Integrální počet II

Kapitola IX. Doplňky k funkcím s variací konečnou

In: Vojtěch Jarník (author): Integrální počet II. (Czech). Praha: Academia, 1984.
pp. 364--371,372,373--381.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402056

KAPITOLA IX*

DOPLŇKY K FUNKCÍM S VARIACÍ KONEČNOU*

V celé této kapitole jde o reálné funkce jedné reálné proměnné. Slova míra, měřitelný, vnější míra, skoro všude a pod. se vztahují k Lebesgueově míře v E_1, kterou, bude-li třeba, označíme znakem μ. Budeme mluvit často o uzavřených omezených intervalech neboli — což je totéž (viz kap. I, § 1) o **kompaktních** intervalech. To jsou tedy všechny intervaly tvaru $\langle a, b\rangle$ (i jednobodové, tedy $-\infty < a \leqq \leqq b < +\infty$) a mimo to množina prázdná. Půjde nám hlavně o podrobnější rozbor struktury funkcí s konečnou variací. Ale napřed odvodíme v § 1 důležitou větu (Fubiniovu) o derivování nekonečných řad.

§ 1. Fubiniova věta o derivování nekonečných řad. Věta 117. *Pro každé přirozené n budiž funkce f_n neklesající a konečná v $\langle a, b\rangle$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. Řada*

$$(1) \qquad f_1(x) + f_2(x) + \ldots = s(x)$$

budiž konvergentní v $\langle a, b\rangle$; potom je skoro všude v $\langle a, b\rangle$

$$(2) \qquad 0 \leqq f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots = s'(x) < +\infty\,.$$

Důkaz. Odečteme-li od (1) člen po členu rovnici $f_1(a) + f_2(a) + + \ldots = s(a)$, vidíme, že smíme předpokládati $f_n(a) = 0$. Položme $s_n(x) = f_1(x) + \ldots + f_n(x)$, takže $\lim\limits_{n\to\infty} s_n(x) = s(x)$. Potom funkce $f_n(x)$, $s_n(x)$, $s_m(x) - s_n(x) = \sum\limits_{k=n+1}^{m} f_k(x)$ $(m > n)$, $s(x) - s_n(x) = = \lim\limits_{m\to\infty} (s_m(x) - s_n(x))$ jsou konečné, nezáporné a neklesající v $\langle a, b\rangle$[1]) a mají tedy pro všechna $x \in \langle a, b\rangle \dot{-} N$ (kde $\mu(N) = 0$) konečnou derivaci. Pro tato x je zřejmě $0 \leqq s_1'(x) \leqq s_2'(x) \leqq \ldots \leqq s'(x)$, takže existuje

$$(3) \qquad t(x) = f_1'(x) + f_2'(x) + \ldots = \lim_{n\to\infty} s_n'(x) \leqq s'(x) < +\infty\,.$$

[1]) a rovné nule v bodě a

Zvolme posloupnost přirozených čísel $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ tak, aby $s(b) - s_{n_k}(b) < 2^{-k}$ a tedy i $0 \leqq s(x) - s_{n_k}(x) < 2^{-k}$ pro všechna $x \in \langle a, b\rangle$. Potom řada neklesajících funkcí $\sum_{k=1}^{\infty} (s(x) - s_{n_k}(x))$ je konvergentní; užijeme-li na ni dokázané již formule (3), vidíme, že pro skoro všechna $x \in \langle a, b\rangle$ řada $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} (s(x) - s_{n_k}(x))$ konverguje a tedy její k-tý člen má pro $k \to \infty$ limitu 0, t. j. $\lim_{k\to\infty} s'_{n_k}(x) = s'(x)$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$, načež z (3) plyne $t(x) = s'(x)$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$, což je (2).

Cvičení

V těchto cvičeních proberu jednu důležitou větu. Budiž $M \subset \mathsf{E}_1$, $x \in \mathsf{E}_1$. Sestrojme podíl (pro $-\infty < y < z + \infty$)

$$\frac{\mu_e(\langle y, z\rangle . M)}{z - y} .$$

Jestliže tento podíl má limitu A pro $[y, z] \to [x, x]$, $x \in \langle y, z\rangle$, říkáme, že M má v bodě x hustotu A; píšeme $A = h_M(x)$.

1. Budiž M měřitelná. Potom je

$$h_M(x) = 1 \text{ pro skoro všechna } x \in M , \tag{4}$$

$$h_M(x) = 0 \text{ pro skoro všechna } x \in \mathsf{E}_1 \dot{-} M . \tag{5}$$

(5) plyne snadno z (4). Smíme předpokládat, že M je omezená, na př. $M \subset (a, b)$, a vyšetřovati jen $x \in (a, b)$.[2]) Pro $a \leqq x \leqq b$ položme $f_M(x) = \mu(M . \langle a, x\rangle)$, takže $h_M(x)$ znamená pro $a < x < b$ totéž jako $f'_M(x)$. Podle věty 19 volme otevřené množiny $(a, b) = G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset M$ tak, že $\lim \mu(G_n \dot{-} M) = 0$, načež snadno $\lim f_{G_n}(x) = f_M(x)$. Funkce

$$f_{G_p \dot{-} G_{p+1}}(x) = f_{G_p}(x) - f_{G_{p+1}}(x)$$

jsou neklesající a mají součet $f_{G_1} - f_M$. Tedy skoro všude v (a, b) je

$$\sum_{p=1}^{\infty} (f'_{G_p}(x) - f'_{G_{p+1}}(x)) = f'_{G_1}(x) - f'_M(x) .$$

Ale pro každé $x \in M$ je zřejmě $f'_{G_p}(x) = 1$.

2. Vzorec (4) se dá zobecnit i na neměřitelná M (avšak (5) nikoliv!). Návod: Viz kap. I, § 9, cvič. 3.

---

[2]) Pokud se totiž omezíme na tato x, lze bráti $M . (a, b)$ místo M.

§ 2. Funkce absolutně spojité, funkce singulární a funkce skoků.

Poznámka 1. Pro každou funkci f, konečnou v omezeném intervalu $\langle a, b \rangle$, jsme v **D II**, kap. V, § 9 zavedli tři nezáporná čísla, t. zv. totální, positivní a negativní variaci funkce f v intervalu $\langle a, b \rangle$:

$$V(\langle a, b \rangle; f), \quad P(\langle a, b \rangle; f), \quad N(\langle a, b \rangle; f). \tag{6}$$

Vždy je $V = P + N$; pro $b = a$ je $V = P = N = 0$. Je-li $a = a_0 \leqq \leqq a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_p = b$, je

$$V(\langle a, b \rangle; f) = \sum_{i=1}^{p} V(\langle a_{i-1}, a_i \rangle; f); \tag{7}$$

podobně pro P, N. Jsou-li čísla (6) konečná (stačí ovšem, když první z nich je konečné), říkáme, že f má v. k. (= variaci konečnou) v $\langle a, b \rangle$. Píšeme-li v tomto případě

$$v(x) = V(\langle a, x \rangle; f), \quad p(x) = P(\langle a, x \rangle; f), \quad n(x) = N(\langle a, x) \rangle; f), \tag{8}$$

je $v(a) = p(a) = n(a) = 0$ a pro $a \leqq x \leqq b$ je

$$v(x) = p(x) + n(x), \quad f(x) - f(a) = p(x) - n(x), \tag{9}$$

tedy jednak

$$\begin{aligned} p(x) &= \tfrac{1}{2}(f(x) - f(a) + v(x)), \\ n(x) &= \tfrac{1}{2}(- f(x) + f(a) + v(x)), \end{aligned} \tag{10}$$

jednak pro $a \leqq x \leqq y \leqq b$

$$\begin{aligned} v(y) - v(x) &= (p(y) - p(x)) + (n(y) - n(x)), \\ f(y) - f(x) &= (p(y) - p(x)) - (n(y) - n(x)); \end{aligned} \tag{11}$$

přitom $v(y) - v(x) = V(\langle x, y \rangle; f)$ a podobně pro p, n, takže funkce v, p, n jsou neklesající v $\langle a, b \rangle$.

Poznámka 2. Z definice výrazů V, P, N v **D II**, kap. V, § 9, pozn. 2 je na první pohled patrno, že pro $c \in \mathbf{E}_1$ je

$$V(\langle a, b \rangle; cg) = |c| \, V(\langle a, b \rangle; g), \tag{12}$$

$$V(\langle a, b \rangle; f_1 + f_2) \leqq V(\langle a, b \rangle; f_1) + V(\langle a, b \rangle; f_2). \tag{13}$$

Odtud plyne

$$V(\langle a, b \rangle; f + g) \geqq V(\langle a, b \rangle; f) - V(\langle a, b \rangle; g), \tag{14}$$

má-li pravá strana smysl. Stačí totiž položiti v (13) $f_1 = f + g$, $f_2 = -g$, tedy $f_1 + f_2 = f$ a užíti ještě (12) pro $c = -1$.

Věta 118. *Nechť f má v. k. v $\langle a, b\rangle$; definujme v, p, n rovnicemi* (8). *Potom je skoro všude v $\langle a, b\rangle$*

$$v'(x) = |f'(x)|\,, \quad p'(x) = (f'(x))^+\,, \quad n'(x) = (f'(x))^-\,. \tag{15}$$

Důkaz. Stačí dokázati první vzorec; ostatní dva plynou pak z (10).

Každému přirozenému n přiřaďme rozdělení

$$a = x_{0,n} < x_{1,n} < x_{2,n} < \ldots < x_{p_n,n} = b$$

tak, že

$$v(b) \geqq \sum_{i=1}^{p_n} |f(x_{i,n}) - f(x_{i-1,n})| > v(b) - 2^{-n}\,. \tag{16}$$

Definujme nyní funkci f_n (pro $n = 1, 2, \ldots$) v $\langle a, b\rangle$ takto:

1. $f_n(a) = 0$;

2. je-li $f_n(x)$ definováno pro $a \leqq x \leqq x_{k-1,n}$ $(0 < k \leqq p_n)$, potom pro $x_{k-1,n} \leqq x \leqq x_{k,n}$ položme

$$f_n(x) = \pm\,(f(x) - f(x_{k-1,n})) + f_n(x_{k-1,n})\,,$$

kde volím znamení $+$ pro $f(x_{k,n}) - f(x_{k-1,n}) \geqq 0$, znamení $-$ pro $f(x_{k,n}) - f(x_{k-1,n}) < 0$. Lze tedy (16) přepsati do tvaru

$$v(b) \geqq \sum_{i=1}^{p_n} (f_n(x_{i,n}) - f_n(x_{i-1,n})) = f_n(b) > v(b) - 2^{-n}\,. \tag{17}$$

Jest ovšem $v(a) = f_n(a) = 0$ a dále je $v(x) - f_n(x)$ neklesající v každém intervalu $\langle x_{k-1,n}, x_{k,n}\rangle$ a tedy i v $\langle a, b\rangle$, ježto pro $x_{k-1,n} \leqq$ $\leqq x \leqq y \leqq x_{k,n}$ je

$$v(y) - v(x) \geqq |f(y) - f(x)| = |f_n(y) - f_n(x)| \geqq f_n(y) - f_n(x)\,.$$

Podle (17) je tedy všude v $\langle a, b\rangle$

$$0 \leqq v(x) - f_n(x) < 2^{-n}\,,$$

takže $s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (v(x) - f_n(x))$ je konvergentní řada neklesajících funkcí; Fubiniova věta 117 dává tedy skoro všude v $\langle a, b\rangle$

$$s'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} (v'(x) - f_n'(x)) < +\infty\,.$$

Tedy je skoro všude v $\langle a, b\rangle$ $v'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$ (n-tý člen konvergentní řady má limitu 0). Ale $v' \geqq 0$, tedy $v'(x) = |v'(x)| = \lim |f'_n(x)|$. Konečně $f'_n(x) = \pm f'(x)$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$. Tedy $v'(x) = |f'(x)|$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$.

Poznámka 3. Víme z **D II**, kap. V, § 9, co znamenají slova „funkce absolutně spojitá (zkratka a. s.) v intervalu $\langle a, b\rangle$". Zavedeme ještě dva další pojmy.

Definice 15. *Nechť f má v. k. v $\langle a, b\rangle$ a nechť $f'(x) = 0$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$. Potom říkáme, že funkce f je singulární v $\langle a, b\rangle$.*

Poznámka 4. Funkce konstantní v $\langle a, b\rangle$ je současně a. s. i singulární v $\langle a, b\rangle$. Naopak, je-li funkce f současně a. s. i singulární v $\langle a, b\rangle$, je v $\langle a, b\rangle$ konstantní; neboť $f' = 0$ skoro všude a výsledek plyne z věty 85. Nekonstantní spojitou singulární funkcí v $\langle 0, 1\rangle$ je na př. funkce z **D II**, kap. V, § 9, cvič. 4; neboť její derivace je rovna nule všude mimo Cantorovo diskontinuum, jež podle příkl. 1 v kap. I, § 8 má míru 0.

Poznámka 5. Budeme psáti $f(x+) = \lim_{z\to x+} f(z)$, $f(x-) = \lim_{z\to x-} f(z)$, pokud tyto limity existují. Čísla $f(x+) - f(x)$, $f(x) - f(x-)$ nazýváme skoky funkce f v bodě x zprava a zleva.

Definice 16. *Budiž $-\infty < a \leqq b < +\infty$. Budiž dále dána spočetná množina $X = (x_1, x_2, \ldots)$ ($x_i \neq x_k$ pro $i \neq k$) bodů z $\langle a, b\rangle$ a dvě posloupnosti konečných reálných čísel s_i, t_i ($i = 1, 2, \ldots$) tak, že zobecněné řady*

(18) $$\sum_{a<x_i\leqq b} s_i, \quad \sum_{a\leqq x_i<b} t_i$$

konvergují absolutně. Potom o funkci

(19) $$f(x) = \sum_{a<x_i\leqq x} s_i + \sum_{a\leqq x_i<x} t_i + c$$

(kde c je jakákoliv konstanta) říkáme, že je funkcí skoků v $\langle a, b\rangle$.[3])

[3]) Je-li (pro některé i) $x_i = a$ (po příp. $x_i = b$), nevyskytuje se číslo s_i (po příp. t_i) v (18) ani v (19). Proto nevadí, není-li toto číslo s_i (po příp. t_i) vůbec definováno. Z (19) plyne zřejmě $f(a) = c$. Množina X může ovšem býti konečná, ba i prázdná.

Poznámka 6. Pro $a \leqq y \leqq x \leqq b$ plyne z (19)

$$f(x) - f(y) = \sum_{y < x_i \leqq x} s_i + \sum_{y \leqq x_i < x} t_i ; \tag{20}$$

naopak z (20) plyne (19) (dosadím $y = a$).

Poznámka 7. V bodě x_i má funkce (19) skok zprava t_i (pro $a \leqq \leqq x_i < b$) a skok zleva s_i (pro $a < x_i \leqq b$), v ostatních bodech $x \in \langle a, b \rangle$ je f spojitá.[4]) Důkaz. Budiž $a \leqq x < b$. Je-li $x = x_k$, položme $\tau = t_k$; je-li x různé ode všech x_i, položme $\tau = 0$. Je-li $x < < x + h < b$, máme z (20)

$$f(x + h) - f(x) = \tau + \sum_{x < x_i \leqq x + h} s_i + \sum_{x < x_i < x + h} t_i .$$

Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že $\sum_{i > n_0} (|s_i| + |t_i|) < \varepsilon$. Nato existuje $\delta > 0$ tak, že žádný z bodů $x_1, x_2, \ldots, x_{n_0}$ neleží v $(x, x + \delta)$.[5]) Pro $0 < h < \delta$ je pak zřejmě

$$|f(x + h) - f(x) - \tau| < \varepsilon, \text{ t. j. } f(x +) = f(x) + \tau .$$

Podobně zleva.

Odtud plyne: Vynecháme-li z bodů x_i ty „zbytečné" body, kde $s_i = t_i = 0$,[6]) jsou x_i, s_i, t_i funkcí f jednoznačně stanoveny: x_i jsou body nespojitosti, s_i, t_i jsou skoky funkce f v bodě x_i.

Poznámka 8. Jsou-li f_1, f_2 v $\langle a, b \rangle$ funkce skoků, c_1, c_2 konstanty (konečné), je i $c_1 f_1 + c_2 f_2$ funkcí skoků v $\langle a, b \rangle$. To je zřejmé. Za druhé: Je-li f funkcí skoků v $\langle a, b \rangle$ a je-li $a \leqq c \leqq d \leqq b$, je též f funkcí skoků v $\langle c, d \rangle$. To plyne z (20), píšete-li tam $y = c$. Obdobné dva výroky platí zřejmě i pro funkce singulární (rozuměj stále: v $\langle a, b \rangle$), pro funkce absolutně spojité, pro funkce s variací konečnou, pro konečné funkce spojité. Na př.: funkce singulární v $\langle a, b \rangle$ je též singulární v $\langle c, d \rangle$, jestliže $a \leqq c \leqq d \leqq b$ atd.

Věta 119. *Pro funkci skoků* (19) *je pro* $a \leqq x \leqq b$

$$v(x) = V(\langle a, x \rangle; f) = \sum_{a < x_i \leqq x} |s_i| + \sum_{a \leqq x_i < x} |t_i| , \tag{21}$$

---

[4]) V bodě a (po příp. b) míním spojitost zprava (zleva).

[5]) Stačí volit δ menší než nejmenší ze všech vzdáleností $|x - x_i|$, kde x_i probíhá ona z čísel $x_1, \ldots, x_{n_0}$, jež jsou různá od x.

[6]) Pro $x_i = a$ stačí $t_i = 0$, pro $x_i = b$ stačí $s_i = 0$.

takže f má v. k. v $\langle a, b\rangle$. Obdobně

$$p(x) = P(\langle a, x\rangle; f) = \sum_{a<x_i\leq x} s_i^+ + \sum_{a\leq x_i<x} t_i^+ , \tag{22}$$

$$n(x) = N(\langle a, x\rangle; f) = \sum_{a<x_i\leq x} s_i^- + \sum_{a\leq x_i<x} t_i^- . \tag{23}$$

Tedy také funkce v, p, n (užil jsem označení (8)) jsou funkce skoků v $\langle a, b\rangle$.

Důkaz stačí provésti pro $v(x)$. Pro $p(x)$, $n(x)$ vyplyne potom z (10). Budiž tedy $x \in \langle a, b\rangle$. Pravou stranu v (21) označme S. Budiž $a = a_0 \leq a_1 \leq \ldots \leq a_p = x$. Potom z (20) plyne

$$|f(a_j) - f(a_{j-1})| \leq \sum_{a_{j-1}<x_i\leq a_j} |s_i| + \sum_{a_{j-1}\leq x_i<a_j} |t_i|$$

a sečtením

$$\sum_{j=1}^{p} |f(a_j) - f(a_{j-1})| \leq S ,$$

takže (přechodem k supremu)

$$V(\langle a, x\rangle; f) \leq S . \tag{24}$$

Budiž za druhé $\varepsilon > 0$. Zvolme n tak velké, že

$$\sum_{\substack{i=1\\ a<x_i\leq x}}^{n} |s_i| + \sum_{\substack{i=1\\ a\leq x_i<x}}^{n} |t_i| > S - \tfrac{1}{2}\varepsilon .$$

Body $x_1, \ldots, x_n$ si mysleme tak přečíslovány, že $a \leq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leq x$. Zvolme body y_i, z_i tak blízko x_i, že je[7])

$$a < y_1 < x_1 < z_1 < y_2 < x_2 < z_2 < \ldots < y_n < x_n < z_n < b$$

a že

$$|f(y_i) - f(x_i)| > |s_i| - \frac{\varepsilon}{4n}, \quad |f(z_i) - f(x_i)| > |t_i| - \frac{\varepsilon}{4n} . \tag{25}$$

Potom zřejmě

$$\sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - f(y_i)| + \sum_{i=1}^{n} |f(z_i) - f(x_i)| > S - \varepsilon ,$$

[7]) Odchylka: V případě $x_1 = a$ volíme $y_1 = a = x_1$ a klademe místo s_1 v (25) nulu; v případě $x_n = b$ volíme $z_n = b = x_n$ a klademe místo t_n v (25) nulu.

tedy tím spíše $V(\langle a, x\rangle; f) > S - \varepsilon$ pro každé $\varepsilon > 0$. Odtud a z (24) plyne (21).

Věta 120. *Každá funkce skoků v $\langle a, b\rangle$ je singulární v $\langle a, b\rangle$.*

Důkaz. Budiž f funkce (19), budiž $v(x)$ funkce (21). Odtud zřejmě $\left|\frac{f(y) - f(z)}{y - z}\right| \leqq \left|\frac{v(y) - v(z)}{y - z}\right|$; je-li tedy $v'(x) = 0$, je též $f'(x) = 0$. Stačí tedy dokázati, že $v'(x) = 0$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$. Položme[8]) $v_i(x) = 0$ pro $a \leqq x < x_i$, $v_i(x_i) = |s_i|$, $v_i(x) = |t_i| + |s_i|$ pro $x_i < x \leqq b$. Zřejmě je (viz (21))

$$v(x) = \sum_{a \leqq x_i \leqq b} v_i(x) ;$$

vpravo je absolutně konvergentní řada (viz (18)), kterou můžeme srovnati, jak chceme. Dále jsou $v_i(x)$ v $\langle a, b\rangle$ neklesající a $v_i'(x) = 0$ až na bod x_i v (a, b). Věta 117 tedy dává skoro všude v $\langle a, b\rangle$ rovnici

$$v'(x) = \sum_{a \leqq x_i \leqq b} v_i'(x) = 0 .$$

Poznámka 9. Nechť f je a. s. v $\langle a, b\rangle$. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že platí implikace

$$\begin{aligned}&\left(a \leqq a_1 \leqq b_1 \leqq a_2 \leqq b_2 \leqq \ldots \leqq a_m \leqq b_m \leqq b, \sum_{k=1}^{m} (b_k - a_k) < \delta\right) \Rightarrow \\ &\qquad \Rightarrow \sum_{k=1}^{m} |f(b_k) - f(a_k)| \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon .\end{aligned} \tag{26}$$

Tvrdím, že potom platí toto: Je-li splněna premisa z (26), platí dokonce též (při označení (8))

$$\sum_{k=1}^{m} V(\langle a_k, b_k\rangle; f) = \sum_{k=1}^{m} (v(b_k) - v(a_k)) \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon < \varepsilon . \tag{27}$$

Důkaz. Nechť čísla $a_1, \ldots, a_m, b_1, \ldots, b_m$ splňují premisu z (26). Rozdělme každý z intervalů $\langle a_k, b_k\rangle$ dělicími body

$$a_k = x_{0,k} \leqq x_{1,k} \leqq \ldots \leqq x_{p_k,k} = b_k$$

na intervaly $\langle x_{i-1,k}\, x_{i,k}\rangle$ $(i = 1, 2, \ldots, p_k)$. Potom všechny tyto inter-

---

[8]) Jestliže $x_i = a$, píši místo s_i nulu; jestliže $x_i = b$, píši místo t_i nulu.

valy dohromady mají součet délek menší než δ; podle implikace (26) je tedy též

$$\sum_{k=1}^{m} \mathfrak{V}_k \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon\,, \quad \text{kde} \quad \mathfrak{V}_k = \sum_{i=1}^{p_k} |f(x_{i,k}) - f(x_{i-1,k})|\,.$$

Přechodem k supremu (pro všechny možné volby bodů $x_{i,k}$) dostaneme (27). Zároveň je patrno, že v je také a. s. v $\langle a, b\rangle$.

Věta 121. *Nechť f má v. k. v $\langle a, b\rangle$; definujme v, p, n vzorci* (8). *Potom platí:*

1. Je-li f spojitá v $\langle a, b\rangle$, jsou v, p, n spojité v $\langle a, b\rangle$.
2. Je-li f singulární v $\langle a, b\rangle$, jsou v, p, n singulární v $\langle a, b\rangle$.
3. Je-li f funkce skoků v $\langle a, b\rangle$, jsou v, p, n funkce skoků v $\langle a, b\rangle$.
4. Je-li f a. s. v $\langle a, b\rangle$, jsou i v, p, n a. s. v $\langle a, b\rangle$ a platí

$$v(x) = \int_a^x |f'(t)|\,\mathrm{d}t, \quad p(x) = \int_a^x (f'(t))^+\,\mathrm{d}t, \quad n(x) = \int_a^x (f'(t))^-\,\mathrm{d}t\,. \tag{28}$$

Důkaz. K bodu 1 viz větu 93 v **D II**. K bodu 2 viz větu 118, vzorce (15): je-li $f' = 0$ skoro všude v $\langle a, b\rangle$, platí to i o v', p', n'. K bodu 3 viz větu 119. K bodu 4: v je a. s. v $\langle a, b\rangle$ podle pozn. 9. Pro p, n to plyne z (10). Ze vzorců (15), z absolutní spojitosti funkcí v, p, n a z věty 94 plyne (28) (uvažte, že $v(a) = p(a) = n(a) = 0$).

Věta 122. *Nechť $\varphi \in$ **L**(a, b) $(-\infty < a < b < +\infty)$; položme $f(x) = \int_a^x \varphi(t)\,\mathrm{d}t$. Potom*

$$\begin{aligned} V(\langle a, b\rangle; f) &= \int_a^b |\varphi(t)|\,\mathrm{d}t\,, \\ P(\langle a, b\rangle; f) &= \int_a^b \varphi^+(t)\,\mathrm{d}t\,, \\ N(\langle a, b\rangle; f) &= \int_a^b \varphi^-(t)\,\mathrm{d}t\,. \end{aligned} \tag{29}$$

Důkaz. f je absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$ a skoro všude v $\langle a, b\rangle$ je $f' = \varphi$; nato se užije vzorců (28) pro $x = b$.

Poznámka 10. Důležitá je otázka, kdy v (13) platí znamení rovnosti. Zaveďme toto pojmenování: Intervaly $I_1, \ldots, I_n$ $(I_k = \langle \alpha_k, \beta_k\rangle)$

nazvu *skoro disjunktními*, jestliže je lze přerovnati tak, že $\alpha_1 \leqq \beta_1 \leqq \leqq \alpha_2 \leqq \beta_2 \leqq \ldots \leqq \alpha_n \leqq \beta_n$.

Pomocná věta. *Nechť f, g mají v. k. v $\langle a, b\rangle$. Nechť ke každému $\varepsilon > 0$ existují skoro disjunktní intervaly $I_k = \langle a_k, b_k\rangle \subset \langle a, b\rangle$ $(k = 1, \ldots, n)$ tak, že*

$$\sum_{k=1}^{n} V(I_k; f) > V(\langle a, b\rangle; f) - \varepsilon\,, \tag{30}$$

$$\sum_{k=1}^{n} V(I_k; g) < \varepsilon\,. \tag{31}$$

Potom

$$V(\langle a, b\rangle; f + g) = V(\langle a, b\rangle; f) + V(\langle a, b\rangle; g)\,. \tag{32}$$

Důkaz. Po vhodném přečíslování je $a \leqq a_1 \leqq b_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq \leqq a_n \leqq b_n \leqq b$. Položme ještě $b_0 = a$, $a_{n+1} = b$, $L_k = \langle b_k, a_{k+1}\rangle$ $(k = 0, 1, \ldots, n$; kreslete náčrtek!). Potom zřejmě

$$V(\langle a, b\rangle; f) = \sum_{k=1}^{n} V(I_k; f) + \sum_{k=0}^{n} V(L_k; f)\,,$$

načež z (30) plyne

$$\sum_{k=0}^{n} V(L_k; f) < \varepsilon \tag{33}$$

a obdobně z (31)

$$\sum_{k=0}^{n} V(L_k; g) > V(\langle a, b\rangle; g) - \varepsilon\,. \tag{34}$$

Ale podle (14) máme

$$\begin{aligned} V(\langle a, b\rangle; f + g) &= \sum_{k=1}^{n} V(I_k; f + g) + \sum_{k=0}^{n} V(L_k; f + g) \geqq \\ &\geqq \sum_{k=1}^{n} V(I_k; f) - \sum_{k=1}^{n} V(I_k; g) + \sum_{k=0}^{n} V(L_k; g) - \sum_{k=0}^{n} V(L_k; f) > \\ &> V(\langle a, b\rangle; f) + V(\langle a, b\rangle; g) - 4\varepsilon \end{aligned}$$

podle (30), (31), (33), (34). Odtud a z (13) plyne (32).

Věta 123. *Budiž f funkce skoků v $\langle a, b\rangle$; budiž g funkce spojitá s v. k. v $\langle a, b\rangle$. Potom platí* (32).

Důkaz. Podle věty 93 v **D II** je funkce $v_g(x) = V(\langle a, x\rangle; g)$ spojitá v $\langle a, b\rangle$. Nechť f je dáno vzorcem (19), takže platí (21). Budiž $\varepsilon > 0$. Zvolme předně n tak, že

$$\sum_{i=1}^{n} (|s_i| + |t_i|) > V(\langle a, b\rangle; f) - \tfrac{1}{2}\varepsilon ;$$

po vhodném očíslování bude

$$a \leqq x_1 < x_2 < \ldots < x_n \leqq b .$$

Zvolme y_i, z_i tak blízko x_i, aby bylo[9])

$$a < y_1 < x_1 < z_1 < y_2 < x_2 < z_2 < \ldots < y_n < x_n < z_n < b ,$$

$$|f(x_i) - f(y_i)| > |s_i| - \frac{\varepsilon}{4n}, \; |f(z_i) - f(x_i)| > |t_i| - \frac{\varepsilon}{4n},$$

$$v_g(z_i) - v_g(y_i) < \frac{\varepsilon}{n} .$$

Potom je

$$\sum_{i=1}^{n} V(\langle y_i, z_i\rangle; g) < \varepsilon ,$$

$$\sum_{i=1}^{n} V(\langle y_i, z_i\rangle; f) \geqq \sum_{i=1}^{n} (|f(x_i) - f(y_i)| + |f(z_i) - f(x_i)|) >$$

$$> \sum_{i=1}^{n} (|s_i| + |t_i|) - \tfrac{1}{2}\varepsilon > V(\langle a, b\rangle; f) - \varepsilon .$$

Z pomocné věty plyne pak tvrzení.

Věta 124. *Nechť g je a. s. v $\langle a, b\rangle$ a f je singulární v $\langle a, b\rangle$. Potom platí* (32).

Důkaz. Budiž $\varepsilon > 0$. Podle věty 121 je také funkce $v(x) = V(\langle a, x\rangle; g)$ abs. spoj. v $\langle a, b\rangle$. Existuje tedy $\delta > 0$ tak, že

$$(a \leqq \alpha_1 \leqq \beta_1 \leqq \alpha_2 \leqq \beta_2 \leqq \ldots \leqq \alpha_p \leqq \beta_p \leqq b, \; \sum_{k=1}^{p} (\beta_k - \alpha_k) < \delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=1}^{p} V(\langle \alpha_k, \beta_k\rangle; g) < \varepsilon . \tag{35}$$

[9]) V případě $x_1 = a$ nebo $x_n = b$ provedeme podobnou odchylku jako v pozn. [7]).

Toto δ nyní podržím pevné a dokáži toto tvrzení:

(T) Existují intervaly

$$I_k = \langle \alpha_k, \beta_k \rangle \quad (k = 1, 2, \ldots, p)\,, \tag{36}$$
$$a \leqq \alpha_1 \leqq \beta_1 \leqq \alpha_2 \leqq \beta_2 \leqq \ldots \leqq \alpha_p \leqq \beta_p \leqq b$$

tak, že

$$\sum_{k=1}^{p} \mu(I_k) < \delta\,, \quad \sum_{k=1}^{p} V(I_k; f) > V(\langle a, b \rangle; f) - \varepsilon\,. \tag{37}$$

Ježto potom podle (35) je $\sum_{k=1}^{p} V(I_k; g) < \varepsilon$, plyne věta 124 podle pomocné věty ihned z tvrzení (T).[10])

Důkaz tvrzení (T). Zvolme především rozdělení $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_q = b$ tak, aby

$$\sum_{k=1}^{q} |f(a_k) - f(a_{k-1})| > V(\langle a, b \rangle; f) - \tfrac{1}{2}\varepsilon\,. \tag{38}$$

Množina $M = \langle a, b \rangle \dot{-} (a_0, a_1, \ldots, a_q)$ je otevřená; skoro všude v $\langle a, b \rangle$ je $f'(x) = 0$. Proto množina

$$N = \mathop{\mathcal{E}}_{x}(x \in M, f'(x) = 0)$$

má míru $b - a$. Sestrojme všechny nezvrhlé uzavřené intervaly $\langle \xi, \eta \rangle$, jež mají tyto vlastnosti:

$$\langle \xi, \eta \rangle \subset M\,, \quad |f(\eta) - f(\xi)| \leqq \frac{\varepsilon}{2(b - a)} (\eta - \xi)\,. \tag{39}$$

Tyto intervaly zřejmě pokrývají N ve smyslu Vitaliově. Podle věty 82 existuje tedy mezi nimi konečný počet disjunktních intervalů $L_k = \langle \xi_k, \eta_k \rangle$ $(k = 1, 2, \ldots, r)$ tak, že

$$a < \xi_1 < \eta_1 < \xi_2 < \eta_2 < \ldots < \xi_r < \eta_r < b\,, \quad \mu(N \dot{-} \bigcup_{k=1}^{r} L_k) < \delta$$

a tedy

$$\sum_{k=1}^{r} \mu(L_k) > \mu(N) - \delta = b - a - \delta\,. \tag{40}$$

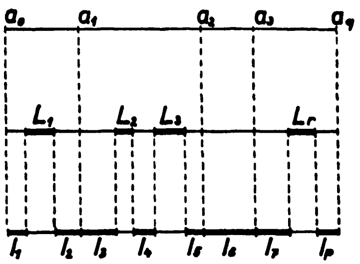
---

[10]) Všimněte si smyslu tvrzení (T): „Skoro celá“ variace singulární funkce f je „zkoncentrována“ do intervalů celkové délky menší než δ. Velmi názorně je to vidět na funkci z **D II**, kap. V, § 9, cvič. 4.

Přidejme nyní k dělicím bodům $a_0, a_1, \ldots, a_q$ ještě dělicí body $\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta_1, \ldots, \eta_r$ (sledujte obr. 8).[11] Tím vznikne rozdělení intervalu $\langle a, b \rangle$ na $2r + q$ intervalů; mezi nimi jsou intervaly $L_1, \ldots, L_r$; ostatní intervaly — v pořadí zleva doprava — označme $I_1, \ldots, I_p$ ($p = r + q$; $I_k = \langle \alpha_k, \beta_k \rangle$).

Podle (40) je $\sum_{k=1}^{p} \mu(I_k) < \delta$. Za druhé: Ježto naše nové rozdělení intervalu $\langle a, b \rangle$ na intervaly L_k, I_k je zjemněním původního rozdělení $a = a_0 < a_1 < \ldots < a_q = b$, je podle (38)

$$(41) \quad \sum_{k=1}^{p} |f(\beta_k) - f(\alpha_k)| + \sum_{k=1}^{r} |f(\eta_k) - f(\xi_k)| > V(\langle a, b \rangle; f) - \tfrac{1}{2}\varepsilon .$$



Obr. 8.

Ale první součet v (41) vlevo je nejvýše roven $\sum_{k=1}^{p} V(I_k, f)$, druhý je podle (39) nejvýše roven

$$\frac{\varepsilon}{2(b - a)} \sum_{k=1}^{r} (\eta_k - \xi_k) \leqq \tfrac{1}{2}\varepsilon ,$$

takže z (41) plyne

$$\sum_{k=1}^{p} V(I_k; f) + \tfrac{1}{2}\varepsilon > V(\langle a, b \rangle; f) - \tfrac{1}{2}\varepsilon;$$

naše intervaly $I_1, \ldots, I_p$ vyhovují tudíž všem požadavkům tvrzení (T).

§ 3. Rozklad funkce s v. k. na funkci a. s., spojitou funkci singulární a funkci skoků. Důležité věty tohoto paragrafu se obyčejně formulují pro omezený interval $\langle a, b \rangle$. My je v kap. X budeme potřebovati pro interval $\mathbf{E}_1 = (-\infty, +\infty)$, proto je budeme formulovati trochu jinak. Ale v pozn. 3 ukážeme, jak je možno se vrátit k intervalu $\langle a, b \rangle$.

Poznámka 1. Budeme říkati, že f má variaci konečnou *uvnitř* $\mathbf{E}_1$, má-li v. k. v každém omezeném intervalu $\langle a, b \rangle$. Budeme říkati, že je absolutně spojitá, resp. singulární, resp. funkcí skoků *uvnitř* $\mathbf{E}_1$, jestliže je absolutně spojitá (resp. singulární, resp. funkcí skoků) v každém

[11]) Ježto $L_k \subset M$, leží body $a_0, \ldots, a_q$ mimo intervaly L_k.

omezeném $\langle a, b\rangle$. Pojem funkce spojité uvnitř E_1, t. j. spojité v každém omezeném $\langle a, b\rangle$, je ovšem totožný s pojmem funkce spojité v E_1.

Co je to funkce singulární uvnitř E_1? To je zřejmě totéž, jako funkce, mající v. k. uvnitř E_1, jejíž derivace je rovna nule skoro všude v E_1.

Kdy je f funkcí skoků uvnitř E_1? Podle definice 16 a pozn. 6, 7 v § 2 musí f vypadat takto: Má spočetně mnoho bodů nespojitosti (v E_1): $x_1, x_2, x_3, \ldots$ a v bodě x_i jistý skok zleva s_i a zprava t_i. Pro $-\infty < y < < z < +\infty$ musí pak podle (20) platit

$$f(z) - f(y) = \sum_{y < x_i \leqq z} s_i + \sum_{y \leqq x_i < z} t_i\,, \tag{42}$$

při čemž řady vpravo musí být absolutně konvergentní (ať si konečná y, z volím jakkoliv.[12]) Jsou-li naopak dána čísla x_i (navzájem různá) a čísla s_i, t_i, vyhovující udané podmínce absolutní konvergence, potom existuje až na aditivní konstantu *právě jedna* funkce f, pro kterou platí (42) (a která proto, podle def. 16, je vskutku funkcí skoků v každém omezeném $\langle a, b\rangle$). Z (42) totiž plyne (pro $x > 0$ kladu $y = 0$, $z = x$; pro $x < 0$ kladu $y = x$, $z = 0$)

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{0 < x_i \leqq x} s_i + \sum_{0 \leqq x_i < x} t_i + f(0) \quad \text{pro } x \geqq 0\,, \\ f(x) &= -\sum_{x < x_i \leqq 0} s_i - \sum_{x \leqq x_i < 0} t_i + f(0) \quad \text{pro } x \leqq 0\,, \end{aligned} \tag{43}$$

čímž je f určeno až na aditivní konstantu $f(0)$; a naopak, definujete-li f rovnicemi (43), platí (42), jak se ihned přesvědčíte dosazením (nutno rozeznávati tři případy: $0 \leqq y < z$, $y < z \leqq 0$, $y < 0 < z$; na př. ve třetím dostanete

$$f(z) - f(y) = \sum_{0 < x_i \leqq z} s_i + \sum_{y < x_i \leqq 0} s_i + \sum_{0 \leqq x_i < z} t_i + \sum_{y \leqq x_i < 0} t_i\,,$$

což je (42)).

Celkem tedy dostanu právě všechny funkce skoků uvnitř E_1 takto: Vezmu spočetnou množinu $x_1, x_2, \ldots$ reálných čísel (x_i navzájem různá) a čísla s_i, t_i tak, aby řady v (42) konvergovaly absolutně pro jakákoliv konečná y, z ($y < z$), načež f určím rovnicí (42), t. j. rovnicemi (43). Vynechám-li ona x_i, pro něž $s_i = t_i = 0$, jsou čísla x_i, s_i, t_i úplně určena

---

[12]) Na př. čísla $x_n = n$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$), $s_n = 0$, $t_n = n^2$ vyhovují této podmínce.

funkcí f: čísla x_i jsou její body nespojitosti, $s_i = f(x_i) - f(x_i -)$, $t_i = f(x_i +) - f(x_i)$.

Mějme nyní funkci f, která má v. k. uvnitř $\mathbf{E}_1$. Přiřadíme jí tři funkce v, p, n (obšírněji v_f, p_f, n_f) v oboru $\mathbf{E}_1$, kterým budeme krátce říkat totální, positivní a negativní variace funkce f; funkce v_f, p_f, n_f definujeme (až na aditivní konstantu) požadavkem, aby pro $-\infty < < y < z < +\infty$ bylo vždy

$$(44) \qquad \begin{gathered} v(z) - v(y) = V(\langle y, z\rangle; f), \quad p(z) - p(y) = P(\langle y, z\rangle; f), \\ n(z) - n(y) = N(\langle y, z\rangle; f).^{13)} \end{gathered}$$

Dosadíme-li sem $y = 0, z = x$ pro $x > 0$, ale $y = x, z = 0$ pro $x < 0$, vychází z (44)

$$(45) \qquad \begin{gathered} v(x) = v(0) + V(\langle 0, x\rangle; f) \text{ pro } x \geqq 0, \\ v(x) = v(0) - V(\langle x, 0\rangle; f) \text{ pro } x \leqq 0. \end{gathered}$$

Naopak, definujeme-li v rovnicemi (45), přesvědčíme se ihned, že platí (44) — užije se prostě rovnice (7), na př. pro $0 < y < z$:

$$v(z) - v(y) = V(\langle 0, z\rangle; f) - V(\langle 0, y\rangle; f) = V(\langle y, z\rangle; f).$$

Podobně pro p, n. Vezmu-li libovolný interval $\langle a, b\rangle$ a kladu v (44) $y = a$, vidím, že se naše nové funkce v, p, n liší v $\langle a, b\rangle$ od funkcí v, p, n zavedených v § 2, (8) pouze o konstanty. Proto platí i nyní pro všechna konečná čísla x, y rovnice (11); normuji-li naše nové funkce na př. tak, že pro určitou hodnotu a je $v(a) = p(a) = n(a) = 0$, plynou z (11) dokonce i rovnice (9) a odtud (10) pro každé $x \in \mathbf{E}_1$.

Dále je odtud jasno, že platí i nyní obdoba věty 121: Je-li na př. f singulární uvnitř $\mathbf{E}_1$, jsou i v, p, n singulární uvnitř $\mathbf{E}_1$.

Věta 125. *Nechť f má v. k. uvnitř $\mathbf{E}_1$. Potom je $f = f_1 + f_2 + f_3$, kde f_1 je absolutně spojitá uvnitř $\mathbf{E}_1$, f_2 je spojitá a singulární uvnitř $\mathbf{E}_1$, f_3 je funkce skoků uvnitř $\mathbf{E}_1$. Je-li $f = F_1 + F_2 + F_3$ jiný takový rozklad, jsou funkce $f_1 - F_1, f_2 - F_2, f_3 - F_3$ konstantní v $\mathbf{E}_1$. Je-li f neklesající v $\mathbf{E}_1$, jsou i f_1, f_2, f_3 neklesající v $\mathbf{E}_1$. Při tom je — při libovolně zvoleném $a \in \mathbf{E}_1$ —*

$$(46) \qquad f_1(x) = \int_a^x f'(t)\,dt + \text{konst}^{14)}$$

[13]) Tedy jsou v, p, n neklesající v $\mathbf{E}_1$.

[14]) Tento integrál (Lebesgueův) konverguje podle věty 91.

(pamatujme, že $\int_a^x = -\int_x^a$ *pro* $x < a$*);* f_3 *je funkce, určená rovnicemi* (42), (43) *(do nichž ovšem místo* f *nutno psáti* f_3*), kde* x_i *jsou body nespojitosti funkce* f, $s_i = f(x_i) - f(x_i -)$, $t_i = f(x_i +) - f(x_i)$.

Poznámka 2. Funkce f_1, f_2, f_3 jsou tedy „v podstatě" jednoznačně určeny. Říká se jim po řadě: absolutně spojitá část, spojitá singulární část a funkce skoků funkce f. Píši-li $f = (f_1 + f_2) + f_3$, dostávám t. zv. *Jordanův rozklad* na spojitou část a funkci skoků; píši-li $f = f_1 + (f_2 + f_3)$, dostávám t. zv. *Lebesgueův rozklad* na absolutně spojitou a singulární část.

Důkaz. Budiž napřed f neklesající v E_1; buďte $x_1, x_2, \ldots$ její body nespojitosti, $s_i = f(x_i) - f(x_i -)$, $t_i = f(x_i +) - f(x_i)$; tedy $s_i \geqq 0$, $t_i \geqq 0$. Je-li $-\infty < a < b < +\infty$, je zřejmě pro každé n

$$\sum_{\substack{i=1 \\ a < x_i \leqq b}}^{n} s_i + \sum_{\substack{i=1 \\ a \leqq x_i < b}}^{n} t_i \leqq f(b) - f(a)\,, \tag{47}$$

takže

$$\sum_{a < x_i \leqq b} s_i + \sum_{a \leqq x_i < b} t_i \tag{48}$$

je konvergentní (absolutně). Rovnice

$$f_3(y) - f_3(x) = \sum_{x < x_i \leqq y} s_i + \sum_{x \leqq x_i < y} t_i \tag{49}$$

(pro $-\infty < x < y < +\infty$) definují tedy funkci skoků uvnitř E_1, která je ovšem neklesající a má tytéž skoky s_i, t_i v bodech x_i jako f, takže funkce $g = f - f_3$ je spojitá a má v. k. uvnitř E_1. Z (47) plyne dále limitním přechodem $n \to \infty$

$$f_3(b) - f_3(a) \leqq f(b) - f(a)$$

pro $-\infty < a < b < +\infty$, takže funkce $g = f - f_3$ je neklesající. Definujme nyní f_1 rovnicí (46) a f_2 rovnicí $f_2 = g - f_1 = f - f_1 - f_3$. Potom (ježto $f' \geqq 0$ skoro všude) je f_1 neklesající a ovšem a. s. uvnitř E_1. Ježto f_3 je singulární (věta 120) a $f_1' = f'$ skoro všude v E_1, je $f_2' = 0$ skoro všude a tedy f_2 je singulární uvnitř E_1 a ovšem spojitá. Podle věty 90 je pro $-\infty < x < y < +\infty$ (ježto $f'(x) = g'(x)$ skoro všude)

$$f_1(y) - f_1(x) = \int_x^y f'(t)\,\mathrm{d}t \leqq g(y) - g(x)\,,$$

t. j.

$$g(y) - f_1(y) \geqq g(x) - f_1(x),\ \text{t. j. } f_2(y) \geqq f_2(x)\,,$$

takže i f_2 je neklesající.

Pro obecné f rozložme (normujíce na př. $p_f(0) = n_f(0) = 0$)

$$f(x) = p_f(x) - n_f(x) + f(0)$$

a rozložme podle toho, co jsme již dokázali, neklesající funkce p_f a n_f. Tím dostáváme hledaný rozklad $f = f_1 + f_2 + f_3$. Je-li $f = F_1 + F_2 + F_3$ druhý takový rozklad, je $f - f_3$ spojitá a rovněž $f - F_3$, t. j. f_3, F_3 mají tytéž body nespojitosti a v nich tytéž skoky jako f. Ale tím je funkce skoků úplně určena až na konstantu,[15]) t. j. $f_3 - F_3 = c_1$, tedy

$$f_1 + f_2 = F_1 + F_2 - c_1\,,$$

tedy

$$F_1 - f_1 = f_2 - F_2 + c_1\,.$$

Toto je funkce a. s. (viz levou stranu) a současně singulární (viz pravou stranu), tedy konstantní v každém omezeném intervalu (viz pozn. 4 v § 2), tedy konstantní v $\mathbf{E}_1$, t. j. $F_1 - f_1 = c_2$, $f_2 - F_2 = c_2 - c_1$.

Věta 126. *Nechť f má v. k. uvnitř $\mathbf{E}_1$. Rozložme f a rovněž její variace v, p, n ve smyslu věty 125:*

$$f = f_1 + f_2 + f_3\,,\quad v = v_1 + v_2 + v_3\,,\quad p = p_1 + p_2 + p_3\,,$$
$$n = n_1 + n_2 + n_3\,.$$

Potom platí: Funkce v_i, p_i, n_i jsou právě totální, positivní a negativní variace funkce f_i.

Tedy jakási záměnnost: Na př. p_2 je spoj. sing. část positivní variace funkce f, ale současně je p_2 positivní variací spoj. sing. části funkce f.

Důkaz. Označme w_1, w_2, w_3 totální variace funkcí f_1, f_2, f_3. V našem speciálním případě je podle vět 123, 124 pro $-\infty < x < y < +\infty$

$$V(\langle x, y\rangle; f) = V(\langle x, y\rangle; f_1) + V(\langle x, y\rangle; f_2) + V(\langle x, y\rangle; f_3)\,,$$

---

[15]) Jsou tím totiž dána čísla x_i, s_i, t_i na př. ze vzorce (42) (kde místo f jest psáti buďto f_3 nebo F_3).

t. j.

$$v(y) - v(x) = \sum_{i=1}^{3} (w_i(y) - w_i(x))$$

a to platí (změním znamení na obou stranách) i pro $x \geqq y$. Položme třeba $y = 0$; máme pro všechna x

$$v(x) = w_1(x) + w_2(x) + (w_3(x) + \text{konst})\,.$$

Ale podle věty 121 jsou sčítanci napravo po řadě: absolutně spojitý, singulární spojitý, funkce skoků (vše uvnitř $\boldsymbol{E}_1$). Ale druhý rozklad tohoto druhu je $v = v_1 + v_2 + v_3$, tedy podle věty 125 $w_i = v_i + {}$ $+ \text{konst}$.

Důkaz pro p_i plyne pak takto (podle (10)): Jest

$$p = \tfrac{1}{2}(f + v + \text{konst}) =$$
$$= \tfrac{1}{2}(f_1 + v_1) + \tfrac{1}{2}(f_2 + v_2) + \tfrac{1}{2}(f_3 + v_3 + \text{konst})\,.$$

To je rozklad na část absolutně spojitou, spojitou singulární a funkci skoků. Srovnáním s rozkladem $p = p_1 + p_2 + p_3$ vychází $p_i = {}$ $= \tfrac{1}{2}(f_i + v_i) + \text{konst}$. Ale už víme, že f_i má totální variaci v_i. Tedy (podle (10)) je p_i positivní variací funkce f_i. Podobně pro n_i.

Poznámka 3. Jestliže nějaká funkce f má v. k. v $\langle a, b\rangle$, doplňme (po příp. pozměňme) její definici tak, že klademe $f(x) = f(a)$ pro $x < a$, $f(x) = f(b)$ pro $x > b$. Tato nová funkce i její tři variace jsou konstantní v $(-\infty, a\rangle$, $\langle b, +\infty)$; na f mohu nyní aplikovati věty 125, 126; je triviální, jak by se jejich znění změnilo, kdybych se zase vrátil k intervalu $\langle a, b\rangle$ a k terminologii § 2.