KAPITOLA XII*

PERRONŮV INTEGRÁL*

Naše definice zobecněného Lebesgueova integrálu v kap. VIII, § 1 byla neuspokojivá po stránce ucelenosti theorie, i když v mnohých (byť i ne ve všech) praktických případech vyhovuje. Nechť na př. pro každé přirozené n platí, že integrál (Lebesgueův) $\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx$ neexistuje, ale že $\int_a^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx$ konverguje pro každé $a \in \left(\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right)$. Existuje-li **vlastní** limita $\lim\limits_{a \to \frac{1}{n+1}+} \int_a^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx$, říkáme jí zobecněný integrál $\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} f(x)\,dx$. Platí-li to pro $n = 1, 2, \ldots$, existuje zobecněný $\int_a^1 f(x)\,dx$ pro každé $a \in (0, 1)$, ale zobecněný $\int_0^1 f(x)\,dx$ neexistuje (protože zde máme nekonečně mnoho „nepříjemných" bodů $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \ldots$), i když existuje vlastní $\lim\limits_{a \to 0+} \int_a^1 f(x)\,dx$. To je dosti nepříjemné a nepřirozené omezení. Proto budeme v této kapitole definovati obecnější integrál Perronův, který má tuto příjemnou vlastnost: Jakmile existuje jedna z limit (a to **vlastní**) $\lim\limits_{a' \to a+} \int_{a'}^{b} f(x)\,dx$, $\lim\limits_{b' \to b-} \int_a^{b'} f(x)\,dx$, existuje i $\int_a^b f(x)\,dx$ a rovná se této limitě. Mimoto obsahuje Perronův integrál (na rozdíl od Lebesgueova) též t. zv. Newtonův integrál, definovaný na základě primitivních funkcí. Radím čtenáři, aby si tento úvod přečetl ještě jednou po prostudování této kapitoly — potom mu budou jasné všechny podrobnosti. Podotýkám ještě: k studiu této kapitoly je třeba znáti § 3 z kap. IV.

§ 1. Definice a základní vlastnosti Perronova integrálu. Poznámka 1. Budeme zde mnoho pracovati s horní a dolní derivací (viz kap. V, § 2, pozn. 1) $\overline{D} f(x)$, $\underline{D} f(x)$.[1]) Zdůrazněme některá pravidla, plynoucí bezprostředně z definice pojmů lim sup, lim inf a z početních pravidel pro ně (viz **D II**, kap. VI, § 12, pozn. 8).

(1) $\overline{D}(c f(x)) = c\overline{D} f(x)$ pro $0 \leqq c < +\infty$; $\overline{D}(-f(x)) = -\underline{D} f(x)$.

$$\begin{aligned}(2)\qquad &\underline{D} f(x) + \underline{D} g(x) \leqq \underline{D}(f(x) + g(x)) \leqq \\ &\leqq \underline{D} f(x) + \overline{D} g(x) \leqq \overline{D}(f(x) + g(x)) \leqq \overline{D} f(x) + \overline{D} g(x)\,;\end{aligned}$$

jestliže na př. existuje $g'(x)$ (konečná nebo nekonečná), plyne odtud $\underline{D}(f(x) + g(x)) = \underline{D} f(x) + g'(x)$ a obdobně $\overline{D}(f(x) + g(x)) = \overline{D} f(x) + g'(x)$. Všem těmto rovnicím a nerovnostem je rozuměti takto: jsou správné, jestliže součet derivací, který se v nich vyskytuje, má smysl.

Jestliže $M \subset \mathbf{E}_1$, $x \in M$, $x \in M'$ (t. j. x je hromadný bod množiny M), můžeme definovati též horní a dolní derivaci vzhledem k M:

$$\overline{D}_M f(x) = \limsup_{\substack{h\to 0\\ x+h\in M}} \frac{(x+h) - f(x)}{h}\,, \quad \underline{D}_M f(x) = \liminf_{\substack{h\to 0\\ x+h\in M}} \ldots$$

Na př. pro $M = \langle a, b\rangle$ $(-\infty < a < b < +\infty)$ je $\overline{D}_M f(a) = D^+ f(a)$, $\overline{D}_M f(b) = D^- f(b)$[2]) a pod. V dalším budeme často mluvit o funkci f v intervalu $\langle a, b\rangle$ a budeme brát horní a dolní derivaci vzhledem k $\langle a, b\rangle$, takže v bodě a (po příp. b) mluvím vlastně o derivovaných číslech zprava (po příp. zleva). Obyčejně budu psáti prostě $\overline{D} f(x)$ místo $\overline{D}_{\langle a, b\rangle} f(x)$ — čtenáře to jistě nezmate. Podotýkám, že pravidla uvedená v (1), (2) platí zřejmě i pro derivace vzhledem k M.

Poznámka 2. Budiž F funkce konečná v $\langle a, b\rangle$ $(-\infty < a < b < +\infty)$; pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ budiž $\underline{D} F(x) \geqq 0$ (v bodě a míním D_+, v bodě b D_-). Potom F je neklesající v $\langle a, b\rangle$.[3])

Důkaz. Nechť tvrzení není pravdivé; tedy existují α, β tak, že $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$, $F(\alpha) > F(\beta)$. Položme $G(x) = F(x) + \varepsilon x$, kde $\varepsilon > 0$

[1]) Tyto pojmy se týkají konečné reálné funkce f.
[2]) Definici čtyř derivovaných čísel viz v **D II**, kap. V, § 8.
[3]) Nepředpokládá se spojitost funkce F.

volme tak malé, že $G(\alpha) > G(\beta)$. Jest ovšem $\underline{D}\, G(x) \geqq \varepsilon > 0$. Budiž $A = \underset{x}{\mathcal{E}}(\alpha \leqq x \leqq \beta,\, G(x) \geqq G(\alpha))$, takže $\alpha \in A$. Položme $z = \sup A$ (tedy $\alpha \leqq z \leqq \beta$). Je-li $G(z) \geqq G(\alpha)$ (a tedy jistě $z < \beta$), je $G(z + h) < < G(\alpha) \leqq G(z)$ pro $0 < h \leqq \beta - z$ a tedy zřejmě $\underline{D}\, G(z) \leqq 0$ — spor. Tedy musí být $G(z) < G(\alpha)$ (a tedy jistě $z > \alpha$). Potom však existují čísla $z' < z$ a libovolně blízká číslu z tak, že $z' \in A$, t. j. $G(z') \geqq G(\alpha) > > G(z)$, odkudž vzhledem k $z' - z < 0$ plyne $\underline{D}\, G(z) \leqq 0$ — opět spor.

Poznámka 3. Zakladatelé integrálního počtu byli vedeni dvěma ideami. Leibniz pojímal integrál — řečeno zhruba a v modernisované formě — jako limitu součtu; exaktní provedení této ideje je dílem Cauchyho a Riemanna (viz **J I**, kap. II), dalším zobecněním této ideje je pak definice Lebesgueova nebo Lebesgue-Stieltjesova integrálu, jak jsme ji podali v této knize, def. 10 (úmyslně jsem volil formu co nejpodobnější definici Riemannově). Naproti tomu Newton vyšel z pojmu primitivní funkce. Definujme: Budiž f *konečná* reálná funkce, definovaná v intervalu $I \subset \mathbf{E}_1$. Funkci F nazýváme *primitivní funkcí* k f v intervalu I, jestliže pro každé $x \in I$ je $F'(x) = f(x)$ (v počátečním bodě, patří-li k I, míním derivaci zprava, v koncovém bodě zleva). Potom ovšem je F spojitá v I a všechny ostatní primitivní funkce k f v I mají tvar $F(x) +$ konst (**D I**, věta 136). (V **J I**, kap. III, § 1 jsme zavedli tento pojem jen pro otevřené intervaly.) Definujme dále: Budiž $-\infty < a < b < +\infty$; nechť f má v $\langle a, b\rangle$ primitivní funkci F. Potom definujeme Newtonův integrál funkce f od a do b rovnicí

$$(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)\,. \tag{3}$$

Pravá strana nezávisí ovšem na tom, kterou primitivní funkci vezmeme. Je-li f konečná a spojitá v $\langle a, b\rangle$, je její Riemannův integrál $F(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ primitivní funkcí k f v $\langle a, b\rangle$ (viz **J I**, věta 38, věta 36 a k ní pozn.[38])) a tedy podle (3) existuje Newtonův integrál a má hodnotu $F(b) - F(a) = (\mathcal{R})\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ a touž hodnotu má i Lebesgueův integrál (kap. III, § 4, pozn. 7 — nebo věta 157). Znaky $(\mathcal{N})$, $(\mathcal{R})$, $(\mathcal{L})$

rozlišuji Newtonův, Riemannův a Lebesgueův integrál. Ale u nespojitých funkcí se tyto pojmy rozcházejí: může se státi, že existuje Riemannův (a tedy i Lebesgueův) integrál a neexistuje Newtonův a jindy existuje Newtonův a neexistuje Lebesgueův (a tedy ani Riemannův). V této kapitole podáme obecnější definici Perronovu; Perronův integrál (znak $\mathcal{P}$) zahrnuje Newtonův, Lebesgueův[3a]) (a tedy i Riemannův) integrál. Přitom vyjdeme z ideje primitivní funkce: Nemá-li f primitivní funkci v $\langle a, b\rangle$, leží nasnadě myšlenka, vyšetřovati jednak ty funkce $M(x)$, pro které je v $\langle a, b\rangle$ stále $M'(x) \geqq f(x)$, jednak ty funkce $m(x)$, pro které je $m'(x) \leqq f(x)$ a bráti pak rozdíly $M(b) - M(a)$, $m(b) - m(a)$ za jakýsi horní a dolní odhad pro hledaný integrál $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Ale bylo by příliš omezující, požadovati existenci derivací M', m'; proto použijeme raději horní a dolní derivace a definujeme takto:

Definice 24. *Reálná funkce f (konečná nebo ne) budiž definována v $\langle a, b\rangle$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. Funkci M (po příp. m), která je konečná a reálná v $\langle a, b\rangle$, nazvu majorantou (po příp. minorantou) k funkci f v $\langle a, b\rangle$, jestliže pro každé $x \in \langle a, b\rangle$ je*

$$\text{(4)} \qquad \underline{D}\, M(x) \geqq f(x)\,, \quad \underline{D}\, M(x) > -\infty^{4)}$$

po příp.

$$\text{(5)} \qquad \overline{D}\, m(x) \leqq f(x)\,, \quad \overline{D}\, m(x) < +\infty\,.$$

Přitom míním tyto horní a dolní derivace „vzhledem k $\langle a, b\rangle$" (viz pozn. 1).

Poznámka 4. Je-li M majorantou, je i $M +$ konst majorantou. Je-li M majorantou k f, $0 \leqq c < +\infty$, je cM majorantou k cf. Je-li M majorantou k f, je $-M$ minorantou k $-f$ (vše v $\langle a, b\rangle$). Dále: Je-li $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$ a je-li M majorantou k f v $\langle a, b\rangle$, je i majorantou k f v $\langle \alpha, \beta\rangle$. (Stačí si uvědomit, že $D_+ M(\alpha) \geqq \underline{D}\, M(\alpha)$, $D_- M(\beta) \geqq \geqq \underline{D}\, M(\beta)$). Konečně: Je-li M majorantou k f v $\langle a, b\rangle$ i v $\langle b, c\rangle$, je též M majorantou k f v $\langle a, c\rangle$ (stačí si uvědomit, že platí $\underline{D}\, M(b) = \operatorname{Min}\,(D_+ M(b), D_- M(b))$). Podobně pro minoranty. To vše plyne ihned z definice.

[3a]) Míním konvergentní Lebesgueův integrál.

[4]) Druhá nerovnost neplyne z první, ježto může býti $f(x) = -\infty$.

Věta 164. *Budiž M majoranta, m minoranta k f v $\langle a, b\rangle$. Potom funkce $M - m$ je neklesající v $\langle a, b\rangle$.*

Tuto okolnost lze psáti buďto

$$M(y) - m(y) \geqq M(x) - m(x) \text{ pro } a \leqq x \leqq y \leqq b \tag{6}$$

nebo

$$M(y) - M(x) \geqq m(y) - m(x) \text{ pro } a \leqq x \leqq y \leqq b\,. \tag{7}$$

Druhého tvaru budeme často užívat.

Důkaz. V $\langle a, b\rangle$ jest

$$\underline{D}(M - m) \geqq \underline{D}M + \underline{D}(-m) = \underline{D}M - \overline{D}m \geqq 0\,, \tag{8}$$

neboť výraz vpravo má smysl ($\underline{D}M$; $\overline{D}m$ nemohou být nekonečná téhož znamení) a $\overline{D}m \leqq f \leqq \underline{D}M$; nato se užije pozn. 2.

Speciálně: pro každou majorantu M a každou minorantu m je

$$m(b) - m(a) \leqq M(b) - M(a)\,. \tag{9}$$

Budiž $\mathfrak{S}$ infimum všech čísel $M(b) - M(a)$ pro všechny majoranty dané funkce f v $\langle a, b\rangle$; budiž $\mathfrak{s}$ supremum všech čísel $m(b) - m(a)$ pro všechny minoranty. (Neexistují-li majoranty, je $\mathfrak{S}$ infimum prázdné množiny, t. j. $\mathfrak{S} = +\infty$; neexistují-li minoranty, je $\mathfrak{s} = -\infty$.) Podle (9) je $\mathfrak{s} \leqq \mathfrak{S}$.

Definice 25. *Je-li $\mathfrak{s} = \mathfrak{S}$ a je-li toto číslo konečné, definujeme Perronův integrál rovnicí*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \mathfrak{s} = \mathfrak{S}\,. \tag{10}$$

Poznámka 5. Lze ovšem psáti $f(t)\,\mathrm{d}t$ atd. — jakékoliv písmeno. Symbol (10) znamená až do konce kapitoly Perronův integrál, není-li výslovně řečeno něco jiného; je-li třeba, rozlišujeme: ($\mathcal{P}$) = Perronův, ($\mathcal{N}$) = Newtonův, ($\mathcal{R}$) = Riemannův, ($\mathcal{L}$) = Lebesgueův integrál.[5])

Poznámka 6. Existuje-li (10), existuje aspoň jedna majoranta M a jedna minoranta m, načež

---

[5]) Zavádíme tedy jen Perronův integrál s hodnotou konečnou (ne s hodnotou $+\infty$ nebo $-\infty$, ač by to šlo). f musí být definována všude v $\langle a, b\rangle$ — viz však větu 177 a definici 27.

$$(11) \qquad m(b) - m(a) \leqq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq M(b) - M(a)\,.$$

Věta 165. (10) *existuje tehdy a jen tehdy, jestliže ke každému* $\varepsilon > 0$ *existuje v* $\langle a, b\rangle$ *k funkci* f *majoranta* M *a minoranta* m *tak, že*

$$(12) \qquad (M(b) - M(a)) - (m(b) - m(a)) < \varepsilon\,.$$

Důkaz: ihned z definice.

Výrok, že Perronův integrál (10) existuje (nebo „má smysl") znamená ovšem — až do definice 26 — že je $-\infty < a < b < +\infty$, že f je definována všude v $\langle a, b\rangle$ a že $-\infty < \mathfrak{s} = \mathfrak{S} < +\infty$; v def. 26, 27 však tento pojem ještě poněkud zobecníme.

Věta 166. *Existuje-li* $(\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, *existuje i* $(\mathcal{P})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *a oba integrály jsou si rovny.*

Důkaz. f je konečná a má v $\langle a, b\rangle$ primitivní funkci F. Ta je ovšem současně majorantou i minorantou. Položíme-li v (12) $M = m = F$, vyjde existence Perronova integrálu. Položíme-li pak v (11) $M = m = F$, vychází

$$(\mathcal{P})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = (\mathcal{N})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Vztah mezi Perronovým a Lebesgueovým integrálem nám dá více práce (viz § 2).

Věta 167. *Je-li* $a \leqq \alpha < \beta \leqq b$ *a existuje-li* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, *existuje i* $\int_\alpha^\beta f(x)\,\mathrm{d}x$.

Důkaz. Budiž $\varepsilon > 0$. Podle věty 165 existuje v $\langle a, b\rangle$ majoranta M a minoranta m tak, že platí (12). Ježto (viz (6)) $M(a) - m(a) \leqq \leqq M(\alpha) - m(\alpha) \leqq M(\beta) - m(\beta) \leqq M(b) - m(b)$, je i $(M(\beta) - M(\alpha)) - - (m(\beta) - m(\alpha)) < \varepsilon$ a užije se opět věty 165.

Věta 168. *Je-li* $a < b < c$ *a existují-li* $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, $\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x$, *existuje i*

$$(13) \qquad \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Důkaz. Budiž $\varepsilon > 0$. Zvolme v $\langle a, b\rangle$ majorantu a minorantu M_1, m_1, v $\langle b, c\rangle$ majorantu a minorantu M_2, m_2 tak, že

$$(14) \qquad (M_1(b) - M_1(a)) - (m_1(b) - m_1(a)) < \tfrac{1}{2}\varepsilon\,,$$

$$(15) \qquad (M_2(c) - M_2(b)) - (m_2(c) - m_2(b)) < \tfrac{1}{2}\varepsilon\,;$$

volme M_2, m_2 (přičtením vhodné konstanty) tak, aby $M_1(b) = M_2(b)$, $m_1(b) = m_2(b)$. Položíme-li $M(x) = M_1(x)$ pro $x \in \langle a, b\rangle$, $M(x) = M_2(x)$ pro $x \in \langle b, c\rangle$ a obdobně m, plyne z (14), (15)

$$M(c) - M(a) < m(c) - m(a) + \varepsilon\,,$$

takže $I = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje.

Dále (podle (11), (14), (15)) $I \leqq M(c) - M(a) < (m_2(c) - m_2(b)) + (m_1(b) - m_1(a)) + \varepsilon \leqq \int_b^c + \int_a^b + \varepsilon$ a obdobně vyjde $I > \int_b^c + \int_a^b - \varepsilon$.

Věta 169. *Je-li* $c \in \mathsf{E}_1$, *je*

$$(16) \qquad \int_a^b c\, f(x)\,\mathrm{d}x = c\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

existuje-li integrál vpravo.

Důkaz. Plyne z definice a z pozn. 4.

Věta 170. *Nechť existuje* $\int_a^b f_i(x)\,\mathrm{d}x$ *pro* $i = 1, 2$. *Nechť* f *je reálná funkce, definovaná v* $\langle a, b\rangle$. *Ve všech bodech* $x \in \langle a, b\rangle$, *ve kterých* $f_1(x) + f_2(x)$ *má smysl, budiž* $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ (*pro ostatní* $x \in \langle a, b\rangle$ *může* $f(x)$ *býti jakékoliv*). *Potom existuje též*

$$(17) \qquad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x\,.^{6})$$

[6]) Překvapuje snad úplná libovolnost funkce f tam, kde $f_1 + f_2$ není definováno. V § 2, věta 173 uvidíme, že jde o libovolnost jen na množině nulové míry.

Důkaz. Budiž $\varepsilon > 0$. Zvolme majorantu M_i a minorantu m_i ($i = 1, 2$) k funkci f_i tak, že $(M_i(b) - M_i(a)) - (m_i(b) - m_i(a)) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Položme $M = M_1 + M_2$, $m = m_1 + m_2$, takže $(M(b) - M(a)) - (m(b) - m(a)) < \varepsilon$. Tvrdím, že M je majorantou a m minorantou k f. Neboť předně je $\underline{D}M \geqq \underline{D}M_1 + \underline{D}M_2 > -\infty$. Za druhé v bodech, ve kterých je $f_1 + f_2$ definováno, je $\underline{D}M \geqq \underline{D}M_1 + \underline{D}M_2 \geqq f_1 + f_2 = f$ a konečně v bodech, kde $f_1 + f_2$ není definováno, je na př. $f_1 = +\infty$ (nebo $f_2 = +\infty$), načež $\underline{D}M_1 = +\infty$, $\underline{D}M_2 > -\infty$, tedy $\underline{D}M = +\infty \geqq f$. Podle věty 165 tedy existuje $\int_a^b f(x)\,dx$. A konečně je patrno, že levá i pravá strana v (17) jsou čísla intervalu $\langle m(b) - m(a), M(b) - M(a)\rangle$, takže absolutní hodnota jejich rozdílu je menší než ε.

Poznámka 7. Budiž M majoranta k f v $\langle a, b\rangle$; položme $g(x) = f(-x)$, $N(x) = -M(-x)$. Tvrdím, že N je majorantou ke g v $\langle -b, -a\rangle$.

Důkaz.

$$\frac{N(x+h) - N(x)}{h} = \frac{M(-x-h) - M(-x)}{-h}$$

a tedy $\underline{D}\,N(x) = \underline{D}\,M(-x)$; poslední číslo je $\geqq f(-x) = g(x)$ a současně $> -\infty$. Podotkněme ještě, že $N(-a) - N(-b) = M(b) - M(a)$. Podobně pro minoranty. *Tedy je* $\int_{-b}^{-a} f(-x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$, *existuje-li jeden z obou integrálů.*

Po těchto drobnostech přichází závažná věta.

Věta 171. *Budiž f definována v $\langle a, b\rangle$ $(-\infty < a < b < +\infty)$.*

I. Nechť existuje vlastní limita $I = \lim\limits_{b' \to b-} \int_a^{b'} f(x)\,dx$. *Potom existuje* $\int_a^b f(x)\,dx$ *a rovná se této limitě.*

II. Nechť existuje vlastní limita $\lim\limits_{a' \to a+} \int_{a'}^b f(x)\,dx$. *Potom existuje* $\int_a^b f(x)\,dx$ *a rovná se této limitě.*

Důkaz. Jestliže tvrzení I aplikuji na funkci $f(-x)$, dostanu podle pozn. 7 tvrzení II. Proto dokážeme jen tvrzení I. Položme

$$(18) \qquad F(x) = \int_a^x f(t)\,dt \text{ pro } a < x < b,\ F(a) = 0\,.$$

Budiž $\varepsilon > 0$. Ježto existuje $\lim\limits_{x \to b-} F(x) = I$, existuje ke každému přirozenému n takové $b_n < b$, že (Bolzano-Cauchyova podmínka)

$$(19) \qquad (n \geqq 1,\ b_n \leqq x \leqq y < b) \Rightarrow |F(y) - F(x)| < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\,.$$

Položme $b_0 = a$ a volme (což je možno) b_n tak, že

$$(20) \qquad a = b_0 < b_1 < b_2 < b_3 < \ldots,\ b_n > b - \frac{1}{n}, \text{ tedy } \lim_{n \to \infty} b_n = b\,.$$

V každém intervalu $\langle b_n, b_{n+1}\rangle$ $(n = 0, 1, \ldots)$ volme k f majorantu M_n a minorantu m_n tak, že $(M_n(b_{n+1}) - M_n(b_n)) - (m_n(b_{n+1}) - m_n(b_n)) < < \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}$. Příslušné „aditivní konstanty“ volme tak, že $M_{n+1}(b_{n+1}) = M_n(b_{n+1})$, $m_{n+1}(b_{n+1}) = m_n(b_{n+1})$, takže můžeme definovati v $\langle a, b)$ funkce M, m rovnicemi[7])

$$(21) \qquad \begin{gathered} M(x) = M_n(x),\ m(x) = m_n(x) \text{ pro } b_n \leqq x \leqq b_{n+1} \\ (n = 0, 1, 2, \ldots)\,. \end{gathered}$$

Pro $b_n \leqq x \leqq y \leqq b_{n+1}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ je pak

$$(22) \qquad 0 \leqq (M(y) - M(x)) - (m(y) - m(x)) < \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}\,,$$

odkudž pro $b_n \leqq x \leqq y < b$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ plyne

$$(23) \qquad 0 \leqq (M(y) - M(x)) - (m(y) - m(x)) < \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}\,.$$

Ježto pak (viz pozn. 6)

$$(24) \qquad m(y) - m(x) \leqq F(y) - F(x) \leqq M(y) - M(x)\,,$$

---

[7]) M, m jsou zřejmě majorantou a minorantou k f v každém intervalu $\langle a, b'\rangle$, kde $a < b' < b$.

plyne z (19), (23), (24) zřejmě

$$(25)\qquad (n \geqq 1,\ b_n \leqq x \leqq y < b) \Rightarrow \left(|M(y) - M(x)| < \frac{\varepsilon}{2^n},\ |m(y) - m(x)| < \frac{\varepsilon}{2^n}\right).$$

Tedy (Bolzano-Cauchyova podmínka) existují vlastní limity $\lim_{y \to b-} M(y) = A$, $\lim_{y \to b-} m(y) = B$. Definujme ještě $M(b) = A + \frac{1}{4}\varepsilon$, $m(b) = B - \frac{1}{4}\varepsilon$. Potom zřejmě $D_- M(b) = +\infty$, $D^- m(b) = -\infty$, odkudž ve spojení s pozn. [7]) plyne, že M je majoranta a m minoranta k f v $\langle a, b \rangle$. Mimoto

$$(26)\qquad M(b) - M(a) = \sum_{n=0}^{\infty} (M(b_{n+1}) - M(b_n)) + \tfrac{1}{4}\varepsilon,$$

$$(27)\qquad m(b) - m(a) = \sum_{n=0}^{\infty} (m(b_{n+1}) - m(b_n)) - \tfrac{1}{4}\varepsilon,$$

$$(28)\qquad I = \lim_{x \to b-} F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (F(b_{n+1}) - F(b_n)).$$

Odtud předně (viz (22))

$$(29)\qquad (M(b) - M(a)) - (m(b) - m(a)) < \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+2}} + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$$

a za druhé podle (24)

$$(30)\qquad m(b) - m(a) \leqq I \leqq M(b) - M(a).$$

Ježto $\varepsilon > 0$ bylo libovolné, plyne z (29), že existuje $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$. Ježto pak $m(b) - m(a) \leqq \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \leqq M(b) - M(a)$, plyne z (30), (29)

$$|I - \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x| < \varepsilon \text{ pro každé } \varepsilon > 0.$$

§ 2. Neurčitý Perronův integrál. Vztah k Lebesgueovu integrálu.

Definice 26. *Rozšiřme definici 25 takto* ($a \in \mathbf{E}_1$, $b \in \mathbf{E}_1$):

$$(31)\qquad \int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0, \textit{ je-li } f(a) \textit{ definováno};$$

$$(32)\qquad \int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{y\to+\infty} \int_a^y f(x)\,dx\,,$$

$$(33)\qquad \int_{-\infty}^b f(x)\,dx = \lim_{y\to-\infty} \int_y^b f(x)\,dx\,,$$

je-li limita vpravo vlastní;

$$(34)\qquad \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} + \int_a^{+\infty}\,,$$

existují-li integrály vpravo (smysl definice (34) zřejmě nezávisí na volbě čísla a — to plyne z věty 168).

Poznámka 1. Abychom nemusili rozeznávati několik případů, smluvíme se (jenom pro tento paragraf!) na následující modifikaci dosavadního označení. Jsou-li a, b konečná, má $\langle a, b\rangle$ dosavadní význam. Avšak symboly $\langle -\infty, b\rangle$, $\langle a, +\infty\rangle$, $\langle -\infty, +\infty\rangle$ budou pro konečná a, b znamenati intervaly $(-\infty, b\rangle$, $\langle a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$. Na tuto úmluvu je pamatovati, mluvím-li v dalším o intervalu $\langle a, b\rangle$.

Věta 172. *Nechť* $-\infty \leqq a \leqq b \leqq +\infty$ *a nechť* $\int_a^b f(x)\,dx$ *existuje. Potom funkce* $F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$ *je spojitá v* $\langle a, b\rangle$ *a má skoro všude v* $\langle a, b\rangle$ *konečnou derivaci* $F'(x) = f(x)$.

Poznámka 2. Funkci F se říká „neurčitý Perronův integrál funkce f v $\langle a, b\rangle$“. Podle (11) máme pro $a \leqq x < y \leqq b$ (viz větu 168)

$$m(y) - m(x) \leqq \int_x^y f(t)\,dt = F(y) - F(x) \leqq M(y) - M(x)\,,$$

jestliže m je minoranta, M majoranta. Tedy $M(x) - F(x)$ je neklesající, $m(x) - F(x)$ je nerostoucí v $\langle a, b\rangle$.

Důkaz. I. Spojitost. Dokažme spojitost zprava v bodě x_0 ($a \leqq x_0 < b$, $x_0 > -\infty$). Budiž $\varepsilon > 0$. Zvolme majorantu M a minorantu m v intervalu $\langle x_0, x_1\rangle$ (zvolíme jisté $x_1 \in (x_0, b)$) tak, že $(M(x_1) - M(x_0)) - (m(x_1) - m(x_0)) < \frac{1}{2}\varepsilon$, takže pro jakékoliv $x \in \langle x_0, x_1\rangle$ je (viz větu 164 a pozn. 6 v § 1)

$$(35)\qquad \begin{aligned} M(x) - M(x_0) - \tfrac{1}{2}\varepsilon < m(x) - m(x_0) \leqq F(x) - F(x_0) \leqq \\ \leqq M(x) - M(x_0) < m(x) - m(x_0) + \tfrac{1}{2}\varepsilon\,. \end{aligned}$$

Zvolme číslo K $(0 < K + \infty)$ tak, že $\underline{D}\, M(x_0) > -K$, $\overline{D}\, m(x_0) < K$ (to je možno). Zvolme dále δ $(0 < \delta < x_1 - x_0)$ tak, že pro $x_0 < < x < x_0 + \delta$ je $\dfrac{M(x) - M(x_0)}{x - x_0} > -K$, t. j. $M(x) - M(x_0) > - K(x - x_0)$ a obdobně $m(x) - m(x_0) < K(x - x_0)$. Pro tato x je tedy podle (35) $-K(x - x_0) - \frac{1}{2}\varepsilon < F(x) - F(x_0) < K(x - x_0) + + \frac{1}{2}\varepsilon$. Pro $x_0 < x < x_0 + \operatorname{Min}\left(\delta, \dfrac{\varepsilon}{2K}\right)$ je tedy $|F(x) - F(x_0)| < \varepsilon$. Podobně pro spojitost zleva.

II. Derivace. Ježto každý interval je sjednocením spočetného systému omezených intervalů, stačí se omezit na případ, že $-\infty < a < < b < +\infty$. Pro každé přirozené n budiž A_n množina oněch $x \in (a, b)$, pro něž je

$$(36)\qquad \text{buďto } \underline{D}\, F(x) = -\infty \text{ nebo } \underline{D}\, F(x) < f(x) - \frac{1}{n}\,.$$

Položme ještě $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$, takže A je množina oněch $x \in (a, b)$, pro něž je

$$(37)\qquad \text{buďto } \underline{D}\, F(x) = -\infty \text{ nebo } \underline{D}\, F(x) < f(x)\,.$$

Dokážeme-li, že $\mu(A_n) = 0$, bude též $\mu(A) = 0$, t. j. bude dokázáno, že skoro všude v (a, b) je

$$(38)\qquad \underline{D}\, F(x) \neq -\infty\,,\quad \underline{D}\, F(x) \geqq f(x)\,.$$

Užijeme-li (38) na funkci $-f$,[8]) vidíme, že skoro všude v (a, b) je

$$\overline{D}\, F(x) \neq +\infty\,,\quad \overline{D}\, F(x) \leqq f(x)\,;$$

ježto pak $\underline{D} \leqq \overline{D}$, plyne odtud skoro všude v (a, b)

$$f(x) = F'(x) \neq \pm\infty\,.$$

---

[8]) Jejímž „neurčitým integrálem“ je funkce $-F$.

Stačí tedy dokázati rovnost $\mu(A_n) = 0$. Budiž tedy n dáno. Zvolme libovolné $m \geqq 1$ a sestrojme majorantu M k f v $\langle a, b\rangle$ tak, že $0 \leqq$ $\leqq M(b) - M(a) - \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t < \frac{1}{nm}$. Funkce

$$\Phi(x) = M(x) - M(a) - \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \frac{x-a}{nm} \tag{39}$$

je v $\langle a, b\rangle$ rostoucí, $\Phi(a) = 0$, $\Phi(b) < \frac{1+b-a}{nm}$. Existuje tedy množina P tak, že $\mu(P) = 0$ a že pro $x \in (a, b) \dot{-} P$ existuje konečná derivace $\Phi'(x) \geqq 0$. Položme ještě

$$Q = \mathop{\mathcal{E}}_x \left(x \in (a, b) \dot{-} P,\ \Phi'(x) \geqq \frac{1}{n} \right).$$

V každém bodě $x \in (a, b) \dot{-} (P \cup Q)$ je

$$\underline{D}\, F(x) = \underline{D}\, M(x) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\, \Phi(x) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{x-a}{nm}\right) \geqq \underline{D}\, M(x) - \frac{1}{n},$$

tedy jednak $\underline{D}\, F(x) > -\infty$, jednak $\underline{D}\, F(x) \geqq f(x) - \frac{1}{n}$, takže x nepatří k A_n. Tedy je $A_n \subset P \cup Q$. Podle 2. pomocné věty v kap. V, § 2 je

$$\mu_e(\Phi(Q)) \geqq \frac{1}{n}\, \mu_e(Q),$$

ale

$$\mu_e(\Phi(Q)) \leqq \Phi(b) - \Phi(a) < \frac{1+b-a}{nm},$$

takže

$$\mu_e(Q) \leqq n\, \mu_e(\Phi(Q)) < \frac{1+b-a}{m}.$$

Ale

$$\mu_e(A_n) \leqq \mu_e(P \cup Q) = \mu_e(Q) < \frac{1+b-a}{m},$$

a to platí pro každé $m \geqq 1$, tedy $\mu(A_n) = 0$.

Věta 173. *Nechť existuje* $\int_a^b f(x)\,dx$. *Potom* f *je v* (a, b) *měřitelná a skoro všude konečná.*

Důkaz. Definujme F v $\langle a, b\rangle$ jako ve větě 172; je-li $b < +\infty$, položme ještě $F(x) = F(b)$ pro $x > b$; je-li $a > -\infty$, položme $F(x) = F(a)$ pro $x < a$, takže F je podle věty 172 spojitá v $\mathbf{E}_1$. Podle téže věty je skoro všude v (a, b)

$$f(x) = F'(x) = \lim_{n\to\infty} n\left(F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)\right) \neq \pm\infty\,.$$

Ale $n\left(F\left(x + \frac{1}{n}\right) - F(x)\right)$ je spojitá a tedy i měřitelná v (a, b), tedy je měřitelná (věta 35 a Dodatek k ní) i její limita pro $n \to \infty$, která existuje skoro všude v (a, b).

Věta 174. *Nechť* f *je definováno všude v* $\langle a, b\rangle$ *a nechť*

$$(\mathcal{L})\int_a^b f(x)\,dx = L \tag{40}$$

konverguje. Potom existuje i

$$(\mathcal{P})\int_a^b f(x)\,dx = P \tag{41}$$

a je $L = P$.

Důkaz. I. Buďte napřed a, b konečná. Budiž $\varepsilon > 0$. Potom existují podle věty 80 funkce φ, ψ tak, že platí:

1. φ je v $\langle a, b\rangle$ omezená zdola, ψ shora.
2. φ je v $\langle a, b\rangle$ polospojitá zdola, ψ shora.
3. $\varphi(x) \geqq f(x) \geqq \psi(x)$ pro $a \leqq x \leqq b$.
4. $(\mathcal{L})\int_a^b \varphi(x)\,dx - \frac{1}{2}\varepsilon < (\mathcal{L})\int_a^b f(x)\,dx < (\mathcal{L})\int_a^b \psi(x)\,dx + \frac{1}{2}\varepsilon.$

Položme

$$\Phi(x) = (\mathcal{L})\int_a^x \varphi(t)\,dt\,,\quad \Psi(x) = (\mathcal{L})\int_a^x \psi(t)\,dt \tag{42}$$

pro $a \leqq x \leqq b$. Pro každé $x \in \langle a, b \rangle$ je — jak ihned dokážeme —

$$\underline{D}\,\Phi(x) \geqq \varphi(x)\,, \quad \overline{D}\,\Psi(x) \leqq \psi(x)\,.^{9)} \tag{43}$$

Důkaz: $x \in \langle a, b \rangle$ budiž dáno. Je-li $c < \varphi(x)$, je (poněvadž $\underset{x}{\mathcal{E}}(x \in \langle a, b \rangle, \varphi(x) > c)$ je otevřená v $\langle a, b \rangle$) též $c < \varphi(t)$ pro všechna $t \in \langle a, b \rangle$, pro něž $|t - x| < \delta$, kde δ je jisté kladné číslo. Pro $|h| < \delta$, $x + h \in \langle a, b \rangle$ je tedy $\frac{1}{h}(\Phi(x + h) - \Phi(x)) = \frac{1}{h}\int\limits_x^{x+h} \varphi(t)\,\mathrm{d}t \geqq c$, tedy $\underline{D}\,\Phi(x) \geqq c$. Tedy: $\varphi(x) > c \Rightarrow \underline{D}\,\Phi(x) \geqq c$. Tedy nemůže být $\varphi(x) > \underline{D}\,\Phi(x)$. Druhá nerovnost (43) se odvodí z první přechodem od funkcí φ, f k funkcím $-\psi$, $-f$. Z (43) a z vlastností 1, 3 plyne ihned, že Φ je majoranta, Ψ minoranta k f v $\langle a, b \rangle$. Dále je podle vlastnosti 4 $(\Phi(b) - \Phi(a)) - (\Psi(b) - \Psi(a)) = \Phi(b) - \Psi(b) < \varepsilon$. Tedy existuje (41). A konečně leží i integrál (40) i integrál (41) v intervalu $\langle \Phi(b), \Psi(b) \rangle$ (pro (40) to plyne z vlastnosti 3, pro (41) z toho, že Φ, Ψ jsou majoranta a minoranta, $\Phi(a) = \Psi(a) = 0$). Tedy je $|P - L| < \varepsilon$.

II. Je-li na př. $b = +\infty$, máme především $L = \lim\limits_{c \to +\infty} (\mathcal{L}) \int\limits_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$, což podle bodu I (s konečnými mezemi a, c) je rovno $\lim\limits_{c \to +\infty} (\mathcal{P}) \int\limits_a^c f(t)\,\mathrm{d}t$, což podle definice je integrál (41).

Věta 175. *Budiž $f(x) \geqq 0$ všude v $\langle a, b \rangle$. Nechť existuje* (41); *potom konverguje i* (40) (*a je ovšem $P = L$ podle věty 174*).

Důkaz. Ježto f je měřitelná podle věty 173, existuje (40). Jde ještě o jeho konvergenci. Buďte především a, b konečná. Existuje majoranta M k f v $\langle a, b \rangle$. Tedy všude v $\langle a, b \rangle$ je $\underline{D}M \geqq f \geqq 0$, takže (viz pozn. 2 v § 1) M je neklesající a má tedy skoro všude v $\langle a, b \rangle$ derivaci $M'(x) \geqq f(x) \geqq 0$. Podle věty 90 je pak $(\mathcal{L}) \int\limits_a^b M'(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$ a tím spíše konverguje (40). Je-li za druhé na př. $b = +\infty$, je pro $a <$

[9]) Míním ovšem derivace vzhledem k $\langle a, b \rangle$, t. j. v bodě a zprava, v bodě b zleva.

$< c < +\infty$ $(\mathcal{L})\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x = (\mathcal{P})\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$; pro $c \to +\infty$ je limita levé strany (40), limita pravé strany je (41). Ježto P je konečné, je i L konečné. Význam věty 175: pro $f \geqq 0$ lze větu 174 obrátit.

Říkáme, že (41) **konverguje absolutně**, když existují

$$P = (\mathcal{P})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\,, \quad Q = (\mathcal{P})\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x\,. \tag{44}$$

Věta 176. *Budiž f definováno všude v $\langle a, b\rangle$. Potom* (41) *konverguje absolutně tehdy a jen tehdy, když* (40) *konverguje.*

Důkaz. I. Nechť $(\mathcal{L})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ konverguje; potom i $(\mathcal{L})\int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x$ konverguje a podle věty 174 existují integrály (44).

II. Nechť integrály (44) existují. Potom f je podle věty 173 měřitelná v $\langle a, b\rangle$ a podle věty 175 konverguje $(\mathcal{L})\int_a^b |f|\,\mathrm{d}x$ a tedy i $(\mathcal{L})\int_a^b f\,\mathrm{d}x$.

Dosud jsme předpokládali, že f je definována **všude** v $\langle a, b\rangle$. Dokažme nyní tuto větu:

Věta 177. *Buďte f, g definovány všude v $\langle a, b\rangle$. Nechť existuje $P_1 = (\mathcal{P})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ a nechť f, g jsou ekvivalentní v $\langle a, b\rangle$. Potom existuje i $P_2 = (\mathcal{P})\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ a je $P_1 = P_2$.*

Důkaz. Definujme funkci h v $\langle a, b\rangle$ takto: Je-li $f(x) = g(x)$, položme $h(x) = 0$; je-li $f(x) \neq g(x)$ (takže $g(x) - f(x)$ jistě má smysl), položme $h(x) = g(x) - f(x)$. Potom platí:

I. $h(x) = 0$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$. To je jasné.

II. Je $g(x) = f(x) + h(x)$ v každém bodě, ve kterém pravá strana má smysl. To je nutno dokázati opatrně: Je-li předně $f(x) = g(x)$, je $h(x) = 0$ a rovnice platí. Je-li však $f(x) \neq g(x)$, je $h(x) = g(x) - f(x)$; ježto $f(x) + h(x) = f(x) + (g(x) - f(x))$ má smysl, je nutně $f(x)$ konečné číslo, takže vskutku opět $f(x) + (g(x) - f(x)) = g(x)$.

Podle I je $(\mathcal{L})\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = 0$, tedy (věta 174) i $(\mathcal{P})\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x = 0$. Podle II a podle věty 170 je pak

$$(\mathcal{P})\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x = (\mathcal{P})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + (\mathcal{P})\int_a^b h(x)\,\mathrm{d}x\,,$$

kde poslední člen je nula.

Tato věta nám umožňuje rozšířit definici 25, 26 takto:

Definice 27. *Budiž* $-\infty \leqq a \leqq b \leqq +\infty$; *budiž* f *definována skoro všude v* $\langle a, b\rangle$. *Sestrojme nějakou funkci* g, *která je v* $\langle a, b\rangle$ *ekvivalentní s* f *a je definována všude v* $\langle a, b\rangle$. *Potom definujeme* $(\mathcal{P})\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *jakožto* $(\mathcal{P})\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$, *jestliže tento (druhý) integrál existuje ve smyslu def. 25, 26.*

Věta 177 zaručuje, že nezáleží na tom, kterou funkci g, ekvivalentní s f, zvolím.

Poznámka 3. Je na první pohled patrno, že věty 167 až 177 platí též pro Perronovy integrály ve smyslu rozšířené definice 27. Přitom ve větách 174 až 177 lze vynechat požadavek, aby funkce f, g byly definovány všude v $\langle a, b\rangle$, ve větě 175 pak stačí požadovati $f(x) \geqq 0$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$ a větu 170 lze vysloviti takto: (17) platí, má-li pravá strana smysl a je-li $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$. Ve větě 171 stačí podle def. 26 předpokládati $-\infty \leqq a \leqq b \leqq +\infty$. Také závěrečný výsledek pozn. 7 v § 1 platí i ve smyslu rozšířené definice 27.

Poznámka 4. Perronův integrál ve smyslu def. 27 obsahuje i Newtonův i konvergentní Lebesgueův integrál.[10]) Ale obsahuje i zobecněný Lebesgueův integrál ve smyslu kap. VIII, § 1. Dokažme to. Předpokládejme, že pro funkci f existuje „vhodné rozdělení" $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_n = b$ intervalu $\langle a, b\rangle$. To znamená, že pro $i = 1, \ldots, n$ buďto existuje pro každé $a' \in (a_{i-1}, a_i)$ konvergentní Lebesgueův

[10]) Omezili jsme se na integrál přes interval. Ale mohli bychom pro libovolné měřitelné $M \subset \mathsf{E}_1$ definovati $\int_M f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{+\infty} \chi_M(x)\,f(x)\,\mathrm{d}x$, kde χ_M je charakteristická funkce množiny M.

(a tedy podle věty 174 i Perronův) integrál $\int\limits_{a_{i-1}}^{a'} f(x)\,dx$ nebo že existuje pro každé $a' \in (a_{i-1}, a_i)$ konvergentní Lebesgueův integrál $\int\limits_{a'}^{a_i} f(x)\,dx$. Nato se zjišťuje, zda existuje vlastní limita

$$L_i = \lim_{a' \to a_i -} \int\limits_{a_{i-1}}^{a'} f(x)\,dx\,,$$

po příp.

$$L_i = \lim_{a' \to a_{i-1} +} \int\limits_{a'}^{a_i} f(x)\,dx$$

a sečte se $L_1 + \ldots + L_n$. To je pak zobecněný Lebesgueův $\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Ale podle vět 171, 168 (ve smyslu pozn. 3) je tento integrál současně i Perronovým integrálem.

Poznámka 5. Perronův integrál je zobecněním Newtonova integrálu, definovaného primitivní funkcí (věta 166). Dá se tedy očekávati, že povede k zobecnění vztahu mezi určitým integrálem a primitivní funkcí, jak je dán na př. větou 39 nebo 40 v **J I**. Abychom získali lepší přehled, zavedeme tato tři označení:

Budiž $-\infty < a < b < +\infty$; budiž f (ne nutně konečná) definována všude v $\langle a, b\rangle$; budiž F funkce konečná a spojitá v $\langle a, b\rangle$.

Budeme říkati, že funkce F je v $\langle a, b\rangle$ primitivní funkcí k funkci f, jestliže pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ existuje konečná $F'(x) = f(x)$.[11] Takto jsme zavedli tento pojem již v § 1, pozn. 3.

Budeme říkati, že funkce F je v $\langle a, b\rangle$ téměř primitivní funkcí[12] k funkci f, jestliže pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ až na spočetnou množinu existuje konečná $F'(x) = f(x)$.

Budeme říkati, že funkce F je v $\langle a, b\rangle$ skoro primitivní funkcí[12] k funkci f, jestliže skoro všude v $\langle a, b\rangle$ existuje konečná $F'(x) = f(x)$. Podle definice Newtonova integrálu v § 1, pozn. 3 platí:

[11]) V bodě a stále míním derivaci zprava, v bodě b zleva.

[12]) Tyto názvy nejsou obvyklé. Stále předpokládáme spojitost a konečnost funkce F v $\langle a, b\rangle$.

Newtonův integrál $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ existuje tehdy a jen tehdy, jestliže k f existuje v $\langle a, b\rangle$ primitivní funkce F, načež

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \tag{45}$$

(vlevo Newtonův integrál). Pojem Perronova integrálu dovoluje dáti této rovnici obecnější smysl:

Věta 178. *Budiž* $-\infty < a < b < +\infty$.

I. Jestliže F je téměř primitivní funkcí k f v $\langle a, b\rangle$, potom existuje Perronův integrál v (45) *a rovnice platí (s Perronovým integrálem vlevo).*

II. Jestliže F je téměř primitivní funkcí k f v $\langle a, b\rangle$ a jestliže[13]) *konverguje Lebesgueův integrál v* (45), *potom platí* (45) *(s Lebesgueovým integrálem vlevo).*

Poznámka 6. V kap. V, § 2, pozn. 6 jsme si všimli funkce — označme ji F — která je spojitá v $\langle 0, 1\rangle$, má derivaci $F'(x) = 0$ skoro všude v $\langle 0, 1\rangle$ a přitom $F(0) = 0$, $F(1) = 1$. Položme $f(x) = 0$ pro všechna x, $a = 0$, $b = 1$: potom v (45) vlevo stojí 0, vpravo 1, ač F je skoro primitivní funkcí k f v $\langle 0, 1\rangle$. Tedy věta 178 se stane nesprávnou, nahradíme-li v ní slovo „téměř" slovem „skoro". V případě skoro primitivní funkce F musíme od F požadovati ještě další vlastnosti; stačí na př. absolutní spojitost, neboť věta 94 spolu s pozn. 1 v kap. V, § 5 praví: Jestliže funkce F je absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$ a je v $\langle a, b\rangle$ skoro primitivní funkcí k funkci f, potom platí (45), kde vlevo je konvergentní Lebesgueův integrál.

Všimněme si za druhé, že část II věty 178 zobecňuje větu 40 z **J I**: místo existence Riemannova integrálu se předpokládá pouze konvergence Lebesgueova integrálu; a těch bodů, ve kterých není $F'(x) = f(x) \neq \pm\infty$, nemusí být konečně mnoho — smí to být i nekonečná spočetná množina.

Důkaz věty 178. Tvrzení II plyne podle věty 174 ihned z tvrzení I.

---

[13]) Všimněte si rozdílu mezi „potom" a „jestliže" v I a II.

Dokazujme tedy tvrzení I. Existuje posloupnost čísel $x_1, x_2, \ldots$ ($x_i \neq x_k$ pro $i \neq k$) tak, že pro každé x množiny

$$A = \langle a, b\rangle \dot{-} (x_1, x_2, \ldots)$$

je $F'(x) = f(x)$, $f(x)$ konečné. Budiž $\varepsilon > 0$, položme $s_i = t_i = \varepsilon \,.\, 2^{-i-2}$,

$$\varphi(x) = \sum_{x_i \leqq x} s_i + \sum_{x_i < x} t_i$$

(na př. v prvním součtu jde o zobecněnou řadu; sčítá se přes všechna i, pro která je $x_i \leqq x$; kdo četl kap. IX, poznává zde funkci skoků). Zřejmě je $\varphi(x)$ neklesající v $\mathbf{E}_1$, $0 \leqq \varphi(x) \leqq \frac{1}{2}\varepsilon$. Tvrdím, že funkce

$$M(x) = F(x) + \varphi(x)\,, \quad m(x) = F(x) - \varphi(x)$$

dávají majorantu a minorantu k funkci f v $\langle a, b\rangle$. Je-li totiž $x \in A$, je $f(x)$ konečné, $\underline{D}\, M(x) = F'(x) + \underline{D}\, \varphi(x) \geqq f(x) > -\infty$. Je-li dále $a \leqq x_i < b$, je pro $h > 0$, $x_i + h \leqq \overline{b}$

$$M(x_i + h) = F(x_i + h) + \varphi(x_i + h) \geqq F(x_i + h) + \varphi(x_i) + t_i$$

a tedy (ježto F je spojitá) přechodem $h \to 0+$

(46) $$\lim_{x \to x_i +} M(x) \geqq M(x_i) + t_i > M(x_i)$$

a podobně pro $a < x_i \leqq b$ dostáváme:

$$M(x_i - h) \leqq F(x_i - h) + \varphi(x_i) - s_i \text{ pro } h > 0,\ x_i - h \geqq a$$

a tedy

(47) $$\lim_{x \to x_i -} M(x) \leqq M(x_i) - s_i\,.$$

Ale z (46), (47) plyne $M'(x_i) = +\infty$, tedy

$$+\infty = \underline{D}\, M(x_i) \geqq f(x_i),\ \underline{D}\, M(x_i) > -\infty\,.$$

Podobně se dokáže, že m je minorantou.

Dále je

(48) $$m(b) - m(a) \leqq F(b) - F(a) \leqq M(b) - M(a)\,,$$

(49) $$(M(b) - M(a)) - (m(b) - m(a)) = 2(\varphi(b) - \varphi(a)) \leqq \varepsilon\,.$$

Ježto ε bylo libovolné kladné číslo, plyne z (49), že existuje Perronův

$\int_a^b f(x)\,dx$ a je ovšem $m(b) - m(a) \leqq \int_a^b f(x)\,dx \leqq M(b) - M(a)$. Odtud, z (48) a z (49) plyne pak ihned

$$|F(b) - F(a) - \int_a^b f(x)\,dx| \leqq \varepsilon$$

(pro každé $\varepsilon > 0$).

Poznámka 7. Theorii Perronova integrálu by bylo možno dále vybudovati. Mimoto by bylo možno Perronův integrál definovati obecněji: nejenom v E_1, nýbrž obecně v E_r a nejenom jako zobecnění Lebesgueova integrálu, nýbrž jako zobecnění Lebesgue-Stieltjesova integrálu. Mimoto je také možno postupovati obráceně: napřed vybudovati theorii tohoto obecného „Perron-Stieltjesova integrálu", specialisací dojíti k Lebesgue-Stieltjesovu integrálu a z něho teprve nakonec vybudovati theorii míry (t. j. integrálu charakteristické funkce). Tento postup je vyložen originálním způsobem v práci Maříkově, citované v předmluvě. Podotýkám, že někteří autoři užívají k definici Perronova integrálu jen spojitých majorant a minorant, což však nemění — jak se lze poučiti na př. z knihy S. Saks, Theory of the Integral, kap. VIII, § 3 — smysl definice.