KAPITOLA XI*

RIEMANNŮV INTEGRÁL*

Riemannův integrál $\int\limits_M f(x)\,\mathrm{d}x$ neboli $\int\limits_M \ldots \int f(x_1, \ldots, x_r)\,\mathrm{d}x_1 \ldots \mathrm{d}x_r$ hrál důležitou úlohu v historickém vývoji. Podáme zde základy jeho theorie; speciální případ $r = 1$, $M = \langle a, b\rangle$ vede k Riemannovu integrálu $\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, který byl zaveden v **J I**, kap. II. Čtenáři se bude zdát, že naše definice je trochu jiná než definice, podaná pro uvedený speciální případ v **J I**. Ukážeme však v § 1, pozn. 4, že obě definice jsou v tomto případě ekvivalentní. Znak $\mu(M)$ bude v této kapitole stále značiti Lebesgueovu míru; je-li tedy I interval, je $\mu(I)$ prostě jeho objem (ve smyslu elementární geometrie).

§ 1. Definice a vztah k Lebesgueovu integrálu. Definujme napřed, co budeme v této kapitole rozuměti rozdělením prostoru $\mathbf{E}_r$. Buďte dána (pro $i = 1, 2, \ldots, r$; $j = 0, 1, -1, 2, -2, \ldots$) konečná reálná čísla $a_{i,j}$ tak, že pro každé i ($i = 1, 2, \ldots, r$) je

$$\ldots < a_{i,-2} < a_{i,-1} < a_{i,0} < a_{i,1} < a_{i,2} < \ldots,$$
$$\lim_{j\to\infty} a_{i,j} = +\infty, \quad \lim_{j\to\infty} a_{i,-j} = -\infty.$$

Říkáme pak, že čísla $a_{i,j}$ určují jisté rozdělení D prostoru $\mathbf{E}_r$; čísla $a_{i,j}$ jsou jeho „dělicí čísla“, a to — při daném i — čísla „i-tého řádku“. Jsou-li indexy složitější, píši $a(i, j)$ místo $a_{i,j}$. Každou nadrovinu $\underset{x}{\mathcal{E}}(x_i = a_{i,j})$ (při pevném i, j) nazývám dělicí nadrovinou, každý interval

$$I_D(j_1, \ldots, j_r) = \langle a(1, j_1 - 1), a(1, j_1)) \times \ldots \times \langle a(r, j_r - 1), a(r, j_r))$$

nazvu buňkou rozdělení D. Prostor $\mathbf{E}_r$ je disjunktním sjednocením všech buněk. Normou rozdělení D nazvu číslo

$$\|D\| = \sup_{\substack{i=1,2,\ldots,r\\ j=0,1,-1,2,-2,\ldots}} (a_{i,j} - a_{i,j-1}) \quad (0 < \|D\| \leqq +\infty).$$

Pro zjednodušení symboliky budu posloupnost r čísel $m_1, \dots, m_r$ někdy značit $\{m\}$ a psáti na př.

$$\sum_{\{m\}=\alpha}^{\beta} \varphi(\{m\}) \text{ místo } \sum_{m_1=\alpha}^{\beta} \dots \sum_{m_r=\alpha}^{\beta} \varphi(m_1, \dots, m_r)\,;$$

někdy budu místo $\varphi(\{m\})$ psáti jednodušeji $\varphi\{m\}$.

Rozdělení D' s dělicími čísly $b_{i,j}$ nazvu zjemněním rozdělení D, znak $D' \prec D$, jestliže každé dělicí číslo $a_{i,j}$ je rovno některému z čísel $b_{i,m}$ (téhož, t. j. i-tého řádku). Potom každá buňka rozdělení D je disjunktním sjednocením konečného počtu buněk rozdělení D', každá dělicí nadrovina rozdělení D je dělicí nadrovinou rozdělení D'. Vše je velmi názorné, dělejte si náčrtky v rovině (pro $r = 2$).

Budiž nyní dána reálná funkce f (r proměnných) s těmito vlastnostmi:

I. f je omezená v $\mathbf{E}_r$.

II. Existuje omezený interval I tak, že pro $x \in \mathbf{E}_r \dot{-} I$ je $f(x) = 0$.

Zvolme libovolné rozdělení D; znaky $v_D(\{m\})$, $V_D(\{m\})$ označme infimum a supremum funkce f v buňce $I_D\{m\}$ a sestrojme „horní" a „dolní" součet

$$S(D, f) = S(D) = \sum_{\{m\}=-\infty}^{+\infty} V_D(\{m\}) \,.\, \mu(I_D\{m\})\,, \tag{1}$$

$$s(D, f) = s(D) = \sum_{\{m\}=-\infty}^{+\infty} v_D(\{m\}) \,.\, \mu(I_D\{m\})\,. \tag{2}$$

Podle II je zde pouze konečný počet členů různých od nuly, takže podle I je $-\infty < s(D) \leqq S(D) < +\infty$. Nyní přijde několik úvah již dříve opětovně provedených (na př. kap. III, § 4, pozn. 4 nebo **J I**, kap. II, § 2). Je-li $D' \prec D$, je $s(D) \leqq s(D') \leqq S(D') \leqq S(D)$. Jsou-li D_1, D_2 libovolná rozdělení, existuje společné zjemnění D' (t. j. $D' \prec D_1$, $D' \prec D_2$), načež $s(D_1) \leqq s(D') \leqq S(D') \leqq S(D_2)$, t. j.

$$s(D_1) \leqq S(D_2)\,. \tag{3}$$

Budiž $\mathfrak{s} = \mathfrak{s}(f)$ rovno supremu všech $s(D, f)$ (pro všechna možná rozdělení D), budiž $\mathfrak{S} = \mathfrak{S}(f)$ infimum všech $S(D, f)$. Podle (3) plyne

$$-\infty < \mathfrak{s}(f) \leqq \mathfrak{S}(f) < +\infty\,. \tag{4}$$

Vidíte, že čísla $\mathfrak{s}, \mathfrak{S}$ značně připomínají definici dolního a horního integrálu z **J I**, kap. II, § 2, ale prozatím pro ně nezavádím zvláštního pojmenování.

Poznámka 1. Budiž dána posloupnost rozdělení $D_1^*, D_2^*, \ldots$, posloupnost kladných čísel $\delta_1, \delta_2, \ldots$ a funkce f s vlastnostmi I, II. Potom existuje posloupnost rozdělení $D_1 \succcurlyeq D_2 \succcurlyeq D_3 \succcurlyeq \ldots$ tak, že

$$
\begin{gathered}
D_n \preccurlyeq D_n^* , \quad \|D_n\| < \delta_n , \\
\lim_{n\to\infty} s(D_n, f) = \mathfrak{s}(f), \ \lim_{n\to\infty} S(D_n, f) = \mathfrak{S}(f) .
\end{gathered} \tag{5}
$$

Důkaz. Zřejmě lze volit $D_1 \preccurlyeq D_1^*$ tak, že $\|D_1\| < \delta_1$. Jsou-li $D_1, \ldots, D_{n-1}$ $(n > 1)$ již zvolena, najdu rozdělení Δ_1, Δ_2 tak, že $s(\Delta_1, f) > \mathfrak{s}(f) - \frac{1}{n}$, $S(\Delta_2, f) < \mathfrak{S}(f) + \frac{1}{n}$, a sestrojím ještě rozdělení Δ_3 tak, že $\|\Delta_3\| < \delta_n$. Za D_n vezmu potom nějaké společné zjemnění rozdělení $D_{n-1}, D_n^*, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$ (což je možno). Potom bude $D_n \preccurlyeq D_{n-1}$, $D_n \preccurlyeq D_n^*$, $\|D_n\| < \delta_n$ a konečně

$$
\mathfrak{s}(f) - \frac{1}{n} \leqq s(D_n, f) \leqq \mathfrak{s}(f) \leqq \mathfrak{S}(f) \leqq S(D_n, f) < \mathfrak{S}(f) + \frac{1}{n} .
$$

Čtenář tuší, že nás hlavně bude zajímati případ, kdy $\mathfrak{s}(f) = \mathfrak{S}(f)$.

Věta 155. *Nechť funkce f má vlastnosti I, II. Nechť $\mathfrak{s}(f) = \mathfrak{S}(f)$. Potom existuje Lebesgueův integrál $\int_{E_r} f(x)\,\mathrm{d}x$ a má hodnotu $\mathfrak{s}(f)$.*

Důkaz. Podle pozn. 1 existuje posloupnost rozdělení $D_1 \succcurlyeq D_2 \succcurlyeq \ldots$ tak, že

$$
\lim_{n\to\infty} s(D_n) = \mathfrak{s} = \mathfrak{S} = \lim_{n\to\infty} S(D_n) . \tag{6}
$$

Definujme funkce φ_n, ψ_n takto: Je-li $x \in I_{D_n}\{m\}$, klademe $\varphi_n(x) = v_{D_n}(\{m\})$, $\psi_n(x) = V_{D_n}(\{m\})$; t. j. $\varphi_n(x)$ je infimum a $\psi_n(x)$ supremum funkce f v oné buňce $I_{D_n}\{m\}$, v níž x leží. Současně leží x ovšem v nějaké „větší" buňce $I_{D_{n-1}}\{m'\} \supset I_{D_n}\{m\}$, tedy

$$
\varphi_{n-1}(x) \leqq \varphi_n(x) \leqq f(x) \leqq \psi_n(x) \leqq \psi_{n-1}(x) \ \text{pro} \ n > 1 . \tag{7}
$$

Zřejmě jsou φ_n, ψ_n jednoduché funkce,

$$
\int_{E_r} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = s(D_n, f), \ \int_{E_r} \psi_n(x)\,\mathrm{d}x = S(D_n, f) . \tag{8}
$$

Podle (7) existuje $\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = \varphi(x)$, $\lim_{n\to\infty} \psi_n(x) = \psi(x)$; podle věty 62[1]) a podle (6), (8) je pak

$$\text{(9)} \qquad \int_{E_r} \varphi(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int_{E_r} \varphi_n(x)\,\mathrm{d}x = \mathfrak{s}, \int_{E_r} \psi(x)\,\mathrm{d}x = \mathfrak{S} = \mathfrak{s}\,,$$

tedy $\int_{E_r} (\psi - \varphi)\,\mathrm{d}x = 0$; ale $\psi(x) - \varphi(x) \geqq 0$, tedy (věta 46) $\varphi(x) = \psi(x)$ skoro všude. Ale podle (7) je $\varphi(x) \leqq f(x) \leqq \psi(x)$ pro každé x, tedy $\varphi(x) = f(x)$ skoro všude a (9) dává tvrzení.

Dosavadní úvahy nám dávají možnost zavésti nový pojem „objemu" (neříkám „míry", neboť od míry jsme požadovali vlastnosti, které tento objem nemá, viz příkl. 1).

Definice 22. *Budiž $M \subset E_r$ omezená, takže charakteristická funkce χ_M má vlastnosti I, II. Potom čísla*

$$\text{(10)} \qquad m_e(M) = \mathfrak{S}(\chi_M)\,, \quad m_i(M) = \mathfrak{s}(\chi_M)$$

nazýváme vnějším a vnitřním Jordan-Peanovým objemem množiny M. Je-li $m_e(M) = m_i(M)$, nazýváme toto číslo objemem (Jordan-Peanovým), znak $m(M)$, a říkáme, že M má Jordan-Peanův objem.

Poznámka 2. Tyto pojmy se vztahují jen na omezené množiny. Názorný význam je jasný z horních a dolních součtů: $s(D, \chi_M)$ je součet objemů[2]) oněch buněk rozdělení D, jež leží v M (právě v těchto buňkách je totiž infimum funkce χ_M rovno 1), kdežto $S(D, \chi_M)$ je součet objemů[2]) oněch buněk, jež mají aspoň jeden bod společný s M (právě v těchto buňkách je totiž supremum funkce χ_M rovno 1). Za chvíli (pozn. 3 v § 2) uvidíme, že každý omezený interval má Jordan-Peanův objem, rovný jeho Lebesgueově míře, t. j. jeho „objemu" v obvyklém smyslu slova.

Příklad 1. Z pozn. 2 je vidět, že každá jednobodová množina v E_1 má Jordan-Peanův objem rovný nule, kdežto spočetná množina všech racionálních čísel intervalu (0, 1) má vnitřní objem 0, vnější 1 a nemá tedy vůbec Jordan-Peanův objem. Toto je nevýhoda Jordan-Peanova objemu proti Lebesgueově míře, hlavně při limitních přechodech.

---

[1]) Viz též pozn. 8 k této větě.

[2]) V obvyklém slova smyslu — buňky jsou intervaly.

Věta 156. *Nechť existuje $m(M)$. Potom existuje i Lebesgueova míra $\mu(M)$ a je $\mu(M) = m(M)$.*

Důkaz. Podle věty 155 existuje Lebesgueův integrál

$$\int_{\mathbf{E}_r} \chi_M(x)\,dx = \mathfrak{s}(\chi_M) = m(M)\,.$$

Ale levá strana je $\int_M dx = \mu(M)$.

Nyní definujme konečně Riemannův integrál.

Definice 23. *Nechť $M \subset \mathbf{E}_r$ má Jordan-Peanův objem (takže je omezená). Nechť funkce f je omezená v M. Doplňme — po případě pozměňme — definici funkce mimo množinu M tak, že pro $x \in \mathbf{E}_r \dot{-} M$ klademe $f(x) = 0$ (takže funkce f má vlastnosti I, II). Čísla $\mathfrak{s}(f)$, $\mathfrak{S}(f)$ nazýváme potom dolním a horním Riemannovým integrálem funkce f přes množinu M. Je-li $\mathfrak{s}(f) = \mathfrak{S}(f)$, nazýváme jejich společnou hodnotu Riemannovým integrálem funkce f přes M. Znak*

$$\int_M f(x)\,dx \text{ nebo } \int_M f(x_1, \ldots, x_r)\,dx_1 \ldots dx_r\,.$$

Je-li třeba, budeme Riemannův integrál odlišovati znakem $(\mathcal{R})$, Lebesgueův znakem $(\mathcal{L})$.

Věta 157. *Nechť existuje $(\mathcal{R}) \int_M f(x)\,dx$; potom existuje i $(\mathcal{L}) \int_M f(x)\,dx$ a oba integrály jsou si rovny.*

Důkaz. Pro funkci f (rovnou nule mimo M) je $\mathfrak{s}(f) = \mathfrak{S}(f)$, takže podle věty 155 je $(\mathcal{L}) \int_{\mathbf{E}_r} f(x)\,dx = \mathfrak{s}(f)$. Ale M má — podle definice 23 — Jordan-Peanův objem, tedy (věta 156) je M lebesgueovsky měřitelná a tedy $(\mathcal{L}) \int_M f(x)\,dx = (\mathcal{L}) \int_{\mathbf{E}_r} f(x)\,dx = \mathfrak{s}(f)$.

Věta 158. *Množina $M \subset \mathbf{E}_r$ má Jordan-Peanův objem tehdy a jen tehdy, existuje-li $(\mathcal{R}) \int_M dx$, načež $m(M) = (\mathcal{R}) \int_M dx$.*

Důkaz. Nemá-li M J.-P. objem, neexistuje uvedený integrál (definice 23). Má-li M J.-P. objem, je $m(M) = \mathfrak{s}(\chi_M) = \mathfrak{S}(\chi_M)$. Ježto $\chi_M(x) = 0$ pro $x \in \mathbf{E}_r \dot{-} M$, $\chi_M(x) = 1$ pro $x \in M$, znamená to podle definice 23, že $m(M) = (\mathcal{R}) \int_M 1\,.\,dx$.

P o z n á m k a 3. Věta 157 ukazuje: Existuje-li Riemannův integrál, rovná se Lebesgueovu a tedy na jeho studium a výpočet můžeme aplikovati všechny věty z theorie Lebesgueova integrálu. Zajímá nás tedy vlastně už jen otázka e x i s t e n c e Riemannova integrálu, která bude probrána v § 2. Podobně pro J.-P. objem.

P o z n á m k a 4. Dokážeme ještě, že v $\boldsymbol{E}_1$ dolní integrál funkce f přes interval $\langle a, b \rangle$, zavedený v def. 23, je totožný s dolním integrálem $\underline{\int_a^b} f(x)\,dx$, zavedeným v **J I**, kap. II, § 2. Budiž tedy f omezená v $\boldsymbol{E}_1$, rovná nule pro $x < a$ a pro $x > b$. Interval $\langle a, b \rangle$ má zřejmě Jordan-Peanův objem (viz ostatně § 2, pozn. 3). Máme ještě dokázati (viz definici 23), že

$$\mathfrak{s}(f) = \underline{\int_a^b} f(x)\,dx\,. \tag{11}$$

Jestliže v pozn. 1 volíme $\delta_n = \dfrac{1}{n}$ a za D_n^* nějaké rozdělení, obsahující dělicí čísla a, b, dostáváme, že existuje posloupnost rozdělení prostoru $\boldsymbol{E}_1$

$$D_1 \succ D_2 \succ D_3 \succ \ldots$$

tak, že $\|D_n\| < \dfrac{1}{n}$, že

$$\lim_{n \to \infty} s(D_n, f) = \mathfrak{s}(f) \tag{12}$$

a že D_n obsahuje dělicí čísla a, b. Tedy D_n vypadá takto:[3])

$$\ldots < a_{-2} < a_{-1} < a_0 = a < a_1 < \ldots < a_p = b < a_{p+1} < \ldots$$

Budiž $\sup\limits_{x \in \boldsymbol{E}_1} |f(x)| = K$; budiž v_i infimum funkce f v intervalu $\langle a_{i-1}, a_i \rangle$. Potom je

$$s(D_n, f) = \sum_{i=1}^{p} v_i(a_i - a_{i-1}) + v_{p+1}(a_{p+1} - a_p) \tag{13}$$

---

[3]) Čísla a_i, p závisí na n; tedy bychom měli psáti složitěji $a_i^{(n)}$, $p^{(n)}$; ale raději si kreslete náčrtek.

(ostatní členové jsou nuly), kde absolutní hodnota posledního členu je nejvýše $K \,.\, \|D_n\| \leqq \frac{K}{n}$.

Sestrojme vedle $s(D_n, f)$ ještě součet

$$T_n = \sum_{i=1}^{p} w_i(a_i - a_{i-1}) \,, \tag{14}$$

kde w_i je infimum funkce f v uzavřeném $\langle a_{i-1}, a_i \rangle$. Ježto $\lim \|D_n\| = 0$, je podle věty 20 v **J I**

$$\lim_{n\to\infty} T_n = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \,. \tag{15}$$

Máme tedy dokázati, že limity (12), (15) jsou stejné. Předně je $w_i \leqq v_i$ a tedy podle (14)

$$T_n \leqq s(D_n, f) + \frac{K}{n} \,,$$

tedy

$$\lim T_n \leqq \lim s(D_n, f) \,. \tag{16}$$

Za druhé budiž $\varepsilon > 0$; volme n_1 tak, že

$$s(D_{n_1}, f) > \mathfrak{s} - \tfrac{1}{3}\varepsilon \,, \quad \frac{K}{n_1} < \tfrac{1}{3}\varepsilon \,. \tag{17}$$

Vezmeme nyní nějaké $n > n_1$ a sestrojme T_n. Buďte

$$\ldots < b_{-1} < b_0 = a < b_1 < \ldots < b_q = b < b_{q+1} < \ldots$$

dělicí čísla D_{n_1}, takže

$$s(D_{n_1}, f) = \sum_{k=1}^{q} \tau_k(b_k - b_{k-1}) + \tau_{q+1}(b_{q+1} - b_q) \,, \tag{18}$$

kde τ_k je infimum f v $\langle b_{k-1}, b_k \rangle$. Podle (17) je tedy

$$\sum_{k=1}^{q} \tau_k(b_k - b_{k-1}) > \mathfrak{s} - \tfrac{1}{3}\varepsilon - \tfrac{1}{3}\varepsilon \,. \tag{19}$$

Naproti tomu T_n budiž dáno vzorcem (14). Každý interval $\langle b_{k-1}, b_k \rangle$ je rozdělen body a_i takovýmto způsobem: $b_{k-1} = a_x < a_{x+1} < \ldots < a_y = b_k$; je zřejmě $\langle a_{i-1}, a_i \rangle \subset \langle b_{k-1}, b_k \rangle$ pro $i = x + 1, x + 2, \ldots,$

$y - 1$ a tedy $w_i \geqq \tau_k$ (pro $i = y$ už není $\langle a_{y-1}, a_y\rangle \subset \langle b_{k-1}, b_k)$ — kreslete!). Tedy

$$\sum_{i=x+1}^{y} w_i(a_i - a_{i-1}) \geqq \sum_{i=x+1}^{y-1} \tau_k(a_i - a_{i-1}) + w_y(a_y - a_{y-1}) =$$

$$= \sum_{i=x+1}^{y} \tau_k(a_i - a_{i-1}) + (w_y - \tau_y)(a_y - a_{y-1}) \geqq \tau_k(b_k - b_{k-1}) - \frac{2K}{n}\,.$$

Sečtu-li tyto nerovnosti přes $k = 1, 2, \ldots, q$, dostanu podle (19) pro každé $n > n_1$

$$T_n = \sum_{i=1}^{p} w_i(a_i - a_{i-1}) \geqq \sum_{k=1}^{q} \tau_k(b_k - b_{k-1}) - \frac{2Kq}{n} > \mathfrak{s} - \tfrac{2}{3}\varepsilon - \frac{2Kq}{n}$$

(q je dáno rozdělením D_{n_1}, jež je pevně zvoleno). Pro všechna dostatečně velká n je $\dfrac{2Kq}{n} < \frac{1}{3}\varepsilon$, tedy $T_n > \mathfrak{s} - \varepsilon$, tedy $\lim T_n \geqq \mathfrak{s} = \lim s(D_n, f)$. Odtud a z (16) plyne tvrzení.

Podobně by se důkaz vedl pro horní integrál. Prosím za prominutí, že tato čistě formální úvaha trvala tak dlouho.

Poznámka 5. V 1. vydání **J I**, kap. IX, § 3, pozn. 2 jsem v $\mathbf{E}_1$ definoval „množiny o Jordanově míře nula“, psal jsem $J(M) = 0$. Dá se dokázati, že tato rovnice znamená totéž jako naše $m(M) = 0$. V 2. vydání je tato partie vynechána.

§ 2. Existenční věty. Poznámka 1. Budiž f konečná funkce, definovaná v množině M; budiž V její supremum, v její infimum v M. Rozdíl $V - v$ nazýváme *oscilací funkce f v množině M*; znak (jen na chvíli) $\omega(f; M)$. Zřejmě $\omega(f; M) \geqq 0$, je-li $M \neq \emptyset$; dále: je-li $N \subset M$, je $\omega(f; N) \leqq \omega(f; M)$.

Téměř všechny výsledky tohoto paragrafu budou důsledky této věty:

Pomocná věta. *Budiž f funkce v oboru $\mathbf{E}_r$, mající vlastnosti I, II. Budiž N množina všech bodů nespojitosti funkce f. Potom je $\mathfrak{S}(f) = \mathfrak{s}(f)$ tehdy a jen tehdy, je-li $\mu(N) = 0$ (μ je stále Lebesgueova míra).*

Důkaz. Existují konečná kladná čísla q, K tak, že předně $|f(x)| \leqq K$ pro všechna x a za druhé $f(x) = 0$ pro všechna x, která neleží v intervalu

$$I = \langle -q, q) \times \langle -q, q) \times \ldots \times \langle -q, q) . \tag{20}$$

Je-li D libovolné rozdělení, je $S(D, f) \geqq \mathfrak{S}(f)$, $s(D, f) \leqq \mathfrak{s}(f)$.

I. Nechť není $\mu(N) = 0$, t. j. nechť $\mu_e(N) > 0$. Pro $n = 1, 2, \ldots$ nechť N_n je množina oněch bodů x, jež mají tuto vlastnost: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje bod y tak, že[4])

$$\varrho(x, y) < \varepsilon , \quad |f(x) - f(y)| > \frac{1}{n} .$$

Zřejmě $N = \bigcup_{n=1}^{\infty} N_n$. Tedy existuje n tak, že $\mu_e(N_n) > 0$. Toto n podržme pevné a položme $\mu_e(N_n) = c$ ($0 < c$; zřejmě $c \leqq (2q)^r$, ježto $N_n \subset \bar{I}$). Vezměme libovolné rozdělení D a budiž P sjednocení všech jeho (spočetně mnoha) dělicích nadrovin, takže $\mu(P) = 0$ a tedy (pozn. 8 v kap. I, § 7)

$$\mu_e(N_n \dot{-} P) = c .$$

Buďte $L_1, L_2, \ldots, L_p$ ony buňky rozdělení D, které obsahují aspoň jeden bod množiny $N_n \dot{-} P$. Ježto tedy $N_n \dot{-} P \subset \bigcup_{i=1}^{p} L_i$, je podle věty 11 $\sum_{i=1}^{p} \mu(L_i) \geqq c$. Ježto každá buňka L_i obsahuje některý bod $x \in N_n \dot{-} P$ jako vnitřní bod[5]), je podle definice množiny N_n

$$\omega(f; L_i) > \frac{1}{n}$$

a tedy

$$S(D, f) - s(D, f) \geqq \sum_{i=1}^{p} \omega(f; L_i)\, \mu(L_i) > \frac{c}{n} .$$

Ježto tato nerovnost platí pro každé rozdělení D a ježto podle pozn. 1 v § 1 (viz (5)) můžeme D zvolit tak, aby rozdíly $S(D, f) - \mathfrak{S}(f)$, $s(D, f) - \mathfrak{s}(f)$ byly libovolně blízko nule, je též $\mathfrak{S}(f) - \mathfrak{s}(f) \geqq \frac{c}{n} > 0$.

---

[4]) Kladu $\varrho(x, y) = \max_{1 \leqq i \leqq r} |x_i - y_i|$.

[5]) Hraniční body buňky leží totiž v P.

II. Nechť $\mathfrak{S}(f) - \mathfrak{s}(f) = A > 0$, takže $S(D, f) - s(D, f) \geqq A$ pro každé rozdělení D. Sestrojme posloupnost rozdělení

$$D_1 \succ D_2 \succ D_3 \succ \dots$$

tak, že $\|D_n\| < \frac{1}{n}$ a že nadroviny $\underset{x}{\mathcal{E}}(x_i = q)$, $\underset{x}{\mathcal{E}}(x_i = -q)$ $(i = 1, 2, \dots, r)$ jsou dělicími nadrovinami každého D_n; tedy každá buňka každého D_n, mající společný bod s I, leží celá v I, takže lze psáti

$$(21) \qquad A \leqq S(D_n, f) - s(D_n, f) = \sum_{k=1}^{p_n} \omega(f; I_k^n)\, \mu(I_k^n)\,,$$

kde buňky I_k^n $(k = 1, \dots, p_n)$ vyplňují právě interval I (ostatní členy jsou rovny nule). Nechť — při daném n — probíhá k' ony z indexů $1, \dots, p_n$, pro něž je $\omega(f; I_{k'}^n) \leqq \frac{A}{2(2q)^r}$, a nechť k'' probíhá ostatní z indexů $1, \dots, p_n$. Položme $M_n = \bigcup_{k''} I_{k''}^n$. Jest $M_{n+1} \subset M_n$. Neboť je-li $x \in M_{n+1}$, existují buňky I_s^{n+1}, I_t^n tak, že $x \in I_s^{n+1} \subset I_t^n$ a přitom $\omega(f, I_s^{n+1}) > \frac{A}{2(2q)^r}$ a tedy i $\omega(f, I_t^n) > \frac{A}{2(2q)^r}$, takže $x \in M_n$.

Je zřejmě

$$\sum_{k'} \omega(f; I_{k'}^n)\, \mu(I_{k'}^n) \leqq (2q)^r \cdot \frac{A}{2 \cdot (2q)^r} = \tfrac{1}{2}A\,,$$

$$\sum_{k''} \omega(f; I_{k''}^n)\, \mu(I_{k''}^n) \leqq 2K \sum_{k''} \mu(I_{k''}^n) = 2K\mu(M_n)\,;$$

z (21) potom plyne $A \leqq \frac{1}{2}A + 2K\mu(M_n)$, t. j.

$$\mu(M_n) \geqq \frac{A}{4K} > 0 \text{ pro } n = 1, 2, \dots$$

Položme $M = \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n$; ježto $M_{n+1} \subset M_n \subset I$, $\mu(I) < +\infty$, je podle věty 24

$$\mu(M) = \lim \mu(M_n) \geqq \frac{A}{4K} > 0\,.$$

Uvažme však definici M_n a nerovnost $\|D_n\| < \frac{1}{n}$. Odtud plyne: Je-li $x \in M$, potom existují ke každému přirozenému n dva body

y_n, z_n tak, že $\varrho(x, y_n) < \frac{1}{n}$, $\varrho(x, z_n) < \frac{1}{n}$, ale $|f(y_n) - f(z_n)| >$ $> \frac{A}{2(2q)^r}$. Tedy f není spojitá v bodě x, tedy $M \subset N$, tedy není $\mu(N) = 0$.

Poznámka 2. Budiž $M \subset \mathbf{E}_r$; body z $\mathbf{E}_r$ se dělí na tři skupiny (viz **D II**, kap. VI, § 5, text před větou 127): vnitřní body množiny M, dále vnější body množiny M (t. j. vnitřní body množiny $\mathbf{E}_r \dot{-} M$) a konečně ostatní body prostoru $\mathbf{E}_r$; to jsou t. zv. hraniční body množiny M, které vytvořují t. zv. hranici $\mathbf{H}(M)$ množiny M; jsou to právě (viz kap. II, § 3, pozn. 2) všechny body nespojitosti funkce χ_M. Tvrdím: hranice

$$\mathbf{H}(M_1 \cup M_2),\ \mathbf{H}(M_1 M_2),\ \mathbf{H}(M_1 \dot{-} M_2) \tag{22}$$

jsou částmi množiny

$$\mathbf{H}(M_1) \cup \mathbf{H}(M_2)\,. \tag{23}$$

Důkaz. Vezměme bod x neležící v (23) a dokažme, že neleží v hranici žádné z množin $M_1 \cup M_2$, $M_1 M_2$, $M_1 \dot{-} M_2$ — tím bude důkaz hotov. Buďto je x vnějším bodem M_1, a potom je vnějším bodem $M_1 \dot{-} M_2$; nebo je vnitřním bodem M_2 a potom je vnějším bodem $M_1 \dot{-} M_2$; nebo je současně vnitřním bodem M_1 a vnějším bodem M_2 a potom je vnitřním bodem $M_1 \dot{-} M_2$. V žádném případě tedy není $x \in \mathbf{H}(M_1 \dot{-} M_2)$. Podobně (proveďte sami) pro $M_1 \cup M_2$, $M_1 M_2$.

Věta 159. *Množina $M \subset \mathbf{E}_r$ má J.-P. objem tehdy a jen tehdy, je-li omezená a je-li $\mu(\mathbf{H}(M)) = 0$.*

Důkaz. Podle definice 22 jde o to, zda $\mathfrak{S}(\chi_M) = \mathfrak{s}(\chi_M)$. A to platí podle pomocné věty tehdy a jen tehdy (při omezené M), má-li množina všech bodů nespojitosti funkce χ_M, t. j. množina $\mathbf{H}(M)$ (pozn. 2), míru nulovou.

Věta 160. *Mají-li M_1, M_2 J.-P. objem, mají i $M_1 \cup M_2$, $M_1 M_2$, $M_1 \dot{-} M_2$ J.-P. objem.*

Důkaz. Plyne z věty 159 a pozn. 2.

Poznámka 3. Budiž I omezený interval. Jeho hranice je obsažena v konečném počtu nadrovin, tedy $\mu(\mathbf{H}(I)) = 0$. Tedy existuje J.-P.

objem $m(I) = \mu(I)$ (viz větu 159 a 156), t. j. rovná se „objemu" ve smyslu elementární geometrie.

Věta 161. *Budiž $M \subset \mathbf{E}_r$ omezená, f reálná funkce, omezená v M. Potom*

$$(\mathcal{R}) \int_M f(x) \, dx$$

existuje tehdy a jen tehdy, platí-li toto:

I. Hranice množiny M má Lebesgueovu míru 0.

II. Množina všech vnitřních bodů množiny M, ve kterých f není spojitá, má Lebesgueovu míru 0.

Důkaz. Vraťme se k definici 23. Předně má M míti J.-P. objem, což podle věty 159 znamená totéž jako podmínka I. Budiž tedy tato podmínka splněna. Potom položme $f(x) = 0$ pro $x \in \mathbf{E}_r \dot{-} M$ a jde (podle def. 23) o to, zda je $\mathfrak{S}(f) = \mathfrak{s}(f)$, t. j. zda (pomocná věta) je $\mu(N) = 0$. Ale N se skládá ze všech bodů nespojitosti takto rozšířené funkce f; ty z nich, které leží na $\boldsymbol{H}(M)$, tvoří množinu míry nulové a jde jen ještě o to, zda také ty, které leží uvnitř M, tvoří množinu míry nulové (ve vnějších bodech množiny M je totiž takto rozšířená funkce zřejmě spojitá).

Věta 162. *Nechť funkce $f_1, f_2, f_3, \ldots$ mají Riemannův integrál přes obor M. Potom také funkce $g_1 = f_1 + f_2$, $g_2 = f_1 f_2$, $g_3 = |f_1|$, $g_4 = f_1 : f_2$ (jestliže funkce $1 : f_2$ je omezená v M), $g_5 = \mathrm{Max}\,(f_1, f_2)$, $g_6 = \mathrm{Min}\,(f_1, f_2)$, $g_7 = \lim_{n \to \infty} f_n$ (jestliže konvergence je stejnoměrná v M) mají Riemannův integrál přes obor M.*

Důkaz. g_1 až g_6 jsou omezené v M. Rovněž g_7, neboť pro jisté p je $|g_7(x) - f_p(x)| < 1$ pro všechna $x \in M$. A funkce $g_1, \ldots, g_7$ nemohou být nespojité jinde než v bodech nespojitosti některé z funkcí $f_1, f_2, \ldots$

Věta 163. *Nechť M_2 má J.-P. objem. Nechť $M_2 \subset M_1$ a nechť $(\mathcal{R}) \int_{M_1} f(x)\, dx$ existuje. Potom existuje i $(\mathcal{R}) \int_{M_2} f(x)\, dx$.*

Důkaz. Všechny body nespojitosti funkce f, ležící uvnitř M_2, leží též uvnitř M_1 a tedy tvoří množinu míry 0.