Integrální počet II

kaptiola XV. Asymptotické rozvoje

In: Vojtěch Jarník (author): Integrální počet II. (Czech). Praha: Academia, 1984. pp. 585--644.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402062

Terms of use:

© Vojtěch Jarník, 1976

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

KAPITOLA XV*

ASYMPTOTICKÉ ROZVOJE*

§ 1. Úvod. Symbolika. Omezím se v tomto paragrafu na konečné funkce jedné reálné nebo komplexní proměnné (ač by bylo možno vše formulovati obecněji). Budiž dána nějaká funkce $f(x)$; klademe si za úkol vyšetřiti přibližně průběh funkce f v okolí nějakého bodu a. Obyčejně nám jde o to, nahraditi funkci f nějakou funkcí jednodušší, která by se od funkce f v „blízkosti" bodu a lišila „dostatečně málo" (smysl slov v uvozovkách je ovšem nutno v každém případě precisovati). Vyšetřujme na př. průběh funkce

$$\sin z = z\left(1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \frac{z^6}{7!} + \ldots\right) \tag{1}$$

v okolí bodu 0.[1]) Závorka (konvergentní mocninná řada) má pro $z \to 0$ limitu 1, takže $\sin z$ se v blízkosti bodu 0 chová přibližně jako z; přesně řečeno:

$$\lim_{z\to 0} \frac{\sin z}{z} = 1\,. \tag{2}$$

Podobně

$$\operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} = \frac{1}{z}\cdot\frac{1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots}{1 - \frac{z^2}{3!} + \frac{z^4}{5!} - \ldots}\,; \tag{3}$$

pro $z \to 0$ má poslední zlomek limitu 1, takže

$$\lim_{z\to 0} \operatorname{cotg} z : \frac{1}{z} = 1\,. \tag{3a}$$

Budiž dále dáno číslo δ, $0 < \delta < \frac{1}{2}\pi$. Pišme $z = re^{i\varphi}$ ($r > 0$, φ reálné) a vyšetřujme, jak se chová $\sin z$ v oboru $\delta < \varphi < \pi - \delta$, když $r = |z|$ roste nade všechny meze.[2]) Jest

[1]) Jde o komplexní proměnnou z; tím spíše platí výsledky pro reálné z.

[2]) φ je amplituda čísla z. Načrtněte uvedený obor pro z.

$$(4) \qquad \sin z = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{\mathrm{i}z} - \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}) = \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}(1 - \mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}) .$$

Uvažme, že pro reálná a, b je

$$\mathrm{e}^{a+b\mathrm{i}} = \mathrm{e}^a(\cos b + \mathrm{i}\sin b), \text{ tedy } |\mathrm{e}^{a+b\mathrm{i}}| = \mathrm{e}^a$$

(neboť $|\cos b + \mathrm{i}\sin b| = 1$) a že $2\mathrm{i}z = 2\mathrm{i}r(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi)$, takže v uvedeném oboru je

$$|\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}| = \mathrm{e}^{-2r\sin\varphi} < \mathrm{e}^{-2r\sin\delta} ;$$

pro $r \to +\infty$ má tento výraz limitu 0. Tedy z (4) plyne

$$(5) \qquad \lim_{\substack{z\to\infty \\ \delta < \operatorname{ampl} z < \pi - \delta}} \sin z : \frac{\mathrm{i}}{2}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} = 1 .$$

Je vhodno zavésti zvláštní symbol: Je-li

$$\lim_{\substack{x\to a \\ x\in M}} \frac{f(x)}{g(x)} = 1 ,$$

píšeme také[3])

$$f(x) \cong g(x) \text{ pro } x \to a,\ x \in M .$$

(Mluví se pak o asymptotické rovnosti funkcí f, g v bodě a vzhledem k množině M.) Je-li jasno, o který bod a a o kterou množinu M jde, vynechává se často dodatek „pro $x \to a$, $x \in M$."[4]) Tedy (2), (3a), (5) lze psáti také

$$\sin z \cong z , \quad \operatorname{cotg} z \cong \frac{1}{z} \text{ pro } z \to 0,\ z \in \boldsymbol{K} ,$$

$$\sin z \cong \tfrac{1}{2}\mathrm{i}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}z} \text{ pro } z \to \infty,\ \delta < \operatorname{ampl} z < \pi - \delta .$$

Příklad 1. Budiž φ funkce konečná, kladná, nerostoucí v $\langle 1, +\infty)$. Potom pro $k = 1, 2, \ldots$ je $\varphi(k) \geqq \int_k^{k+1} \varphi(x)\,\mathrm{d}x \geqq \varphi(k+1)$ a odtud pro celé $n > 1$

$$\varphi(1) + \ldots + \varphi(n-1) \geqq \int_1^n \varphi(x)\,\mathrm{d}x \geqq \varphi(2) + \ldots + \varphi(n) .$$

---

[3]) Psává se častěji $\sim$ místo $\cong$. Zavádím znak $\cong$, aby nenastala záměna se znakem $\sim$, zavedeným v kap. II pro ekvivalentní množiny a funkce.

[4]) M značí v tomto paragrafu vždy množinu konečných čísel (komplexních nebo — speciálně — reálných), t. j. $M \subset \boldsymbol{K}$.

Odtud plyne ihned: *Je-li* $\int\limits_1^{+\infty} \varphi(x)\,dx = +\infty$, *je* $\lim\limits_{n\to\infty} ((\varphi(1) + \ldots + \varphi(n)) : \int\limits_1^n \varphi(x)\,dx) = 1$, t. j.

$$\varphi(1) + \ldots + \varphi(n) \cong \int\limits_1^n \varphi(x)\,dx \text{ pro } n \to +\infty,\ n \in \mathbf{N}\,.$$

Na př.:

$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \cong \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}, \text{ je-li } 0 \geqq \alpha > -1\,; \quad \sum_{k=1}^{n} k^{-1} \cong \lg n\,;$$

$$\sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k \lg k} \cong \lg \lg n \text{ a pod.}$$

Zde jde o „celočíselnou" proměnnou n.

Vzpomeňme si ještě na definici symbolů O, o z **D II**, kap. VI, § 13. Znak

$$f(x) = O(g(x)) \text{ pro } x \to a,\ x \in M$$

značí, že

$$\limsup_{\substack{x\to a\\ x\in M}} \frac{|f(x)|}{g(x)} < +\infty\,;$$

znak

$$f(x) = o(g(x)) \text{ pro } x \to a,\ x \in M$$

značí, že

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in M}} \frac{f(x)}{g(x)} = 0\,.$$

Přitom se předpokládá, že $g(x) > 0$ pro všechny body $x \in M$, různé od a, ale dostatečně blízké bodu a.[5])

Příklad 2. Nestačí-li nám informace o průběhu funkce $\sin z$ (v okolí bodu 0), kterou nám dává rovnice (2) neboli $\sin z \cong z$, mů-

[5]) Přesně řečeno: Je-li a konečné, předpokládá se existence takového $\delta > 0$, že

$$(x \in M,\ 0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow g(x) > 0\,.$$

Je-li $a = +\infty$ (po příp. $a = -\infty$, po příp. $a = \infty$), předpokládá se existence takového $K \in \mathbf{E}_1$, že je $g(x) > 0$ pro všechna $x \in M$, pro něž je $x > K$ (po příp. $x < K$, po příp. $|x| > K$). Funkce f může býti komplexní.

žeme nahraditi $\sin z$ přesněji součtem n prvních členů pravé strany v (1); zbytek této řady je

$$(-1)^n z^{2n+1}\left(\frac{1}{(2n+1)!} - \frac{z^2}{(2n+3)!} + \frac{z^4}{(2n+5)!} - \ldots\right) = O(|z|^{2n+1})$$

a tedy

$$\sin z = \frac{z}{1!} - \frac{z^3}{3!} + \ldots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + O(|z|^{2n+1})$$

pro $z \to 0$, $z \in \mathbf{K}$.

Podobně: Provedeme-li dělení mocninných řad v (3) vpravo podle **D II**, kap. XI, § 4, pozn. 2, dostaneme $1 - \frac{1}{3}z^2 - \frac{1}{45}z^4 + b_3 z^6 + b_4 z^8 + \ldots$, a tedy

$$\operatorname{cotg} z = \frac{1}{z} - \frac{1}{3}z - \frac{1}{45}z^3 + O(|z|^5)$$

pro $z \to 0$, $z \in \mathbf{K}$, což je přesnější výsledek než $\operatorname{cotg} z \cong \dfrac{1}{z}$.

Příklad 3. Budiž $a \in \mathbf{E}_1$; nechť pro každé $b \in (a, +\infty)$ konvergují integrály $\int_a^b f(x)\,dx$, $\int_a^b g(x)\,dx$. Nechť $f(x) = o(g(x))$ pro $x \to +\infty$, $x \in \mathbf{E}_1$.[6] Potom platí: I. Je-li $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx < +\infty$, je

$$\int_b^{+\infty} f(x)\,dx = o\left(\int_b^{+\infty} g(x)\,dx\right) \text{ pro } b \to +\infty,\ b \in \mathbf{E}_1 .$$

II. Je-li $\int_a^{+\infty} g(x)\,dx = +\infty$, je

$$\int_a^b f(x)\,dx = o\left(\int_a^b g(x)\,dx\right) \text{ pro } b \to +\infty,\ b \in \mathbf{E}_1 .$$

Důkaz. Pro případ I: Budiž $\varepsilon > 0$. Existuje $c \in (a, +\infty)$ tak, že pro $x > c$ je $|f(x)| \leqq \varepsilon\, g(x)$. Pro $c < b < +\infty$ je tedy

$$\left|\int_b^{+\infty} f(x)\,dx\right| \leqq \int_b^{+\infty} |f(x)|\,dx \leqq \varepsilon \int_b^{+\infty} g(x)\,dx .$$

[6]) Tedy $g(x) > 0$ pro všechna dostatečně velká x.

Pro případ II: Budiž $\varepsilon > 0$. Existuje $c \in (a, +\infty)$ tak, že pro $x > c$ je $|f(x)| \leqq \varepsilon\, g(x)$, tedy $|\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x| \leqq \varepsilon \int_c^b g(x)\,\mathrm{d}x$ pro $c \leqq b < +\infty$; odtud pak plyne

$$|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x| \leqq \varepsilon \int_c^b g(x)\,\mathrm{d}x =$$

$$= \varepsilon \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x - \varepsilon \int_a^c g(x)\,\mathrm{d}x$$

a tedy (je-li b již tak velké, že $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x > 0$)

$$|\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x| : \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqq |\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x| : \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x +$$

$$+ \varepsilon |\int_a^c g(x)\,\mathrm{d}x| : \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x + \varepsilon\,.$$

Vpravo mají první dva sčítanci pro $b \to +\infty$ limitu nulu, takže

$$\limsup_{b \to +\infty} |\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x| : \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \leqq \varepsilon\,,$$

a to platí pro každé $\varepsilon > 0$. Tím je tvrzení dokázáno.

Příklad 4. Buďte dány řady $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$; budiž $a_n = o(b_n)$ pro $n \to \infty$, $n \in \boldsymbol{N}$. Potom platí: I. Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} b_n < +\infty$, je $\sum_{k=n}^{\infty} a_k = o(\sum_{k=n}^{\infty} b_k)$. II. Je-li $\sum_{n=1}^{\infty} b_n = +\infty$, je $\sum_{k=1}^{n} a_k = o(\sum_{k=1}^{n} b_k)$. Důkaz si podle vzoru v příkl. 3 provede čtenář sám. Zde i v příkl. 6 jsou ovšem a_n, b_n konečná čísla.

Příklad 5. Věta z příkl. 3 zůstane správnou, jestliže v ní místo o píši všude O. Důkaz je ještě o něco snazší než v příkl. 3.[7]) Podobně lze modifikovati příkl. 4.

[7]) Rozdíl je jen tento: Nyní existuje $\varepsilon > 0$ a $c \in (a, +\infty)$ tak, že pro $x > c$ je $|f(x)| \leqq \varepsilon\, g(x)$. A s touto hodnotou ε se provádějí tytéž odhady jako v důkazu příkl. 3.

Příklad 6. Z příkl. 4 a 1 plyne: Je-li $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$, je $a_1 + a_2 + \ldots + a_n = o\left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) = o(\lg n)$ pro $n \to \infty$, $n \in \mathbf{N}$.

Příklad 7. Vezměme příklad analogický k příkladu 1, ale předpokládejme nyní, že φ je konečná, kladná a neklesající v $\langle 1, +\infty)$. Podobně jako v příkl. 1 obdržíme nyní

$$\varphi(1) + \ldots + \varphi(n-1) \leqq \int_1^n \varphi(x)\,dx \leqq \varphi(2) + \ldots + \varphi(n)\,,$$

tedy

$$|\varphi(1) + \ldots + \varphi(n) - \int_1^n \varphi(x)\,dx| \leqq \varphi(n)\,,$$

$$\varphi(1) + \ldots + \varphi(n) = \int_1^n \varphi(x)\,dx + O(\varphi(n)) \tag{6}$$

(vše pro $n \in \mathbf{N}$, $n \to +\infty$). Na př. pro $\alpha \geqq 0$ obdržíme $\sum_{k=1}^{n} k^\alpha = \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1} + O(n^\alpha)$; odtud pak zřejmě plyne vztah (méně přesný než předcházející) $\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \cong \frac{n^{\alpha+1}}{\alpha+1}$; tento vztah tedy platí pro všechna $\alpha > -1$ (v příkl. 1 byl totiž dokázán pro $0 \geqq \alpha > -1$). Obecněji: Jestliže

$$\lim_{n\to\infty} \left(\varphi(n) : \int_1^n \varphi(x)\,dx\right) = 0\,, \tag{7}$$

plyne z (6) ihned

$$\varphi(1) + \ldots + \varphi(n) \cong \int_1^n \varphi(x)\,dx\,. \tag{8}$$

Není-li vztah (7) splněn, nemusí (8) platit. Na př.

$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2^{n+1} - 2\,, \quad \int_1^n 2^x\,dx = \frac{2^n - 2}{\lg 2}\,,$$

a podíl těchto dvou výrazů má pro $n \to \infty$ limitu $2 \lg 2 \neq 1$.

§ 2. Asymptotické rozvoje integrálů $\int_0^x e^{-t^2}\,dt$, $\int_a^x \frac{du}{\lg u}$. Jde o reálná x. Pro každé $t \in E_1$ je $e^{-t^2} = 1 - \frac{t^2}{1!} + \frac{t^4}{2!} - \ldots$ a odtud pro každé $x \in E_1$ plyne (jde o integraci stejnoměrně konvergentní řady)

$$I(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt = x - \frac{x^3}{1!\,.\,3} + \frac{x^5}{2!\,.\,5} - \frac{x^7}{3!\,.\,7} + \ldots \tag{9}$$

Tato řada se však hodí k počítání nebo ke studiu vlastností funkce $I(x)$ jen tehdy, je-li $|x|$ malé. Pro větší hodnoty $|x|$ si odvodíme vzorec jiného druhu. Ježto $I(-x) = -I(x)$, stačí, omezíme-li se na kladná x. Ježto $\int_0^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ (viz na př. kap. III, § 7, příkl. 12), je $I(x) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} - \int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$.

Poslední integrál přepišme ještě do tvaru $\frac{1}{2}\int_{x^2}^{+\infty} \frac{e^{-u}}{\sqrt{u}}\,du$ (substituce $t^2 = u$) a užijme integrace per partes:

$$\frac{1}{2}\int_{x^2}^{+\infty} e^{-u}u^{-\frac{1}{2}}\,du = \frac{e^{-x^2}}{2x} - \frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{2}\int_{x^2}^{+\infty} e^{-u}\,.\,u^{-\frac{3}{2}}\,du\,,$$

$$\frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{2}\int_{x^2}^{+\infty} e^{-u}\,.\,u^{-\frac{3}{2}}\,du = \frac{e^{-x^2}}{2^2x^3} - \frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{2}\,.\,\frac{3}{2}\int_{x^2}^{+\infty} e^{-u}\,.\,u^{-\frac{5}{2}}\,du$$

atd. Snadným počtem obdržíme pro každé $x > 0$ a každé celé $p \geqq 0$:

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2}\,dt = \frac{e^{-x^2}}{2x}\left(1 - \frac{1}{2}\,.\,\frac{1}{x^2} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,2}\,.\,\frac{1}{x^4} + \ldots + (-1)^p\,\frac{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2p-1)}{2^p}\,.\,\frac{1}{x^{2p}}\right) + R_p\,, \tag{10}$$

kde

$$R_p = \frac{1}{2} \cdot (-1)^{p+1} \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots \frac{2p+1}{2} \int_{x^2}^{+\infty} e^{-u} \cdot u^{-\frac{2p+3}{2}} \, du \,. \tag{11}$$

Zřejmě

$$0 < \int_{x^2}^{+\infty} e^{-u} \cdot u^{-\frac{2p+3}{2}} \, du < x^{-(2p+3)} \int_{x^2}^{+\infty} e^{-u} \, du = \frac{e^{-x^2}}{x^{2p+3}} \,. \tag{12}$$

Z (10), (11), (12) plyne předně

$$\int_x^{+\infty} e^{-t^2} \, dt \simeq \frac{e^{-x^2}}{2x} \quad \text{pro } x \to +\infty, \ x \in \mathbf{E}_1 \,.$$

Funkce

$$K(x) = 2xe^{x^2} \int_x^{+\infty} e^{-t^2} \, dt \tag{13}$$

má tedy pro $x \to +\infty$ limitu 1. Přesnější výsledek dostaneme takto (viz (10), (11), (12)): Pro zkrácení položme pro $k = 0, 1, 2, \ldots$

$$\alpha_k(x) = (-1)^k \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1)}{2^k x^{2k}} \tag{14}$$

(pro $k = 0$ značí „prázdný součin" $1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2k-1)$ jedničku, tedy $\alpha_0(x) = 1$). Pro každé celé $p \geqq 0$ je potom

$$K(x) = 1 + \alpha_1(x) + \ldots + \alpha_p(x) + \Theta\, \alpha_{p+1}(x) \,, \tag{15}$$

kde $0 < \Theta < 1$; ovšem Θ závisí na p, x, t. j. $\Theta = \Theta_p(x)$.

Je-li na př. $x = 10$, dostaneme volbou $p = 4$:

$$\begin{aligned} K(10) = 1 - \frac{1}{2 \cdot 10^2} + \frac{1 \cdot 3}{4 \cdot 10^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{8 \cdot 10^6} + \\ + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7}{16 \cdot 10^8} - \Theta \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{32 \cdot 10^{10}} \,. \end{aligned} \tag{16}$$

Odtud je vidět, že $K(10)$ je přibližně rovno 1, přesněji 0,995; ještě přesnější hodnotu dostaneme, nahradíme-li $K(10)$ součtem prvních pěti členů vpravo; chyba bude v absolutní hodnotě menší než $3 \cdot 10^{-9}$.

Kdyby bylo $x = 100$, dostali bychom (opět při volbě $p = 4$) chybu menší než $3 \,.\, 10^{-19}$, tedy již nesmírně malou. Je tedy vidět, že vzorec (15) nám pro větší hodnoty x dává prostředek, počítati $K(x)$ velmi pohodlně s velkou přesností. To nás vede k tomu, abychom si všimli nekonečné řady

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k(x) \,. \tag{17}$$

Ale tato řada je pro každé $x > 0$ divergentní (na př. podle d'Alembertova kriteria, viz **D II**, kap. III, § 6), neboť podíl

$$\left| \frac{\alpha_{k+1}(x)}{\alpha_k(x)} \right| = \frac{2k+1}{2x^2} \tag{18}$$

má pro $k \to \infty$ limitu $+\infty$. Dokonce je odtud patrno, že $\lim\limits_{k \to \infty} |\alpha_k(x)| = +\infty$.

Odtud plyne dále zřejmě, že částečné součty řady (17) tvoří — při každém x — neomezenou posloupnost; snadno by se dokonce dokázalo, že je

$$\lim_{k \to \infty} s_{2k}(x) = +\infty \,, \quad \lim_{k \to \infty} s_{2k+1}(x) = -\infty$$
$$(s_n(x) = \alpha_0(x) + \alpha_1(x) + \ldots + \alpha_n(x)) \,.$$

Řada (17) tedy nikdy nemá za součet číslo $K(x)$, ačkoliv, jak jsme viděli, pro větší hodnoty x některé její částečné součty velmi dobře aproximují číslo $K(x)$. Všimněme si toho trochu blíže. Podle (14) je $\alpha_k(x) = O(x^{-2k})$ (vše pro $x \to +\infty$, $x \in \mathsf{E}_1$), takže z (15) plyne pro každé celé $p \geqq 0$

$$K(x) = s_p(x) + O(x^{-2p-2}) \,. \tag{19}$$

Zvolím-li tedy jakékoliv celé $p \geqq 0$, konverguje rozdíl

$$r_p(x) = K(x) - s_p(x) \tag{20}$$

pro $x \to +\infty$ k nule aspoň tak rychle jako x^{-2p-2}. (Ihned je také vidět, že nekonverguje k nule rychleji; neboť $K(x) = s_p(x) + r_p(x) = s_p(x) + \alpha_{p+1}(x) + r_{p+1}(x)$, tedy $r_p(x) = \alpha_{p+1}(x) + r_{p+1}(x)$, při čemž $\alpha_{p+1}(x)$ je podle (14) p r á v ě téhož řádu jako x^{-2p-2}, kdežto $r_{p+1}(x) = O(x^{-2p-4})$ je pro velká x daleko menší.) Celkem jsme si dosud všimli asi těchto okolností: Řada (17) má podle (14) tvar

$$(21) \qquad c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \frac{c_3}{x^3} + \dots$$

(v našem případě jsou konstanty $c_1, c_3, c_5, \dots$ rovny nule). Jest divergentní, ale má tu vlastnost, že pro $x \to +\infty$, $x \in \mathbf{E}_1$ je

$$(22) \qquad K(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \dots + \frac{c_n}{x^n} + o\left(\frac{1}{x^n}\right)$$

— odkud plyne, že poslední člen je dokonce $O\left(\frac{1}{x^{n+1}}\right)$[8]. O řadě (17) říkáme proto, že je **asymptotickou řadou** pro funkci $K(x)$ nebo **asymptotickým rozvojem** funkce $K(x)$ pro $x \to +\infty$, $x \in \mathbf{E}_1$: Je to řada divergentní, jejíž částečné součty však — ve smyslu rovnice (22) — „dobře" aproximují funkci $K(x)$ pro velká kladná x. Nebudu podávati definici pojmu „asymptotický rozvoj"; každý takový pokus by vedl asi k definici buďto příliš úzké nebo příliš široké (nebo obojí současně). Budeme prostě tohoto názvu užívat u řad — především divergentních — jejichž částečné součty v nějakém smyslu „dobře" aproximují předloženou funkci pro velká x.[9] Hned v příštím příkladu se setkáme s řadou trochu jinou, totiž řadou tvaru $c_0 + \frac{c_1}{\lg x} + \frac{c_2}{\lg^2 x} + \dots$; jindy se setkáváme s řadami tvaru (21), kde však c_k nejsou konstanty, nýbrž omezené funkce $c_k(x)$ a pod.

Všimli jsme si toho, že pro naši funkci $K(x)$ (viz (13)) a pro řadu (17) platí pro rozdíl $r_p(x)$ (viz (20)) odhad

$$(23) \qquad r_p(x) = O(x^{-2p-2}) .$$

Tím je funkce r_p odhadnuta „řádově". Ale již v (16) jsme si všimli, že částečných součtů řady (17) můžeme užíti též k **numerickému**

---

[8]) V našem případě ($c_1 = c_3 = c_5 = \dots = 0$) je ovšem účelno, voliti $n = 2p + 1$ liché, načež

$$K(x) = c_0 + \frac{c_2}{x^2} + \dots + \frac{c_{2p}}{x^{2p}} + O\left(\frac{1}{x^{2p+2}}\right).$$

[9]) Mohou se také vyskytnout „asymptotické rozvoje" funkce $f(x)$ pro $x \to a$ (místo pro $x \to +\infty$ nebo $x \to -\infty$ anebo $x \to \infty$) při konečném a, na př. divergentní mocninná řada $c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots$, pro kterou je

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + \dots + c_p(x-a)^p + o(|x-a|^p) \text{ pro } x \to a .$$

výpočtu hodnot funkce $K(x)$. Všimněme si ještě této druhé stránky věci. Budiž dáno číslo $x > 1$.[10]) Z (15) je patrno, že „chyba“ $r_p(x)$ má totéž znamení jako první vynechaný člen $\alpha_{p+1}(x)$, ale má menší absolutní hodnotu. Abychom tedy (při daném x) dostali co nejvýhodnější odhad této chyby $r_p(x)$, volíme p tak, aby $|\alpha_{p+1}(x)|$ bylo nejmenší ze všech $|\alpha_n(x)|$. Je patrno, že podíl (18) roste s rostoucím k; nejmenší bude tedy onen člen $|\alpha_{p+1}(x)|$, pro který je

$$\left|\frac{\alpha_{p+1}(x)}{\alpha_p(x)}\right| \leqq 1, \text{ ale } \left|\frac{\alpha_{p+2}(x)}{\alpha_{p+1}(x)}\right| > 1\,,$$

t. j.

$$2p + 1 \leqq 2x^2 < 2p + 3\,. \tag{24}$$

Na př. pro $x = 2$ vyjde $p = 3$, $|\alpha_4(2)| = \dfrac{1\,.\,3\,.\,5\,.\,7}{2^4\,.\,2^8}$, což je asi $\dfrac{1}{40}$; větší přesnost pro $x = 2$ nemůžeme zaručit, sáhneme tedy raději ke konvergentní řadě (9), se kterou se pro $x = 2$ ještě velmi dobře počítá. Pro $x = 10$ jsme již pro $p = 4$ dostali pěkný výsledek $|r_4(10)| \leqq \leqq |\alpha_5(10)| < 3\,.\,10^{-9}$, ale nejpříznivější odhad bychom dostali (podle (24)) pro $p = 99$, načež (na př. užitím tabulek pro logaritmy faktoriálů) snadno najdeme, že $5\,.\,10^{-44} < |\alpha_{100}(10)| < 6\,.\,10^{-44}$. To je tedy nejvýhodnější odhad pro chybu při $x = 10$.[11]) Pro $x = 100$ dává již $p = 4$ chybu menší než $3\,.\,10^{-19}$, „nejvýhodnější“ (ovšem prakticky nepoužitelnou) hodnotou by bylo $p = 9999$; tolik členů by se asi nikomu nechtělo počítat. Zároveň je patrna tato příjemná vlastnost asymptotického rozvoje: *čím nevýhodnější je konvergentní řada* (9), t. j. čím větší je x, *tím výhodnější je asymptotický rozvoj*, t. j. tím přesnějších výsledků a s tím menší námahou dovoluje dosáhnouti. Tato vlastnost je společná většině asymptotických rozvojů:

---

[10]) Pro $0 < x < 1$ bychom mohli $K(x)$ počítati velmi pohodlně z konvergentní řady (9).

[11]) Ovšem výpočet 100 členů řady (17) by byl již značně zdlouhavý. Ostatně i když chceme dosáhnouti velké přesnosti, nemá mnoho smyslu, jíti až k hodnotě $p = 99$. Z (18) je totiž patrno toto: je-li k blízko 99 a $x = 10$, je $|\alpha_{k+1}(x)| : |\alpha_k(x)|$ blízko jedné; přidám-li tedy k součtu $\alpha_0(x) + \ldots + \alpha_k(x)$ ještě člen $\alpha_{k+1}(x)$, přidělám si sice práci, ale nezlepším o mnoho výsledek. Na př. je přibližně $|\alpha_{50}(10)| = 5\,.\,10^{-39}$; výpočet dalších 50 členů sníží tento řád, jak jsme viděli, jen asi o 5 míst.

tyto rozvoje bývají tím výhodnější, čím více selhávají ostatní prostředky.

Viděli jsme, že „chybu“ $r_p(x)$ můžeme odhadnouti jednak „řádově“ rovnicí (23), jednak numericky rovnicí

$$r_p(x) = \Theta \,.\, \alpha_{p+1}(x), \quad 0 < \Theta < 1 \tag{25}$$

(v našem jednoduchém případě plyne ovšem (23) ihned z (25)). Rovnice (23), značící limitní vztah

$$\limsup_{x \to +\infty} x^{2p+2}|r_p(x)| < +\infty\,,^{12})$$

má význam při limitních úvahách a pod., rovnice (25) při numerických výpočtech. To je tedy dvojí význam takového asymptotického rozvoje funkce $f(x)$ pro $x \to +\infty$: Předně dává prostředky k studiu průběhu funkce pro velká x a k studiu jejích limitních vlastností pro $x \to +\infty$; za druhé dává prostředky k numerickému výpočtu hodnot funkce.

Zdržel jsem se tak dlouho u tohoto případu, abych na jednoduchém příkladu osvětlil vlastnosti a význam asymptotických rozvojů; v dalším nebudu tyto věci již tak obšírně rozváděti. Podotýkám jenom, že $I(x)$ je velmi důležitý v počtu pravděpodobnosti.

Jako druhý příklad vezměme

$$L(x) = \int_a^x \frac{du}{\lg u}\,; \tag{26}$$

přitom a je pevně zvolené číslo, $a > 1$. Tento integrál (t. zv. logaritmus integrál) je důležitý na př. v analytické theorii prvočísel. Je-li $\pi(x)$ počet prvočísel, nepřesahujících číslo x, praví slavná „prvočíselná věta“, že $\pi(x) \cong L(x)$ pro $x \to +\infty$, $x \in \mathsf{E}_1$.

Zřejmě je $\lim_{x \to +\infty} L(x) = +\infty$. Abychom obdrželi asymptotický rozvoj funkce $L(x)$ pro $x \to +\infty$, $x \in \mathsf{E}_1$, integrujme n-kráte per partes, předpokládajíce stále $x > a$:

[12]) Užijete-li vztahu $r_p = \alpha_{p+1} + r_{p+1}$, dostanete dokonce přesněji

$$\lim_{x \to +\infty} x^{2p+2}\, r_p(x) = (-1)^{p+1}\, \frac{1\,.\,3\,.\,5 \dots (2p+1)}{2^{p+1}}\,.$$

$$(27) \quad L(x) = \left[\frac{u}{\lg u} + \frac{1!\,u}{\lg^2 u} + \ldots + \frac{(n-1)!\,u}{\lg^n u}\right]_a^x + n! \int_a^x \frac{du}{\lg^{n+1} u}.$$

Poslední integrál odhadnu (při pevném přirozeném n a pro $x \to +\infty$) takto:

Pro $u > \sqrt{x}$ jest $\lg u > \frac{1}{2} \lg x$, a tedy

$$\int_{\sqrt{x}}^x \frac{du}{\lg^{n+1} u} = O\left(\frac{1}{\lg^{n+1} x} \cdot \int_{\sqrt{x}}^x du\right) = O\left(\frac{x}{\lg^{n+1} x}\right).[13]$$

Dále jest $\lg u \geqq \lg a > 0$ pro $u \geqq a$; tedy

$$\int_a^{\sqrt{x}} \frac{du}{\lg^{n+1} u} = O\left(\int_a^{\sqrt{x}} du\right) = O(\sqrt{x}) = O\left(\frac{x}{\lg^{n+1} x}\right)$$

(vzpomeňte, že $\lg x$ roste pomaleji než kterákoliv mocnina x^α ($\alpha > 0$)). Dosadím-li dále do hranaté závorky v (27) $u = a$, dostanu výraz $O(1)$, takže z (27) celkem plyne pro každé přirozené n:

$$(28) \quad \int_a^x \frac{du}{\lg u} = x\left(\frac{0!}{\lg x} + \frac{1!}{\lg^2 x} + \ldots + \frac{(n-1)!}{\lg^n x} + O\left(\frac{1}{\lg^{n+1} x}\right)\right)$$

$$\text{pro } x \to +\infty.$$

Zajímavý rozdíl mezi asymptotickou řadou (17) pro $K(x)$ a asymptotickou řadou

$$(29) \qquad x\left(\frac{0!}{\lg x} + \frac{1!}{\lg^2 x} + \frac{2!}{\lg^3 x} + \ldots\right) \qquad (x > 1)$$

(jež je ovšem divergentní) je ten, že v řadě (17) se znamení členů střídají, kdežto řada (29) má vesměs kladné členy.

[13]) Všechno pro $x \to +\infty$.

Cvičení

V cvičeních 1—3 buďte α, β reálná, $\alpha \neq -1$; nechť β není celé nezáporné číslo.

1. Budiž $\alpha < -1$; položme $\gamma = -\alpha > 1$. Budiž n celé, $n \geqq 0$, $x > 1$. Potom jest

$$\int_x^{+\infty} u^\alpha \lg^\beta u \, du = \frac{\lg^\beta x}{x^{\gamma-1}} \left(\frac{1}{\gamma - 1} + \frac{\beta}{(\gamma - 1)^2 \lg x} + \frac{\beta(\beta - 1)}{(\gamma - 1)^3 \lg^2 x} + \ldots + \right.$$

$$\left. + \frac{\beta(\beta - 1) \ldots (\beta - n + 1)}{(\gamma - 1)^{n+1} \lg^n x} \right) + \frac{\beta(\beta - 1) \ldots (\beta - n)}{(\gamma - 1)^{n+1}} \int_x^{+\infty} u^{-\gamma} \lg^{\beta-n-1} u \, du \,. \tag{30}$$

Jestliže rozdělíme v posledním integrálu integrační interval na př. na intervaly (x, x^2), $(x^2, +\infty)$, vidíme podobně jako v textu tohoto paragrafu, že poslední člen v (30) jest

$$O(x^{-\gamma+1} \lg^{\beta-n-1} x) \text{ pro } x \to +\infty \,. \tag{31}$$

Znamení a numerický odhad tohoto členu obdržíme, integrujeme-li jej ještě jednou per partes. Obdržíme: poslední člen v (30) má totéž znamení jako číslo

$$\frac{\beta(\beta - 1) \ldots (\beta - n)}{(\gamma - 1)^{n+2}} x^{-\gamma+1} \lg^{\beta-n-1} x \,, \tag{32}$$

a je-li $n > \beta - 1$, má m e n š í prostou hodnotu, je-li však $n < \beta - 1$, má **v ě t š í** prostou hodnotu (než je prostá hodnota čísla (32)).

2. Budiž nyní $\alpha > -1$, takže integrál (30) nekonverguje. Budiž $n \geqq 0$, n celé, $a > 1$. Potom je (pro $x \to +\infty$)

$$\int_a^x u^\alpha \lg^\beta u \, du = x^{\alpha+1} \lg^\beta x \left(\frac{1}{\alpha + 1} - \frac{\beta}{(\alpha + 1)^2 \lg x} + \ldots + \right.$$

$$\left. + (-1)^n \frac{\beta(\beta - 1) \ldots (\beta - n + 1)}{(\alpha + 1)^{n+1} \lg^n x} \right) + O(x^{\alpha+1} \lg^{\beta-n-1} x) \,. \tag{33}$$

Důkaz podobně jako v textu, kde jsme probrali případ $\alpha = 0$, $\beta = -1$.

3. Chceme-li v cvič. 2 odhadnouti zbytek n u m e r i c k y, je vhodno, psáti místo rovnice (33) tuto rovnici[14])[15]):

[14]) V cvič. 2 jsme totiž členy, vznikající po integraci per partes dosazením $u = a$, shrnuli do členu O, jenž by tím nabyl nepřehledného tvaru, kdybychom jej vypsali podrobně.

[15]) Pro $k = 0$ značí ovšem „prázdný" součin v čitateli jedničku.

$$
(34)\quad \begin{aligned}\int_a^x u^\alpha \lg^\beta u \, du = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \beta(\beta-1)\dots(\beta-k+1)}{(\alpha+1)^{k+1}} (x^{\alpha+1} \lg^{\beta-k} x - \\ - a^{\alpha+1} \lg^{\beta-k} a) + \frac{(-1)^{n+1}}{(\alpha+1)^{n+1}} \beta(\beta-1)\dots(\beta-n) \int_a^x u^\alpha \lg^{\beta-n-1} u \, du .\end{aligned}
$$

Předpokládáme $\alpha > -1$, n celé, $n \geqq 0$, $1 < a < x$.

Integruji-li ještě jednou per partes, obdržím:

I. Je-li $n < \beta - 1$, má poslední člen v (34) totéž znamení jako číslo

$$
(35)\quad \frac{(-1)^{n+1}}{(\alpha+1)^{n+2}} \beta(\beta-1)\dots(\beta-n)(x^{\alpha+1} \lg^{\beta-n-1} x - a^{\alpha+1} \lg^{\beta-n-1} a),
$$

a menší prostou hodnotu.

II. Je-li $n > \beta - 1$, a je-li x tak veliké, že poslední závorka v (35) je kladná, má poslední člen v (34) opět totéž znamení jako číslo (35), ale má větší prostou hodnotu.[16] Rozdíl mezi číslem (35) a posledním členem v (34) má pak prostou hodnotu nejvýše

$$
\frac{|\beta(\beta-1)\dots(\beta-n-1)|}{(\alpha+1)^{n+3}} (2^{2+n-\beta}(x^{\alpha+1} - a^{\alpha+1}) \lg^{\beta-n-2} x + x^{\frac{1}{2}(\alpha+1)} \lg^{\beta-n-2} a).
$$

Odhad není zvlášť pěkný.

4. Ve cvič. 1—3 jsme vyloučili tyto dva případy: předně $\alpha = -1$, za druhé $\beta = 0, 1, 2, 3, \dots$ Ale v těchto případech dovedeme integrál $\int x^\alpha \lg^\beta x \, dx$ přímo vypočísti elementárními funkcemi. Proveďte to!

§ 3. Asymptotické vlastnosti integrálů tvaru $\int_a^b \varphi(x)(f(x))^\alpha \, dx$ pro $\alpha \to +\infty$. Integrály

$$
\int_a^x \frac{du}{\lg u}, \quad \int_x^{+\infty} e^{-t^2} \, dt,
$$

o nichž byla řeč v předešlém paragrafu, byly funkcemi horní, resp. dolní meze. Jiný důležitý případ je ten, že funkce integrovaná závisí na parametru, takže integrál je funkcí tohoto parametru. Jeden takový důležitý typ integrálu je právě integrál, uvedený v nadpisu tohoto paragrafu.

[16]) To je poněkud neuspokojivé, neboť k dosažení velké přesnosti potřebujeme právě větší hodnoty n; ale další výsledek to trochu napraví.

Velmi jednoduchá je tato věta:

Věta 225. *Buďte $\varphi(x)$, $f(x)$ spojité, konečné a nezáporné v uzavřeném omezeném intervalu $\langle a, b\rangle$. Budiž $M = \operatorname*{Max}_{a\leq x\leq b} f(x)$, $M > 0$. Nechť existuje bod $c \in \langle a, b\rangle$, pro nějž jest $f(c) = M$, $\varphi(c) \neq 0$. Položme*

$$I(\alpha) = \int_a^b \varphi(x)\, f^\alpha(x)\, dx \text{ pro } \alpha > 0\,. \tag{36}$$

Potom jest

$$\lim_{\alpha\to+\infty} I^{\frac{1}{\alpha}}(\alpha) = M\,, \tag{37}$$

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{I(\alpha+1)}{I(\alpha)} = M\,. \tag{38}$$

Důkaz. I. Budiž $K = \operatorname*{Max}_{a\leq x\leq b} \varphi(x)$; tedy $I(\alpha) \leqq M^\alpha K(b-a)$, $I^{\frac{1}{\alpha}}(\alpha) \leqq MK^{\frac{1}{\alpha}}(b-a)^{\frac{1}{\alpha}}$. Pravá strana má pro $\alpha \to +\infty$ limitu M; tedy

$$\limsup_{\alpha\to+\infty} I^{\frac{1}{\alpha}}(\alpha) \leqq M\,. \tag{39}$$

Budiž dále $0 < \varepsilon < M$. Podle předpokladu existuje bod $c \in \langle a, b\rangle$, pro nějž je $\varphi(c) > 0$, $f(c) = M$. Ze spojitosti plyne pak, že existuje interval $\langle\lambda, \mu\rangle \subset \langle a, b\rangle$ tak, že pro všechna $x \in \langle\lambda, \mu\rangle$ jest $f(x) > M - \varepsilon$, $\varphi(x) > \frac{1}{2}\varphi(c)$. Tedy

$$I(\alpha) \geqq (M-\varepsilon)^\alpha \cdot \tfrac{1}{2}\varphi(c) \cdot (\mu - \lambda)\,,$$

$$I^{\frac{1}{\alpha}}(\alpha) \geqq (M-\varepsilon) \cdot (\tfrac{1}{2}\varphi(c)(\mu-\lambda))^{\frac{1}{\alpha}}\,,$$

takže

$$\liminf_{\alpha\to+\infty} I^{\frac{1}{\alpha}}(\alpha) \geqq M - \varepsilon\,.$$

Ježto tato nerovnost platí pro každé $\varepsilon \in (0, M)$, je

$$\liminf_{\alpha\to+\infty} I^{\frac{1}{\alpha}}(\alpha) \geqq M\,; \tag{40}$$

z (39), (40) plyne však (37).

II. Jest zřejmě $I(\alpha + 1) \leqq M\, I(\alpha)$, tedy

$$\limsup_{\alpha \to +\infty} \frac{I(\alpha + 1)}{I(\alpha)} \leqq M . \tag{41}$$

Budiž nyní $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}M$. Funkce

$$f_1(x) = \mathrm{Min}\,(f(x), M - 2\varepsilon) \tag{42}$$

je spojitá a nezáporná v $\langle a, b\rangle$. Existuje[17]) interval $\langle \lambda, \mu\rangle \subset \langle a, b\rangle$ tak, že pro $x \in \langle \lambda, \mu\rangle$ je $\varphi(x) > \frac{1}{2}\varphi(c)$, $f(x) > M - \varepsilon$. Položíme-li tedy

$$I_1(\alpha) = \int_a^b \varphi(x)\, f_1^\alpha(x)\, \mathrm{d}x ,$$

jest

$$\frac{I_1(\alpha)}{I(\alpha)} \leqq \left(\frac{M - 2\varepsilon}{M - \varepsilon}\right)^\alpha \frac{K(b - a)}{\frac{1}{2}\varphi(c)(\mu - \lambda)} ;$$

tedy má levá strana pro $\alpha \to +\infty$ limitu 0. Pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ jest

$$f^{\alpha+1}(x) \geqq (M - 2\varepsilon)(f^\alpha(x) - f_1^\alpha(x)) ; \tag{43}$$

neboť, je-li $f(x) \leqq M - 2\varepsilon$, je pravá strana 0 podle (42); je-li však $f(x) > M - 2\varepsilon$, je nerovnost (43) samozřejmá. Podle (43) je tedy

$$I(\alpha + 1) \geqq (M - 2\varepsilon)(I(\alpha) - I_1(\alpha)) ;$$

dělím-li číslem $I(\alpha)$ a provedu limitní přechod $\alpha \to +\infty$, obdržím — ježto $I_1(\alpha) : I(\alpha)$ má limitu 0 —

$$\liminf_{\alpha \to +\infty} \frac{I(\alpha + 1)}{I(\alpha)} \geqq M - 2\varepsilon .$$

Ale to platí pro každé $\varepsilon \in (0, \frac{1}{2}M)$, tedy $\liminf I(\alpha + 1) : I(\alpha) \geqq M$, což spolu s (41) dává (38).

Rovnice (37) ukazuje, že hodnota integrálu $I(\alpha)$ pro velká α závisí v prvním přiblížení pouze na maximu funkce f; přesnější výsledky dostáváme, učiníme-li další předpoklady o derivacích funkce f. Výsledek bude dán větou 226.

Poznámka 1. Nechť reálná funkce $g(x)$ má v bodě a konečnou q-tou derivaci ($q > 0$). Potom

[17]) Viz bod I.

$$\lim_{x\to a} \frac{g(x) - g(a) - \frac{x-a}{1!} g'(a) - \ldots - \frac{(x-a)^{q-1}}{(q-1)!} g^{(q-1)}(a)}{(x-a)^q} =$$

$$(44) \qquad = \frac{g^{(q)}(a)}{q!}.$$

Důkaz: Čitatel i jmenovatel mají všechny derivace od nulté až do $(q-1)$-ní rovny nule. Na to se užije věty 150 z **D I**.

Věta 226. *Budiž* $-\infty < a < b \leqq +\infty$. *Budiž* α_0 *konečné reálné číslo. Buďte* h, φ *dvě funkce konečné a reálné v* $\langle a, b)$ *a takové, že pro každé* $\alpha \geqq \alpha_0$ *jest integrál (Lebesgueův)*

$$(45) \qquad I(\alpha) = \int_a^b \varphi(x)\, e^{\alpha h(x)}\, dx$$

konvergentní.[18]) *O funkci* h *předpokládáme, že pro každé* $c \in (a, b)$ *je supremum funkce* h *v intervalu* (c, b) *menší než hodnota* $h(a)$;[19]) *nechť existuje celé číslo* $q > 0$ *tak, že* $h^{(q)}(a) \neq 0$,[20]) *ale* $h^{(p)}(a) = 0$ *pro* $0 < p < q$. *Funkce* φ *budiž spojitá zprava v bodě* a, *a nechť* $\varphi(a) \neq 0$. *Potom jest pro* $\alpha \to +\infty$, $\alpha \in \mathbf{E}_1$

$$(46) \qquad I(\alpha) \cong \alpha^{-\frac{1}{q}} \cdot e^{\alpha h(a)} \frac{\varphi(a)}{q} \sqrt[q]{\frac{q!}{|h^{(q)}(a)|}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{q}\right).$$

Důkaz. Bez újmy obecnosti budiž $\varphi(a) > 0$ (jinak bych vyšetřoval integrál $-I(\alpha)$). Pro zkrácení položme $K = \int_a^b |\varphi(x)|\, e^{\alpha_0 h(x)}\, dx$. Abychom mohli pohodlně psáti výrazy e^η se složitým η, položme $\exp(\eta) = e^\eta$.

Užijeme-li rovnice (44) na funkci $h(x)$, obdržíme

$$(47) \qquad \lim_{x\to a} (h(x) - h(a)) : (x-a)^q = \frac{1}{q!} h^{(q)}(a).$$

Ježto $h(x) < h(a)$ pro všechna $x \in (a, b)$, není limita v (47) kladná; z předpokladu $h^{(q)}(a) \neq 0$ tedy plyne $h^{(q)}(a) < 0$.

[18]) Míním tedy „absolutní konvergenci" (nikoliv zobecněný integrál ve smyslu kap. VIII.) Píši-li $f(x) = e^{h(x)}$, má $I(\alpha)$ opět tvar (36).

[19]) Speciálně tedy: Pro všechna $x \in (a, b)$ je $h(x) < h(a)$. Náš předpoklad ovšem požaduje o něco více.

[20]) Míním konečnou (vlastní) derivaci.

Budiž nyní $0 < \varepsilon < 1$; zvolme kladné číslo $\delta = \delta(\varepsilon)$ tak, aby platilo:

I. $a + \delta < b$.

II. Pro $a \leqq x \leqq a + \delta$ jest

$$\varphi(a)(1 - \varepsilon) \leqq \varphi(x) \leqq \varphi(a)(1 + \varepsilon) ,$$

$$\frac{(x-a)^q}{q!} h^{(q)}(a)(1 + \varepsilon) \leqq h(x) - h(a) \leqq \frac{(x-a)^q}{q!} h^{(q)}(a)(1 - \varepsilon) ;$$

že takové δ existuje, plyne ze spojitosti funkce φ v bodě a a z rovnice (47); pamatujme, že $h^{(q)}(a) < 0$.

Podle předpokladu existuje číslo $\lambda = \lambda(\delta) > 0$ tak, že pro $a + \delta \leqq \leqq x < b$ jest $h(x) \leqq h(a) - \lambda$. Položme

$$I_1(\alpha) = \int_a^{a+\delta} \varphi(x)\, \mathrm{e}^{\alpha\, h(x)}\, \mathrm{d}x . \tag{48}$$

Potom je předně (vše pro $\alpha \geqq \alpha_0$, $\alpha > 0$)

$$\begin{aligned} |I(\alpha) - I_1(\alpha)| &\leqq \int_{a+\delta}^{b} |\varphi(x)|\, \mathrm{e}^{\alpha_0 h(x)} \mathrm{e}^{(\alpha - \alpha_0) h(x)}\, \mathrm{d}x \leqq \\ &\leqq K \exp\,((\alpha - \alpha_0)(h(a) - \lambda)) = \\ &= K \,.\, \exp\,(-\, \alpha_0(h(a) - \lambda)) \,.\, \mathrm{e}^{\alpha\, h(a)} \,.\, \mathrm{e}^{-\alpha\lambda} . \end{aligned} \tag{49}$$

Podle II je dále

$$I_1(\alpha) \leqq \varphi(a)\, \mathrm{e}^{\alpha\, h(a)}(1 + \varepsilon) \int_a^{a+\delta} \exp\left(\alpha \frac{1}{q!} (1 - \varepsilon)\, h^{(q)}(a)(x - a)^q\right) \mathrm{d}x , \tag{50}$$

a obdobně $I_1(\alpha) \geqq \ldots$, kde nevypsaná pravá strana je táž jako v (50), pouze znamení u ε je (na obou místech) změněno.

Pišme na okamžik $-\dfrac{1}{q!} h^{(q)}(a)(1 \mp \varepsilon) = C$, takže $C > 0$. Jest (substituce $\alpha C(x - a)^q = t$)

$$\int_a^{a+\delta} \exp\,(-\,\alpha C(x - a)^q)\, \mathrm{d}x = \frac{1}{q} (\alpha C)^{-\frac{1}{q}} \int_0^{\alpha C \delta^q} \mathrm{e}^{-t}\, t^{\frac{1}{q} - 1}\, \mathrm{d}t . \tag{51}$$

Pro $\alpha \to +\infty$ má poslední integrál zřejmě limitu $\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)$. Dosadíme-li do (50) a do obdobné nerovnosti $I_1(\alpha) \geqq \ldots$ podle (51), obdržíme limitním přechodem $\alpha \to +\infty$[21]) nerovnost

$$\limsup_{\alpha\to+\infty} \frac{I_1(\alpha)\,.\,\alpha^{\frac{1}{q}}}{e^{\alpha h(a)}} \leqq \frac{\varphi(a)}{q}\,\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\sqrt[q]{\frac{q!}{|h^{(q)}(a)|}}\,\frac{1+\varepsilon}{\sqrt[q]{1-\varepsilon}} \tag{52}$$

a obdobnou nerovnost $\liminf \ldots \geqq \ldots$, kde pouze vpravo je nutno změniti znamení u ε. Avšak $\lim\limits_{\alpha\to+\infty} \alpha^{\frac{1}{q}} e^{-\alpha\lambda} = 0$, takže z (49) plyne

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \frac{(I(\alpha) - I_1(\alpha))\,\alpha^{\frac{1}{q}}}{e^{\alpha h(a)}} = 0\,. \tag{53}$$

Ale z (53), (52) a z obdobné nerovnosti pro lim inf plyne

$$\frac{\varphi(a)}{q}\,\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\sqrt[q]{\frac{q!}{|h^{(q)}(a)|}}\,\frac{1-\varepsilon}{\sqrt[q]{1+\varepsilon}} \leqq \liminf_{\alpha\to+\infty} \frac{I(\alpha)\,.\,\alpha^{\frac{1}{q}}}{e^{\alpha h(a)}} \leqq$$

$$\leqq \limsup_{\alpha\to+\infty} \frac{I(\alpha)\,.\,\alpha^{\frac{1}{q}}}{e^{\alpha h(a)}} \leqq \frac{\varphi(a)}{q}\,\Gamma\left(\frac{1}{q}\right)\sqrt[q]{\frac{q!}{|h^{(q)}(a)|}}\,\frac{1+\varepsilon}{\sqrt[q]{1-\varepsilon}}\,.$$

Ježto tyto nerovnosti platí pro každé $\varepsilon \in (0, 1)$, je tím (46) dokázáno.

Poznámka 2. Věta 226 se týkala případu, že funkce h nabývá své největší hodnoty v bodě a $(-\infty < a < b \leqq +\infty)$. Nechť nyní naopak $-\infty \leqq a < b < +\infty$ a nechť $h(x)$ má v každém intervalu (a, c) $(a < c < b)$ supremum menší než je hodnota $h(b)$. Jsou-li splněny též další podmínky, obdobné podmínkám věty 226 (týkají se teď ovšem derivací funkce h a spojitosti funkce φ v bodě b, nikoliv v bodě a),[22]) je pro $\alpha \to +\infty$, $\alpha \in \mathbf{E}_1$

$$\int_a^b \varphi(x)\, e^{\alpha h(x)}\, dx \simeq \alpha^{-\frac{1}{q}} e^{\alpha h(b)} \frac{\varphi(b)}{q} \sqrt[q]{\frac{q!}{|h^{(q)}(b)|}}\,.\,\Gamma\left(\frac{1}{q}\right). \tag{54}$$

[21]) Při pevném ε, tedy při pevném δ a pevném λ.

[22]) Stále se ovšem předpokládá konvergence integrálu (45) pro $\alpha \geqq \alpha_0$.

Důkaz. Do integrálu (54) zavedu substituci $x = -t$ a uvážím, že pro funkci $h_1(x) = h(-x)$ je $h_1^{(p)}(x) = \pm h^{(p)}(-x)$, načež užiji věty 226.

Poznámka 3. Nechť konečně nabývá $h(x)$ své největší hodnoty v některém vnitřním bodě ξ intervalu (a, b). Přesně: Budiž $-\infty \leqq a < \xi < b \leqq +\infty$. Nechť pro každé $\delta > 0$ je supremum funkce $h(x)$ v množině $(a, b) \dot{-} (\xi - \delta, \xi + \delta)$ menší než $h(\xi)$. Jsou-li splněny i další podmínky, obdobné podmínkám věty 226 (týkají se teď ovšem derivací funkce h a oboustranné spojitosti funkce φ v bodě ξ),[22]) je pro $\alpha \to +\infty$, $\alpha \in \mathbf{E}_1$

$$(55) \qquad \int_a^b \varphi(x)\, e^{\alpha h(x)}\, dx \cong 2\alpha^{-\frac{1}{q}} e^{\alpha h(\xi)} \frac{\varphi(\xi)}{q} \sqrt[q]{\frac{q!}{|h^{(q)}(\xi)|}} \cdot \Gamma\left(\frac{1}{q}\right).$$

Důkaz. Užiji pozn. 2 na interval (a, ξ) a věty 226 na interval (ξ, b), načež sečtu.

Je vhodno poznamenati toto: Na rozdíl od věty 226 a pozn. 2 nabývá nyní funkce h vlevo i vpravo od bodu ξ hodnot menších než $h(\xi)$. V bodě ξ je tedy v tomto případě lokální maximum; první nenulová derivace je tedy sudého řádu, t. j. q je v tomto případě sudé. Nejčastější případ je $q = 2$ (maximum v bodě ξ, $h'(\xi) = 0$, $h''(\xi) < 0$), načež (55) má tvar

$$(56) \qquad \int_a^b \varphi(x)\, e^{\alpha h(x)}\, dx \cong \varphi(\xi)\, e^{\alpha h(\xi)} \sqrt{\frac{2\pi}{-\alpha h''(\xi)}},$$

neboť $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Poznámka 4. Funkce φ ve větě a v pozn. 2, 3 může ovšem býti též komplexní — stačí užíti těchto vět na reálnou a imaginární část. Naproti tomu je ovšem podstatné, že h je reálná.

Příklad 1. Odvodíme důležitý odhad (Stirlingův) pro funkci

$$\Gamma(s + 1) = \int_0^{+\infty} e^{-x} x^s\, dx \quad (\text{pro } s \to +\infty,\ s \in \mathbf{E}_1),$$

speciálně pro faktoriál $n! = \Gamma(n + 1)$.

Předpoklady věty 226 nejsou splněny, neboť $x^s = e^{s \lg x}$, takže zde funkce $h(x)$, t. j. $\lg x$, nemá žádné maximum (roste od $-\infty$ do $+\infty$). Ale integrand $e^{-x}x^s$ má derivaci $e^{-x}x^{s-1}(s - x)$, takže integrand roste (pro $s > 0$) v $(0, s)$, klesá v $(s, +\infty)$. Aby bod, v němž jest maximum, byl nezávislý na s, položme $x = st$, načež

$$\Gamma(s + 1) = s^{s+1} \int_0^{+\infty} e^{s(-t+\lg t)} \, dt .$$

Zde je (podle označení věty 226) $\varphi(t) = 1$, $h(t) = -t + \lg t$, $h'(t) = -1 + t^{-1}$, $h''(t) = -t^{-2}$; maximum funkce h je v bodě $t = 1$ a předpoklady věty 226 (ve tvaru pozn. 3) jsou splněny s hodnotou $q = 2$; vzorec (56) dává ihned

$$\Gamma(s + 1) \cong \left(\frac{s}{e}\right)^s \sqrt{2\pi s} \text{ pro } s \to +\infty . \tag{57}$$

Pro přirozené n jest (jak víme, nebo jak ihned vypočteme opakovanou integrací per partes) $\Gamma(n + 1) = n!$, takže dostáváme z (57) jako speciální případ

$$n! \cong \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2\pi n} \text{ pro } n \to +\infty,\ n \in \boldsymbol{N} . \tag{58}$$

Příklad 2. Vyšetřujme integrál

$$I(r) = \int_0^{+\infty} e^{-(x^2+r)^2} \, dx \tag{59}$$

Jest ovšem

$$I(r) = e^{-r^2} F(r), \text{ kde } F(r) = \int_0^{+\infty} e^{-x^4 - 2x^2 r} \, dx . \tag{60}$$

Funkci $F(r)$ lze snadno rozvinouti v mocninnou řadu, konvergentní pro všechna komplexní r (viz cvič. 6). Tato řada dává dobré informace o průběhu funkce F jen pro malé hodnoty $|r|$; je-li $|r|$ velké, je řada velmi pomalu konvergentní. Abychom zjistili, jak se chová funkce pro velké hodnoty $|r|$ (při čemž se omezíme na reálná r), užijeme věty 226. Napřed se zabývejme případem $r \to +\infty$. Podmínky věty 226 jsou splněny, klademe-li $h(x) = -2x^2$ (maximum v bodě 0, $h'(0) = 0$, $h''(0) = -4$), $\varphi(x) = e^{-x^4}$. Tedy jest

$$(61)\qquad F(r) \cong \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2r}}\,, \quad I(r) \cong \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2r}}\,\mathrm{e}^{-r^2} \text{ pro } r \to +\infty\,.$$

Vyšetřujme nyní případ $r \to -\infty$. Budiž tedy $r < 0$ a kladme $r = -R$. Je tedy

$$(62)\qquad F(r) = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^4+2x^2R}\,\mathrm{d}x\,.$$

Zde nemůžeme užíti přímo věty 226, neboť funkce $2x^2$ nemá v $\langle 0, +\infty)$ maxima (je tam rostoucí). Pomůžeme si podobně jako v příkl. 1: Integrand v (62) má maximum pro $x = \sqrt{R}$; položme proto $x = \sqrt{R(1+t)}$, načež

$$(63)\qquad F(r) = \tfrac{1}{2}\sqrt{R}\,\mathrm{e}^{R^2}\int_{-1}^{+\infty} \mathrm{e}^{-R^2t^2}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1+t}}\,.$$

Zde můžeme již užíti věty 226 (ve tvaru pozn. 3), klademe-li $\alpha = R^2$ (jde o $R \to +\infty$, tedy o $\alpha \to +\infty$), $h(t) = -t^2$ (maximum v bodě 0, $h''(0) = -2$), $\varphi(t) = (1+t)^{-\frac{1}{2}}$.

Vychází

$$(64)\qquad F(r) \cong \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{|r|}}\,\mathrm{e}^{r^2}\,, \quad I(r) \cong \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{|r|}} \text{ pro } r \to -\infty\,.$$

Ve větě 226 jsme užili derivací $h^{(p)}(a)$ až do řádu q; pro funkci φ pak jsme užili pouze její spojitosti v bodě a. Máme-li k disposici u funkcí h, φ derivace vyšších řádů, můžeme nejenom odvoditi asymptotický vzorec (46), nýbrž i přesnější asymptotické rozvoje. Nebudu odvozovati obecné věty toto druhu, nýbrž ukáži jen na příkladě, jak můžeme někdy takové rozvoje odvoditi.[23])

Příklad 3. Vyšetřujme opět funkci $F(r)$ z příkladu 2. Dosadíme-li do (60) za e^{-x^4} Maclaurinův rozvoj se zbytkem (sestrojíme rozvoj pro e^z a dosadíme $z = -x^4$), obdržíme pro $x > 0$

$$(65)\qquad \mathrm{e}^{-x^4} = \sum_{n=0}^{p} \frac{(-1)^n x^{4n}}{n!} + \lambda\,\frac{(-1)^{p+1}x^{4(p+1)}}{(p+1)!}\,,$$

[23]) Další (velmi důležité) příklady toho druhu viz v § 7.

kde $\lambda = e^v$, $0 > v > -x^4$, tedy $0 < \lambda < 1$; tedy jest pro $r > 0$[24])

$$(66) \qquad F(r) = \sum_{n=0}^{p} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^{+\infty} e^{-2x^2 r} x^{4n}\, dx + R_p\,,$$

$$(67) \qquad R_p = \frac{(-1)^{p+1}}{(p+1)!}\, \Theta \int_0^{+\infty} e^{-2x^2 r} x^{4(p+1)}\, dx\,;$$

přitom je $0 < \Theta < 1$ a číslo p je libovolné celé nezáporné číslo. Integrály v (66), (67) snadno vypočteme: Substituce $2x^2 r = t$ dává

$$(68) \qquad \int_0^{+\infty} e^{-2x^2 r} x^{4n}\, dx = \frac{1}{2}\, \frac{1}{(2r)^{2n+\frac{1}{2}}} \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{2n-\frac{1}{2}}\, dt\,.$$

Poslední integrál je však

$$(69) \qquad \Gamma\left(2n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots \frac{4n-1}{2} \sqrt{\pi} \text{ (viz kap. VII, § 1, pozn. 6, (16))}\,.$$

Z (66), (67) tedy okamžitě plyne pro $r > 0$ a pro každé celé $p \geqq 0$

$$(70) \qquad \begin{aligned} F(r) &= \sum_{n=0}^{p} \tfrac{1}{2}(-1)^n \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots (2n - \frac{1}{2})}{n!\,(2r)^{2n+\frac{1}{2}}} \sqrt{\pi}\, + \\ &+ \frac{\Theta}{2} (-1)^{p+1} \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{2} \cdots (2p + \frac{3}{2})}{(p+1)!\,(2r)^{2p+\frac{5}{2}}} \sqrt{\pi}\,, \\ & 0 < \Theta < 1\,. \end{aligned}$$

Tím jsme dostali hledaný asymptotický rozvoj. Zbytek má menší prostou hodnotu než první vynechaný člen řady

$$(71) \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \tfrac{1}{2}(-1)^n \frac{\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdots (2n - \frac{1}{2})}{n!\,(2r)^{2n+\frac{1}{2}}} \sqrt{\pi}$$

a má totéž znamení. Poznamenejme ještě, že řada (71) je divergentní, jak plyne na př. z d'Alembertova kriteria. Proto jsme ve vzorci (65) musili užíti Maclaurinovy formule se zbytkem a nikoliv nekonečné Maclaurinovy řady: integraci této nekonečné řady (po násobení funkcí $e^{-2x^2 r}$) v mezích $0, +\infty$ nelze provésti člen po členu — to by

[24]) Pro $r \leqq 0$ by následující integrály neměly smysl.

vedlo nikoliv k hodnotě $F(r)$, nýbrž k divergentní řadě (71). Obdobný výsledek pro $r \to -\infty$ viz v cvič. 7.

Cvičení

První tři cvičení jsou vybrána z knihy Pólya-Szegö, Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis, 1. díl, Berlín 1925, str. 80.

1. Budiž β reálné. Potom jest

$$\int_1^{+\infty} x^\beta \left(\frac{te}{x}\right)^x \frac{dx}{x} \cong \sqrt{2\pi}\, t^{\beta-\frac{1}{2}} e^t \text{ pro } t \to +\infty .$$

Návod: Funkce (proměnné x) $(te : x)^x$ má maximum pro $x = t$ (roste až do této hodnoty, potom klesá). Proveďte substituci $x = vt$; meze integrálu budou $1 : t, +\infty$. Ježto dolní mez závisí na parametru t, nelze přímo užíti věty 226. Ale můžete užíti této věty na integrál v mezích $\frac{1}{2}, +\infty$; snadno pak zjistíte, že integrál v mezích $t^{-1}, \frac{1}{2}$ je zanedbatelný.

2. Budiž $0 < \beta < 1$. Potom je pro $t \to 0+$

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(\frac{x^\beta}{\beta} - tx\right) dx \cong \sqrt{\frac{2\pi}{1-\beta}}\, t^{-\frac{\beta}{2(1-\beta)}-1} \exp\left(\frac{1-\beta}{\beta}\, t^{-\frac{\beta}{1-\beta}}\right).$$

Návod: Najděte bod γ, v němž integrand má maximum; potom substituce $x = v\gamma$.[25]) Ukáže se, že roli parametru α z věty 226 hraje nyní číslo $t^{-\frac{\beta}{1-\beta}}$.

3. Budiž $\beta > 0$. Potom jest pro $t \to +\infty$

$$\int_0^{+\infty} x^{-\beta x} t^x\, dx \cong \sqrt{\frac{2\pi}{e\beta}}\, t^{\frac{1}{2\beta}} \exp\left(e^{-1}\beta t^{\frac{1}{\beta}}\right).$$

4. Abychom ještě jasněji viděli, jakou roli hrají v integrálu (45) hodnoty x blízké hodnotě a, dokažme tuto větu: Buďte splněny podmínky věty 226; budiž $0 < c < +\infty$. Potom je pro $\alpha \to +\infty$

$$(72) \qquad \int_a^{a+c\alpha^{-\frac{1}{q}}} \varphi(x)\, e^{\alpha h(x)}\, dx \cong \alpha^{-\frac{1}{q}} e^{\alpha h(a)} \frac{\varphi(a)}{q} \sqrt[q]{\frac{q!}{|h^{(q)}(a)|}} \cdot \int_0^A e^{-t} t^{\frac{1}{q}-1}\, dt ,$$

při čemž $A = \frac{1}{q!} |h^{(q)}(a)|\, c^q$.

---

[25]) Podobně v cvič. 3.

Důkaz jako u věty 226, jen o něco jednodušší (odpadá dělení integračního intervalu bodem $a + \delta$).

5. Buďte splněny všechny podmínky věty 226, až na to, že nyní předpokládáme $\varphi(a) = 0$. Potom jest

$$I(\alpha) = o\left(\alpha^{-\frac{1}{q}} e^{\alpha h(a)}\right) \text{ pro } \alpha \to +\infty .$$

Důkaz by se dal provésti ovšem obdobně jako u věty 226. Jednodušeji takto: Položte $\psi(x) = 1$ pro $a \leqq x \leqq a + 1$, $\psi(x) = 0$ pro $x > a + 1$, použijte věty 226 jednou na funkci $\psi(x) + \varphi(x)$ (místo $\varphi(x)$), po druhé na $\psi(x)$ a odečtěte. Obdobný výsledek platí též pro integrál (72). (Proč nemůžete vždy položiti prostě $\psi(x) = 1$ pro všechna x?)

V cvič. 6, 7 značí $F(r)$ funkci z příkladu 2.

6. Rozvineme-li funkci $\exp(-2x^2r)$ v mocninnou řadu a integrujeme člen po členu, dostaneme z (60) snadno

$$F(r) = \frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2r)^n}{n!} \Gamma\left(\frac{2n+1}{4}\right).$$

To platí pro každé komplexní r.

Odtud plyne pak snadno, že jest

$$F(r) = \frac{1}{4} \Gamma\left(\frac{1}{4}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1 \,.\, 5 \,.\, 9 \ldots (4m-3)}{(2m)!} r^{2m} -$$
$$- \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{3 \,.\, 7 \,.\, 11 \ldots (4m-1)}{(2m+1)!} r^{2m+1} .$$

7. Pro $R \to +\infty$ a pro každé celé $p \geqq 0$ jest

$$F(-R) = \sqrt{\frac{\pi}{4R}}\, e^{R^2} \left(\sum_{m=0}^{p} \frac{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (4m-1)}{m!\,(4R)^{2m}} + O(R^{-2p-2})\right).$$

Návod: V integrálu v (63) vezměme dolní mez $-\frac{1}{2}$; tím učiníme chybu $O(\exp(-\frac{1}{4}R^2))$. Rozviňme $(1+t)^{-\frac{1}{2}}$ podle Taylorovy formule se zbytkem (v integračním intervalu bude $1 + \Theta t > \frac{1}{2}$ pro $0 < \Theta < 1$). Integrál ze zbytku (násobeného funkcí $\exp(-R^2t^2)$) odhadněme; v ostatních integrálech pišme dolní mez $-\infty$ místo $-\frac{1}{2}$ (chyba $O(\exp(-\frac{1}{8}R^2))$ a vypočtěme je užitím funkce gamma.

§ 4. Asymptotické vlastnosti integrálů tvaru $\int_a^b \varphi(x)\, e^{i\alpha f(x)}\, dx$ pro

$\alpha \to +\infty$. Rozdíl proti integrálu z věty 226 je ten, že exponent byl ve větě 226 $\alpha\, h(x)$, tedy reálný, kdežto zde je ryze imaginární. Rozdíl jest ovšem velmi podstatný, jak uvidíme z metod i z výsledků. Napřed odvodíme jednu pomocnou větu. Připomínám ještě vzorec (83) z kap. VIII, § 4: Je-li $0 < \nu < 1$, jest

$$\int_0^{+\infty} x^{\nu-1} e^{ix}\, dx = \Gamma(\nu)\, e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}\,.\qquad (73)$$ [26]

Věta 227 (pomocná). *Budiž $0 < b < +\infty$, $0 < \nu < 1$. Nechť reálná funkce $\psi(y)$ má konečnou variaci v $\langle 0, b\rangle$. Potom jest*

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \alpha^\nu \int_0^b e^{i\alpha y} y^{\nu-1}\, \psi(y)\, dy = \Gamma(\nu)\, e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}\, \psi(0+)\,. \qquad (74)$$

(Značíme $\psi(0+) = \lim_{y\to 0+} \psi(y)$.)

Důkaz. Ježto funkce s variací konečnou je rozdílem dvou funkcí neklesajících, stačí provésti důkaz za předpokladu, že ψ je neklesající konečná funkce v $\langle 0, b\rangle$. Z konvergence integrálů (nevlastních)

$$\int_0^{+\infty} x^{\nu-1} \cos x\, dx,\quad \int_0^{+\infty} x^{\nu-1} \sin x\, dx \qquad (75)$$

(viz (73)) plyne:

I. Existuje číslo K $(0 < K < +\infty)$ tak, že pro všechna nezáporná k, m je

$$\left|\int_k^m x^{\nu-1} \cos x\, dx\right| < K\,,\quad \left|\int_k^m x^{\nu-1} \sin x\, dx\right| < K\,. \qquad (76)$$

II. Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje Δ $(0 < \Delta < +\infty)$ tak, že

$$(k > \Delta, m > \Delta) \Rightarrow \left(\left|\int_k^m x^{\nu-1} \cos x\, dx\right| < \varepsilon\,,\quad \left|\int_k^m x^{\nu-1} \sin x\, dx\right| < \varepsilon\right). \qquad (77)$$

Substitucí $\alpha y = x$ $(\alpha > 0)$ přechází výraz, stojící v (74) za znamením lim, v integrál

$$I(\alpha) = \int_0^{\alpha b} e^{ix} x^{\nu-1}\, \psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) dx\,. \qquad (78)$$

Budiž $\delta > 0$; potom existuje ϱ $(0 < \varrho < b)$ tak, že $\psi(0+) \leqq \psi(\varrho) < < \psi(0+) + \delta$. Rozepišme:

[26]) Toto jest ovšem nevlastní („neabsolutně konvergentní") integrál.

$$
(79) \qquad \begin{aligned} I(\alpha) &= \psi(0+)\int_0^{\alpha\varrho} e^{ix} x^{\nu-1}\,dx + \\ &+ \int_0^{\alpha\varrho}\left(\psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) - \psi(0+)\right) e^{ix} x^{\nu-1}\,dx + \int_{\alpha\varrho}^{\alpha b} \psi\left(\frac{x}{\alpha}\right) e^{ix} x^{\nu-1}\,dx\,. \end{aligned}
$$

První sčítanec má pro $\alpha \to +\infty$ (ϱ je pevně zvoleno!) limitu $\psi(0+)\,.\,\Gamma(\nu)\,e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}$ (podle (73)). Druhý integrál rozepíši na reálnou a imaginární část a užiji druhé věty o střední hodnotě (při čemž hodnotu $\psi(0)$ nahradím hodnotou $\psi(0+)$, což smím); dostanu

$$
(\psi(\varrho) - \psi(0+))\left(\int_{\xi_1}^{\alpha\varrho} x^{\nu-1}\cos x\,dx + i\int_{\xi_2}^{\alpha\varrho} x^{\nu-1}\sin x\,dx\right).
$$

Prostá hodnota tohoto výrazu je podle I menší než $2K\delta$. Třetí integrál vpravo v (79) má obdobně hodnotu

$$
(80) \qquad \begin{aligned} &\psi(\varrho)\int_{\alpha\varrho}^{\xi_3} x^{\nu-1}\cos x\,dx + \psi(b)\int_{\xi_3}^{\alpha b} x^{\nu-1}\cos x\,dx + \\ &+ i\,\psi(\varrho)\int_{\alpha\varrho}^{\xi_4} x^{\nu-1}\sin x\,dx + i\,\psi(b)\int_{\xi_4}^{\alpha b} x^{\nu-1}\sin x\,dx\,, \end{aligned}
$$

kde $\alpha\varrho \leqq \xi_3 \leqq \alpha b$, $\alpha\varrho \leqq \xi_4 \leqq \alpha b$. Podle II má tedy výraz (80) pro $\alpha \to +\infty$ limitu 0. Celkem plyne tedy z (79), že jest

$$
\limsup_{\alpha\to+\infty} |I(\alpha) - \psi(0+)\,\Gamma(\nu)\,e^{\frac{1}{2}\nu\pi i}| \leqq 2K\delta\,.
$$

Ježto tato nerovnost platí pro každé $\delta > 0$, je tím rovnice (74) dokázána.

Všimněme si nyní integrálu, uvedeného v titulu tohoto paragrafu. Jsou-li funkce f, φ reálné, je reálná a imaginární část tohoto integrálu

$$
(81) \qquad \int_a^b \varphi(x)\cos(\alpha f(x))\,dx\,, \quad \int_a^b \varphi(x)\sin(\alpha f(x))\,dx\,.
$$

Je-li α velmi veliké, střídají se s měnícím se x (t. j. s měnícím se $f(x)$) velmi rychle kladné a záporné hodnoty kosinu a sinu a dá se očekávati, že se budou přibližně rušiti. Pouze tam, kde se $f(x)$ mění velmi pomalu (t. j. v okolí bodů, v nichž $f'(x) = 0$), bude toto střídání pomalejší; dá se tedy očekávati, že nejpodstatnější příspěvek k hodnotám integrálů

(81) bude poskytovati blízké okolí oněch bodů, pro něž jest $f'(x) = 0$. Postřeh, obsažený v této poznámce, vypracujeme ve větě 228; mluvívá se v této souvislosti o „principu stacionární fáze".[27])

Věta 228. *Budiž* $-\infty < a < b < +\infty$. *Reálná funkce* $\varphi(x)$ *nechť má v* $\langle a, b\rangle$ *spojitou derivaci*[28]) $\varphi'(x)$. *Reálná funkce* $f(x)$ *nechť má v* $\langle a, b\rangle$ *spojitou druhou derivaci.*[28]) *Mimo to nechť je* $f'(x) \neq 0$ *pro všechna* $x \in (a, b\rangle$, *ale* $f'(a) = 0$. *Nechť existuje přirozené číslo* p *tak, že* $f^{(q)}(a) = 0$ *pro* $1 \leqq q \leqq p-1$, $f^{(p)}(a) \neq 0$.[29]) *Nechť dále existuje konečná derivace* $f^{(p+1)}(a)$. *Potom platí: položíme-li*

$$(82)\qquad I(\alpha) = \int_a^b \varphi(x)\, e^{i\alpha f(x)}\, dx\,,$$

jest

$$(83)\qquad \lim_{\alpha\to+\infty} \alpha^{\frac{1}{p}} e^{-i\alpha f(a)}\, I(\alpha) = \frac{1}{p}\,\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{p!}{|f^{(p)}(a)|}\right)^{\frac{1}{p}} \varphi(a)\, e^{\pm\frac{i\pi}{2p}}\,;$$

přitom horní znamení platí pro $f^{(p)}(a) > 0$, *dolní pro* $f^{(p)}(a) < 0$.

Poznámka 1. Kdyby byla derivace $f'(x)$ rovna nule v bodě b (místo v bodě a), zavedli bychom integrační proměnnou $\xi = -x$, načež bychom užili věty 228 na integrační interval $-b, -a$.

Poznámka 2. Jestliže v integračním intervalu je několik bodů, v nichž je $f'(x) = 0$,[30]) rozdělím tento interval na několik částečných intervalů tak, že v každém z nich je jen jeden takový bod, a to buď v počátečním bodě (zde užiji věty 228) nebo v koncovém bodě (zde užiji věty 228 po substituci $\xi = -x$, viz pozn. 1).

Poznámka 3. Snad přehlednější je tento tvar rovnice (83) (uvědomte si, že $|e^{i\alpha f(a)}| = 1$): klademe-li pro zkrácení

$$(84)\qquad A = \frac{1}{p}\,\Gamma\left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{p!}{|f^{(p)}(a)|}\right)^{\frac{1}{p}} \varphi(a)\,,$$

[27]) Číslo z ve funkcích $\cos z$, $\sin z$ se často — hlavně ve fysikálních a technických otázkách — nazývá fází. Fáze ve funkcích $\cos(\alpha f(x))$, $\sin(\alpha f(x))$ je „stacionární" tam, kde se mění pomalu, t. j. tam, kde $f'(x) = 0$.

[28]) Míním — všude v této větě — konečnou derivaci.

[29]) Tedy $p \geqq 2$.

[30]) Nebo je-li jen jeden, ale uvnitř intervalu.

jest

$$(85)\qquad \int_a^b \varphi(x)\, e^{i\alpha f(x)}\, dx = A e^{i\left(\alpha f(a) \pm \frac{\pi}{2p}\right)} \alpha^{-\frac{1}{p}} + o\left(\alpha^{-\frac{1}{p}}\right).$$

Rozepsáním reálné a imaginární části plyne:

$$(86)\qquad \int_a^b \varphi(x) \cos(\alpha f(x))\, dx = A\alpha^{-\frac{1}{p}} \cos\left(\alpha f(a) \pm \frac{\pi}{2p}\right) + o\left(\alpha^{-\frac{1}{p}}\right),$$

$$(87)\qquad \int_a^b \varphi(x) \sin(\alpha f(x))\, dx = A\alpha^{-\frac{1}{p}} \sin\left(\alpha f(a) \pm \frac{\pi}{2p}\right) + o\left(\alpha^{-\frac{1}{p}}\right).$$

Znamení o jest ovšem myšleno pro $\alpha \to +\infty$.

Poznámka 4. Že funkce f je reálná, je podstatné. Ale funkce φ může býti komplexní, a rovnice (83), (85), (86), (87) rovněž platí: můžeme jich totiž užíti na reálnou a imaginární část funkce φ a potom sečísti.

Důkaz věty 228. Funkce $f'(x)$ má v intervalu $(a, b\rangle$ stále totéž znamení; předpokládejme napřed, že jest

$$(88)\qquad f'(x) > 0 \quad \text{pro } a < x \leqq b\,.$$

Připomeňme: má-li nějaká funkce $g(x)$ v bodě a konečnou derivaci řádu q-tého ($q > 0$), plyne z rovnice (44) pro $x \to a$:

$$g(x) = g(a) + \frac{x-a}{1!} g'(a) + \ldots + \frac{(x-a)^{q-1}}{(q-1)!} g^{(q-1)}(a) + O(|x-a|^q)\,. \tag{89}$$

Užijeme-li toho na funkce $f(x), f'(x), f''(x)$, máme, klademe-li $C = f^{(p)}(a) : p!$

$$(90)\qquad f(x) - f(a) = C(x-a)^p + O(|x-a|^{p+1})\,,$$

$$(91)\qquad f'(x) = p\, C(x-a)^{p-1} + O(|x-a|^p)\,,$$

$$(92)\qquad f''(x) = p(p-1)\, C(x-a)^{p-2} + O(|x-a|^{p-1})\,,$$

vesměs pro $x \to a$. Podotkněme, že podle (91) má $f'(x)$ v jistém intervalu $(a, a+\delta)$ ($\delta > 0$) totéž znamení jako C; podle (88) je tedy

$$(93)\qquad C = f^{(p)}(a) : p! > 0\,.$$

Funkce $f(x) - f(a)$ je spojitá a rostoucí (viz (88)) v $\langle a, b\rangle$ a má tam spojitou derivaci, která je kladná v $(a, b\rangle$, rovná nule v bodě a. Funkce $f(x) - f(a)$ zobrazuje $\langle a, b\rangle$ na interval $\langle 0, f(b) - f(a)\rangle$. Ke každému $y \in \langle 0, f(b) - f(a)\rangle$ existuje právě jedno $x \in \langle a, b\rangle$, pro něž je

$$y = f(x) - f(a)\,. \tag{94}$$

Označíme-li toto x znakem $F(y)$, je F inversní funkce k funkci $f(x) - f(a)$ a má tedy tyto vlastnosti: Je spojitá a rostoucí v $\langle 0, f(b) - f(a)\rangle$ (**D I**, věta 114) a má uvnitř tohoto intervalu konečnou, kladnou a spojitou derivaci

$$F'(y) = \frac{1}{f'(x)} \qquad (0 < y < f(b) - f(a)) \tag{95}$$

(**D I**, věta 125). Přitom, napíši-li někde v dalším písmena x, y, rozumím tím, že je $a \leqq x \leqq b$ a že platí (94) neboli

$$x = F(y)\,. \tag{96}$$

V krajních bodech intervalu $\langle 0, f(b) - f(a)\rangle$ máme podle **D II** (věta 80), píšeme-li pro zkrácení $B = f(b) - f(a)$,

$$F'_-(B) = \lim_{y\to B-} F'(y) = \lim_{x\to b-} \frac{1}{f'(x)} = \frac{1}{f'(b)} > 0\,, \tag{97}$$

$$F'_+(0) = \lim_{y\to 0+} F'(y) = \lim_{x\to a+} \frac{1}{f'(x)} = +\infty\,. \tag{98}$$

V dalším budu znaky $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \ldots$ rozuměti derivace funkce $f(x) - f(a)$, t. j. derivace $f'(x), f''(x), \ldots$; znaky $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}, \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}, \ldots$ budu rozumět derivace $F'(y), F''(y), \ldots$ Zaveďme nyní do integrálu $I(\alpha)$ integrační proměnnou y rovnicí (96); podle věty 104 (nebo podle pozn. 1 v kap. VII, § 1) máme

$$I(\alpha) = \int_a^b \varphi(x)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha f(x)}\, \mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha f(a)} \int_0^B \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha y}\, \varphi(x) \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\, \mathrm{d}y\,, \tag{99}$$

kde ovšem $\varphi(x)$ v druhém integrálu značí $\varphi(F(y))$, $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = F'(y)$.

Vyšetříme nyní průběh funkce $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}$ pro $y \to 0 +$ (neboli pro $x \to \to a +$). V rovnicích (90), (91), (92) levé strany značí $y, \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

Z (90) plyne (vesměs pro $y \to 0 +$)

(100) $$y \cong C(x-a)^p\,.$$ [31]

Na to plyne z (91)

(101) $$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} \cong p\,C(x-a)^{p-1} \cong p\,C^{\frac{1}{p}} y^{\frac{p-1}{p}}\,,$$

takže

(102) $$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} \cong \frac{1}{p\,C^{\frac{1}{p}}}\, y^{\frac{1}{p}-1}\,.$$

V dalším klademe stále $B = f(b) - f(a)$ a znakem $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = F'(y)$ pro hodnotu $y = B$ rozumíme derivaci zleva (viz (97)). Položíme-li

(103) $$\psi(y) = \varphi(F(y))\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\, y^{1-\frac{1}{p}} \quad \text{pro } 0 < y \leqq B\,,$$

je podle (99)

(104) $$I(\alpha) = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha f(a)} \int_0^B \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha y} y^{\frac{1}{p}-1}\,\psi(y)\,\mathrm{d}y$$

a podle (102) je

(105) $$\lim_{y\to 0+} \psi(y) = \frac{1}{pC^{\frac{1}{p}}}\,\varphi(a)\,.$$

Jestliže funkce $\psi(y)$ má konečnou variaci v $\langle 0, B\rangle$,[32] můžeme užíti pomocné věty a obdržíme ihned rovnici (83) se znamením plus, všimneme-li si rovnice (105) a definice čísla C.

---

[31]) Jde o jednoduché limitní úvahy: rovnici (90) dělím $(x-a)^p$ a přejdu k limitě $y \to 0 +$; ze spojitosti a monotonie funkce F plyne, že $\lim_{y\to 0+} x = a$; zde ovšem x značí $F(y)$.

[32]) Vlastně jsme ještě nedefinovali $\psi(0)$; ale zřejmě nezáleží (ani v integrálu (104) ani při otázce, zda ψ má konečnou variaci) na tom, které konečné reálné číslo zvolím za $\psi(0)$.

Že pak funkce $\psi(y)$ má v $\langle 0, B\rangle$ konečnou variaci, plyne takto. Funkce $\varphi(x)$ má konečnou variaci v $\langle a, b\rangle$ (mající tam spojitou a tedy omezenou derivaci, viz kap. XIII, § 6, pozn. 1). Ježto F je rostoucí, má složená funkce $\varphi(F(y))$ konečnou variaci v $\langle 0, B\rangle$.[33]) Ježto součin dvou funkcí s variací konečnou má variaci konečnou (**D II**, věta 91), stačí ještě dokázati, že též funkce

$$G(y) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\, y^{1-\frac{1}{p}} \tag{106}$$

má v $\langle 0, B\rangle$ konečnou variaci; přitom definujeme

$$G(0) = \lim_{y\to 0+} G(y) = \frac{1}{pC^{\frac{1}{p}}} \tag{107}$$

(viz (102)), takže G je spojitá v $\langle 0, B\rangle$. Pro $0 < y < B$ vypočtěme

$$G'(y) = \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2}\, y^{1-\frac{1}{p}} + \frac{p-1}{p}\, y^{-\frac{1}{p}}\, \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}\,.$$

Přitom jest

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = 1 : \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$$

a odtud derivováním

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}y^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(1 : \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = -\,\frac{\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}}{\left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3}\,,$$

takže pro $0 < y < B$ je

$$G'(y) = -\,\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\, y^{1-\frac{1}{p}} : \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^3 + \frac{p-1}{p}\, y^{-\frac{1}{p}} : \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\,. \tag{108}$$

Provedu-li zde limitní přechod $y \to B-$ (t. j. $x \to b-$), dostanu (viz **D II**, věta 80), že rovnice (108) platí i pro $y = B$ (při čemž $G'(B)$

[33]) Důkaz: Budiž $0 = y_0 < y_1 < \ldots < y_p = B$ a položme $F(y_n) = x_n$, takže $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_p = b$. Potom

$$\sum_{n=1}^{p} |\varphi(F(y_n)) - \varphi(F(y_{n-1}))| = \sum_{n=1}^{p} |\varphi(x_n) - \varphi(x_{n-1})| \leqq V(\langle a, b\rangle; \varphi)\,.$$

značí derivaci zleva). Ze (108) plyne, že $G'(y)$ je konečná a spojitá v $)0, B\rangle$. Ještě však musíme vyšetřit průběh funkce $G'(y)$ pro $y \to 0+$. Z rovnice (108) a z rovnic (90), (91), (92) (jejichž levé strany jsou y, $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$) plyne[34])

$$G'(y) = \frac{y^{-\frac{1}{p}}}{\left(\frac{dy}{dx}\right)^3} H(y), \tag{109}$$

kde

$$H(y) = -(p(p-1)C(x-a)^{p-2} + O((x-a)^{p-1}))(C(x-a)^p + \\ + O((x-a)^{p+1})) + \frac{p-1}{p}(pC(x-a)^{p-1} + O((x-a)^p))^2.$$

Po vynásobení vyjde součinitel při $(x-a)^{2p-2}$ roven nule a tedy

$$H(y) = O((x-a)^{2p-1}) = O\left(y^{2-\frac{1}{p}}\right). \tag{110}$$

Podle (101) je

$$y^{-\frac{1}{p}} : \left(\frac{dy}{dx}\right)^3 \cong Ay^{\frac{2}{p}-3}, \tag{111}$$

kde A je jisté kladné číslo (jež je zbytečno počítat); podle (110), (111) plyne tedy ze (109)

$$G'(y) = O\left(y^{\frac{1}{p}-1}\right) \text{ pro } y \to 0+. \tag{112}$$

Odtud a ze spojitosti funkce $G'(y)$ v intervalu $(0, B\rangle$ plyne konvergence Lebesgueova integrálu $\int_0^B G'(y)\,dy$. Ježto $G'(y)$ je spojitá v $(0, B\rangle$, má funkce

$$K(y) = \int_0^y G'(z)\,dz, \tag{113}$$

jež je spojitá v $\langle 0, B\rangle$, derivaci $G'(y)$ v každém vnitřním bodě tohoto

[34]) Znamení O se vztahuje na $y \to 0+$. Výraz $x - a$ je potom jistou kladnou funkcí y, totiž $x - a = F(y) - a$.

intervalu. Ale také G je spojitá v $\langle 0, B\rangle$ a v $(0, B)$ je $K' = G'$. Podle věty 136 v **D I** je tedy v $\langle 0, B\rangle$

$$G(x) = K(x) + k \quad (k = \text{konstanta}) . \tag{114}$$

Ježto K má konečnou variaci v $\langle 0, B\rangle$ (je tam dokonce absolutně spojitá, viz větu 92), platí totéž o funkci G. Tím je věta 228 dokázána, jestliže $f'(x) > 0$ v $(a, b\rangle$ (podle (93) je v tomto případě $f^{(p)}(a) > 0$, takže v (83) má vskutku platit znamení $+$).

Jestliže však $f'(x) < 0$ v $(a, b\rangle$, uvažme toto: číslo komplexně sdružené k číslu $\alpha^{\frac{1}{p}} e^{-i\alpha f(a)} \int\limits_a^b \varphi(x)\, e^{i\alpha f(x)}\, dx$ je číslo

$$\alpha^{\frac{1}{p}} e^{i\alpha f(a)} \int\limits_a^b \varphi(x)\, e^{-i\alpha f(x)}\, dx . \tag{115}$$

Užijme nyní předešlého případu na funkci $-f(x)$, jež má kladnou derivaci v $(a, b\rangle$. Limita výrazu (115) pro $\alpha \to +\infty$ je tedy

$$\frac{1}{p}\, \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \left(\frac{p!}{|-f^{(p)}(a)|}\right)^{\frac{1}{p}} \varphi(a)\, e^{\frac{i\pi}{2p}} . \text{[35]} \tag{116}$$

Limita v (83) je tedy číslo komplexně sdružené k číslu (116), t. j. číslo

$$\frac{1}{p}\, \Gamma\left(\frac{1}{p}\right) \left(\frac{p!}{|f^{(p)}(a)|}\right)^{\frac{1}{p}} \varphi(a)\, e^{-\frac{i\pi}{2p}} .$$

Tím je věta 228 úplně dokázána.

Vezmu nyní dva příklady, jejichž užitečnost se nám objeví za chvíli (v § 6).

Příklad 1. Integrál

$$\frac{1}{\pi} \int\limits_0^\pi \cos\,(\alpha(x - \sin x))\, dx \tag{117}$$

má tvar (86), klademe-li $a = 0$, $b = \pi$, $\varphi(x) = \frac{1}{\pi}$, $f(x) = x - \sin x$.

[35]) Znamení při $i\pi : 2p$ je $+$, ježto podle toho, co bylo dokázáno v případě $f'(x) > 0$ (viz (93)), je nyní $-f^{(p)}(a) > 0$.

Jest $f'(x) = 1 - \cos x$. V intervalu $(0, \pi\rangle$ jest $f'(x) > 0$; ale jest $f'(0) = 0$, $f''(0) = 0$, $f'''(0) = 1$. Tedy podle (86), (84)

$$\begin{aligned}(118)\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\,(\alpha(x - \sin x))\,dx &\cong \tfrac{1}{3}\Gamma(\tfrac{1}{3})\,6^{\frac{1}{3}}\,.\,\frac{1}{\pi}\,.\,\cos\tfrac{1}{6}\pi\,.\,\frac{1}{\sqrt[3]{\alpha}} = \\ &= \alpha^{-\frac{1}{3}}\,.\,\frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{2^{\frac{2}{3}}\,.\,3^{\frac{1}{6}}\,.\,\pi} \quad \text{pro } \alpha \to +\infty\,.\end{aligned}$$

Příklad 2. Budiž dáno číslo β, $0 < \beta < \frac{1}{2}\pi$. Vyšetřujme integrál

$$(119)\qquad I(\alpha) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos\left(\alpha\left(x - \frac{\sin x}{\cos\beta}\right)\right) dx\,.$$

Funkce $f(x) = x - \dfrac{\sin x}{\cos\beta}$ má derivaci $1 - \dfrac{\cos x}{\cos\beta}$, a ta má v integračním intervalu hodnotu 0 v jediném bodě, totiž pro $x = \beta$. Rozdělím tedy integrační interval na intervaly $\langle 0, \beta\rangle$, $\langle\beta, \pi\rangle$ a v prvním zavedu $-\,x$ jako integrační proměnnou (viz pozn. 1, 2). Vyjde

$$I(\alpha) = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\beta}^{0} + \int_{\beta}^{\pi} \cos\left(\alpha\left(x - \frac{\sin x}{\cos\beta}\right)\right) dx\right)$$

(tentýž integrand[36]) v obou integrálech). Zde máme:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\,,\quad f(x) = x - \frac{\sin x}{\cos\beta}\,,\quad f'(x) = 1 - \frac{\cos x}{\cos\beta}\,,\quad f''(x) = \frac{\sin x}{\cos\beta}\,.$$

V intervalu $(-\beta, 0\rangle$ je $f'(x) < 0$, v intervalu $(\beta, \pi\rangle$ je $f'(x) > 0$. Dále

$$f'(\beta) = f'(-\beta) = 0,\quad |f''(\beta)| = |f''(-\beta)| = \operatorname{tg}\beta \neq 0\,.$$

Užijeme tedy vzorce (86) pro $p = 2$ (podle (13) v kap. VII jest $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$). Jest

$$\begin{aligned}\cos\,(\alpha\,f(\beta) + \tfrac{1}{4}\pi) &= \cos\,(\alpha(\beta - \operatorname{tg}\beta) + \tfrac{1}{4}\pi)\,,\\ \cos\,(\alpha\,f(-\beta) - \tfrac{1}{4}\pi) &= \cos\,(-\,\alpha(\beta - \operatorname{tg}\beta) - \tfrac{1}{4}\pi)\,,\end{aligned}$$

---

[36]) Užívám toho, že kosinus je sudá funkce.

takže z (86) plyne

$$(120)\quad I(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi \operatorname{tg} \beta}}\, \alpha^{-\frac{1}{2}} \cos\left(\alpha(\operatorname{tg}\beta - \beta) - \tfrac{1}{4}\pi\right) + o(\alpha^{-\frac{1}{2}}) \text{ pro } \alpha \to +\infty.^{37})$$

Cvičení

1. Metoda stacionární fáze jest, obecně řečeno, méně vydatná než metoda paragrafu 3. Na př. jsme v § 3, příkl. 3, sestrojili asymptotický rozvoj, postupující podle mocnin $1 : r^2$ (číslo r hrálo roli parametru α). Ale metoda stacionární fáze sotva může obecně vésti dále než k členům řádu $O(\alpha^{-1})$,[38]) neboť i intervaly, v nichž je stále $f'(x) \neq 0$, mohou dávati příspěvky tohoto řádu. Příklad: pro $\varphi(x) = 1$, $f(x) = x$, $f'(x) = 1$ jest

$$I(\alpha) = \int_0^{\pi} e^{i\alpha x}\, dx = \frac{1}{i\alpha}(e^{i\alpha\pi} - 1),$$

takže pro liché kladné α jest $|I(\alpha)| = 2 \cdot \alpha^{-1}$.

2. Všimněme si blíže případu $f'(x) \neq 0$. Buďiž $-\infty < a < b < +\infty$; buďte f, φ reálné funkce. Buďte $f''(x)$, $\varphi'(x)$ spojité a konečné v $\langle a, b\rangle$. Buďiž $f'(x) \neq 0$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$. Potom jest

$$\int_a^b \varphi(x)\, e^{i\alpha f(x)}\, dx = O(\alpha^{-1}) \text{ pro } \alpha \to +\infty.$$

Návod: Integrujte per partes.

§ 5. Besselovy funkce prvního druhu. V následujících paragrafech chci osvětliti metody právě vyložené na t. zv. funkcích Besselových. Nejde mně přitom o systematický výklad jejich teorie (který patří do teorie analytických funkcí), nýbrž o to, aby čtenář na důležitém speciálním případě podrobněji poznal, jak lze studium asymptotických vlastností prováděti. Besselovy funkce se k tomu dobře hodí především

---

[37]) Nesmíme psáti $I(\alpha) \cong \sqrt{\frac{2}{\pi \operatorname{tg}\beta}}\, \alpha^{-\frac{1}{2}} \cos(\alpha(\operatorname{tg}\beta - \beta) - \frac{1}{4}\pi)$, neboť to by znamenalo, že podíl levé a pravé strany pro $\alpha \to +\infty$ má limitu 1. Ale to není pravda, neboť pravá strana se rovná nule pro některé libovolně veliké hodnoty α, takže podíl pak nemá smyslu. Pro takové hodnoty α (a rovněž pro hodnoty ležící v jejich blízkém okolí) může na pravé straně rovnice (120) převážiti druhý člen, označený krátce symbolem $o(\alpha^{-\frac{1}{2}})$, nad prvním členem. V příkl. 1 takové obtíže nebyly.

[38]) Ovšem: ve speciálních případech nás může vhodný obrat přivésti dále.

proto, že příslušné problémy jsou u nich dosti rozmanité a jsou podrobně prostudovány; a za druhé jsou to funkce velmi důležité (na př. též ve fysikálních problémech), takže jejich studium nebude pro čtenáře znamenati zbytečnou ztrátu času.

Besselovy funkce budeme definovati t. zv. „vytvořující funkcí". Předešleme tři poznámky.

Poznámka 1. Budiž předložen výraz

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} t^{-n}, \tag{121}$$

kde $a_k \in \mathbf{K}$ jsou daná čísla, t je komplexní proměnná. Podle věty 219 v **D II** existuje číslo R_1 ($0 \leqq R_1 \leqq +\infty$) tak, že $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ je absolutně konvergentní pro $|t| < R_1$, divergentní pro $|t| > R_1$.

Obdobně: Existuje ϱ ($0 \leqq \varrho \leqq +\infty$) tak, že $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} z^n$ je absolutně konvergentní pro $|z| < \varrho$, divergentní pro $|z| > \varrho$. T. j. řada $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} t^{-n}$ je absolutně konvergentní pro $|t| > R_2$, divergentní pro $|t| < R_2$, klademe-li $R_2 = \dfrac{1}{\varrho}$ (pro $\varrho = 0$ klademe $R_2 = +\infty$, pro $\varrho = +\infty$ klademe $R_2 = 0$). Je-li tedy $R_2 < R_1$, jsou obě řady v (121) absolutně konvergentní, leží-li t v „konvergenčním mezikruží" $R_2 < |t| < R_1$ (načrtněte!). Pro $R_2 = 0$ se vnitřní kružnice redukuje na bod $t = 0$, pro $R_1 = +\infty$ jde prostě o vnějšek kružnice: $|t| > R_2$. V konvergenčním mezikruží jsou tedy obě řady v (121) absolutně konvergentní a výraz (121) definuje jistou funkci f:

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} a_n t^n \tag{122}$$

(ježto jde o řadu absolutně konvergentní, mohu ji psát jako zobecněnou řadu, mohu přeskupovat a slučovat členy atd. jak chci — viz **D II**, věta 39). Je-li $R_2 < r < R_1$, je řada v (122) stejnoměrně konvergentní na kružnici $|t| = r$ (t. j. pro $t = re^{i\varphi}$, $\varphi \in \mathbf{E}_1$), neboť $\sum |a_n| r^n$ je konvergentní majoranta (nezávislá na φ). Proto mohu v rovnici (m celé)

$$(123)\qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\varphi})\, e^{-mi\varphi}\, d\varphi = \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n r^n e^{(n-m)i\varphi}\, d\varphi$$

integrovati člen po členu; všichni členové s $n \neq m$ vypadnou a obdržíme

$$(124)\qquad a_m = \frac{1}{2\pi r^m} \int_{-\pi}^{\pi} f(re^{i\varphi})\, e^{-im\varphi}\, d\varphi\,.$$

Tedy: Koeficienty a_m jsou určeny hodnotami $f(re^{i\varphi})$. Ježto jsme k odvození vzorce (124) potřebovali pouze absolutní konvergenci pro $|t| = r$, máme tento výsledek: *Jestliže řady* $\sum a_n t^n$, $\sum b_n t^n$ *jsou absolutně konvergentní na kružnici* $|t| = r$ $(0 < r < +\infty)$ *a mají na ní týž součet, je* $a_n = b_n$ *pro všechna* n (neboť a_m i b_m se určí z téže formule (124)).

Poznámka 2. Budiž $0 \leqq R_2 < R_1 \leqq +\infty$, $M \subset \mathbf{K}$. Jestliže funkci $f(t, z)$(dvou komplexních proměnných) lze pro každé $z \in M$ rozvinouti v řadu tvaru (122), konvergentní v mezikruží $R_2 < |t| < R_1$, jsou koeficienty ovšem funkcemi z, t. j. je

$$(125)\qquad f(t, z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z)\, t^n \quad (z \in M,\ R_2 < |t| < R_1)\,.$$

Podle pozn. 1 jsou funkce $a_n(z)$ jednoznačně určeny funkcí $f(t, z)$ a čísly R_2, R_1; říká se, že funkce $f(t, z)$ je **vytvořující funkcí** pro funkce $a_n(z)$.

Poznámka 3. Často se vyskytují tyto speciální případy řady (121):

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \ \text{(mocninná řada v } t\text{)}\,,$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{t^n} \ \text{(mocninná řada v } 1 : t\text{)}\,;$$

nebo také obecnější řady o „středu“ t_0:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (t - t_0)^n\,.$$

Přistupme nyní k definici Besselových funkcí. Pro komplexní z, t $(t \neq 0)$ je

(126) $$e^{\frac{1}{2}zt} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m!}\left(\frac{1}{2}zt\right)^m, \quad e^{-\frac{1}{2}z\frac{1}{t}} = \sum_{p=0}^{\infty} \frac{1}{p!}\left(\frac{-z}{2t}\right)^p.$$

Obě řady konvergují absolutně; mohu je tedy vynásobit člen po členu a libovolně sloučit; dáme-li dohromady členy s touž mocninou t^n, obdržíme pro každé z a každé $t \neq 0$

(127) $$e^{\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\, t^n\,;$$ [39]

přitom

(128) $$J_n(z) = \sum \left(\frac{1}{2}z\right)^m \cdot \frac{1}{m!} \cdot \left(-\frac{1}{2}z\right)^p \cdot \frac{1}{p!}\,;$$

sčítá se přes ona celá m, p, pro něž je $m \geqq 0$, $p \geqq 0$, $m - p = n$. Pro $n \geqq 0$ má tedy býti $p \geqq 0$, $m = p + n$, načež podmínka $m \geqq 0$ je již sama sebou splněna. Tedy

(129) $$J_n(z) = \sum_{p=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}z\right)^{n+2p} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \quad \text{pro } n = 0, 1, 2, \ldots$$

Jestliže $n \leqq 0$, pišme $r = -n$, načež máme podmínky $m \geqq 0$, $p \geqq 0$, $p - m = r$; tedy $m \geqq 0$, $p = m + r$, načež podmínka $p \geqq 0$ je již sama sebou splněna. Tedy

(130) $$J_{-r}(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}z\right)^{r+2m} \frac{(-1)^{m+r}}{m!(m+r)!} \quad \text{pro } r = 0, 1, 2, \ldots$$

Ze (129), (130) plyne ihned pro každé celé n

(131) $$J_n(-z) = (-1)^n J_n(z)$$

a dále (srovnáním (130), (129))

(132) $$J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)\,.$$

Stačí tedy, budeme-li se zabývati funkcemi $J_n(z)$ pro celá nezáporná n. Funkci $J_n(z)$ (toto označení podržíme až do konce této kapitoly) nazýváme *Besselovou funkcí prvního druhu s indexem n*. Mocninné řady v (129), (130) konvergují pro všechna $z \in \mathbf{K}$.

[39]) Funkce vlevo je tedy vytvořující funkcí pro funkce J_n.

Ježto řada v (127) konverguje absolutně pro každé $t \neq 0$, můžeme užíti vzorce (124) pro $r = 1$ a dostáváme

$$(133) \qquad J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\frac{z}{2}(e^{i\varphi} - e^{-i\varphi}) - in\varphi}\, d\varphi\,,$$

$$(134) \qquad J_n(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \exp\,(i(z \sin \varphi - n\varphi))\, d\varphi\,,$$

kde klademe (jako často při složitých exponentech) $\exp(x) = e^x$. Integrand vpravo jest $\cos(z \sin \varphi - n\varphi) + i \sin(z \sin \varphi - n\varphi)$. První člen je sudá funkce φ, druhý je lichá funkce; proto lze (134) psáti též ve tvaru

$$(135) \qquad J_n(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \cos\,(n\varphi - z \sin \varphi)\, d\varphi\,;$$

to je t. zv. Besselův integrál. Táž úvaha nás poučuje, že integrál v (134) se nezmění, píši-li v něm $-i$ místo i.

Odvodíme ještě druhé integrální vyjádření, *platné pro každé $z \in \mathbf{K}$ a každé celé $n \geqq 0$*:

$$(136) \quad J_n(z) = \frac{z^n}{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n - 1)\, \pi} \int_0^{\pi} \cos\,(z \cos \Theta) \,.\, \sin^{2n} \Theta \, d\Theta\,;$$

pro $n = 0$ klademe ovšem $1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n - 1) = 1$.

To je t. zv. Poissonův integrál.

Důkaz provedu prostě výpočtem integrálu vpravo. Řada

$$\cos\,(z \cos \Theta) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m}{(2m)!} (z \cos \Theta)^{2m}$$

je (při pevném z) stejnoměrně konvergentní v $(-\infty, +\infty)$; proto integrál vpravo má hodnotu

$$(137) \qquad F(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{(2m)!} K_{m,n}\,,$$

kde

$$K_{m,p} = \int_0^{\pi} \cos^{2m} \Theta \sin^{2p} \Theta \, d\Theta \tag{138}$$

pro celá $m \geqq 0$, $p \geqq 0$. Substituce $\Theta = \frac{1}{2}\pi - \varphi$ dává

$$K_{m,p} = \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi} \sin^{2m} \varphi \cos^{2p} \varphi \, d\varphi \,; \tag{139}$$

ježto integrand má periodu π, můžeme meze o $\frac{1}{2}\pi$ posunouti (takže budou $0, \pi$) a ze (139) plyne

$$K_{m,p} = K_{p,m} \,. \tag{140}$$

Integrace per partes dává pro $m > 0$:

$$K_{m,p} = \left[\frac{\sin^{2p+1} \Theta}{2p+1} \cos^{2m-1} \Theta\right]_0^{\pi} + \frac{2m-1}{2p+1} \int_0^{\pi} \sin^{2p+2} \Theta \cos^{2m-2} \Theta \, d\Theta. \tag{141}$$

Užitím rovnice $\sin^2 \Theta = 1 - \cos^2 \Theta$ plyne ze (141)

$$K_{m,p} = \frac{2m-1}{2p+1} (K_{m-1,p} - K_{m,p}) \,,$$

a tedy

$$K_{m,p} = \frac{2m-1}{2(m+p)} K_{m-1,p} \quad \text{pro } m > 0 \,. \tag{142}$$

Podle (140) je tedy též

$$K_{p,m} = \frac{2m-1}{2(m+p)} K_{p,m-1} \quad \text{pro } m > 0 \,. \tag{143}$$

Ježto $K_{0,0} = \pi$, obdržím

$$K_{m,p} = \frac{(2m-1)(2m-3)\ldots 3 \,.\, 1 \,.\, (2p-1) \,.\, (2p-3)\ldots 3 \,.\, 1}{2^{m+p}(m+p)!} \pi \,.$$

Dosazením do (137) plyne

$$F(z) = \pi \,.\, 1 \,.\, 3 \ldots (2n-1) \,.\, \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{2^{2m+n}} \,.\, \frac{1}{m!(m+n)!} \,.$$

Podle (128) je tedy pravá strana v (136) vskutku rovna $J_n(z)$.

Podotkněme ještě, že rovnici (136) lze též psáti ve tvaru (znamení $\pm$ lze voliti libovolně)

$$(144)\quad J_n(z) = \frac{z^n}{1\,.\,3\,.\,5\ldots(2n-1)\,\pi}\int\limits_0^\pi \exp\,(\mathrm{i}(\pm z\cos\Theta))\sin^{2n}\Theta\,\mathrm{d}\Theta$$

(z libovolné komplexní, $n \geqq 0$, n celé). To plyne takto: substituce $\Theta = \frac{1}{2}\pi - \varphi$ dává

$$\pm\int\limits_0^\pi \sin\,(z\cos\Theta)\sin^{2n}\Theta\,\mathrm{d}\Theta = \pm\int\limits_{-\frac{1}{2}\pi}^{\frac{1}{2}\pi}\sin\,(z\sin\varphi)\cos^{2n}\varphi\,\mathrm{d}\varphi = 0\,,$$

neboť integrand v posledním integrálu je lichá funkce.

Poznámka 4. Rovnici (129) lze psáti též

$$(145)\qquad J_n(z) = (\tfrac{1}{2}z)^n\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-\frac{1}{4}z^2)^p}{\Gamma(p+1)\,\Gamma(n+p+1)}\,.$$

Pravá strana má však smysl i pro každé necelé komplexní n (v kap. XVIII totiž budeme definovati $\Gamma(s) \neq 0$ pro každé komplexní $s \neq 0, -1, -2, \ldots$). Vskutku se rovnicí (145) definují Besselovy funkce také s necelými indexy; my se však omezíme výhradně na celá n.

Cvičení

1. Víme, že mocninnou řadu lze uvnitř konvergenční kružnice derivovati člen po členu[40]) (**D II**, věta 223) a že i pro komplexní proměnnou platí obvyklá pravidla o derivování (**D II**, kap. XI, § 1, příkl. 2). Proto lze řadu (121) derivovati uvnitř konvergenčního mezikruží člen po členu (druhou řadu pojímám jako složenou funkci: $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}z^n$, kde $z = t^{-1}$).

2. Vyšetřujme rovnici (127). Pišme předně $-1 : t$ místo t. Levá strana se nezmění, pravá je $\sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(z)\,.\,(-t)^{-n}$. Podle textu na konci pozn. 1 plyne odtud naše známá rovnice $J_{-n}(z) = (-1)^n J_n(z)$. Obdobně, píšeme-li $-z$, $-t$ místo z, t, obdržíme $J_n(-z) = (-1)^n J_n(z)$. Derivujeme-li (127) podle t, dostaneme

$$(146)\qquad \tfrac{1}{2}z(J_{n-1}(z) + J_{n+1}(z)) = n\,J_n(z)\,.$$

---

[40]) Jde o derivaci podle komplexní proměnné.

Vynásobením řad pro $\exp\left(\frac{1}{2}z\left(t-\frac{1}{t}\right)\right)$, $\exp\left(\frac{1}{2}y\left(t-\frac{1}{t}\right)\right)$ dostaneme

$$J_n(y+z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} J_m(y)\, J_{n-m}(z) \tag{147}$$

(absolutní konvergence vpravo).

3. Kdyby se v (127) smělo vpravo derivovat podle z člen po členu, vyšlo by

$$J_{n-1}(z) - J_{n+1}(z) = 2J'_n(z), \text{ speciálně } J'_0(z) = -J_1(z)\,. \tag{148}$$

Přesvědčte se ze (129), (130) přímým výpočtem, že tyto vzorce vskutku platí. Odtud nazpět plyne, že v (127) lze vskutku vpravo derivovat podle z člen po členu.

4. Z (146), (148) odvoďte

$$z\,J'_n(z) + n\,J_n(z) = z\,J_{n-1}(z)\,, \quad z\,J'_n(z) - n\,J_n(z) = -z\,J_{n+1}(z)\,.$$

To lze psáti též

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^n J_n(z)) = z^n J_{n-1}(z)\,, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^{-n} J_n(z)) = -z^{-n} J_{n+1}(z)\,.$$

Úplnou indukcí odvoďte odtud

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{z\,\mathrm{d}z}\right)^m (z^n J_n(z)) = z^{n-m} J_{n-m}(z)\,, \tag{149}$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{z\,\mathrm{d}z}\right)^m (z^{-n} J_n(z)) = (-1)^m z^{-n-m} J_{n+m}(z) \tag{150}$$

pro každé přirozené m. Význam symbolu vlevo je, doufám, jasný: na př.

$$\left(\frac{\mathrm{d}}{z\,\mathrm{d}z}\right)^2 f(z) = \frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1}{z}\frac{\mathrm{d}f(z)}{\mathrm{d}z}\right).$$

5. Z cvič. 4 plyne

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^n J_n(z)) = z^n J_{n-1}(z)\,, \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(z^{1-n} J_{n-1}(z)) = -z^{1-n} J_n(z)\,.$$

Násobím-li první rovnici číslem z^{1-2n} a derivuji, mohu vyloučiti J_{n-1} a obdržím

$$z^2\frac{\mathrm{d}^2 J_n(z)}{\mathrm{d}z^2} + z\frac{\mathrm{d}J_n(z)}{\mathrm{d}z} + (z^2 - n^2)\,J_n(z) = 0\,.$$

Funkce $J_n(z)$ vyhovuje tedy t. zv. Besselově rovnici

$$z^2 y''(z) + z\,y'(z) + (z^2 - n^2)\,y(z) = 0\,. \tag{151}$$

§ 6. Použití vět 226, 228 na studium asymptotických vlastností funkcí $J_n(z)$. Omezme se na $n \geqq 0$; mimo to se v tomto paragrafu omezíme na z reálná nebo ryze imaginární. Užijeme Besselova integrálu.

Budiž předně $z = r > 0$. Ježto $J_n(r)$ je podle (129) reálné číslo, je podle (135) $J_n(r)$ rovno reálné části integrálu

$$A(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} e^{-ir\sin\varphi} \,.\, e^{in\varphi} \, d\varphi \,. \tag{152}$$

Ježto funkce $\sin \varphi$ má derivaci rovnou nule v bodě $\frac{1}{2}\pi$, můžeme užíti věty 228; napřed však (viz § 4, pozn. 1, 2) rozdělím integrační interval na intervaly $\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$, $\langle \frac{1}{2}\pi, \pi\rangle$ a v prvním zavedu integrační proměnnou $-\varphi$:

$$A(r) = \frac{1}{\pi} \int_{-\frac{1}{2}\pi}^{0} e^{ir\sin\Theta} \,.\, e^{-in\Theta} \, d\Theta + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{2}\pi}^{\pi} e^{-ir\sin\Theta} \,.\, e^{in\Theta} \, d\Theta \,. \tag{153}$$

Užiji nyní věty 228 ve tvaru (85) pro $\varphi(\Theta) = \frac{1}{\pi} e^{\mp in\Theta}$, $f(\Theta) = \pm \sin \Theta$, $a = \mp \frac{1}{2}\pi$. Vychází

$$A(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \exp\left(i(-r + \tfrac{1}{2}n\pi + \tfrac{1}{4}\pi)\right) + o(r^{-\frac{1}{2}}) \,.$$

Vezmu nyní reálnou část:

Věta 229. *Budiž $n \geqq 0$, n celé. Potom je*

$$J_n(r) = \sqrt{\frac{2}{\pi r}} \cos\left(r - \tfrac{1}{2}n\pi - \tfrac{1}{4}\pi\right) + o(r^{-\frac{1}{2}}) \quad \text{pro } r \to +\infty,\ r \in \mathbf{E}_1 \,. \tag{154}$$

Vezměme nyní ryze imaginární $z = ir$, $r > 0$. Vzorec (134) dává

$$J_n(ir) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-r\sin\Theta} \,.\, e^{-in\Theta} \, d\Theta \,.$$

Užijeme věty 226 ve tvaru vzorce (56); funkce $h(\Theta) = -\sin\Theta$ má maximum v bodě $-\frac{1}{2}\pi$. Vychází ihned

Věta 230. *Budiž $n \geqq 0$, n celé. Potom je*

$$J_n(\mathrm{i}r) \cong \frac{\mathrm{i}^n}{\sqrt{2\pi r}} \mathrm{e}^r \text{ pro } r \to +\infty,\ r \in \mathbf{E}_1 .$$

Z vět 229, 230 plynou ovšem ihned obdobné výsledky pro

$$J_n(-r) = (-1)^n J_n(r),\quad J_n(-\mathrm{i}r) = (-1)^n J_n(\mathrm{i}r) .$$

Ve větách 229, 230 bylo n pevné číslo. Vyšetříme nyní případ, že z a n současně rostou kladnými hodnotami do nekonečna, při čemž jejich poměr zůstává konstantní. Budiž tedy dáno kladné číslo γ a klaďme $z = \gamma n$; podle (135) je

$$(155)\qquad J_n(\gamma n) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos n(\varphi - \gamma \sin \varphi)\, \mathrm{d}\varphi .$$

Je-li $\gamma = 1$, dává nám příklad 1 v § 4 ihned tento výsledek:

Věta 231.

$$J_n(n) \cong \frac{\Gamma(\frac{1}{3})}{2^{\frac{2}{3}} 3^{\frac{1}{6}} \pi} \cdot \frac{1}{n^{\frac{1}{3}}} \text{ pro } n \to +\infty,\ n \in \mathbf{N} .$$

Je-li $\gamma > 1$, existuje β $(0 < \beta < \frac{1}{2}\pi)$ tak, že $\gamma = 1 : \cos \beta$, $z = \dfrac{n}{\cos \beta}$.
Příklad 2 v § 4 pak dává ihned tento výsledek:

Věta 232. *Budiž $0 < \beta < \frac{1}{2}\pi$. Potom je*

$$J_n\left(\frac{n}{\cos \beta}\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi n \operatorname{tg} \beta}} \cos\left(n(\operatorname{tg} \beta - \beta) - \tfrac{1}{4}\pi\right) + o(n^{-\frac{1}{2}})$$

pro $n \to +\infty$, $n \in \mathbf{N}$.

K důkazu vět 231, 232 jsme v § 4 užili metody stacionární fáze. Zbývá případ $0 < \gamma < 1$; potom funkce $\varphi - \gamma \sin \varphi$ v (155) má derivaci $1 - \gamma \cos \varphi$, která pro žádné reálné φ není rovna nule. Metoda stacionární fáze zde tedy selhává. Existují ovšem imaginární φ, pro něž $\cos \varphi = 1 : \gamma$, neboť podle věty 242 v **D II** nabývá funkce $\sin \varphi$, a tedy i $\cos \varphi = \sin (\frac{1}{2}\pi - \varphi)$, všech hodnot.

Skutečně existuje metoda, dovolující využíti této poznámky a odvoditi výsledek obdobný větám 231, 232 i pro $0 < \gamma < 1$. Tato metoda, t. zv. metoda největšího spádu nebo také metoda sedlových bodů, spočívá však podstatně na theorii analytických funkcí a proto se jí zde nebudeme zabývat. Čtenář se o ní může poučiti na př. v známé knize V. I. Smirnova, Курс высшей математики, díl III, část 2, str. 286—304 a 555—564 (podle 4. vydání, Moskva-Leningrad 1949).

Speciálně pro Besselovy funkce je obšírně probrána v knize G. N. Watson, A Treatise on the Theory of Bessel Functions, Cambridge 1922 (2. vydání 1944).

Cvičení

1. Otázka po asymptotickém průběhu funkce $J_n(z)$ při pevném z pro $n \to +\infty$ se dá snadno zodpověděti přímo z řady (129). Dokažte: Pro $n \to +\infty$, $n \in \boldsymbol{N}$ je (při pevném $z \neq 0$ a pevném celém $p \geqq 0$)

$$J_n(z) = \sum_{k=0}^{p-1} \left(\frac{1}{2}z\right)^{n+2k} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} +$$
$$+ \left(\frac{1}{2}z\right)^{n+2p} \frac{(-1)^p}{p!(n+p)!} \left(1 + \Theta\,\frac{\exp\left(\frac{1}{4}|z|^2\right) - 1}{n+p+1}\right),$$

kde $|\Theta| < 1$; speciálně $J_n(z) \cong \dfrac{z^n}{2^n \,.\, n!}$.

2. Z věty 229 plyne: Funkce $J_n(z)$ má nekonečně mnoho kladných (a tedy i záporných) kořenů.

3. Přesněji: Budiž n celé, $n \geqq 0$. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje celé číslo $k_0 > 0$ s touto vlastností: Všechny kořeny funkce $J_n(z)$, které jsou větší než $k_0\pi$, leží pro sudé n v intervalech

$$((k + \tfrac{3}{4} - \varepsilon)\,\pi,\ (k + \tfrac{3}{4} + \varepsilon)\,\pi),\ k = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \ldots$$

a pro liché n v intervalech

$$((k + \tfrac{1}{4} - \varepsilon)\,\pi,\ (k + \tfrac{1}{4} + \varepsilon)\,\pi),\ k = k_0, k_0 + 1, k_0 + 2, \ldots$$

V každém z těchto intervalů leží pak jediný z těchto kořenů, a ten je jednoduchý. Návod: užijte předně věty 229 a za druhé dokažte, že $J_n'(z) \neq 0$ v těchto intervalech. To plyne z cvič. 3 v § 5, dosadíte-li tam za J_{n-1}, J_{n+1} podle věty 229. Kořeny funkcí J_n jsou velmi důležité v aplikacích. Vidíte odtud, že asymptotické vztahy jsou důležité nejenom pro numerické výpočty, ale i pro důkazy vět obecnějšího rázu. Snad je na místě poznamenati, že uvedené výsledky o kořenech funkce J_n lze odvoditi, a to jednodušeji, též přímým studiem diferenciální rovnice Besselovy (§ 5, cvič. 5).

§ 7. Asymptotické rozvoje funkcí $J_n(z)$ pro $z \to \infty$.[41]) Výsledky předešlého paragrafu dávaly nám asymptotické vyjádření těchto funkcí jen pro reálná a pro ryze imaginární z, a to jen v prvním přiblížení (asymptotická rovnost). Nyní odvodíme asymptotické rozvoje (tedy přesnější vyjádření), a to pro všechna komplexní z. Přitom budeme hojně užívati poznámky 5 v kap. VII, § 1; zopakujte si ji!

Budiž $0 < \delta < \frac{1}{2}\pi$; odvodíme dva asymptotické rozvoje: jeden platí pro $\delta \leqq \text{ampl}\, z \leqq \pi - \delta$ (věta 233), druhý pro $-\frac{1}{2}\pi + \delta \leqq$ $\leqq \text{ampl}\, z \leqq \frac{1}{2}\pi - \delta$ (věta 234).[42]) Volíme-li $\delta \leqq \frac{1}{4}\pi$, vidíme, že tyto dva úhly pokrývají úhel $-\frac{1}{4}\pi \leqq \text{ampl}\, z \leqq \frac{3}{4}\pi$ (to je polorovina v komplexní rovině). V této polorovině ovládáme tedy asymptotický průběh funkce J_n. Ježto pak $J_n(-z) = (-1)^n J_n(z)$, ovládáme asymptotický průběh funkce J_n v celé rovině.

Věta 233. *Budiž $p \geqq 0$, p celé, $0 < \delta < \frac{1}{2}\pi$, $n \geqq 0$, n celé. Potom existují konečná kladná čísla A, B (závislá na δ, n, p) s touto vlastností:*

Je-li $|z| > A$, $\delta \leqq \text{ampl}\, z \leqq \pi - \delta$, jest

$$J_n(z) = \frac{\mathrm{i}^n \mathrm{e}^{-\mathrm{i}z}}{\sqrt{-\mathrm{i}2\pi z}} \left(\sum_{m=0}^{p} \frac{(-1)^m \{n, m\}}{(-2\mathrm{i}z)^m} + T_p \right), \tag{156}$$

při čemž

$$|T_p| < \frac{B}{|z|^{p+1}}. \tag{157}$$

Přitom klademe

$$\{n, m\} = \frac{(4n^2 - 1^2)(4n^2 - 3^2) \ldots (4n^2 - (2m-1)^2)}{m!\, 2^{2m}}. \tag{158}$$

(Pro $m = 0$ vychází v čitateli prázdný součin, který klademe roven 1, tedy $\{n, 0\} = 1$; odmocnina v (156) má ovšem reálnou část kladnou, viz pozn. 5 v kap. VII, § 1.)

Nerovnost (157) můžeme též psáti takto:

$$T_p = O(|z|^{-p-1}) \text{ pro } |z| \to +\infty,\ \delta \leqq \text{ampl}\, z \leqq \pi - \delta.$$

---

[41]) Při pevném n.

[42]) Geometricky jsou to úhly v komplexní rovině. Načrtněte!

Důkaz. Buďte dána celá čísla $p \geqq 0$, $n \geqq 0$, dále číslo δ ($0 < \delta < \frac{1}{2}\pi$) a číslo $z \neq 0$, $\delta \leqq \operatorname{ampl} z \leqq \pi - \delta$; položme $z = iw$, takže $|w| = |z|$, $w = |z| e^{i\varphi}$, $|\varphi| \leqq \frac{1}{2}\pi - \delta$. Jest[43])

$$\Re w = |z| \cos \varphi \geqq |z| \cos (\tfrac{1}{2}\pi - \delta) = |z| \sin \delta \,. \tag{159}$$

Užijeme Poissonova integrálu ve tvaru (144) se znamením minus a píšeme v něm $z = iw$:

$$\begin{aligned} J_n(z) &= \frac{(iw)^n}{1 \,.\, 3 \,.\, \ldots \,.\, (2n-1)\,\pi} F_n(z)\,, \\ F_n(z) &= \int_0^\pi e^{w \cos \Theta} \sin^{2n} \Theta \, d\Theta \,. \end{aligned} \tag{160}$$

Jest $|\exp(w \cos \Theta)| = \exp(\Re w \,.\, \cos \Theta)$. Ježto $\Re w > 0$ a ježto $\cos \Theta < 0$ pro $\frac{1}{2}\pi < \Theta \leqq \pi$, jest prostá hodnota integrandu v (160) v intervalu $(\frac{1}{2}\pi, \pi\rangle$ menší než 1 a tedy

$$F_n(z) = \int_0^{\frac{1}{2}\pi} e^{w \cos \Theta} \sin^{2n} \Theta \, d\Theta + \tfrac{1}{2}\pi\lambda_1 \,, \tag{161}$$

kde $|\lambda_1| < 1$.

Zaveďme novou proměnnou y rovnicí $\sin \frac{1}{2}\Theta = y$, takže meze integrační v (161) budou nyní 0, $2^{-\frac{1}{2}}$:

$$F_n(z) = 2^{2n+1} \int_0^{2^{-\frac{1}{2}}} \exp(w(1 - 2y^2)) \,.\, y^{2n}(1 - y^2)^{n - \frac{1}{2}} \, dy + \tfrac{1}{2}\pi\lambda_1 \,. \tag{162}$$

Podle Taylorovy formule pro $(1 + x)^{n - \frac{1}{2}}$ jest

$$\begin{aligned} (1 - y^2)^{n - \frac{1}{2}} &= \sum_{m=0}^{p} \left(\frac{1}{2} - n\right)\left(\frac{3}{2} - n\right) \ldots \left(\frac{2m-1}{2} - n\right) \frac{y^{2m}}{m!} + \\ &+ \left(\frac{1}{2} - n\right)\left(\frac{3}{2} - n\right) \ldots \left(\frac{2p+1}{2} - n\right) \frac{y^{2p+2}}{(p+1)!} \frac{1}{(1 - \lambda_2 y^2)^{p + \frac{3}{2} - n}}\,, \end{aligned}$$

kde $0 < \lambda_2 < 1$. V integračním intervalu jest $1 \geqq 1 - \lambda_2 y^2 > \frac{1}{2}$.[44])

[43]) $\Re\alpha$, $\Im\alpha$ značí reálnou a imaginární část čísla α. Dále značím $\exp(x) = e^x$.

[44]) Proto jsme horní mez zmenšili z 1 na $2^{-\frac{1}{2}}$: pro y blízké jedničce by výraz $1 - \lambda_2 y^2$ mohl býti blízký nule.

Tedy jest

$$(163)\qquad F_n(z) = 2^{2n+1}e^{w}\Big(\sum_{m=0}^{p} K_m + R_p + 2^{-2n-1}e^{-w} \,.\, \tfrac{1}{2}\pi\lambda_1\Big)\,,$$

kde

$$(164)\qquad K_m = \binom{m-n-\frac{1}{2}}{m} \int_0^{2^{-\frac{1}{2}}} \exp\,(-\,2y^2w) \,.\, y^{2(n+m)}\, \mathrm{d}y\,;$$

ježto pak pro $y \geqq 0$ jest podle (159)

$$|\exp\,(-\,2y^2w)| = \exp\,(-\,2y^2\Re w) \leqq \exp\,(-\,2y^2|z|\sin\delta)\,,$$

je

$$(165)\qquad |R_p| \leqq \beta_1 \int_0^{2^{-\frac{1}{2}}} \exp\,(-\,2y^2|z|\sin\delta) \,.\, y^{2(n+p+1)}\, \mathrm{d}y\,,$$

kde β_1 (a podobně dále $\beta_2, \beta_3, \ldots$) značí konečná kladná čísla, závislá jen na n, p, δ (nikoliv na z). Integrál v (165) transformuji substitucí $2y^2|z|\sin\delta = t$ a zvětším tím, že za horní mez vezmu $+\infty$:

$$(166)\qquad |R_p| \leqq \frac{\beta_1\,\Gamma(n+p+\frac{3}{2})}{2\,.\,(2|z|\sin\delta)^{n+p+\frac{3}{2}}} = \frac{\beta_2}{|z|^{n+p+\frac{3}{2}}}\,.$$

V integrálech (164) vezmu místo horní meze $2^{-\frac{1}{2}}$ horní mez $+\infty$; tím udělám v každém integrálu nejvýše chybu

$$\int_{2^{-\frac{1}{2}}}^{+\infty} \exp\,(-\,2y^2\Re w) \,.\, y^{2(n+m)}\, \mathrm{d}y \leqq$$

$$(167)\qquad \leqq \int_{2^{-\frac{1}{2}}}^{+\infty} \exp\,(-\,2y^2|z|\sin\delta) \,.\, y^{2(n+m)}\, \mathrm{d}y =$$

$$= \frac{1}{2\,.\,(2|z|\sin\delta)^{n+m+\frac{1}{2}}} \int_{|z|\sin\delta}^{+\infty} e^{-t} \,.\, t^{n+m-\frac{1}{2}}\, \mathrm{d}t$$

(opět substituce $2y^2|z|\sin\delta = t$). Jakmile $|z|$ je tak veliké, že

$$(168)\qquad |z|\sin\delta > 1\,,$$

[45]) Je totiž $0 \leqq m \leqq p$.

je pravá strana v (167) menší než[45])

$$\tfrac{1}{2}\exp\left(-\tfrac{1}{2}|z|\sin\delta\right).\int\limits_{|z|\sin\delta}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t}\, t^{n+p-\frac{1}{2}}\, dt <$$
$$< \tfrac{1}{2}\exp\left(-\tfrac{1}{2}|z|\sin\delta\right).\int\limits_{0}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}t}\, t^{n+p-\frac{1}{2}}\, dt =$$
$$= \beta_3 \exp\left(-\tfrac{1}{2}|z|\sin\delta\right).$$

Celková chyba, které se dopustíme v součtu $K_0 + K_1 + \ldots + K_p$, je tedy menší než

$$(169)\quad \beta_3 \sum_{m=0}^{p} \binom{m-n-\frac{1}{2}}{m} e^{-\frac{1}{2}|z|\sin\delta} = \beta_4\, e^{-\frac{1}{2}|z|\sin\delta} < \frac{\beta_5}{|z|^{n+p+\frac{1}{2}}}.$$

(Poslední nerovnost plyne z toho, že e^{-x} konverguje pro $x \to +\infty$ k nule rychleji než $x^{-n-p-\frac{1}{2}}$.[46])

Tedy je podle (163), (166), (169)

$$(170)\quad F_n(z) = 2^{2n+1}e^{w}\left(\sum_{m=0}^{p}\binom{m-n-\frac{1}{2}}{m}\int\limits_0^{+\infty} e^{-2y^2w}y^{2(n+m)}\,dy + S_p\right),$$

kde

$$|S_p| < \frac{\beta_6}{|z|^{n+p+\frac{1}{2}}} + \tfrac{1}{2}\pi\,.\,2^{-2n-1}e^{-\Re w};$$

ale podle (159) jest

$$e^{-\Re w} \leqq e^{-|z|\sin\delta} < \frac{\beta_7}{|z|^{n+p+\frac{1}{2}}},$$

takže

$$(171)\qquad |S_p| < \frac{\beta_8}{|z|^{n+p+\frac{1}{2}}}.$$

Vypočtěme ještě integrály ze (170). Substituce $2y^2 = t$ a užití vzorce (76) v kap. VIII, § 4, příkl. 3 dávají

[46]) Podrobně: funkce $e^{-\frac{1}{2}x\sin\delta}\,.\,x^{n+p+\frac{1}{2}}$ je spojitá v intervalu $\langle 0, +\infty)$ a má pro $x \to +\infty$ limitu 0; tedy je v $\langle 0, +\infty)$ omezená; její supremum v tomto intervalu závisí ovšem jen na číslech n, p, δ.

$$\int_0^{+\infty} e^{-2y^2 w} y^{2(n+m)}\, dy = \frac{1}{2^{n+m+\frac{1}{2}}} \int_0^{+\infty} e^{-tw} t^{n+m-\frac{1}{2}}\, dt =$$

$$= \frac{1}{w^{n+m}\sqrt{w}} \cdot \frac{\Gamma(n+m+\frac{1}{2})}{2^{n+m+\frac{1}{2}}} =$$

$$= \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+2m-1)}{2^{2n+2m+\frac{1}{2}}} \sqrt{\pi}\, \frac{1}{\sqrt{w} \cdot w^{n+m}},$$

kde $\sqrt{w}$ má reálnou část kladnou. Dosaďme tuto hodnotu do (170),[47]) při čemž uvažme, že

$$\binom{m-n-\frac{1}{2}}{m} 2^{-2m} \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n+2m-1) =$$

$$= (-\tfrac{1}{2})^m \{n, m\}\, 1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)\,.$$

Na to dosaďme do (160), píšíce $w = -iz$; vyjde okamžitě rovnice (156), při čemž vzhledem k (171) je

$$|T_p| < \frac{\beta_9}{|z|^{p+1}}.^{48)}$$

Výsledek platí pak pro každé z, pro něž vedle podmínky $\delta \leqq \operatorname{ampl} z \leqq \leqq \pi - \delta$ je ještě splněna nerovnost (168), t. j. $|z| > 1 : \sin \delta$. Tím je věta dokázána (stačí položiti $A = 1 : \sin \delta$, $B = \beta_9$).

Poznámka 1. Užitím rovnice $J_n(-z) = (-1)^n J_n(z)$ bychom dostali obdobně asymptotické rozvoje, platné pro $-\pi + \delta \leqq \operatorname{ampl} z \leqq \leqq -\delta$. Přitom můžeme $\delta > 0$ voliti libovolně malé, vždy však zůstávají vyloučeny hodnoty z, pro něž je buďto $|\operatorname{ampl} z| < \delta$ nebo $|\operatorname{ampl}(-z)| < \delta$ (kreslete!), takže na př. jsou vyloučeny všechny reálné hodnoty z. Tuto mezeru doplníme ve větě 234. Čtenář si nesmí myslit, že bychom asymptotické rozvoje pro reálná z mohli dostat z věty 233 limitním přechodem $\delta \to 0+$; viz k tomu cvič. 2.

Poznámka 2. Všimněme si, že metoda důkazu věty 233 byla do jisté míry obdobná metodě z příkl. 3 v § 3: v obou případech jsme

[47]) Před závorku v (170) vytkneme ještě $1 : \sqrt{w}$.

[48]) Nezapomeňte, že jsme vytkli $1 : \sqrt{w}$ ($|w| = |z|$) a že v (160) byl činitel z^n, který se zkrátil.

jednoho činitele v integrandu rozvinuli podle Taylorovy řady se zbytkem. Podobné myšlenky užijeme i v důkazu věty 234.

Ve větě 233 jsme získali asymptotický rozvoj pro obor $\delta \leqq \operatorname{ampl} z \leqq \leqq \pi - \delta$. Nyní odvodíme obdobně asymptotický rozvoj pro obor $-\frac{1}{2}\pi + \delta \leqq \operatorname{ampl} z \leqq \frac{1}{2}\pi - \delta$. K odvození hledaného asymptotického rozvoje budeme potřebovati další vyjádření funkce $J_n(z)$ určitým integrálem. Vyjděme k tomu cíli z Poissonova integrálu (144) se znamením plus, předpokládajíce

(172) $$n \text{ celé}, \; n \geqq 0, \; z \neq 0, \; |\operatorname{ampl} z| < \tfrac{1}{2}\pi .$$

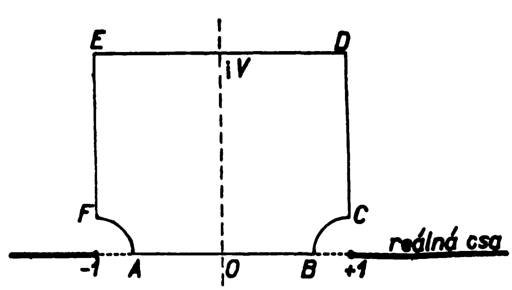
Píšeme-li tedy

(173) $$z = x + \mathrm{i}y \quad (x, y \text{ reálná}),$$

je $x > 0$. Zaveďme do (144) novou integrační proměnnou rovnicí $\cos \Theta = t$; vyjde ihned

(174) $$J_n(z) = \frac{z^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-1)\pi} \int_{-1}^{1} \mathrm{e}^{\mathrm{i}zt}(1 - t^2)^{n-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}t .$$

Tomuto integrálu dáme nyní jiný, vhodnější tvar. Musím se však čtenáři omluvit: Nemá-li tato úprava býti zcela umělá, musíme ji provésti metodami theorie analytických funkcí. Kdo tedy nezná počátky této theorie (Cauchyovu integrální větu). musí výsledek, t. j. vzorec (186), přijmouti bez důkazu za správný.



Obr. 10.

Zvolme čísla ε $(0 < \varepsilon < < \frac{1}{2})$, V $(1 < V < +\infty)$ a sestrojme v komplexní rovině čáru L, naznačenou na obr. 10: AB je úsečka, spojující body $A = -1 + \varepsilon$, $B = 1 - \varepsilon$; BC je oblouk kružnice o středu 1 a poloměru ε; CD je úsečka, spojující body $C = 1 + \mathrm{i}\varepsilon$, $D = 1 + \mathrm{i}V$; DE je úsečka, spojující body $D = 1 + \mathrm{i}V$, $E = -1 + \mathrm{i}V$; podobně úsečka EF $(F = -1 + \mathrm{i}\varepsilon)$

a čtvrtkružnice FA. Čára L budiž orientována ve smyslu $ABCDEFA$. Vyšetřujme nyní funkci

$$f(t) = e^{izt}(1 - t^2)^{n-\frac{1}{2}} \tag{175}$$

komplexní proměnné t (z je dané číslo, $z = x + iy$, $x > 0$, y reálné). Odstraníme-li z komplexní roviny polopřímky $t \leqq -1$, $t \geqq 1$, má funkce f ve zbývající množině podle pozn. 5 v kap. VII, § 1 (vzorec (12)) derivace všech řádů, jež se počítají známým způsobem. Podle Cauchyovy věty je tedy

$$\int_L f(t)\, dt = 0\,.\text{[49]} \tag{176}$$

Tento integrál se skládá ze šesti sčítanců $I(AB)$, $I(BC)$, ..., kde $I(BC)$ značí integrál přes oblouk BC a pod.

Na úsečkách CD resp. EF je $t = \pm 1 + iv$ ($\varepsilon \leqq v \leqq V$), $1 - t^2 = (1 - t)(1 + t) = \mp iv(2 \pm iv)$, tedy

$$I(CD) = i\int_\varepsilon^V e^{iz - zv}(-iv(2 + iv))^{n-\frac{1}{2}}\, dv\,, \tag{177}$$

$$I(EF) = i\int_V^\varepsilon e^{-iz - zv}(iv(2 - iv))^{n-\frac{1}{2}}\, dv\,. \tag{178}$$

Absolutní hodnota integrandu v (177), (178) je ($z = x + iy$, $x > 0$, y reálné)

$$e^{\mp y}\,.\, e^{-xv} v^{n-\frac{1}{2}}(4 + v^2)^{\frac{1}{2}n-\frac{1}{4}}\,. \tag{179}$$

Jest ovšem

$$I(AB) = \int_{-1+\varepsilon}^{1-\varepsilon} e^{izt}(1 - t^2)^{n-\frac{1}{2}}\, dt\,. \tag{180}$$

Odhadněme nyní $I(BC)$, $I(FA)$, $I(DE)$. Jest

$$|f(t)| = |e^{izt}(1 - t^2)^n|\,.\,|1 - t|^{-\frac{1}{2}}\,.\,|1 + t|^{-\frac{1}{2}}\,. \tag{181}$$

Na obloucích BC, FA je tedy $|f(t)| < K\varepsilon^{-\frac{1}{2}}$, kde K závisí pouze na z, n. Ježto délka těchto oblouků je $\frac{1}{2}\pi\varepsilon$, je

$$|I(BC)| < \tfrac{1}{2}\pi K\sqrt{\varepsilon},\quad |I(FA)| < \tfrac{1}{2}\pi K\sqrt{\varepsilon}\,. \tag{182}$$

---

[49]) Tento vzorec a pojem křivkového integrálu v komplexní rovině předpokládám — více nic.

Na úsečce DE máme $t = u + iV$ $(-1 \leqq u \leqq 1)$, takže $izt = i(x + iy)(u + iV)$, $\Re(izt) = -yu - xV \leqq |y| - xV$; dále $1 - t^2 = 1 - u^2 + V^2 - 2iuV$ $(|u| \leqq 1, V > 1)$, tedy $1 < V^2 \leqq |1 - t^2| \leqq 1 + V^2 + 2V$, takže

$$|1 - t^2|^{n-\frac{1}{2}} \leqq |1 - t^2|^n \leqq (1 + V)^{2n} < (2V)^{2n},$$

takže (ježto DE má délku 2)

$$|I(DE)| \leqq 2^{2n+1} \,.\, e^{|y|} \,.\, e^{-xV} \,.\, V^{2n}. \tag{183}$$

Ze (182) plyne $\lim\limits_{\varepsilon \to 0+} (I(BC) + I(FA)) = 0$, ze (183) plyne $\lim\limits_{V \to +\infty} I(DE) = 0$. Odtud plyne: Napišme rovnici (176), t. j.

$$I(AB) + I(BC) + I(CD) + I(DE) + I(EF) + I(FA) = 0; \tag{184}$$

proveďme napřed limitní přechod $\varepsilon \to 0+$ a potom $V \to +\infty$. Druhý, čtvrtý a šestý sčítanec v (184) mají limitu 0, takže podle (177), (178), (180) vychází[50])

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} e^{izt}(1 - t^2)^{n-\frac{1}{2}}\, dt = &- ie^{iz}\int_0^{+\infty} e^{-zv}(-iv(2 + iv))^{n-\frac{1}{2}}\, dv + \\ &+ ie^{-iz}\int_0^{+\infty} e^{-zv}(iv(2 - iv))^{n-\frac{1}{2}}\, dv.\end{aligned} \tag{185}$$

Ježto ve výrazu $\mp iv(2 \pm iv)$ je (pro $v > 0$) první činitel $\mp i = e^{\mp\frac{1}{2}\pi i}$ ryze imaginární, druhý kladný a třetí má reálnou část $2 > 0$, lze zde podle pozn. 5 v kap. VII, § 1 užíti vzorce $\xi_1^\eta \xi_2^\eta = (\xi_1 \xi_2)^\eta$; tedy je

$$(\mp iv(2 \pm iv))^{n-\frac{1}{2}} = e^{\mp(n-\frac{1}{2})\,.\,\frac{1}{2}\pi i} v^{n-\frac{1}{2}}(2 \pm iv)^{n-\frac{1}{2}}.$$

Dosadíme-li toto do (185) a užijeme-li vzorce (174), dostaneme hledané integrální vyjádření:

$$\begin{aligned}J_n(z) = \frac{z^n}{1\,.\,3\,.\,5 \ldots (2n - 1)\,\pi}\Bigg(&e^{i(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi)}\int_0^{+\infty} e^{-zv} v^{n-\frac{1}{2}}(2 + iv)^{n-\frac{1}{2}}\, dv + \\ &+ e^{-i(z - \frac{1}{2}n\pi - \frac{1}{4}\pi)}\int_0^{+\infty} e^{-zv} v^{n-\frac{1}{2}}(2 - iv)^{n-\frac{1}{2}}\, dv\Bigg).\end{aligned} \tag{186}$$

Tento vzorec platí pro n celé, $n \geqq 0$, $z \neq 0$, $|\text{ampl}\, z| < \frac{1}{2}\pi$.

---

[50]) Absolutní konvergence integrálů vpravo plyne ze vzorce (179) pro absolutní hodnotu integrandu.

Žádaný asymptotický rozvoj je pak dán touto větou:

Věta 234. *Budiž n celé, $n \geqq 0$, $z \neq 0$, $|\mathrm{ampl}\, z| < \frac{1}{2}\pi$. Potom jest*

$$J_n(z) = \left(\frac{2}{\pi z}\right)^{\frac{1}{2}} (\cos(z - \tfrac{1}{2}n\pi - \tfrac{1}{4}\pi)\, P(z, n) - \sin(z - \tfrac{1}{2}n\pi - \tfrac{1}{4}\pi)\, Q(z, n));$$
(187)

přitom pro každé celé $p \geqq 0$ a pro každé celé $q \geqq 0$ jest[51])

$$P(z, n) = \sum_{m=0}^{p} \frac{(-1)^m \{n, 2m\}}{(2z)^{2m}} + R'_p, \tag{188}$$

$$Q(z, n) = \sum_{m=0}^{q-1} \frac{(-1)^m \{n, 2m+1\}}{(2z)^{2m+1}} + R''_q, \tag{189}$$

kde pro R'_p, R''_q platí tyto odhady:

I. *Je-li δ číslo takové, že $0 < \delta < \frac{1}{2}\pi$, jest*

$$R'_p = O(|z|^{-2p-2}), \quad R''_q = O(|z|^{-2q-1}) \tag{190}$$

pro $|z| \to +\infty$, $|\mathrm{ampl}\, z| \leqq \frac{1}{2}\pi - \delta$.

II. *Je-li $2p + 1 > n - \frac{3}{2}$, jest*

$$|R'_p| < \left|\frac{\{n, 2p+2\}}{(2z)^{2p+2}}\right| \cdot \frac{1}{(\cos(\mathrm{ampl}\, z))^{2p+n+\frac{3}{2}}}; \tag{191}$$

je-li $2q > n - \frac{3}{2}$, jest

$$|R''_q| < \left|\frac{\{n, 2q+1\}}{(2z)^{2q+1}}\right| \cdot \frac{1}{(\cos(\mathrm{ampl}\, z))^{2q+n+\frac{3}{2}}}. \tag{192}$$

Poznámka 3. Odhady v (191), (192) mají zvláště pěkný tvar pro kladné z: potom je $\cos(\mathrm{ampl}\, z) = 1$ a zbytek v (191), (192) je v prosté hodnotě menší než první vynechaný člen (ovšem jen pro $2p + 1 > n - \frac{3}{2}$, $2q > n - \frac{3}{2}$).

Důkaz. Budiž dáno $n \geqq 0$. Ukažme napřed, že z tvrzení II plyne tvrzení I. Nechť tedy tvrzení II je správné. Potom první odhad v (190) je jistě správný pro $2p + 1 > n - \frac{3}{2}$, neboť pro $|\mathrm{ampl}\, z| \leqq \frac{1}{2}\pi - \delta$ je $\cos(\mathrm{ampl}\, z) \geqq \cos(\frac{1}{2}\pi - \delta) = \sin \delta$. Je-li však $2p + 1 \leqq n - \frac{3}{2}$, zvolme celé p' tak, že $2p' + 1 > n - \frac{3}{2}$, a napišme

[51]) Symbol $\{n, m\}$ byl definován ve větě 233.

rovnici (188) s hodnotou p' místo p. Vpravo přijde napřed součet od $m = 0$ do $m = p$, potom člen tvaru $O(|z|^{-2p-2})$, další člen tvaru $O(|z|^{-2p-4})$ atd., až na konec zbytek tvaru $O(|z|^{-2p'-2})$; všichni tito členové však dohromady dávají $O(|z|^{-2p-2})$; tím je první odhad v (190) dokázán pro každé celé $p \geqq 0$. Podobně je tomu s odhadem pro R''_q.

Stačí tedy, dokážeme-li tvrzení II. Pišme

$$z = x + \mathrm{i}y \quad (x, y \text{ reálná}) .$$

Budiž dále $z \neq 0$, $|\mathrm{ampl}\, z| < \frac{1}{2}\pi$, tedy $x > 0$. Podle (186) jest

$$\begin{aligned} J_n(z) = \frac{2^{n-\frac{1}{2}} z^n}{1 \,.\, 3 \,.\, 5 \ldots (2n-1)\, \pi} (K^+ \,.\, \cos(z - \tfrac{1}{2}n\pi - \tfrac{1}{4}\pi) + \\ + \mathrm{i}K^- \,.\, \sin(z - \tfrac{1}{2}n\pi - \tfrac{1}{4}\pi)) \,, \end{aligned} \tag{193}$$

kde

$$K^\pm = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-zv} v^{n-\frac{1}{2}} ((1 + \tfrac{1}{2}\mathrm{i}v)^{n-\frac{1}{2}} \pm (1 - \tfrac{1}{2}\mathrm{i}v)^{n-\frac{1}{2}})\, \mathrm{d}v \,. \tag{194}$$

Vyšetřujme funkci $\varphi(t) = (1 \pm \frac{1}{2}\mathrm{i}vt)^{n-\frac{1}{2}}$ v intervalu $0 \leqq t \leqq 1$ při daném $v > 0$. Ježto pro tyto hodnoty t, v není nikdy $1 \pm \frac{1}{2}\mathrm{i}vt \leqq 0$, existují derivace všech řádů

$$\varphi^{(k)}(t) = (n - \tfrac{1}{2})(n - \tfrac{3}{2}) \ldots (n - k + \tfrac{1}{2})(\pm \tfrac{1}{2}\mathrm{i}v)^k (1 \pm \tfrac{1}{2}\mathrm{i}vt)^{n-k-\frac{1}{2}} \,.$$

Taylorova formule $\varphi(1) = \varphi(0) + \dfrac{1}{1!}\varphi'(0) + \ldots$ (se zbytkem podle věty 100[52])) dává pro každé celé $r \geqq 0$

$$\left(1 \pm \frac{1}{2}\mathrm{i}v\right)^{n-\frac{1}{2}} = \sum_{m=0}^{r} \binom{n-\frac{1}{2}}{m} \left(\pm \frac{1}{2}\mathrm{i}v\right)^m + S^\pm \,, \tag{195}$$

kde

$$\begin{aligned} S^\pm = \frac{(n-\frac{1}{2})(n-\frac{3}{2}) \ldots (n-r-\frac{1}{2})}{r!} \left(\pm \frac{1}{2}\mathrm{i}v\right)^{r+1} . \\ . \int_0^1 \left(1 \pm \frac{1}{2}\mathrm{i}vt\right)^{n-r-\frac{3}{2}} (1-t)^r \, \mathrm{d}t \,. \end{aligned} \tag{196}$$

---

[52]) Tato forma zbytku platí pro komplexní funkce reálné proměnné.

Budiž nyní $r > n - \frac{3}{2}$ (a současně ovšem $r \geqq 0$). Potom, ježto $|1 \pm \frac{1}{2}ivt| > 1$ pro $v > 0$, $t > 0$, jest poslední integrál v prosté hodnotě menší než $\int\limits_0^1 (1 - t)^r \, dt = \frac{1}{r + 1}$, takže

$$|S^\pm| < \left|\binom{n - \frac{1}{2}}{r + 1}\right| (\tfrac{1}{2}v)^{r+1} \text{ pro } r \geqq 0,\ r > n - \tfrac{3}{2}. \tag{197}$$

Dosaďme nyní podle (195) do integrálu (194), užívajíce odhadu (197). V integrálu K^+ odpadnou členy, odpovídající v (195) lichým hodnotám m, v integrálu K^- odpadnou členy, odpovídající sudým hodnotám m. Volme proto v K^+ číslo r liché, $r = 2p + 1$ ($p \geqq 0$, $2p + 1 > n - \frac{3}{2}$) a v K^- volme r sudé, $r = 2q$ ($q \geqq 0$, $2q > n - \frac{3}{2}$). Užijeme-li vzorce (76) z kap. VIII, § 4, příkl. 3, obdržíme po malém zcela mechanickém počtu (obdobně jako v důkazu věty 233)[53])

$$K^+ = \frac{1 \,.\, 3 \ldots (2n - 1)\sqrt{\pi}}{2^{-\frac{3}{2}}} \left(\sum_{m=0}^{p} \frac{\{n, 2m\}(-1)^m}{(2z)^{2m+n+\frac{1}{2}}} + \Theta_1 \frac{|\{n, 2p + 2\}|}{(2x)^{2p+n+\frac{5}{2}}} \right),$$

$$iK^- = -\frac{1 \,.\, 3 \ldots (2n - 1)\sqrt{\pi}}{2^{-\frac{3}{2}}} \left(\sum_{m=0}^{q-1} \frac{\{n, 2m+1\}(-1)^m}{(2z)^{2m+n+\frac{3}{2}}} + \Theta_2 \frac{|\{n, 2q + 1\}|}{(2x)^{2q+n+\frac{3}{2}}} \right);$$

přitom $|\Theta_1| < 1$, $|\Theta_2| < 1$. Dosazením do (193) plyne ihned tvrzení II, neboť $x = |z| \cos (\operatorname{ampl} z)$.

Poznámka 4. Ve větě 233 jsme stanovili pouze řádový odhad zbytku, ve větě 234, která obsahuje nejdůležitější případ $z > 0$, jsme pečlivějším počtem provedli i numerický odhad zbytku. Podotýkám, že bychom mohli metody důkazu věty 234 užíti i k důkazu věty 233, kdybychom v integrační čáře na obr. 10 otočili vhodně úsečky CD, EF.

---

[53]) Zbytek odhaduji ovšem takto podle (197):

$$\left| \int\limits_0^{+\infty} e^{-zv} v^{n-\frac{1}{2}} (S^+ \pm S^-) \, dv \right| < 2 \left|\binom{n - \frac{1}{2}}{r + 1}\right| \int\limits_0^{+\infty} e^{-xv} 2^{-r-1} v^{r+n+\frac{1}{2}} \, dv$$

a poslední integrál je $2^{-r-1} x^{-r-n-\frac{3}{2}} \Gamma(r + n + \frac{3}{2})$.

Cvičení

V těchto cvičeních budiž stále $n \geqq 0$.

1. Z věty 233 odvoďte: Při pevném Θ $(0 < \Theta < \pi)$

$$J_n(re^{i\Theta}) \cong \frac{e^{r \sin \Theta}}{\sqrt{2\pi r}} \,.\, \exp\left(i(-r\cos\Theta - \tfrac{1}{2}\Theta + \tfrac{1}{2}n\pi + \tfrac{1}{4}\pi)\right) \tag{198}$$

pro $r \to +\infty$, $r \in E_1$.

Odtud dále: Při pevném Θ $(-\pi < \Theta < 0)$ je

$$J_n(re^{i\Theta}) = (-1)^n J_n(re^{i(\Theta+\pi)}) \cong \frac{e^{r|\sin \Theta|}}{\sqrt{2\pi r}} \,.\, \exp\left(i(r\cos\Theta - \tfrac{1}{2}\Theta - \tfrac{1}{2}n\pi - \tfrac{1}{4}\pi)\right) \tag{199}$$

pro $r \to +\infty$, $r \in E_1$.

Odtud konečně speciálně pro prostou hodnotu: Při pevném reálném Θ, $0 < |\Theta| < \pi$, je

$$|J_n(re^{i\Theta})| \cong \frac{e^{r|\sin\Theta|}}{\sqrt{2\pi r}} \quad \text{pro } r \to +\infty, \quad r \in E_1. \tag{200}$$

2. Mechanickým dosazením $\Theta = 0$ (nebo, chcete-li, formálně provedeným limitním přechodem $\Theta \to 0$) by ze (200) plynulo[54] $|J_n(r)| \cong (2\pi r)^{-\frac{1}{2}}$, t. j.

$$\lim_{r\to+\infty} \sqrt{2\pi r}|J_n(r)| = 1\,; \tag{201}$$

ale to není pravda, neboť funkce J_n má libovolně velké kladné kořeny (§ 6, cvič. 3) a tedy $\liminf\limits_{r\to+\infty} \sqrt{2\pi r}|J_n(r)| = 0$. Oč zde vlastně jde? Ze správné rovnice (200) plyne ihned

$$\lim_{\Theta\to 0} \lim_{r\to+\infty} \sqrt{2\pi r}\, e^{-r|\sin\Theta|} \,.\, |J_n(re^{i\Theta})| = 1\,;$$

nesprávnou rovnici (201) lze psáti ve tvaru

$$\lim_{r\to+\infty} \lim_{\Theta\to 0} \sqrt{2\pi r}\, e^{-r|\sin\Theta|} \,.\, |J_n(re^{i\Theta})| = 1\,.^{55})$$

Jde tedy o záměnu pořadí limitních přechodů, která zde není dovolena.

3. Po cvič. 2 snad překvapí tato věta: Buďte n, p celá nezáporná, $0 < \delta < \frac{1}{2}\pi$. Potom je

---

[54]) Jde o kladná r.

[55]) Neboť vnitřní limita je $\sqrt{2\pi r}\,|J_n(r)|$.

$$J_n(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\, e^{i(z-\frac{1}{2}n\pi-\frac{1}{4}\pi)}\left(\sum_{m=0}^{p}\frac{\{n, m\}}{(-2iz)^m} + O\left(\frac{1}{|z|^{p+1}}\right)\right) + \tag{202}$$
$$+ \frac{1}{\sqrt{2\pi z}}\, e^{-i(z-\frac{1}{2}n\pi-\frac{1}{4}\pi)}\left(\sum_{m=0}^{p}\frac{(-1)^m\{n, m\}}{(-2iz)^m} + O\left(\frac{1}{|z|^{p+1}}\right)\right)$$

pro $z \to \infty$, $-\frac{1}{2}\pi + \delta \leqq \operatorname{ampl} z \leqq \pi - \delta$.

Návod: Pro $-\frac{1}{2}\pi + \delta \leqq \operatorname{ampl} z \leqq \frac{1}{2}\pi - \delta$ plyne (202) ihned z věty 234. Pro $\delta \leqq \operatorname{ampl} z \leqq \pi - \delta$ je $|e^{-iz}| = e^y \geqq e^{|z|\sin\delta}$, $|e^{iz}| \leqq e^{-|z|\sin\delta}$ ($z = x + iy$, $y \geqq |z| \sin\delta$), takže celý první sčítanec v (202) může býti zahrnut do O-členu v druhém sčítanci, takže pravá strana se redukuje na asymptotický rozvoj z věty 233.

4. Jednodušší analogon k cvič. 2: Budiž Θ reálné, $0 < |\Theta| < \pi$. Potom je $|\sin(re^{i\Theta})| \cong \frac{1}{2}e^{r|\sin\Theta|}$ pro $r \to +\infty$, $r \in E_1$. Ale pro $\Theta = 0$ a $\Theta = \pi$ tento vzorec neplatí.

Tato kapitola snad dostatečně ukázala čtenáři důležitost asymptotických rozvojů. Zároveň cvič. 2, 4 ukazují, že přitom nutno postupovati obezřetně.