0) = z$, pak $\lim_{t \to -\infty} x(t) = 0$.

$Y_{st}(B)$ se nazývá *stabilní podprostor matice B*; $Y_{nest}(B)$ se nazývá *nestabilní podprostor matice B*.

5.3.8. Definice: *Množina* $Z \subset C^n$ se nazývá *invariantní vzhledem k rovnici* (3.13), jestliže platí: Je-li $z \in Z$, pak trajektorie rovnice (3.13), která obsahuje bod z, je částí množiny Z.

Podle Poznámky 5.1.1 mohou být bloky $\lambda_j I_{k_j} + P_j$ na diagonále matice Q ve vyjádření (1.4) uspořádány libovolně; můžeme tedy bez ztráty na obecnosti vycházet z předpokladu, že existují celá čísla p, q, $0 \leqq p \leqq q \leqq r$, tak, že platí

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \lambda_j &< 0 \quad \text{pro} \quad j = 1, 2, \ldots, p\,, \\ \operatorname{Re} \lambda_j &= 0 \quad \text{pro} \quad j = p + 1, \ldots, q\,, \\ \operatorname{Re} \lambda_j &> 0 \quad \text{pro} \quad j = q + 1, \ldots, r\,. \end{aligned}$$

(Je-li např. $p = 0$, neexistuje j takové, aby bylo $\operatorname{Re} \lambda_j < 0$; je-li $p = q = 0$, je $\operatorname{Re} \lambda_j > 0$ pro $j = 1, 2, \ldots, r$; atd.)

Z (1.8) a (1.7) plyne, že platí

5.3.9. Věta: *Je*

$$\begin{aligned} Y_{st}(Q) &= \{z = \operatorname{col}(z_1, \ldots, z_n) \in C^n |\ z_l = 0 \\ &\qquad \textit{pro} \quad l = s_{p+1} + 1, s_{p+1} + 2, \ldots, n\}\,, \\ Y_0(Q) &= \{z \in C^n |\ z_l = 0 \quad \textit{pro} \quad l = 1, 2, \ldots, s_p + k_p \\ &\qquad \textit{a pro} \quad l = s_{q+1} + 1, s_{q+1} + 2, \ldots, n\}\,, \\ Y_{nest}(Q) &= \{z \in C^n |\ z_l = 0 \quad \textit{pro} \quad l = 1, 2, \ldots, s_{q+1}\}\,. \end{aligned}$$

Množiny $Y_{st}(Q)$, $Y_0(Q)$, $Y_{nest}(Q)$ jsou lineární podprostory v C^n (viz Dodatek 5.3), jsou invariantní vzhledem k rovnici (1.3) a platí

$$C^n = Y_{st}(Q) \dotplus Y_0(Q) \dotplus Y_{nest}(Q)\,.$$

Každé řešení x rovnice (1.1) můžeme psát ve tvaru $x(t) = Hy(t)$, kde y je řešení rovnice (1.3), a naopak, je-li y řešením rovnice (1.3), pak funkce $Hy(t)$ je řešením rovnice (1.1). Proto z Věty 5.3.9 plyne

5.3.10. Věta: $Y_{st}(A)$ *je lineární podprostor v* C^n, *jehož báze je* $h^{[1]}, \ldots, h^{[s_p + k_p]}$.
$Y_0(A)$ *je lineární podprostor v* C^n, *jehož báze je* $h^{[s_{p+1} + 1]}, \ldots, h^{[s_q + k_q]}$.
$Y_{nest}(A)$ *je lineární podprostor v* C^n, *jehož báze je* $h^{[s_{q+1} + 1]}, \ldots, h^{[n]}$.

Množiny $Y_{st}(A)$, $Y_0(A)$, $Y_{nest}(A)$ *jsou invariantní vzhledem k rovnici* (1.1) *a platí*

$$C^n = Y_{st}(A) \dotplus Y_0(A) \dotplus Y_{nest}(A) .$$

5.3.11. Poznámka: Vektor $v \in K^n$ se nazývá *kořenový vektor matice* A *odpovídající vlastnímu číslu* λ, existuje-li přirozené číslo k takové, že je $(A - \lambda I)^k v = 0$. Nechť λ je vlastní číslo matice A a nechť J je množina indexů j takových, že je $\lambda_j = \lambda$ [viz (1.4)]. Z rovnic (1.11) plyne, že vektory

$$h^{[s_j+1]}, h^{[s_j+2]}, \ldots, h^{[s_j+k_j]}, \quad j \in J, \tag{3.14}$$

a jejich lineární kombinace jsou kořenové vektory odpovídající vlastnímu λ. Platí také opak, tj. každý kořenový vektor odpovídající vlastnímu číslu λ je lineární kombinací vektorů (3.14). Odtud plyne, že prostor $Y_{st}(A)$ lze algebraicky charakterizovat takto: $Y_{st}(A)$ je nejmenší lineární podprostor v K^n, který obsahuje všechny kořenové vektory odpovídající vlastním číslům λ takovým, že $\operatorname{Re} \lambda < 0$. Obdobně $Y_0(A)$ je nejmenší lineární podprostor v K^n, který obsahuje všechny kořenové vektory odpovídající vlastním číslům λ takovým, že $\operatorname{Re} \lambda = 0$. $Y_{nest}(A)$ je nejmenší lineární podprostor v K^n, který obsahuje všechny kořenové vektory odpovídající vlastním číslům λ takovým, že $\operatorname{Re} \lambda > 0$.

5.3.12. Poznámka: Je-li matice $B \in M_n(R)$, můžeme pracovat v prostoru R^n a definovat množiny $Y_{st}(B)$, $Y_0(B)$, $Y_{nest}(B)$ stejným způsobem jako v Definici 5.3.7. Také pojem invariantní množina vzhledem k rovnici (1.1) se zavádí stejně jako v Definici 5.3.8. Rovněž pořadí bloků na diagonále matice $\tilde{Q}$ ve vyjádření (2.3) můžeme vybrat libovolným způsobem. Obdobně jako ve Větě 5.3.9 můžeme popsat množiny $Y_{st}(\tilde{Q})$, $Y_0(\tilde{Q})$, $Y_{nest}(\tilde{Q})$, a užijeme-li tvrzení z Poznámky 5.2.1, můžeme v reálném případě popsat množiny $Y_{st}(A)$, $Y_0(A)$, $Y_{nest}(A)$ obdobně jako ve Větě 5.3.10.

5.3.13. Poznámka: Vyšetřujme v R^4 rovnici

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 , \\ \dot{x}_2 &= -x_1 , \\ \dot{x}_3 &= \alpha x_4 , \\ \dot{x}_4 &= -\alpha x_3 . \end{aligned} \tag{3.15}$$

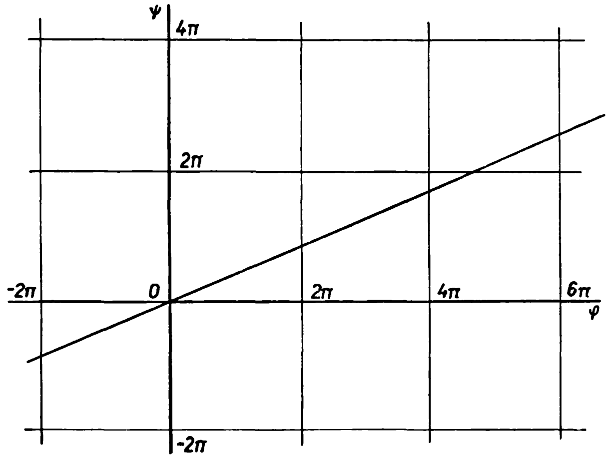
Snadno se přesvědčíme, že $T = S \times \tilde{S}$, kde $S = \{(x_1, x_2) | \, x_1^2 + x_2^2 = 1\}$, $\tilde{S} = \{(x_3, x_4) | \, x_3^2 + x_4^2 = 1\}$, je invariantní množina soustavy (3.15). Zaveďme zobrazení $\Theta: R^2 \to T$ rovnicí

$$\Theta(\varphi, \psi) = (\sin \varphi, \cos \varphi, \sin \psi, \cos \psi) .$$

Zobrazení Θ zobrazuje přímku $\psi = \alpha\varphi$ na trajektorii

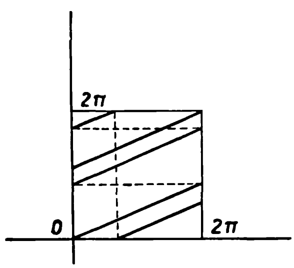
$$U = \{(\sin t, \cos t, \sin \alpha t, \cos \alpha t) | \, t \in R\}$$

soustavy (3.15) ležící na T. Zobrazení Θ ovšem není prosté a $\Theta(\varphi_1, \psi_1) = \Theta(\varphi_2, \psi_2)$ platí právě tehdy, existují-li celá čísla k_1, k_2 tak, že je $\varphi_1 = \varphi_2 + 2k_1\pi$, $\psi_1 = \psi_2 + 2k_2\pi$. Zobrazení Θ se stane jednoznačné, jestliže se omezíme na čtverec $Q = \{(\varphi, \psi) | \, 0 \leqq \varphi \leqq 2\pi, \, 0 \leqq \psi \leqq 2\pi\}$, kde ještě ztotožníme body $(\varphi, 0)$, $(\varphi, 2\pi)$ pro $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$ a body $(0, \psi)$, $(2\pi, \psi)$ pro $0 \leqq \psi \leqq 2\pi$. Je-li α racionální číslo, $\alpha = p/q$, kde p, q jsou nesoudělná přirozená čísla, jsou řešení soustavy (3.15) periodická (s periodou $2\pi q$), trajektorie U je uzavřená, přímka $\psi = \alpha\varphi$ prochází bodem



Obr. 23

$(2\pi q, 2\pi p)$ a množina, která je vzorem trajektorie U při zobrazení Θ: $Q \to T$, se skládá z konečného počtu úseček (případ $p = 1$, $q = 2$ je na obr. 23). Je-li α iracionální číslo, pak přímka $\psi = \alpha\varphi$ neprochází žádným bodem $(2\pi l, 2\pi m)$, kde l, m jsou celá, $l^2 + m^2 > 0$, a její obraz na čtverci Q [ke každému bodu (φ', ψ') přímky



Obr. 24

$\psi = \alpha\varphi$ najdeme bod $(\varphi'', \psi'') \in Q$ tak, že je $\varphi' - \varphi'' = 2\pi l$, $\psi' - \psi'' = 2\pi m$, kde l, m jsou celá čísla] se skládá z nekonečně mnoha úseček a vyplňuje hustě čtverec Q (viz obr. 24). Proto trajektorie U vyplňuje hustě plochu T, kde T je kartézský součin kružnic S, $\tilde{S}$, a v R^3 můžeme T znázornit jako prstenec (torus).

5.4. Rovnice

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = 0 \,, \tag{4.1}$$

kde $a_i \in C$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$, je ekvivalentní (viz odst. 4.8) s rovnicí

$$\dot{y} = By\,, \tag{4.2}$$

kde

$$B = \begin{pmatrix} 0, & 1, & 0, & \ldots, & 0 \\ 0, & 0, & 1, & \ldots, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0, & 0, & 0, & \ldots, & 1 \\ -a_n, & -a_{n-1}, & -a_{n-2}, & \ldots, & -a_1 \end{pmatrix}. \tag{4.3}$$

Fundamentální soustavu rovnice (4.1) lze napsat, známe-li kořeny polynomu

$$\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n \tag{4.4}$$

včetně jejich násobností. (4.4) se nazývá *charakteristický mnohočlen rovnice* (4.1) a je současně charakteristickým polynomem matice B.

5.4.1. Pomocná věta: *Nechť ζ je kořen mnohočlenu* (4.4) *násobnosti m. Potom funkce*

$$e^{\zeta t},\ t\,e^{\zeta t},\ \tfrac{1}{2}t^2\,e^{\zeta t}, \ldots, \frac{1}{(m-1)!}\,t^{m-1}\,e^{\zeta t}$$

jsou řešení rovnice (4.1).

Důkaz: Pro $\lambda \in C$ položme

$$p(\lambda) = \lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n\,.$$

Má-li funkce $y: R \to C$ spojité derivace do řádu n, nechť $P(y)$ je funkce, definovaná rovnicí

$$P(y)(t) = y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)}(t) + \ldots + a_n\,.$$

Definujme ještě funkce $y_{\lambda j}: R \to C$ rovnicí

$$y_{\lambda j}(t) = t^j\,e^{\lambda t} \text{ pro } t \in R,\ \lambda \in C,\ j = 0, 1, 2, \ldots.$$

Zřejmě platí

$$P(y_{\lambda 0})(t) = p(\lambda)\,y_{\lambda 0}(t)\,. \tag{4.5}$$

Je

$$\frac{\partial^i}{\partial\lambda^i}\frac{\partial^j}{\partial t^j}e^{\lambda t} = \frac{\partial^j}{\partial t^j}\frac{\partial^i}{\partial\lambda^i}e^{\lambda t} = \frac{\partial^j}{\partial t^j}(t^i\,e^{\lambda t})\,,\quad \frac{\partial^i}{\partial\lambda^i}y_{\lambda 0}(t) = y_{\lambda i}(t)\,,$$

a proto je

$$\frac{\partial^i}{\partial\lambda^i}P(y_{\lambda 0})(t) = P(y_{\lambda i})(t)$$

pro $t \in R,\ \lambda \in C,\ j = 0, 1, 2, \ldots,\ i = 0, 1, 2, \ldots.$

Z (4.5) odvodíme [derivujeme podle λ i-krát na obou stranách]

$$P(y_{\lambda i})(t) = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \frac{\mathrm{d}^j p}{\mathrm{d}\lambda^j}(\lambda)\, y_{\lambda, i-j}(t)\,, \tag{4.6}$$

a tedy je $P(y_{\zeta i}) = 0$ pro $i = 0, 1, \ldots, m - 1$, neboť je

$$\frac{\mathrm{d}^j p}{\mathrm{d}\lambda^j}(\zeta) = 0 \quad \text{pro} \quad j = 0, 1, \ldots, m - 1\,.$$

5.4.2. Pomocná věta: *Nechť je $\lambda_i \in C$, $\lambda_i \neq \lambda_j$ pro $i \neq j$, kde $i, j = 1, 2, \ldots, s$. Nechť p_i jsou nenulové polynomy pro $i = 1, 2, \ldots, s$. Potom funkce v_i: $R \to C$ definované rovnicemi*

$$v_i(t) = p_i(t)\, \mathrm{e}^{\lambda_i t}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, s\,, \tag{4.7}$$

jsou lineárně nezávislé.

Důkaz provedeme úplnou indukcí podle s. Pomocná věta zřejmě platí pro $s = 1$. Předpokládejme, že Pomocná věta 5.4.2 platí pro $s = k$. Kdyby tato pomocná věta neplatila pro $s = k + 1$, existovaly by funkce v_i tvaru (4.7) (kde $\lambda_i \neq \lambda_j$ pro $i \neq j$ a p_i jsou nenulové polynomy), které by byly lineárně závislé. Tedy by existovala čísla $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_{k+1} \in C$ tak, že by bylo

$$\vartheta_1 v_1 + \ldots + \vartheta_{k+1} v_{k+1} = 0\,, \tag{4.8}$$

a čísla ϑ_j přitom nejsou vesměs rovna nule. Dokonce všechna čísla ϑ_j jsou různá od nuly, neboť v opačném případě by Pomocná věta neplatila již pro $s \leqq k$. V rovnici (4.8) násobíme funkcí $\mathrm{e}^{-\lambda_{k+1} t}$; dostáváme

$$\begin{gathered} \vartheta_1 p_1(t)\, \mathrm{e}^{\varphi_1 t} + \ldots + \vartheta_k p_k(t)\, \mathrm{e}^{\varphi_k t} + \vartheta_{k+1} p_{k+1}(t) = 0 \quad \text{pro} \quad t \in R\,, \\ \varphi_i = \lambda_i - \lambda_{k+1}\,, \quad i = 1, 2, \ldots, k\,. \end{gathered} \tag{4.9}$$

Nechť r_i je stupeň polynomu p_i, $i = 1, 2, \ldots, k + 1$. Derivujeme-li v (4.9) $(r_{k+1} + 1)$-krát, dostaneme

$$\vartheta_1 q_1(t)\, \mathrm{e}^{\varphi_1 t} + \ldots + \vartheta_k q_k(t)\, \mathrm{e}^{\varphi_k t} = 0\,. \tag{4.10}$$

q_i je polynom stupně r_i [je-li $p_i(t) = \alpha t^{r_i} + \beta t^{r_i - 1} + \ldots$, je $q_i(t) = (\varphi_i)^{r_{k+1}+1} \alpha t^{r_i} + \ldots$ a je $\varphi_i = \lambda_i - \lambda_{k+1} \neq 0$], tedy q_i je nenulový mnohočlen. Dále je $\varphi_i \neq \varphi_j$ pro $i \neq j$, $\vartheta_i \neq 0$ pro $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Tedy podle (4.10) Pomocná věta neplatí již pro $s = k$ a to není možné. Pomocná věta 5.4.2 je tedy dokázána.

5.4.3. Věta: *Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ jsou všechny navzájem různé kořeny mnohočlenu* (4.4) *a nechť kořen λ_i má násobnost k_i, $i = 1, 2, \ldots, s$. Potom funkce*

$$t^j\, \mathrm{e}^{\lambda_i t}\,, \quad j = 0, 1, \ldots, k_i - 1\,, \quad i = 1, 2, \ldots, s\,, \tag{4.11}$$

tvoří fundamentální systém rovnice (4.1).

Důkaz: Je $k_1 + k_2 + \ldots + k_s = n$, tedy počet funkcí v (4.11) je n. Podle Pomocné věty 5.4.1 jsou funkce (4.11) řešení rovnice (4.1) a užitím Pomocné věty 5.4.2 lze snadno dokázat, že funkce (4.11) jsou lineárně nezávislé. Tedy funkce (4.11) tvoří fundamentální systém rovnice (4.1).

5.4.4. Poznámka: Hledáme-li řešení rovnice

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \ldots + a_n x = e^{\zeta t} q_r(t), \tag{4.12}$$

kde q_r je mnohočlen stupně r, můžeme se vyhnout užití metody variace konstant (viz Poznámku 4.8.10). Ukážeme, že jedno z řešení rovnice (4.12) má tvar $e^{\zeta t} s(t)\, t^k$, kde s je mnohočlen stupně r a k je stanoveno takto: Je-li ζ kořenem mnohočlenu (4.4), pak k je násobnost tohoto kořenu, není-li ζ kořenem mnohočlenu (4.4), pak $k = 0$.

Je-li totiž $i < k$ $(i = 0, 1, \ldots)$, pak podle (4.6) je

$$P(y_{\zeta i})(t) = 0 .$$

Pro $i \geqq k$ je podle (4.6)

$$P(y_{\zeta k})(t) = \frac{d^k p}{d\lambda^k}(\zeta)\, y_{\zeta 0}(t),$$

$$P(y_{\zeta, k+1})(t) = (k+1)\frac{d^k p}{d\lambda^k}(\zeta)\, y_{\zeta 1}(t) + \frac{d^{k+1} p}{d\lambda^{k+1}}(\zeta)\, y_{\zeta 0}(t),$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$P(y_{\zeta i})(t) = \binom{i}{k}\frac{d^k p}{d\lambda^k}(\zeta)\, y_{\zeta, i-k}(t) + z(t),$$

kde funkce z je lineární kombinace funkcí $y_{\zeta 0}, y_{\zeta 1}, \ldots, y_{\zeta, i-k-1}$.

Proto můžeme v rovnici (4.12) položit $x = x_1 + \alpha_1 y_{\zeta, k+r}$. Volíme-li $\alpha_1 \in C$ vhodným způsobem

$$\left(\alpha_1 = \beta_r \left[\binom{k+r}{k}\frac{d^k p}{d\lambda^k}(\zeta)\right]^{-1},\right.$$

kde β_r je koeficient u t^r v q_r), pak pro x_1 dostaneme rovnici

$$P(x_1)(t) = e^{\zeta t} q_{r-1}(t),$$

kde q_{r-1} je polynom stupně nejvýše $r - 1$, a nakonec najdeme

$$x = \sum_{i=1}^{r+1} \alpha_i y_{\zeta, k+r+1-i} = e^{\zeta t} t^k \sum_{i=1}^{r+1} \alpha_i t^{r+1-i},$$

což je řešení rovnice (4.12) v hledaném tvaru. Obdobně můžeme postupovat i v případě, že na pravé straně rovnice (4.12) je výraz

$$\sum_{l=1}^{m} e^{\xi_l t} q_l(t),$$

kde q_l jsou mnohočleny.

Je-li na pravé straně v rovnici (4.12) výraz $q_r(t)\cos\mu t$, užijeme vztahu $\cos\mu t = (e^{i\mu t} + e^{-i\mu t})/2$ a dostaneme řešení ve tvaru $u(t)\,e^{i\mu t} + v(t)\,e^{-i\mu t}$, kde u, v jsou mnohočleny. Přejdeme-li k funkcím $\cos\mu t$, $\sin\mu t$, dostaneme řešení ve tvaru $u_1(t)\cos\mu t + v_1(t)\sin\mu t$, kde u_1, v_1 jsou mnohočleny. To znamená: Je-li na pravé straně v (4.12) např. $\cos\mu t$, může se v řešení vyskytnout kosinus i sinus.

V obecném případě platí: Nechť čísla $a_1, \ldots, a_n$ jsou reálná a nechť na pravé straně v (4.12) je $u_2(t)\,e^{\zeta_1 t}\cos\zeta_2 t + v_2(t)\,e^{\zeta_1 t}\sin\zeta_2 t$, kde u_2, v_2 jsou mnohočleny s reálnými koeficienty, $\zeta_1, \zeta_2 \in R$, $\zeta_2 \neq 0$, a nechť čísla $\zeta_1 + i\zeta_2$, $\zeta_1 - i\zeta_2$ jsou k-násobné kořeny charakteristického mnohočlenu (4.4). Potom existuje řešení tvaru

$$u_3(t)\,t^k\,e^{\zeta_1 t}\cos\zeta_2 t + v_3(t)\,t^k\,e^{\zeta_1 t}\sin\zeta_2 t,$$

kde u_3, v_3 jsou mnohočleny s reálnými koeficienty; maximum stupňů mnohočlenů u_3, v_3 je rovno maximu stupňů mnohočlenů u_2, v_2.

Příklad: Hledejme řešení rovnice

$$x^{(3)} - x^{(2)} + \dot{x} - x = 2t - 1 + \cos t. \tag{4.13}$$

Charakteristický polynom (4.4) má kořeny $\pm i$, 1. Hledejme řešení rovnice

$$x^{(3)} - x^{(2)} + \dot{x} - x = 2t - 1.$$

Protože 0 není kořenem charakteristického polynomu, existuje řešení tvaru $At + B$ a dosazením najdeme řešení $-2t - 1$. Hledejme dále řešení rovnice

$$x^{(3)} - x^{(2)} + \dot{x} - x = \cos t.$$

Zde jde vlastně o funkce e^{it}, e^{-it} (na pravé straně) a čísla i, $-i$ jsou jednoduchými kořeny charakteristického mnohočlenu; tedy existuje řešení tvaru $t(A\cos t + B\sin t)$ a dosazením do rovnice dostaneme řešení $-t(\cos t + \sin t)/4$. Hledané řešení rovnice (4.13) je

$$-t(\cos t + \sin t)/4 - 2t - 1.$$

5.4.5. Poznámka: Jestliže k matici $A \in M_n(K)$ existuje regulární matice $E \in M_n(K)$ a matice $B \in M_n(K)$ tvaru (4.3) tak, že rovnice (1.1) přechází substitucí $x = Ey$ v rovnici (4.2), tj. platí-li

$$B = E^{-1}AE, \tag{4.14}$$

pak můžeme říkat, že vektorovou rovnici (1.1) lze převést autonomní lineární transformací v skalární rovnici n-tého řádu (4.1). To nastane právě v tom případě, jestliže tzv. *přirozený normální tvar matice A* je matice tvaru (4.3), kde $a_i \in C$ pro $i = 1, 2, \ldots, n$ (viz [52], kap. V, § 4, odst. 64 nebo [17], kap. VII, § 5; v [17] se užívá termínu „první přirozený normální tvar"). Pomocí pojmu invariantní faktor lze dokázat, že nutná a postačující podmínka, aby přirozený normální tvar matice A byla matice tvaru (4.3), je:

Je-li matice Q v (1.4) Jordanův tvar matice A, pak $\lambda_i \neq \lambda_j$ pro $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, r$. (4.15)

Tedy rovnici (1.1) lze převést autonomní lineární transformací v rovnici (4.1) právě tehdy, platí-li (4.15).

5.5. Rovnice

$$\tau^n \frac{d^n\xi}{d\tau^n} + \alpha_1 \tau^{n-1} \frac{d^{n-1}\xi}{d\tau^{n-1}} + \ldots + \alpha_{n-1}\tau \frac{d\xi}{d\tau} + \alpha_n \xi = 0\,, \tag{5.1}$$

kde $\tau \in (0, \infty)$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in C$, se nazývá *Eulerova diferenciální rovnice.* Proveďme substituci

$$t = \ln \tau\,, \quad \xi(\tau) = x(t)\,. \tag{5.2}$$

Je tedy

$$\frac{d\xi}{d\tau}(\tau) = \frac{dx}{dt}(t)\frac{1}{\tau}$$

a indukcí dokážeme, že pro $k = 1, 2, \ldots$ platí

$$\frac{d^k\xi}{d\tau^k}(\tau) = \left[\frac{d^kx}{dt^k}(t) + b_{1k}\frac{d^{k-1}}{dt^{k-1}}(t) + \ldots + b_{k-1,k}\frac{dx}{dt}(t)\right]\frac{1}{\tau^k}\,, \tag{5.3}$$

kde $b_{ik} \in R$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $k = 1, 2, 3, \ldots$.

Má-li funkce $\xi: (0, \infty) \to C$ spojité derivace do řádu n, definujeme funkci $P(\xi): (0, \infty) \to C$ rovnicí

$$P(\xi)(\tau) = \tau^n \frac{d^n\xi}{d\tau^n}(\tau) + \ldots + \alpha_{n-1}\tau \frac{d\xi}{d\tau}(\tau) + \alpha_n \xi(\tau)\,.$$

Z rovnic (5.3) plyne, že existují čísla $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n \in C$ tak, že položíme-li

$$P_1(u)(t) = \frac{d^nu}{dt^n}(t) + \ldots + \beta_{n-1}\frac{du}{dt}(t) + \beta_n u(t)\,,$$

potom platí

$$P(\xi)(\tau) = P_1(x)(t) \quad \text{pro} \quad \tau \in (0, \infty)\,, \quad t = \ln \tau\,, \tag{5.4}$$

jakmile funkce ξ má spojité derivace do řádu n, a funkce ξ a x jsou vázány transformací (5.2).

Nechť p_1 je charakteristický polynom rovnice

$$P_1(x) = 0, \tag{5.5}$$

tj.

$$\lambda^n + \beta_1\lambda^{n-1} + \ldots + \beta_{n-1}\lambda + \beta_n .$$

Nechť $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_s$ jsou všechny kořeny charakteristického polynomu rovnice (5.5) s násobnostmi $k_1, k_2, \ldots, k_s$. Podle Věty 5.4.3 funkce

$$t^j\,e^{\lambda_i t}, \quad j = 0, 1, \ldots, k_i - 1, \quad i = 1, 2, \ldots, s,$$

tvoří fundamentální systém rovnice (5.5) a tak podle (5.4) a (5.2) funkce

$$(\ln\tau)^j\,\tau^{\lambda_i}, \quad j = 0, 1, \ldots, k_i - 1, \quad i = 1, 2, \ldots, s, \tag{5.6}$$

tvoří fundamentální systém rovnice (5.1). Abychom snáze našli polynom p_1, vezměme funkce $y_\lambda: R \to C$, $\eta_\lambda: (0, \infty) \to C$ pro $\lambda \in C$, $y_\lambda(t) = e^{\lambda t}$, $\eta_\lambda(\tau) = \tau^\lambda$ $(= e^{\lambda \ln \tau})$. Je

$$P_1(y_\lambda)(t) = p_1(\lambda)\,e^{\lambda t}$$

[viz (4.5)] a obdobně je

$$P(\eta_\lambda)(\tau) = p(\lambda)\,\tau^\lambda, \quad \text{kde} \quad p(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)\ldots(\lambda - n + 1) +$$
$$+ \alpha_1\lambda(\lambda - 1)\ldots(\lambda - n + 2) + \ldots + \alpha_{n-1}\lambda + \alpha_n .$$

Podle (5.4) je $p_1(\lambda) = p(\lambda)$. Vycházíme-li z rovnice (5.1), napíšeme polynom p, najdeme jeho kořeny (včetně jejich násobností); fundamentální soustava rovnice (5.1) je dána v (5.6).

Příklad: Hledejme fundamentální soustavu rovnice

$$\tau^3 \frac{d^3x}{d\tau^3} + \tau^2 \frac{d^2x}{d\tau^2} + 3\tau \frac{dx}{d\tau} - 8x = 0 . \tag{5.7}$$

V tomto případě je

$$p(\lambda) = \lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2) + \lambda(\lambda - 1) + 3\lambda - 8 =$$
$$= \lambda^3 - 2\lambda^2 + 4\lambda - 8 = (\lambda^2 + 4)(\lambda - 2) .$$

Kořeny charakteristického polynomu jsou 2, 2i, −2i, fundamentální soustava je $\tau^2, \tau^{2i}, \tau^{-2i}$. Je ovšem $\tau^{2i} = e^{2i\ln\tau} = \cos(2\ln\tau) + i\sin(2\ln\tau)$. Tak dojdeme k reálné fundamentální soustavě τ^2, $\cos(2\ln\tau)$, $\sin(2\ln\tau)$.

5.6. Je-li $A \in M_n(K)$, $k = 1, 2, \ldots$, nechť $S_k(A)$ je částečný součet prvních k členů řady

$$I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \ldots . \tag{6.1}$$

Pro $k < m$ je

$$\|S_m(A) - S_k(A)\| \leqq \sum_{l=k}^{m-1} \frac{\|A\|^l}{l!}, \tag{6.2}$$

proto posloupnost $S_1(A), S_2(A), \dots$ je cauchyovská a řada (6.1) má součet, který označíme $\exp A$ nebo též e^A. Je tedy $\exp: M_n(C) \to M_n(C)$ nebo $\exp: M_n(R) \to M_n(R)$ podle toho, zda pracujeme v C^n nebo v R^n.

Při pevném $A \in M_n(K)$ a $t \in R$ vyšetřujme řady

$$I + At + \frac{1}{2!} A^2 t^2 + \frac{1}{3!} A^3 t^3 + \dots \tag{6.3}$$

a

$$A + A^2 t + \frac{1}{2!} A^3 t^2 + \frac{1}{3!} A^4 t^3 + \dots . \tag{6.4}$$

Částečné součty prvních k členů řad (6.3) a (6.4) jsou $S_k(At)$, $AS_k(At)$ a z (6.2) lze snadno odvodit, že pro každé $T > 0$ řady (6.3) a (6.4) konvergují stejnoměrně na intervalu $\langle -T, T \rangle$. Zřejmě je

$$\frac{d}{dt} S_k(At) = AS_{k-1}(t) ,$$

tedy

$$\int_{t_1}^{t} AS_{k-1}(s)\,ds = S_k(At) - S_k(At_1) .$$

Limitním přechodem pro $k \to \infty$ plyne

$$\int_{t_1}^{t} A \exp(As)\,ds = \exp(At) - \exp(At_1) \text{ pro } t_1, t \in R , \tag{6.5}$$

a derivováním podle t plyne

$$A \exp(At) = \frac{d}{dt} \exp(At), \dots \quad \text{pro} \quad t \in R . \tag{6.6}$$

Je $\exp(A0) = I$ a tak platí

5.6.1. Věta: *Funkce* $\exp(At)$ *proměnné* t *je fundamentální matice rovnice* (1.1), *která pro* $t = 0$ *nabývá hodnoty* I.

5.6.2. Poznámka: Podle Věty 5.6.1 je $\exp(At) = W(t)$, kde $W(t)$ je definováno v (3.3), a tedy pro $\|\exp(At)\|$ platí odhady (3.4), (3.5).

5.6.3. Poznámka: V případě $n = 1$ je funkce exp známá exponenciální funkce. Násobení čísel je komutativní. Násobení matic v případě $n \geqq 2$ není komutativní. Vzorce

$$\exp A \exp B = \exp(A + B) = \exp B \exp A \tag{6.7}$$

platí, je-li $AB = BA$; důkaz je stejný jako pro $n = 1$. Je-li $AB \neq BA$, potom (6.7) platit nemusí.

Zejména platí

$$\exp(tA)\exp(sA) = \exp(t+s)A \quad \text{pro} \quad t, s \in R\,, \tag{6.8}$$

$$\exp(tA)\exp(-tA) = I \quad \text{pro} \quad t \in R\,; \tag{6.9}$$

$\exp(-A)$ je tedy inverzní matice k $\exp A$. Platí též

$$A\exp(tA) = \exp(tA)A \quad \text{pro} \quad t \in R\,. \tag{6.10}$$

5.6.4. Poznámka: Z rovnice (6.5) plyne (pro $t_1 = 0$)

$$\exp(tA) = I + \int_0^t A\exp(sA)\,\mathrm{d}s \quad \text{pro} \quad t \in R\,. \tag{6.11}$$

Pro rovnici (6.11) definujme posloupnost postupných aproximací

$$Z_1(t) = I\,, \quad Z_{k+1}(t) = I + \int_0^t AZ_k(s)\,\mathrm{d}s \quad \text{pro} \quad t \in R\,.$$

Snadno lze ukázat, že je $Z_k(t) = S_k(t)$ pro $k = 1, 2, \ldots, t \in R$.

5.6.5. Poznámka: Nechť λ je vlastní číslo matice A a nechť x je vlastní vektor patřící k vlastnímu číslu λ, tj. $Ax = \lambda x$, $x \neq 0$. Potom platí: e^λ je vlastní číslo matice $\exp A$ a x je vlastní vektor matice $\exp A$, patřící k vlastnímu číslu e^λ. Je totiž

$$(\exp A)x = \left(I + A + \frac{1}{2!}A^2 + \frac{1}{3!}A^3 + \ldots\right)x =$$

$$= x + Ax + \frac{1}{2!}A^2x + \frac{1}{3!}A^3x + \ldots =$$

$$= x + \lambda x + \frac{1}{2!}\lambda^2x + \frac{1}{3!}\lambda^3x + \ldots = e^\lambda x\,.$$

5.6.6. Poznámka: Matice $\exp A$ je vždy regulární, neboť podle Věty 5.6.1 je matice $\exp At$ regulární pro $t \in R$.

5.6.7. Poznámka: Je-li matice A blokově diagonální,

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & & & & \\ & A_2 & & & \\ & & A_3 & & \\ & & & \cdots & \\ & & & & A_r \end{pmatrix},$$

pak také matice $\exp A$ je blokově diagonální,

$$\exp A = \begin{pmatrix} \exp A_1 & & & \\ & \exp A_2 & & \\ & & \cdots & \\ & & & \exp A_r \end{pmatrix}.$$

To plyne přímo z definice matice $\exp A$, neboť i matice A^j jsou blokově diagonální pro $j = 1, 2, 3, \ldots$.

5.7. Metoda z odst. 5.6 není obecně vhodná k tomu, abychom např. vyšetřovali chování funkce $\exp At$ pro $t \to \infty$. Lze ji však upravit. Nechť $\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \ldots + a_n$ je charakteristický polynom matice A. Podle Cayleyovy-Hamiltonovy věty (viz [18], [17]) je

$$A^n + a_1 A^{n-1} + \ldots + a_n I = 0\,.$$

Proto v řadě (6.3) můžeme dosadit v $(n + 1)$-ním členu $-a_1A^{n-1} - \ldots - a_nI$ za A^n. V $(n + 2)$-hém členu můžeme dosadit $-a_1A^n - \ldots - a_nA$ za A^{n+1} a potom opět $-a_1A^{n-1} - \ldots - a_nI$ za A^n. Můžeme tedy očekávat, že funkci $\exp At$ lze zapsat ve tvaru

$$\exp At = I\,\varphi_1(t) + A\,\varphi_2(t) + \ldots + A^{n-1}\,\varphi_n(t)\,, \tag{7.1}$$

kde $\varphi_j\colon R \to C$. Platí

5.7.1. **Věta:** *Nechť z je maximální řešení rovnice*

$$\begin{gathered} z^{(n)} + a_1 z^{(n-1)} + \ldots + a_n z = 0\,, \\ z(0) = \dot{z}(0) = \ldots = z^{(n-2)}(0) = 0\,, \quad z^{(n-1)}(0) = 1\,. \end{gathered} \tag{7.2}$$

Položme

$$\begin{pmatrix} \varphi_1(t) \\ \varphi_2(t) \\ \cdots\cdots \\ \varphi_{n-1}(t) \\ \varphi_n(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n-1}, & a_{n-2}, & \ldots, & a_1, & 1 \\ a_{n-2}, & a_{n-3}, & \ldots, & 1, & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1, & 1, & \ldots, & 0, & 0 \\ 1, & 0, & \ldots, & 0, & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z(t) \\ \dot{z}(t) \\ \cdots\cdots \\ z^{(n-2)}(t) \\ z^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}.$$

Pak platí (7.1).

Věta 5.7.1 je dokázána v [62].

Odvodíme jiný podobný výsledek (viz [62]). Nechť $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ je posloupnost vlastních čísel matice A, která jsou napsána se zřetelem na násobnost (tj. je-li λ k-násobné vlastní číslo matice A, je λ v posloupnosti $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ na k místech). Položme $F_0 = I$, $F_j = \prod_{i=1}^{j} (A - \lambda_i I)$ pro $j = 1, 2, \ldots, n$. Podle Cayleyovy-Hamiltonovy věty je $F_n = 0$.

5.7.2. **Věta:** *Nechť funkce $\psi_k\colon R \to C$, $k = 1, 2, \ldots, n$, splňují soustavu*

$$\begin{aligned} \dot{\psi}_1 &= \lambda_1\psi_1\,, \\ \dot{\psi}_2 &= \psi_1 + \lambda_2\psi_2\,, \\ \dot{\psi}_3 &= \psi_2 + \lambda_3\psi_3\,, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \dot{\psi}_n &= \psi_{n-1} + \lambda_n\psi_n\,, \\ \psi_1(0) &= 1\,, \quad \psi_2(0) = \ldots = \psi_n(0) = 0. \end{aligned} \tag{7.3}$$

Potom platí

$$\exp At = F_0\,\psi_1(t) + F_1\,\psi_2(t) + \ldots + F_{n-1}\,\psi_n(t)\,. \tag{7.4}$$

Důkaz: Položme

$$U(t) = F_0\,\psi_1(t) + F_1\,\psi_2(t) + \ldots + F_{n-1}\,\psi_n(t)\,.$$

Je

$$\dot U(t) - AU(t) = \sum_{j=0}^{n-1} F_j\,\dot\psi_{j+1}(t) - \sum_{j=0}^{n-1} AF_j\,\psi_{j+1}(t) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} F_j\,\dot\psi_{j+1}(t) - \sum_{j=0}^{n-1} (A - \lambda_{j+1}I + \lambda_{j+1}I)\,F_j\,\psi_{j+1}(t) =$$

$$= \sum_{j=0}^{n-1} F_j\,\dot\psi_{j+1}(t) - \sum_{j=1}^{n} F_j\,\psi_j(t) - \sum_{j=0}^{n-1} \lambda_{j+1}F_j\,\psi_{j+1}(t) =$$

$$= F_0(\dot\psi_1(t) - \lambda_1\,\psi_1(t)) + \sum_{j=1}^{n-1} F_j(\dot\psi_{j+1}(t) - \psi_j(t) - \lambda_{j+1}\,\psi_{j+1}(t)) = 0\,.$$

U je tedy fundamentální matice rovnice $\dot x = Ax$, $U(0) = I$; proto je $U(t) = \exp tA$ pro $t \in R$.

Příklad: Nechť je

$$A = \begin{pmatrix} 4, & 4, & 0 \\ -1, & 0, & 0 \\ -2, & -4, & 2 \end{pmatrix};$$

charakteristická rovnice je $(\lambda - 2)^3 = 0$. Je $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 2$,

$$F_1 = A - 2I = \begin{pmatrix} 2, & 4, & 0 \\ -1, & -2, & 0 \\ -2, & -4, & 0 \end{pmatrix},$$

$$F_2 = (A - 2I)^2 = 0\,.$$

Z rovnic

$$\dot\psi_1 = 2\psi_1\,,$$
$$\dot\psi_2 = \psi_1 + 2\psi_2\,,$$
$$\dot\psi_3 = \psi_2 + 2\psi_3$$

a z podmínek $\psi_1(0) = 1$, $\psi_2(0) = \psi_3(0) = 0$ spočteme $\psi_1(t) = e^{2t}$, $\psi_2(t) = t\,e^{2t}$, $\psi_3(t) = t^2\,e^{2t}/2$. Dostáváme podle (7.4)

$$\exp(tA) = \begin{pmatrix} 1, & 0, & 0 \\ 0, & 1, & 0 \\ 0, & 0, & 1 \end{pmatrix} e^{2t} + \begin{pmatrix} 2, & 4, & 0 \\ -1, & -2, & 0 \\ 0, & -4, & 0 \end{pmatrix} t\,e^{2t}\,.$$

5.8. Metoda vyložená v odst. 5.1 a 5.2 je založena na transformaci rovnice (1.1) v rovnici (1.3). Pro řešení rovnice (1.3) platí jednoduché vzorce a vlastnosti rovnice (1.3) se přenášejí na rovnici (1.1), pokud ovšem známe matice H a Q. Na několika příkladech v odst. 5.1 a 5.2 jsme ukázali, jak lze tyto matice najít k dané matici A. Matice A v těchto příkladech splňovala tyto dvě podmínky:

(i) Řád matice A byl 3 nebo 4.

(ii) Kořeny charakteristické rovnice byly celá čísla.

Na základě výsledků lineární algebry ovšem lze podat návod, jak nalézt matice H a Q v případě, že řád u matic Q je větší než 4, obdobný postupu, kterého jsme užili v příkladech. Podstatné však je, že musíme znát vlastní čísla matice A a že musíme s nimi umět počítat (musíme např. umět rozhodnout, zda matice, v jejímž zápise se vyskytuje vlastní číslo, je nebo není singulární). To může být velmi obtížné. Metoda vyložená v odst. 5.4 zřejmě není vhodná k přibližným výpočtům pro velké t. Ani v odst. 5.5 se nepodařilo obejít obtíže, které mohou být spojeny s vlastními čísly matice A. Užíváme-li Věty 5.7.1, musíme umět najít jisté řešení rovnice (7.2) a ve Větě 5.7.2 se vlastní čísla matice A vyskytují explicitně. Je zřejmé, že nahradíme-li v (7.3) vlastní čísla $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ jejich přibližnými hodnotami, bude pravá strana v (7.4) přibližnou hodnotou pro $\exp At$. Přibližnými (numerickými) metodami lze ovšem přímo hledat řešení rovnice (1.1).