KAPITOLA VI

ZAVÁDĚNÍ NOVÝCH INTEGRAČNÍCH PROMĚNNÝCH DO r-ROZMĚRNÉHO INTEGRÁLU

§ 1. Prostá regulární zobrazení. Tento paragraf se netýká integrálního počtu; navazuje na **D II**, kap. VIII, § 2 a obsahuje některé doplňky, které budeme potřebovati v následujícím paragrafu, pojednávajícím o substituční methodě pro množné integrály.

Poznámka 1. Výrok, že f je zobrazení z $\mathbf{E}_r$ do $\mathbf{E}_r$, znamená toto: každému bodu u jisté množiny $A \subset \mathbf{E}_r$ (A je obor zobrazení f) je přiřazen jistý bod $x = f(u) \in \mathbf{E}_r$. Je-li $u = [u_1, \ldots, u_r]$, $x = [x_1, \ldots, x_r]$, lze rovnici

(1) $$x = f(u)$$

psáti ve tvaru r rovnic

(2) $$x_1 = f_1(u_1, \ldots, u_r), \ldots, x_r = f_r(u_1, \ldots, u_r)\,,$$

kde $f_1, \ldots, f_r$ jsou konečné reálné funkce v oboru A.

Poznámka 2. Je-li f zobrazení z $\mathbf{E}_r$ do $\mathbf{E}_r$, dané rovnicemi (2), říkáme, že toto zobrazení je *regulární* v množině $P \subset \mathbf{E}_r$ (viz **D II**, kap. VIII, § 2), jestliže

1. P je otevřená,
2. derivace $\dfrac{\partial f_i}{\partial u_j}$ $(i, j = 1, \ldots, r)$ jsou konečné a spojité v P,
3. $\dfrac{D(f_1, \ldots, f_r)}{D(u_1, \ldots, u_r)} \neq 0$ pro všechna $u \in P$.

Jacobiův determinant v 3 budeme nazývati *determinantem zobrazení* f a budeme jej značiti D_f; jeho hodnotu v bodě u značíme ovšem $D_f(u)$.

Poznámka 3. Budeme se zabývati hlavně případem, že f je *regulární a prosté* v P; označme $R = f(P)$. Potom (viz **D II**, věta 212) je R rovněž otevřená (to platí i pro regulární zobrazení, které není prosté). Za druhé, je-li P oborem zobrazení f, je inversní zobrazení f_{-1} regulární v R a zobrazuje R na P (t. j. $f_{-1}(R) = P$).[1]) Mezi determinanty obou zobrazení je tento vztah (**D II**, kap. VIII, § 2, pozn. 2): Je-li $u \in P$, $x = f(u)$ (neboli: je-li $x \in R$, $u = f_{-1}(x)$), je

$$D_f(u)\, D_{f_{-1}}(x) = 1 . \tag{3}$$

Poznámka 4. Budiž f regulární v P, budiž $P_1 \subset P$. Potom platí:

1. Je-li P_1 otevřená, je f regulární v P_1 a tedy $f(P_1)$ je otevřená.

2. Je-li P_1 kompaktní (t. j. uzavřená a omezená), je $f(P_1)$ kompaktní.

3. Je-li P_1 omezená (t. j. $\overline{P_1}$ kompaktní) a je-li $\overline{P_1} \subset P$, je $\overline{f(P_1)} = f(\overline{P_1})$ a tedy $\overline{f(P_1)}$ kompaktní podle 2.

Důkaz. Bod 1: — zřejmé. Bod 2: — viz **D II**, věta 169. Bod 3: Předně: Podle bodu 2 je $f(\overline{P_1})$ kompaktní, tedy uzavřená a obsahuje $f(P_1)$. Množina $\overline{f(P_1)}$ je pak nejmenší uzavřená množina, obsahující $f(P_1)$. Tedy $\overline{f(P_1)} \subset f(\overline{P_1})$. Budiž za druhé $x \in f(\overline{P_1})$, tedy $x = f(u)$ pro jisté $u \in \overline{P_1}$. Existují tedy u_n tak, že $u_n \in P_1$, $\lim u_n = u$, tedy $\lim f(u_n) = f(u) = x$; ale $f(u_n) \in f(P_1)$, tedy $x \in \overline{f(P_1)}$. Tedy $f(\overline{P_1}) \subset \overline{f(P_1)}$.

Poznámka 5. Buďte h, g jakákoliv dvě zobrazení (s obory H, G); označme znakem $h * g$ zobrazení f, definované rovnicí $f(u) = h(g(u))$ pro každé u, pro něž symbol vpravo má smysl.[2]) Oborem „složeného zobrazení" $h * g$ je tedy množina oněch $u \in G$, pro něž je $g(u) \in H$. Jsou-li g, h prostá, je i $h * g$ prosté (dvěma různým bodům u odpovídají dva různé body $g(u)$ a tedy dva různé body $h(g(u))$). Z pravidel o derivování složených funkcí ihned plyne: je-li g regulární zobrazení P na Q [3]) a je-li h regulární zobrazení Q na R, je $h * g$ regulární zobrazení P na R. Ze vzorce pro derivování složených funkcí plyne totiž podle pravidla o násobení determinantů ihned (viz **D II**, kap. VII, § 3, příkl. 2) pro každé $u \in P$

$$D_{h*g}(u) = D_h(v)\, D_g(u) \neq 0, \text{ kdež } v = g(u) . \tag{4}$$

---

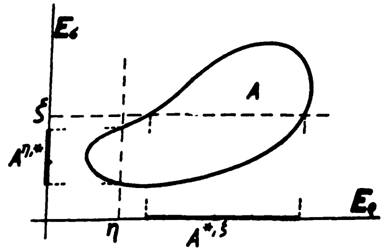
[1]) Není-li P přímo oborem zobrazení f, platí toto tvrzení ovšem pro parciální zobrazení f_P. V dalším často, když mluvím o zobrazení regulárním v P, považuji mlčky P za obor zobrazení. Čtenáře to nezmýlí.

[2]) Označení $h * g$ není v tomto smyslu obvyklé.

[3]) Takto se budeme někdy stručně vyjadřovat, místo abychom říkali: g je zobrazení regulární v P, které zobrazuje P na Q.

Poznámka 6. V této poznámce budiž $r = \varrho + \sigma$ (ϱ, σ celá kladná), takže $\mathbf{E}_r = \mathbf{E}_\varrho \times \mathbf{E}_\sigma$. Body z $\mathbf{E}_r$ pišme ve tvaru $[y, z]$, kde $y \in \mathbf{E}_\varrho$, $z \in \mathbf{E}_\sigma$. Budiž $A \subset \mathbf{E}_r$, $\zeta \in \mathbf{E}_\sigma$; jako v kap. IV, § 1 (nebo jako v **D II**, kap. I, § 8) pišme $A^{*,\zeta} = \underset{y}{\mathcal{E}}([y, \zeta] \in A)$; obdobně pro $\eta \in \mathbf{E}_\varrho$ pišme $A^{\eta,*} = \underset{z}{\mathcal{E}}([\eta, z] \in A)$; viz obr. 1 pro $\varrho = \sigma = 1$. Zřejmě $A \subset B \Rightarrow A^{\eta,*} \subset B^{\eta,*}$. Platí toto: 1. Je-li A uzavřená (v $\mathbf{E}_r$), je $A^{*,\zeta}$ uzavřená (v $\mathbf{E}_\varrho$). 2. Je-li A otevřená (v $\mathbf{E}_r$), je $A^{*,\zeta}$ otevřená (v $\mathbf{E}_\varrho$). 3. Jest $\overline{A^{*,\zeta}} \subset (\bar{A})^{*,\zeta}$ (pozor! vlevo je uzávěr v $\mathbf{E}_\varrho$, vpravo uzávěr v $\mathbf{E}_r$); rovnost $\overline{A^{*,\zeta}} = (\bar{A})^{*,\zeta}$ nemusí platit.

Důkaz. Ad 1. Budiž $y = \lim y_n$, $y_n \in A^{*,\zeta}$, t. j. $[y_n, \zeta] \in A$, tedy (ježto A je uzavřená) $[y, \zeta] \in A$, t. j. $y \in A^\zeta$.[4]) Ad 2. Zde je $B = \mathbf{E}_r \dot{-} A$ uzavřená, tedy podle 1 B^ζ uzavřená, $A^\zeta = \mathbf{E}_\varrho \dot{-} B^\zeta$ otevřená. Ad 3. $(\bar{A})^\zeta$ je uzavřená množina (viz 1) obsahující A^ζ; $\overline{A^\zeta}$ je nejmenší uzavřená množina, obsahující A^ζ.



Obr. 1.

Poznámka 7. Budiž opět $r = \varrho + \sigma$ (ϱ, σ celá kladná). Body z $\mathbf{E}_r$ budeme opět psát ve tvaru $x = [y, z]$ nebo $u = [v, w]$, kde $y = [y_1, \ldots, y_\varrho] \in \mathbf{E}_\varrho$, $z = [z_1, \ldots, z_\sigma] \in \mathbf{E}_\sigma$ a podobně v, w. Budiž nyní f opět regulární prosté zobrazení množiny $P \subset \mathbf{E}_r$ na množinu $R = f(P) \subset \mathbf{E}_r$. Nechť však má toto zobrazení speciální tvar: Přepíšeme-li rovnici $[y, z] = f([v, w])$ na tvar (2), mají tyto rovnice tvar

$$\begin{aligned} &y_i = f_i(v_1, \ldots, v_\varrho, w_1, \ldots, w_\sigma) \quad (i = 1, \ldots, \varrho)\,, \\ &z_j = w_j \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad (j = 1, \ldots, \sigma)\,. \end{aligned} \tag{5}$$

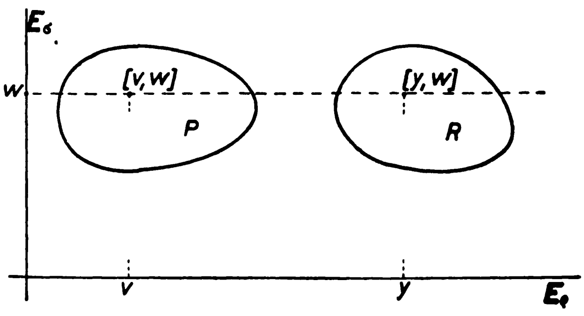
To značí tedy, že posledních σ souřadnic se zobrazením f nezmění.[5]) Determinant zobrazení $D_f(u) = D_f(v, w)$ má podle (5) ovšem tvar

$$0 \neq D_f(u) = D_f(v, w) = \frac{D(f_1, \ldots, f_\varrho)}{D(v_1, \ldots, v_\varrho)}\,. \tag{6}$$

[4]) Je-li jasno, na kterém místě hvězdička stojí, vynechávám ji někdy.

[5]) Zřejmě tedy ani při inversním zobrazení se posledních σ souřadnic nemění, t. j. i inversní zobrazení je tohoto typu.

Při pevném $w = [w_1, \ldots, w_\sigma]$ definuje prvních ϱ rovnic (5) jisté zobrazení z $\mathbf{E}_\varrho$ do $\mathbf{E}_\varrho$ (které bodu $[v_1, \ldots, v_\varrho]$ přiřazuje bod $[y_1, \ldots, y_\varrho]$, daný prvními ϱ rovnicemi (5)); toto zobrazení označme $f^{*, w}$.[6]) Je to zřejmě prosté zobrazení $P^{*, w}$ na $R^{*, w}$ (hvězdičky budu nyní vynechávati) s determinantem (6). Dále je P^w otevřené v $\mathbf{E}_\varrho$ podle pozn. 6, takže f^w je prosté regulární zobrazení množiny P^w na $f^w(P^w) = R^w$. Snadno zjistíte, že $(f^w)_{-1} = (f_{-1})^w$. Viz obr. 2, kde $[y, w] = f([v, w])$,



Obr. 2.

takže $f^w(v) = y$; tedy jednak $v = (f^w)_{-1}(y)$, jednak $[v, w] = f_{-1}([y, w])$, tedy $v = (f_{-1})^w(y)$. Vzhledem k této rovnosti budeme psáti f^w_{-1} bez závorek.

Poznámka 8. Budiž f prosté regulární zobrazení z $\mathbf{E}_r$ do $\mathbf{E}_r$, $r > 1$. Ukážeme, že zobrazení f lze složiti — aspoň lokálně — (v jakém smyslu, uvidíme za chvíli) ze dvou zobrazení, z nichž jedno nechává beze změny jednu souřadnici, druhé ostatních $r - 1$ souřadnic. Tato zobrazení mají tedy charakter, popsaný v pozn. 7 (jednou pro $\sigma = 1$, po druhé pro $\sigma = r - 1$).

Budiž tedy dáno prosté regulární zobrazení f otevřené množiny $P \subset \mathbf{E}_r$ na $R \subset \mathbf{E}_r$, dané rovnicemi

$$x_i = f_i(u_1, \ldots, u_r) \quad (i = 1, \ldots, r) \tag{7}$$

s determinantem $D_f(u) \neq 0$. V každém bodě $u \in P$ je tedy jistě $\dfrac{\partial f_i}{\partial u_1} \neq$ $\neq 0$ aspoň pro jednu hodnotu i.

[6]) Zde se trochu odchylujeme od označení v **D II**, kap. I, § 8, konec pozn. 3: posledních σ souřadnic $z_1, \ldots, z_\sigma$, jež jsou nyní konstantní, si vůbec nevšímáme.

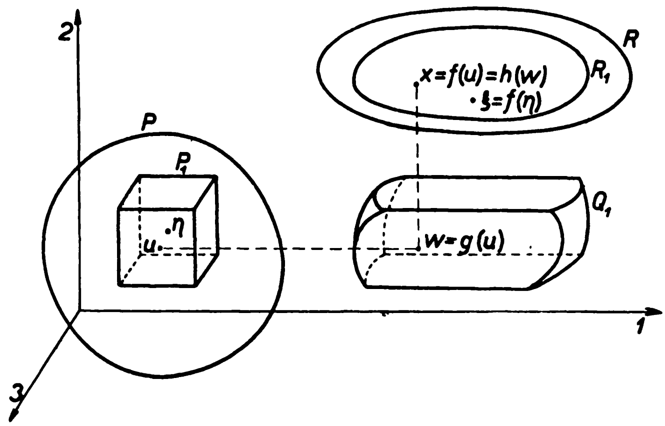
Vezměme libovolný bod $\xi \in R$ a sestrojme bod $\eta = f_{-1}(\xi) \in P$; předpokládejme, že

(8) $$\frac{\partial f_1}{\partial u_1} \neq 0 \text{ v bodě } \eta\,.$$ [7])

Lze tedy sestrojiti P_1 tak, že platí:

1. P_1 je omezený otevřený interval, $\eta \in P_1 \subset P$.
2. Funkce $\frac{\partial f_1}{\partial u_1}$ je v P_1 buďto stále kladná nebo stále záporná.
3. Položme $R_1 = f(P_1)$, takže R_1 je otevřená, $\xi = f(\eta) \in R_1 \subset R$.

Budeme se nyní snažit, rozložit parciální zobrazení f_{P_1} na tvar $h * g$, kde h, g mají jistý speciální charakter.[8])



Obr. 3.

Budiž g zobrazení v oboru P_1, dané rovnicemi

(9) $$w_1 = f_1(u_1, \ldots, u_r),\ w_2 = u_2,\ \ldots,\ w_r = u_r\,.$$

Položme $Q_1 = g(P_1)$ (viz obr. 3 pro $r = 3$).

[7]) Kdyby tomu tak nebylo, stačilo by permutovati souřadnice x_i, t. j. funkce f_i v (7). Ale není třeba si toho všímat.

[8]) f_{P_1} je opět popsáno rovnicemi (7), nyní však už jen pro $u \in P_1$.

Tvrdím předně, že g je prosté. Jestliže totiž $g(u') = g(u'') = w$, plyne z (9) především $u'_2 = u''_2 = w_2, \ldots, u'_r = u''_r = w_r$, načež první rovnice (9) dává

$$f_1(u'_1, w_2, \ldots, w_r) = f_1(u''_1, w_2, \ldots, w_r) = w_1 \,. \tag{9a}$$

Ale $P_1 = i_1 \times i_2 \times \ldots \times i_r$, kde i_k jsou intervaly v E_1. Podle 2 je $f_1(u_1, w_2, \ldots, w_r)$ (při pevných $w_2, \ldots, w_r$) jakožto funkce u_1 ryze monotonní v i_1, takže z (9a) plyne $u'_1 = u''_1$. Tedy vskutku z $g(u') = g(u'')$ plyne $u' = u''$. Dále je podle (9)

$$D_g(u) = \frac{\partial f_1}{\partial u_1} \neq 0 \text{ v } P_1 \,. \tag{10}$$

Tedy celkem:

4. Definujme g v P_1 tak, že rovnice $w = g(u)$ znamená totéž jako rovnice (9); potom g je regulární a prosté v P_1 a jeho determinant je dán vzorcem (10).

5. Položme $Q_1 = g(P_1)$. Potom Q_1 je otevřená.

Inversní zobrazení g_{-1} zobrazuje Q_1 na P_1 a zobrazení f zobrazuje P_1 na R_1; obě zobrazení jsou regulární a prostá. Tedy:

6. Položme $h = f_{P_1} * g_{-1}$. Potom h je prosté regulární zobrazení Q_1 na R_1 a je

$$f_{P_1} = h * g \tag{11}$$

(neboť pro $u \in P_1$ je $h(g(u)) = f(g_{-1}(g(u))) = f(u)$).

Podle (9) lze rovnici $u = g_{-1}(w)$ rozepsati do tvaru

$$u_1 = \varphi_1(w_1, \ldots, w_r),\ u_2 = w_2, \ldots, u_r = w_r \,. \tag{12}$$

Jest ovšem $g(g_{-1}(w)) = w$, což podle (12), (9) dává vedle triviálních vztahů rovnici

$$f_1(\varphi_1(w_1, \ldots, w_r), w_2, \ldots, w_r) = w_1 \text{ pro } w \in Q_1 \,. \tag{13}$$

Explicitní vyjádření rovnice $x = h(w)$ $(w \in Q_1)$ dostaneme, když do (7) dosadíme za u_k podle (12), t. j.

$$x_j = f_j(\varphi_1(w_1, \ldots, w_r), w_2, \ldots, w_r) \quad (j = 1, \ldots, r)\,;$$

pro $j = 1$ dostáváme podle (13) $x_1 = w_1$. Tedy konečně:

7. Rovnici $x = h(w)$ $(w \in Q_1)$ lze rozepsati do tvaru

(14) $$x_1 = w_1,\ x_2 = \psi_2(w_1, \ldots, w_r),\ \ldots,\ x_r = \psi_r(w_1, \ldots, w_r)\,.$$

Jest ovšem

(15) $$D_h(w) = \frac{D(\psi_2, \ldots, \psi_r)}{D(w_2, \ldots, w_r)}\,.$$

Shrňme: Je-li $\xi \in R$, $\eta = f_{-1}(\xi)$, $\dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} \neq 0$ v bodě η, lze definovati P_1, Q_1, R_1, g, h tak, že platí 1 až 7. Přitom (11) ukazuje: f vzniká složením zobrazení h, g, při čemž h nemění první souřadnici (viz (14)), naproti tomu g mění nejvýše jen první souřadnici (viz (9)).

Poznámka 9. Každou množinu $A \subset \mathsf{E}_r$ typu F_σ lze psáti ve tvaru

(16) $$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n\,,$$

kde $F_1 \subset F_2 \subset \ldots$ jsou kompaktní.

Důkaz. Jest $A = \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} A_p$, kde A_p jsou uzavřené. Množiny $A_{p,q} = \mathcal{E}_x(x \in A_p, \operatorname*{Max}\limits_{1 \leq k \leq r} |x_k| \leq q)$ jsou kompaktní; srovnejme množiny $A_{p,q}$ $(p, q = 1, 2, 3, \ldots)$ v posloupnost $B_1, B_2, \ldots$ Potom $A = \bigcup\limits_{p=1}^{\infty} B_p$ a stačí položiti

$$F_n = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n\,.$$

Poznámka 10. Budiž $A \subset \mathsf{E}_r$ typu F_σ; budiž f zobrazení množiny A do E_s; budiž f spojité v A. Potom $f(A)$ je typu F_σ. Důkaz: Pišme (16) ve smyslu pozn. 9; potom $f(F_n)$ jsou kompaktní[9]) (tedy uzavřené), $f(A) = \bigcup f(F_n)$.

Poznámka 11. Každý interval $I \subset \mathsf{E}_r$ je typu F_σ, podrobněji: lze psáti $I = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, kde $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \ldots$ jsou kompaktní intervaly. Důkaz: Pro $r = 1$ je to zřejmé; stačí položiti

---

[9]) D II, věta 169, str. 322.

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\langle a + \frac{\delta}{n}, b - \frac{\delta}{n} \right\rangle \left(\delta = \frac{b-a}{2}\right),$$

$$(a, b\rangle = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\langle a + \frac{\delta}{n}, b \right\rangle,$$

$$(a, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\langle a + \frac{1}{n}, a + n \right\rangle \text{ atd.}$$

Budiž nyní $I = i_1 \times i_2 \times \ldots \times i_r$ (i_k intervaly v $\mathbf{E}_1$). Lze psáti $i_k = \bigcup_{n=1}^{\infty} i_k^n$, kde $i_k^1 \subset i_k^2 \subset \ldots$ jsou kompaktní intervaly; stačí položiti $I_n = i_1^n \times i_2^n \times \ldots \times i_r^n$, načež $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} I_n$, $I_n \subset I_{n+1}$.

§ 2. Substituční methoda (zavádění nových integračních proměnných) pro množné integrály. Prvním naším cílem bude tato

1. pomocná věta.[10]) *Budiž $P \subset \mathbf{E}_r$ otevřená, budiž f zobrazení regulární a prosté v P (takže i $R = f(P) \subset \mathbf{E}_r$ jest otevřená) s determinantem D_f. Budiž F měřitelná v R a nezáporná skoro všude v R. Potom*

$$\int_R F(x)\, dx = \int_P F(f(u)) \,.\, |D_f(u)|\, du \,. \tag{17}$$

Této větě dáme později ve větě 103 tvar vhodnější pro početní praxi, ale to už bude lehké. Důkaz 1. pomocné věty bude obtížný. K jeho provedení budeme potřebovati tyto dvě pomocné věty:

2. pomocná věta. *Budiž f zobrazení regulární a prosté v $P \subset \mathbf{E}_r$; položme $R = f(P)$. Potom platí: Je-li I omezený interval, $\bar{I} \subset R$, potom je*

$$\mu_r(I) = \int_{f_{-1}(I)} |D_f(u)|\, du \,. \tag{18}$$

Poznámka 1. Znakem μ_r značíme Lebesgueovu míru v $\mathbf{E}_r$. 2. pomocná věta je speciálním případem 1. pomocné věty pro $F = \chi_I$.

3. pomocná věta. *Budiž f zobrazení regulární a prosté v $P \subset \mathbf{E}_r$; položme $R = f(P)$. Předpokládejme, že existuje funkce A, konečná, spojitá a kladná v P, která má tuto vlastnost:*

---

[10]) V pom. větách 1—4 značí P obor zobrazení f. Všechny integrály jsou Lebesgueovy; tedy ovšem i měřitelnost značí lebesgueovskou měřitelnost.

Je-li I libovolný omezený interval takový, že $\bar{I} \subset R$, je

$$\mu_r(I) = \int_{f_{-1}(I)} A(u)\,\mathrm{d}u\,. \tag{19}$$

Tvrdím, že potom platí toto:

1. Je-li F měřitelná v R a skoro všude v R nezáporná, je

$$\int_R F(x)\,\mathrm{d}x = \int_P F(f(u))\,A(u)\,\mathrm{d}u\,. \tag{20}$$

2. Je-li $N \subset R$, $\mu_r(N) = 0$, je též $\mu_r(f_{-1}(N)) = 0$.

Hlavní je zde tvrzení 1; tvrzení 2 je malý vedlejší produkt.

Odvození 1. pom. věty z 2. a 3. pom. věty. Buďte splněny předpoklady 1. pomocné věty. Funkce $|D_f(u)|$ je tedy konečná, spojitá a kladná v P. Tedy jsou podle 2. pomocné věty splněny předpoklady 3. pomocné věty, klademe-li $A(u) = |D_f(u)|$, takže platí vzorec (20) pro $A(u) = |D_f(u)|$, t. j. platí vzorec (17). Stačí tedy, dokážeme-li 2. a 3. pomocnou větu. Začneme s 3. pom. větou.

Důkaz 3. pomocné věty. Buďte splněny předpoklady této věty. Budeme pro krátkost říkati, že funkce F má vlastnost W, jestliže platí:

1. F je definována a nezáporná všude v R a je měřitelná v R.
2. Platí rovnice (20).

Dokážeme napřed tato čtyři pomocná tvrzení:

α) Má-li F vlastnost W a je-li $c \geqq 0$ konečné číslo, má i cF vlastnost W.

β) Mají-li F, G vlastnost W, má i $F + G$ vlastnost W.

γ) Mají-li F_n $(n = 1, 2, \ldots)$ vlastnost W a je-li $F_n(x) \leqq F_{n+1}(x)$ pro každé $x \in R$, má i funkce $\lim_{n\to\infty} F_n(x)$ vlastnost W.

δ) Mají-li F_n $(n = 1, 2, \ldots)$ vlastnost W, je-li $F_n(x) \geqq F_{n+1}(x)$ pro každé $x \in R$ a je-li $\int_R F_1(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$, má i funkce $\lim_{n\to\infty} F_n(x)$ vlastnost W.

Tvrzení α, β jsou zřejmá. Důkaz tvrzení γ, δ: v obou případech máme

$$\int_R F_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_P F_n(f(u))\,A(u)\,\mathrm{d}u\,.$$

Nyní přejdeme vlevo i vpravo k limitě $n \to \infty$; v případě γ užijeme věty 57, v případě δ užijeme věty 65 (za „integrabilní majorantu" vezmeme vlevo funkci $F_1(x)$, vpravo funkci $F_1(f(u))\,A(u)$).

Nyní budeme dokazovati 3. pomocnou větu podobně jako jsme dokazovali větu 71 (kap. IV, 1): postupným užíváním tvrzení α až δ budeme dokazovati vzorec (20) pro stále složitější funkce F.

A) Budiž I omezený interval, $\bar{I} \subset R$. Podle předpokladu platí vzorec (19), t. j.

$$\mu_r(I) = \int_R \chi_I(x)\,\mathrm{d}x = \int_P \chi_I(f(u))\,A(u)\,\mathrm{d}u\,,$$

neboť $\chi_I(f(u)) = 1$ tehdy a jen tehdy, když $f(u) \in I$, t. j. $u \in f_{-1}(I)$. Tedy χ_I má vlastnost W.

B) Budiž I jakýkoliv interval, $I \subset R$. Podle pozn. 11 v § 1 existuje posloupnost kompaktních intervalů $I_1 \subset I_2 \subset I_3 \subset \ldots$ tak, že $I = \lim I_n$. Tedy $\chi_I(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \chi_{I_n}(x)$, $\chi_{I_n}(x) \leqq \chi_{I_{n+1}}(x)$. Podle **A)** a γ) má tedy χ_I vlastnost W.

C) Budiž $G \subset R$ otevřená, tedy $G = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} I_n$, kde vpravo je disjunktní sjednocení intervalů (je totiž $G \in \mathfrak{C}_r$, viz větu 5). Položme $A_n = I_1 \cup \ldots \cup I_n$; zřejmě $\chi_{A_n} = \chi_{I_1} + \ldots + \chi_{I_n}$, $\chi_{A_n} \leqq \chi_{A_{n+1}}$, $G = \lim A_n$, $\chi_G = \lim \chi_{A_n}$. Podle **B)**, β) a γ) mají tedy χ_{I_n}, χ_{A_n} a konečně χ_G vlastnost W.

D) Budiž $M \subset R$ omezená množina typu G_δ, tedy $M = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$ (G_n otevřené). Existuje otevřený omezený interval $I \supset M$. Množiny $H_n = RIG_1 \ldots G_n$ jsou otevřené, $H_n \supset H_{n+1}$, $M = \lim H_n$. Tedy $\chi_{H_n} \geqq \chi_{H_{n+1}}$, $\chi_M = \lim \chi_{H_n}$ a konečně $\int_R \chi_{H_1}(x)\,\mathrm{d}x = \mu_r(H_1) \leqq \mu_r(I) < +\infty$. Podle **C)** a δ) má tedy χ_M vlastnost W.

E) Budiž $M \subset R$ množina typu G_δ. Položím-li $M_n = M\,.\,\mathop{\mathcal{E}}\limits_x(\max\limits_{1\leqq i\leqq r} |x_i| < n)$, jsou M_n omezené a typu G_δ, $\chi_{M_n} \leqq \chi_{M_{n+1}}$, $\lim \chi_{M_n} = \chi_M$, takže χ_M má podle **D)** a γ) vlastnost W.

F) Budiž $N \subset R$, $\mu(N) = 0$. Existuje M typu G_δ tak, že $N \subset M$, $\mu(M) = 0$. Smím předpokládati, že $M \subset R$ (jinak bych vzal MR místo M). Podle **E)** má χ_M vlastnost W, t. j. platí (20):

$$\int_P \chi_M(f(u))\, A(u)\, du = \int_R \chi_M(x)\, dx = \mu_r(M) = 0\,.$$

Tedy je $\chi_M(f(u))\, A(u) = 0$ skoro všude v P (věta 46 — jde o integrál nezáporné funkce); ježto pak $N \subset M$, je tím spíše

$$\chi_N(f(u))\, A(u) = 0 \text{ skoro všude v } P\,. \tag{21}$$

Tedy předně

$$\int_P \chi_N(f(u))\, A(u)\, du = 0 \text{ a rovněž } \int_R \chi_N(x)\, dx = \mu_r(N) = 0\,,$$

t. j. χ_N má vlastnost W. Za druhé: $f_{-1}(N) \subset P$ a pro $u \in f_{-1}(N)$ je $f(u) \in N$, $\chi_N(f(u))\, A(u) = A(u) > 0$, takže podle (21) je nutně $\mu_r(f_{-1}(N)) = 0$. Tím jsme dokázali tvrzení 2 třetí pomocné věty.

G) Budiž M měřitelná, $M \subset R$. Existuje množina K typu G_δ tak, že $\mu(K \dot{-} M) = 0$, $M \subset K \subset R$ (kdyby nebylo $K \subset R$, vezmu KR místo K). Položme $N = K \dot{-} M$. Podle **E)**, **F)** mají χ_K i χ_N vlastnost W, tedy

$$\int_P \chi_K(f(u))\, A(u)\, du = \int_R \chi_K(x)\, dx\,, \tag{22}$$

$$\int_P \chi_N(f(u))\, A(u)\, du = \int_R \chi_N(x)\, dx = \mu_r(N) = 0\,. \tag{23}$$

Ale $\chi_M = \chi_K - \chi_N$, takže odečtením rovnic (22), (23) dostáváme obdobnou rovnici pro χ_M, t. j. χ_M má vlastnost W.

H) Budiž F funkce jednoduchá a měřitelná v R, $0 \leqq F(x) < +\infty$ všude v R. Jsou-li $c_1 < c_2 < c_3 < \ldots < c_p$ ($c_1 \geqq 0$) všechny hodnoty, kterých F nabývá, a klademe-li $M_i = \mathop{\mathcal{E}}_x(x \in R, F(x) = c_i)$, jsou množiny M_i měřitelné, $F = c_1\chi_{M_1} + \ldots + c_p\chi_{M_p}$, takže F má vlastnost W (podle **G)**, α), β)).

K) Budiž F měřitelná v R, $0 \leqq F(x) \leqq +\infty$ všude v R. Podle věty 39 existují funkce F_n ($n = 1, 2, \ldots$), konečné, jednoduché a měřitelné v R tak, že pro každé $x \in R$ je $0 \leqq F_n(x) \leqq F_{n+1}(x)$, $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$. Podle **H)**, γ) má tedy F vlastnost W.

L) Dokončíme důkaz 3. pomocné věty. Budiž F měřitelná v R a nezáporná skoro všude v R. Existuje tedy funkce G, nezáporná všude v R a taková, že existuje množina $M \subset R$ tak, že

$$F(x) = G(x) \text{ pro } x \in R \dot{-} M,\ \mu_r(M) = 0\,, \tag{24}$$

a tedy

$$F(f(u)) = G(f(u)) \text{ pro } u \in P \dot{-} f_{-1}(M),\ \mu_r(f_{-1}(M)) = 0 \tag{25}$$

(viz tvrzení 2 třetí pomocné věty, dokázané již sub **F)**. Podle **K)** je

$$\int_R G(x)\,dx = \int_P G(f(u))\,A(u)\,du$$

a podle (24), (25) zůstane tato rovnice v platnosti, píši-li vlevo i vpravo F místo G. Ale to je právě žádaný vzorec (20).

Přistoupíme nyní k důkazu 2. pomocné věty, při čemž budeme užívati již dokázané 3. pomocné věty. Pro $r = 1$ dokážeme 2. pomocnou větu snadno; ale budeme ještě potřebovati větu, která nám umožní indukci z $r - 1$ na r. Touto pomůckou je

4. pomocná věta. *Buďte ϱ, σ celá kladná čísla, $r = \varrho + \sigma$. Zobrazení f budiž regulární a prosté v $P \subset \mathbf{E}_r$; kladme $R = f(P) \subset \mathbf{E}_r$. Nechť má zobrazení f speciální tvar, vyšetřovaný v § 1, pozn. 7; t. j. rovnici $x = f(u)$ lze rozepsati*[11])

$$\begin{cases} y_i = f_i(v_1, \ldots, v_\varrho, w_1, \ldots, w_\sigma) & (i = 1, \ldots, \varrho)\,, \\ z_j = w_j & (j = 1, \ldots, \sigma)\,. \end{cases} \tag{26}$$

Předpokládejme, že existuje funkce $A(v, z)$, konečná, spojitá a kladná v P, která má tuto vlastnost: Je-li $z \in \mathbf{E}_\sigma$ a je-li $I_1 \subset \mathbf{E}_\varrho$ omezený interval takový, že $\bar{I}_1 \subset R^z$ (uzávěr v $\mathbf{E}_\varrho$), je

$$\mu_\varrho(I_1) = \int_{f^z_{-1}(I_1)} A(v, z)\,dv \tag{27}$$

($f^z_{-1}(I_1)$ je množina oněch v, pro něž bod $f^z(v)$, t. j. bod, daný prvními ϱ rovnicemi (26) *— kde místo w_j píši z_j — leží v I_1; viz § 1, pozn. 7).*

Tvrdím: potom pro každý omezený interval $I \subset \mathbf{E}_r$, pro nějž je $\bar{I} \subset R$ (uzávěr v $\mathbf{E}_r$), platí

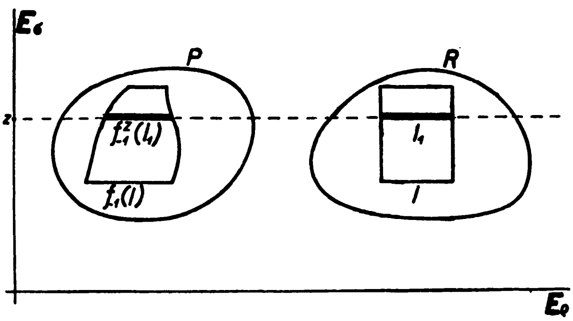
$$\mu_r(I) = \int_{f_{-1}(I)} A(v, w)\,dv\,dw\,. \tag{28}$$

---

[11]) Píšeme ovšem $x = [y, z] = [y_1, \ldots, y_\varrho, z_1, \ldots, z_\sigma]$ a podobně $u = [v, w]$.

P o z n á m k a 2. Smysl věty i jejího následujícího důkazu je snad nejlépe vidět na obr. 4 ($\varrho = \sigma = 1$); množiny I_1, $f^z_{-1}(I_1)$ jsem měl vlastně kreslit na vodorovné ose (značící prostor $\mathbf{E}_\varrho$) a ne na rovnoběžce s ní o souřadnici z; ale takto je snad obrázek názornější.

Ježto také f^z je regulární prosté a tedy homeomorfní zobrazení P^z na R^z, jsou podle pozn. 10 a 11 v § 1 množiny $f^z_{-1}(I_1)$, $f_{-1}(I)$ typu F_σ a tedy měřitelné.



Obr. 4.

D ů k a z této dlouhé věty je velmi krátký. Budiž $\emptyset \neq I = I_1 \times I_2$, kde I_1 je omezený interval v $\mathbf{E}_\varrho$, I_2 je omezený interval v $\mathbf{E}_\sigma$ a budiž $\bar{I} = \bar{I}_1 \times \bar{I}_2 \subset R$. Pro každé $z \in I_2$ je tedy $\bar{I}_1 \times (z) \subset R$, t. j. $\bar{I}_1 \subset R^z$, takže podle předpokladu platí (27). Podle F u b i n i o v y věty 74 je však (A je spojitá kladná v měřitelné množině $f_{-1}(I) \subset P$)

$$(29) \qquad \int\limits_{f_{-1}(I)} A(v, w)\, \mathrm{d}v\, \mathrm{d}w = \int\limits_{I_2} \Big(\int\limits_{f^w_{-1}(I_1)} A(v, w)\, \mathrm{d}v \Big)\, \mathrm{d}w\,;$$

neboť při daném $w \in I_2$ je $f^w_{-1}(I_1)$ právě množina oněch bodů $v \in \mathbf{E}_\varrho$, pro něž $[v, w] \in f_{-1}(I)$ (viz stále obr. 4), kdežto pro w non $\in I_2$ neexistuje žádné v tak, aby $[v, w] \in f_{-1}(I)$.[12]) Ale podle (27) je pravá strana v (29)

$$\int\limits_{I_2} \mu_\varrho(I_1)\, \mathrm{d}w = \mu_\varrho(I_1) \int\limits_{I_2} \mathrm{d}w = \mu_\varrho(I_1)\, \mu_\sigma(I_2) = \mu_r(I)\,.$$

[12]) Neboť podle posledních σ rovnic (26) má bod $[v, w] \in f_{-1}(I)$ totéž w jako jeho obraz, který leží v I, takže $w \in I_2$.

Důkaz 2. pomocné věty. Dáno je zobrazení f, regulární a prosté v $P \subset \mathbf{E}_r$; $R = f(P)$. Pro každý omezený interval I, pro nějž $\bar{I} \subset R$, máme dokázati rovnici

$$\mu_r(I) = \int_{f_{-1}(I)} |D_f(u)| \, du \,. \tag{30}$$

I. Budiž $r = 1$,[13]) I omezený interval (ani prázdný ani jednobodový — v těchto případech je (30) triviální), $\bar{I} \subset R$. Ježto f_{-1} je též regulární a prosté v R (§ 1, pozn. 3), je podle pozn. 4 v § 1 $\overline{f_{-1}(I)} = f_{-1}(\bar{I}) \subset f_{-1}(R) = P$. Ježto f_{-1} je spojitá funkce, je podle věty 130 v **D I** $f_{-1}(I)$ interval a $f_{-1}(\bar{I}) = \overline{f_{-1}(I)}$ kompaktní interval, ovšem nikoliv jednobodový (jde o prosté zobrazení); tedy $f_{-1}(\bar{I}) = \langle a, b \rangle$, $a < b$. Spojitá funkce $D_f(u) = f'(u) \neq 0$ je tedy v $\langle a, b \rangle$ stále kladná nebo stále záporná, takže předně $\int_a^b f'(u) \, du = \pm \int_a^b |f'(u)| \, du$ a za druhé krajní body intervalu I jsou zřejmě $f(a)$, $f(b)$, takže $\mu_1(I) = |f(b) - f(a)|$. Funkce f má v $\langle a, b \rangle$ derivaci spojitou a tedy omezenou (**D I**, věta 127) a tedy je f v $\langle a, b \rangle$ absolutně spojitá (**D II**, kap. V, § 9, pozn. 14), takže podle věty 94 a pozn. 1 v kap. V, § 5 je

$$|f(b) - f(a)| = \left|\int_a^b f'(u) \, du\right| = \int_a^b |f'(u)| \, du \,,[14])$$

t. j.

$$\mu_1(I) = \int_{f_{-1}(I)} |D_f(u)| \, du \,,$$

což bylo dokázati.

II. Budiž $r > 1$ a předpokládejme, že 2. pomocná věta je správná až do dimense $r - 1$.

Vezměme libovolný bod $\xi \in R$ a sestrojme bod $\eta = f_{-1}(\xi) \in P$. Předpokládejme prozatím (ke konci důkazu toto omezení odstraníme), že

$$\frac{\partial f_1}{\partial u_1} \neq 0 \text{ v bodě } \eta \,. \tag{31}$$

Můžeme tedy užíti pozn. 8 v § 1: Existují množiny P_1, Q_1, R_1 a zobrazení g, h s těmito vlastnostmi:

---

[13]) Zobrazení f je tedy prostě funkce jedné proměnné.
[14]) To plyne ostatně také z **J I**, věta 39, ježto tento integrál lze podle pozn. 7 v kap. III, § 4 pojímati též jako Riemannův.

1. P_1 je omezený otevřený interval, $\eta \in P_1 \subset P$.

2. Funkce $\frac{\partial f_1}{\partial u_1}$ je v P_1 buďto stále kladná nebo stále záporná.

3. $R_1 = f(P_1)$, takže R_1 je otevřená, $\xi = f(\eta) \in R_1 \subset R$.[15])

4. g je zobrazení regulární a prosté v P_1; přitom rovnici $w = g(u)$ $(u \in P_1)$ lze přepsati na tvar

(32) $$w_1 = f_1(u_1, \ldots, u_r),\ w_2 = u_2, \ldots, w_r = u_r\,;$$

tedy

(33) $$D_g(u) = \frac{\partial f_1}{\partial u_1}\,.$$

5. $Q_1 = g(P_1)$, takže Q_1 je otevřená.

6. h je regulární a prosté zobrazení množiny Q_1 na R_1 a je

$$f_{P_1} = h * g\,.$$

7. Rovnici $x = h(w)$ $(w \in Q_1)$ lze přepsati na tvar

(34) $$x_1 = w_1,\ x_2 = \psi_2(w_1, \ldots, w_r), \ldots, x_r = \psi_r(w_1, \ldots, w_r)\,;$$

tedy

(35) $$D_h(w) = \frac{D(\psi_2, \ldots, \psi_r)}{D(w_2, \ldots, w_r)}\,.$$

Nyní použijeme toho, co bylo řečeno v § 1, pozn. 7. Zvolíme-li pevně $w_1 \in \mathbf{E}_1$, definují druhá až r-tá rovnice (34) jisté zobrazení h^{w_1}, které zobrazuje (podle 6) $Q_1^{w_1}$ na $R_1^{w_1}$. Zobrazení h^{w_1} je regulární a prosté v $Q_1^{w_1}$ a má podle (35) determinant

(36) $$D_{h^{w_1}}(w_2, \ldots, w_r) = \frac{D(\psi_2, \ldots, \psi_r)}{D(w_2, \ldots, w_r)} = D_h(w_1, \ldots, w_r)\,.$$

Ježto h^{w_1} je zobrazení o $r - 1$ proměnných, smíme na ně použíti podle indukčního předpokladu pomocné věty 2 a dostáváme toto: Je-li $w_1 \in \mathbf{E}_1$, $I_1 \subset \mathbf{E}_{r-1}$ omezený interval, $\bar{I}_1 \subset R_1^{w_1}$, je (podle (30) s hodnotou $r - 1$ místo r a podle (36))

(37) $$\mu_{r-1}(I_1) = \int\limits_{h^{w_1}{}_{-1}(I_1)} |D_h(w_1, \ldots, w_r)|\, \mathrm{d}w_2 \ldots \mathrm{d}w_r\,.$$

[15]) Obr. 3 vám bude stále užitečný k oživení představy.

Tato rovnice ukazuje, že smíme použít 4. pomocné věty, jestliže v ní klademe: h místo f; Q_1, R_1 místo P, R; $\sigma = 1$, $\varrho = r - 1$; dále píši $w_2, \ldots, w_r$ místo $v_1, \ldots, v_\varrho$ a konečně $|D_h|$ místo A.[16]) Vychází pak toto:

Pro každý omezený interval $I \subset \mathbf{E}_r$, pro nějž je $\bar{I} \subset R_1$, jest

$$(38) \qquad \mu_r(I) = \int_{h_{-1}(I)} |D_h(w_1, \ldots, w_r)| \, \mathrm{d}w_1 \ldots \mathrm{d}w_r \, .$$

Podobně to provedu se zobrazením g: Pišme krátce $z = [u_2, \ldots, u_r]$. Při pevném z určuje první rovnice (32) jisté zobrazení g^z,[17]) které je regulární a prosté v P_1^z a zobrazuje P_1^z na Q_1^z; jeho determinant je

$$(39) \qquad D_{g^z}(u_1) = \frac{\partial f_1(u_1, \ldots, u_r)}{\partial u_1} = D_g(u_1, \ldots, u_r) = D_g(u_1, z) \, .$$

Na zobrazení g^z (odpovídající případu $r = 1$) můžeme již použíti 2. pomocné věty[18]) a dostáváme: Je-li $z = [u_2, \ldots, u_r] \in \mathbf{E}_{r-1}$ a je-li $I_1 \subset \mathbf{E}_1$ omezený interval, $\bar{I}_1 \subset Q_1^z$, je

$$(40) \qquad \mu_1(I_1) = \int_{g^z_{-1}(I_1)} |D_g(u_1, z)| \, \mathrm{d}u_1 \, .$$

Tedy lze opět užíti 4. pomocné věty pro $\varrho = 1$, $\sigma = r - 1$, kde místo v_1 píši u_1, místo f, P, R pak píši g, P_1, Q_1. Obdržíme:

Je-li $I \subset \mathbf{E}_r$ omezený interval, $\bar{I} \subset Q_1$, je

$$(41) \qquad \mu_r(I) = \int_{g_{-1}(I)} |D_g(u_1, \ldots, u_r)| \, \mathrm{d}u_1 \ldots \mathrm{d}u_r \, .$$

Odtud je však dále patrno, že smíme použíti 3. pomocné věty (tu jsme již dokázali!), jestliže místo f, P, R, A píšeme $g, P_1, Q_1, |D_g|$, a dostáváme:

Je-li F měřitelná v Q_1 a skoro všude v Q_1 nezáporná, je

$$(42) \qquad \int_{Q_1} F(w) \, \mathrm{d}w = \int_{P_1} F(g(u)) \, |D_g(u)| \, \mathrm{d}u$$

(píšeme $u = [u_1, \ldots, u_r]$, $w = [w_1, \ldots, w_r]$).

---

[16]) Proměnná w_1 by podle znění 4. pomocné věty měla státi na posledním místě; ale to nevadí, známe větu 89 (invariance Lebesgueova integrálu vůči permutacím souřadnic).

[17]) Je to prostě funkce jedné proměnné.

[18]) Buďto podle indukčního předpokladu nebo proto, že případ $r = 1$ byl dokázán sub I.

Dále uvažujme takto: Je-li I omezený interval, $\bar{I} \subset R_1$, smím použít (38) a vychází

$$(43) \qquad \begin{aligned} \mu_r(I) &= \int_{h_{-1}(I)} |D_h(w_1, \ldots, w_r)| \, dw_1 \ldots dw_r = \\ &= \int_{Q_1} |D_h(w)| \, \chi_{h_{-1}(I)}(w) \, dw \, . \end{aligned}$$

Nyní však mohu užíti na poslední integrál vzorce (42) a obdržím

$$(44) \qquad \mu_r(I) = \int_{P_1} \chi_{h_{-1}(I)}(g(u)) \, |D_h(g(u))| \, . \, |D_g(u)| \, du \, .$$

Ale podle (4) v § 1 je $D_h(g(u)) \, D_g(u) = D_f(u)$; dále $\chi_{h_{-1}(I)}(g(u))$ je rovno 1 tehdy a jen tehdy, je-li $g(u) \in h_{-1}(I)$, t. j. $h(g(u)) \in I$, t. j. $f(u) \in \in I$, t. j. $u \in f_{-1}(I)$. Tedy lze psáti (44) v tomto tvaru:

Je-li I omezený interval, $\bar{I} \subset R_1$, je

$$(45) \qquad \mu_r(I) = \int_{f_{-1}(I)} |D_f(u)| \, du \, .$$

Zvolme nyní omezený otevřený interval $K(\xi)$ tak, že $\xi \in K(\xi)$, $\overline{K(\xi)} \subset R_1$. Potom ovšem (45) platí pro každý interval $I \subset K(\xi)$.

Dokažme nyní:

Tvrzení (T). *Budiž $\xi \in R$. Potom existuje otevřený interval $K(\xi)$ tak, že $\xi \in K(\xi) \subset R$ a že pro každý interval $I \subset K(\xi)$ platí* (45).

Toto tvrzení jsme právě dokázali za předpokladu, že $\dfrac{\partial f_1}{\partial u_1} \neq 0$ v bodě $\eta = f_{-1}(\xi)$. Odstraníme nyní toto omezení.[19]) Budiž tedy $\xi \in R$, $\eta = f_{-1}(\xi)$. Jistě existuje index k tak, že $\dfrac{\partial f_k}{\partial u_1} \neq 0$ v bodě η. Zaveďme ještě zobrazení p, dané těmito rovnicemi:[20])

$$t_1 = x_k, \; t_k = x_1, \; t_i = x_i \; (\text{pro } i \neq 1, \; i \neq k) \, ,$$

takže jde prostě o transposici dvou souřadnic.[21]) Zřejmě $|D_p(x)| = 1$. Položme $S = p(R)$. Zobrazení p je regulární a prosté v R, takže složené zobrazení $s = p * f$ je regulární a prosté v P,

$$|D_s(u)| = |D_f(u)| \, . \, |D_p(f(u))| = |D_f(u)| \, .$$

[19]) Prosím za prominutí, že tuto snadnou věc budu nyní obšírně dokazovat. Ale v tak složitém důkazu, jako je tento důkaz 2. pomocné věty, nechci čtenáře odbýti slovy: „ze symetrie je jasno, že toto omezení lze odstranit".

[20]) Rozepisuji rovnici $t = p(x)$.

[21]) Předpokládám $k \neq 1$; pro $k = 1$ bylo tvrzení (T) již dokázáno.

Rovnici $t = s(u)$ lze rozepsati takto:

$$t_1 = s_1(u) = f_k(u),\ t_k = s_k(u) = f_1(u)\,,$$
$$t_i = s_i(u) = f_i(u) \quad (\text{pro } i \neq 1,\ i \neq k)\,.$$

Položme $\tau = p(\xi) = s(\eta)$, tedy $\eta = s_{-1}(\tau)$. Je $\dfrac{\partial s_1}{\partial u_1} = \dfrac{\partial f_k}{\partial u_1} \neq 0$ v bodě η. Tedy podle toho, co jsme již dokázali: Existuje otevřený interval L ($\tau \in L \subset S$) tak, že pro každý interval $M \subset L$ je

$$\mu_r(M) = \int\limits_{s_{-1}(M)} |D_s(u)|\,du\,. \tag{46}$$

Budiž $K = p_{-1}(L)$, takže $K \subset R$ je otevřený interval, $\xi = p_{-1}(\tau) \in K$. Zvolme za $K(\xi)$ tento interval K. Budiž I interval, $I \subset K(\xi)$; položme $M = p(I)$, takže M je interval, $M \subset p(K(\xi)) = L$, tedy platí (46). Ale $\mu_r(M) = \mu_r(I)$ (jde jen o permutaci souřadnic), $s_{-1}(M) = f_{-1}(p_{-1}(M)) = f_{-1}(I)$,[22]) takže (46) lze přepsati do tvaru (45). Tím je tvrzení (T) dokázáno.

Nyní jsme již skoro hotovi. Budiž I jakýkoliv omezený interval, $\bar{I} \subset R$. Máme dokázati (45). Otevřené intervaly $K(\xi)$ (pro všechna $\xi \in R$) pokrývají R a tedy $\bar{I}$. Podle Borelovy věty (**D II**, věta 158) existuje mezi nimi konečný počet intervalů

$$K(\xi_1), \ldots, K(\xi_n)\,,$$

pokrývající $\bar{I}$ a tedy I. Sestrojme simultánní kanonický rozklad[23]) intervalů

$$I,\ K(\xi_1), \ldots, K(\xi_n),\ N$$

(kde N je jakýkoliv omezený interval, obsahující I, $K(\xi_1), \ldots, K(\xi_n)$). Je tedy patrno, že I lze psáti ve tvaru disjunktního sjednocení $I = J_1 \cup J_2 \cup \ldots \cup J_q$,[24]) kde každý J_k je částí některého $K(\xi_i)$, takže podle tvrzení (T) je

$$\mu_r(J_k) = \int\limits_{f_{-1}(J_k)} |D_f(u)|\,du\,.$$

Sečteme-li pro $k = 1, 2, \ldots, q$, dostáváme (45). Tím je dokázána druhá a tedy i první pomocná věta.

---

[22]) Je-li $s = p * f$, je $s_{-1} = f_{-1} * p_{-1}$, neboť z $s(u) = v$, t. j. $p(f(u)) = v$ plyne $f(u) = p_{-1}(v)$, a konečně $u = f_{-1}(p_{-1}(v))$.

[23]) Viz kap. I, § 6, pozn. 4.

[24]) $J_1, \ldots, J_q$ jsou ony intervaly rozkladu, které jsou obsaženy v I.

Než vyslovíme hlavní výsledek, dokážeme ještě tuto drobnost:

Věta 102. *Budiž f zobrazení otevřené množiny $P \subset \mathsf{E}_r$ na $R \subset \mathsf{E}_r$, které je regulární a prosté v P, s determinantem D_f. Budiž $M \subset R$. Potom platí:*[25])

1. $\mu(M) = 0$ *tehdy a jen tehdy, je-li* $\mu(f_{-1}(M)) = 0$.

2. M *je měřitelná tehdy a jen tehdy, je-li* $f_{-1}(M)$ *měřitelná, načež*

$$\mu(M) = \int_{f_{-1}(M)} |D_f(u)| \, du \, .$$

Důkaz. 1. Budiž $\mu(M) = 0$. Smím užíti 3. pomocné věty, kladu-li $A(u) = |D_f(u)|$ (to plyne z 2. pomocné věty); podle tvrzení 2 třetí pomocné věty je tedy $\mu(f_{-1}(M)) = 0$. Jestliže naopak množina $N = f_{-1}(M)$ má míru rovnou nule, užiji zobrazení f_{-1} (místo f) a dostávám $\mu(f(N)) = \mu(M) = 0$.

2. Je-li M typu F_σ, je podle pozn. 10 v § 1 také $f_{-1}(M)$ typu F_σ; je-li $N = f_{-1}(M)$ typu F_σ, je také $f(N) = M$ typu F_σ. Tedy M je měřitelná, t. j. tvaru „množina typu F_σ plus množina míry nulové" (věta 22) tehdy a jen tehdy, je-li také $f_{-1}(M)$ tohoto tvaru, t. j. měřitelná. Je-li M měřitelná, je podle 1. pomocné věty vskutku

$$\mu(M) = \int_R \chi_M(x) \, dx = \int_P \chi_M(f(u)) \, |D_f(u)| \, du = \int_{f_{-1}(M)} |D_f(u)| \, du \, ,$$

neboť je $\chi_M(f(u)) = 1$, t. j. $f(u) \in M$ tehdy a jen tehdy, leží-li u v měřitelné množině $f_{-1}(M)$.

A nyní přijde hlavní věta tohoto paragrafu:

Věta 103. *Budiž f zobrazení otevřené množiny $P \subset \mathsf{E}_r$ na $R \subset \mathsf{E}_r$. Budiž f regulární a prosté v P, s determinantem D_f. Budiž $M \subset R$ a budiž F libovolná reálná funkce. Potom je (jde o Lebesgueovy integrály)*

$$\int_M F(x) \, dx = \int_{f_{-1}(M)} F(f(u)) \, |D_f(u)| \, du \, , \tag{47}$$

jakmile jeden z obou integrálů existuje.

Poznámka 3. Vzorec platí i pro komplexní F, jakmile jeden z integrálů konverguje.

---

[25]) Znak μ značí ovšem Lebesgueovu míru v E_r.

Důkaz. I. Nechť levá strana v (47) má smysl, takže M je měřitelná, F měřitelná v M. Položme $F(x) = 0$ pro $x \in R \dot{-} M$, takže levou stranu lze psáti $\int\limits_R F(x)\,\mathrm{d}x$. Rozložíme-li $F = F^+ - F^-$, máme podle 1. pomocné věty

$$\int\limits_R F^+(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_P F^+(f(u))\,|D_f(u)|\,\mathrm{d}u$$

a podobnou rovnici pro F^-. Ježto aspoň v jedné z těchto rovnic stojí konvergentní integrály, lze je odečísti a dostáváme

$$\int\limits_R F(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_P F(f(u))\,|D_f(u)|\,\mathrm{d}u\,. \tag{48}$$

Ale $F(f(u)) = 0$, je-li $f(u) \in R \dot{-} M$, t. j. $u \in P \dot{-} f_{-1}(M)$. Ježto $f_{-1}(M)$ je měřitelná (věta 102), lze rovnici (48) vskutku psáti ve tvaru (47).

II. Nechť pravá strana v (47) má smysl. Položme $f_{-1}(M) = N \subset P$, $F(f(u))\,|D_f(u)| = G(u)$ (pokud $F(f(u))$ má smysl), takže pravá strana v (47) je

$$\int\limits_N G(u)\,\mathrm{d}u\,. \tag{49}$$

Použiji-li bodu I na tento integrál a na inversní zobrazení f_{-1}, vidím, že (49) lze psáti ve tvaru

$$\int\limits_{f(N)} G(f_{-1}(x))\,|D_{f_{-1}}(x)|\,\mathrm{d}x =$$
$$= \int\limits_M F(f(f_{-1}(x)))\,|D_f(f_{-1}(x))\,.\,D_{f_{-1}}(x)|\,\mathrm{d}x\,.$$

Ale $f(f_{-1}(x)) = x$ a dále $D_f(f_{-1}(x))\,D_{f_{-1}}(x) = 1$ (viz § 1, pozn. 3), takže (49) lze vskutku psáti ve tvaru $\int\limits_M F(x)\,\mathrm{d}x$.

Příklad 1. Budiž f speciálně t. zv. *afinní zobrazení*, dané rovnicemi

$$x_i = a_{i1}u_1 + \ldots + a_{ir}u_r + b_i \quad (i = 1, \ldots, r) \tag{50}$$

s determinantem $\Delta \neq 0$ (determinant Δ tohoto zobrazení je ovšem determinant koeficientů a_{ik}). Je to zřejmě prosté regulární zobrazení $\mathbf{E}_r$ na $\mathbf{E}_r$. Podle (47) je tedy pro $M \subset \mathbf{E}_r$

$$\int\limits_M F(x)\,\mathrm{d}x = |\Delta| \int\limits_{f_{-1}(M)} F(f(u))\,\mathrm{d}u\,, \tag{51}$$

existuje-li jeden z těchto integrálů. Speciálně pro $F(x) = 1$ plyne

$$\mu(M) = |\Delta|\,\mu(f_{-1}(M))\,, \tag{52}$$

jakmile jedna z obou množin $M, f_{-1}(M)$ je měřitelná. Je-li $|\Delta| = 1$ (což platí mimo jiné pro všechna isometrická[26]) zobrazení $\mathbf{E}_r$ do $\mathbf{E}_r$, viz **D II**, kap. VI, § 3, příkl. 3), dává (52) $\mu(M) = \mu(f_{-1}(M))$.

Vezměme ještě zcela speciální případ. Vyšetřujme množinu P bodů $u = [u_1, \ldots, u_r]$, vyhovujících nerovnostem

$$(53)\qquad A_i < a_{i1}u_1 + \ldots + a_{ir}u_r < A_i + h_i \quad (i = 1, \ldots, r),$$

kde $h_i > 0$, při čemž $\Delta \neq 0$, kde Δ je determinant čísel a_{ij}; množině P se říká rovnoběžnostěn v $\mathbf{E}_r$. Zavedeme-li zobrazení $x = f(u)$ rovnicemi (50) (kde $b_i = 0$), vidíme, že $R = f(P)$ je interval, daný nerovnostmi $A_i < x_i < A_i + h_i$ o „objemu" (míře) $h_1 \ldots h_r$. Píšeme-li v (52) $M = R$, $f_{-1}(M) = P$, dostáváme, že *míra* („objem") *rovnoběžnostěnu* (53) *je rovna* $\dfrac{h_1 \ldots h_r}{|\Delta|}$. Ježto každá nadrovina, daná rovnicí

$$(54)\qquad a_1u_1 + \ldots + a_ru_r = c \quad (a_1^2 + \ldots + a_r^2 > 0),$$

má míru rovnou nule — jak ihned dokážeme — nezmění se na míře množiny P nic, jestliže v (53) některá znamení $<$ nahradíme znameními $\leqq$.

Že (54) má míru nulovou, dokážeme takto: Vhodnou permutací souřadnic (viz větu 30) lze dosáhnouti toho, že $a_r \neq 0$. Potom lze z (54) vypočítat u_r, načež je patrno, že množina (54) je grafem funkce $\dfrac{1}{a_r}(c - a_1u_1 - \ldots - a_{r-1}u_{r-1})$ (obor: $\mathbf{E}_{r-1}$) a tedy má míru 0 (věta 76).

(Jiný důkaz: vhodnou afinní transformací převedeme (54) na zvrhlý interval $x_r = c$, jenž má míru 0 podle začátku § 10 v kap. I, a užijeme vzorce (52).)

Příklad 2 (polární souřadnice v rovině). Všimněme si napřed obecně věty 103. O množině M a funkci F se v ní nepředpokládá vlastně nic; napíše se vzorec (47), načež, zjistí-li se existence nebo dokonce hodnota jednoho z obou integrálů, je tím zjištěna existence nebo i hodnota druhého. Výhodné je, že vzorce (47) můžeme užíti jak k vý-

[26]) Při eukleidovské metrice.

počtu prvního integrálu pomocí druhého, tak také naopak k výpočtu druhého pomocí prvního. Zato se kladou dosti přísné požadavky na zobrazení f, t. j. na „transformační rovnice“

$$x_i = f_i(u_1, \ldots, u_r) \quad (i = 1, 2, \ldots, r) \; ; \tag{55}$$

požaduje se, aby toto zobrazení bylo regulární a prosté v jisté otevřené množině obsahující integrační obor integrálu vpravo (nebo, mluvím-li o inversním zobrazení $g = f_{-1}$: toto zobrazení g má býti regulární a prosté v jisté množině R, obsahující M). V praxi obyčejně užíváme poměrně jednoduchých transformací (55), ale přece jen se u nich často vyskytují body, kde parciální derivace neexistují nebo kde $D_f(u) = 0$ nebo konečně v některých bodech je porušena „prostota“ zobrazení. Je-li však takových bodů „dosti málo“, můžeme se jich často zbavit; uveďme tento případ:

Jde o integrál $\int\limits_M F(x)\,\mathrm{d}x$. Známe zobrazení f v oboru P, jež je regulární a prosté v P; klaďme $R = f(P)$ a předpokládejme, že R pokrývá „skoro celou“ množinu M, t. j. že $\mu(M \dot{-} R) = 0$. Potom mohu užíti vzorce (47) na integrační obor MR a dostávám

$$\int\limits_M F(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{MR} F(x)\,\mathrm{d}x = \int\limits_{f_{-1}(MR)} F(f(u))\,|D_f(u)|\,\mathrm{d}u \, .$$

Jako příklad uveďme zobrazení f, jehož oborem je interval $I = \langle 0, +\infty) \times \langle 0, 2\pi \rangle$ (načrtněte!) a které každému bodu $[r, \varphi] \in I$ (t. j. $r \geqq 0$, $0 \leqq \varphi \leqq 2\pi$) přiřazuje bod $[x, y] = f(r, \varphi)$, daný rovnicemi

$$x = r \cos \varphi \, , \quad y = r \sin \varphi \, . \tag{56}$$

Je $D_f(r, \varphi) = r$ a f zobrazuje I na $\mathbf{E}_2$. Ale I není otevřené, D_f je někdy rovno nule a zobrazení není ještě prosté. Vezmeme-li však vnitřek intervalu I:

$$P = (0, +\infty) \times (0, 2\pi) \, , \tag{57}$$

je f již regulární a prosté v P; dále je $f(P) = R$ množina, která vznikne z $\mathbf{E}_2$ odstraněním bodů $[x, 0]$ $(x \geqq 0)$, takže $\mu(\mathbf{E}_2 \dot{-} R) = 0$. Pro libovolnou množinu $M \subset \mathbf{E}_2$ je tedy — jakmile jeden z napsaných integrálů existuje —

$$
(58)\qquad \begin{aligned} \iint_M F(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_{RM} F(x, y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \\ &= \iint_{f_{-1}(RM)} F(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \\ &= \iint_{f_{-1}(M)} F(r\cos\varphi, r\sin\varphi)\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi\ ^{27}). \end{aligned}
$$

Poslední rovnice platí proto, že množina $f_{-1}(M) \dot{-} f_{-1}(RM)$ se skládá pouze z bodů, ležících na hranici intervalu I, a má proto míru 0.

Postupoval jsem poněkud rozvláčně, ale chtěl jsem na typickém příkladě ukázat, jak lze často odstranit nepodstatné obtíže, vyskytující se při užívání vzorce (47). Podotýkám, že místo intervalu $\langle 0, 2\pi \rangle$ bychom mohli vzíti jakýkoliv interval délky 2π. Následují tři speciální příklady na transformaci (56).

Příklad 3. Pro $0 < \varrho < +\infty$ je podle (58) a podle Fubiniovy věty

$$
I = \iint_{x^2+y^2<\varrho^2} \frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}a}} = \iint_{\substack{0<r<\varrho \\ 0<\varphi<2\pi}} r^{1-a}\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\varrho} \Big(r^{1-a} \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi\Big)\,\mathrm{d}r\ ;
$$

vychází $I = \dfrac{2\pi\varrho^{2-a}}{2-a}$ pro $a < 2$, $I = +\infty$ pro $a \geqq 2$.

Příklad 4. Podáme nový, velmi jednoduchý výpočet Laplaceova integrálu (viz kap. III, § 7, příkl. 12)

$$
I = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\,.
$$

Fubiniova věta dává

$$
\begin{aligned} \iint_{\substack{x>0 \\ y>0}} \mathrm{e}^{-x^2-y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \int_0^{+\infty} \Big(\mathrm{e}^{-x^2} \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\Big)\,\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} I\,\mathrm{d}x = \\ &= I \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = I^2\,. \end{aligned}
$$

[27]) $f_{-1}(M)$ značí vzor množiny M při zobrazení f a to i tehdy, když f není prosté (**D II**, kap. I, § 3, str. 26 dole).

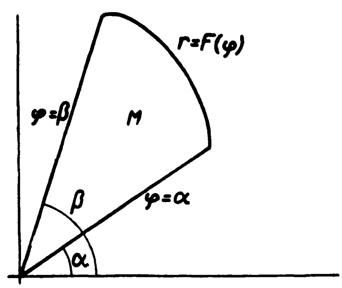
Věta 103 a Fubiniova věta dávají

$$\iint\limits_{\substack{x>0\\y>0}} e^{-x^2-y^2}\,dx\,dy = \iint\limits_{\substack{r>0\\0<\varphi<\frac{1}{2}\pi}} e^{-r^2} r\,dr\,d\varphi = \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \Big(\int\limits_0^{+\infty} e^{-r^2} r\,dr\Big)\,d\varphi =$$

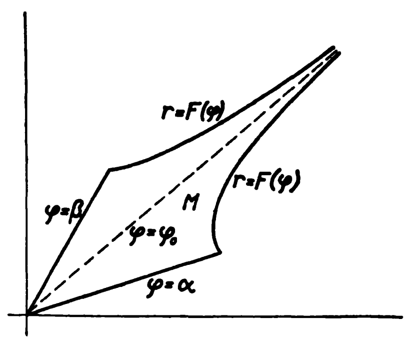
$$= \int\limits_0^{\frac{1}{2}\pi} \tfrac{1}{2} d\varphi = \tfrac{1}{4}\pi\,.$$

Tedy $I^2 = \frac{1}{4}\pi$; ježto $I \geqq 0$, je $I = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

Příklad 5. (Obsah v polárních souřadnicích.) *Budiž* (α, β) *interval délky nejvýše* 2π. *Budiž* F *funkce nezáporná v* (α, β) (ne nutně konečná). Budiž M množina oněch bodů $[x, y]$ v rovině, které mají tvar $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, $\alpha < \varphi < \beta$, $0 < r < F(\varphi)$ (obr. 5, 6; jde



Obr. 5.



Obr. 6.

o „křivočarý trojúhelník", jehož „strany" mají v polárních souřadnicích rovnice $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, $r = F(\varphi)$ — čtenář mně jistě rozumí i v případě, že $F(\varphi) = +\infty$ pro některé φ — viz obr. 6, kde $F(\varphi_0) = +\infty$). Jde o to, kdy M je měřitelná a jak se vypočte $\mu(M)$. Postupné užití příkladu 2 v kap. III, § 1, věty 103 a Fubiniovy věty 74 dává

$$\mu(M) = \iint\limits_M dx\,dy = \iint\limits_{\substack{\alpha<\varphi<\beta\\0<r<F(\varphi)}} r\,dr\,d\varphi = \int\limits_\alpha^\beta \Big(\int\limits_0^{F(\varphi)} r\,dr\Big)\,d\varphi = \tfrac{1}{2}\int\limits_\alpha^\beta F^2(\varphi)\,d\varphi\,;$$

přitom tento vzorec platí tehdy a jen tehdy, existuje-li

$$\iint\limits_{\substack{\alpha<\varphi<\beta\\0<r<F(\varphi)}} r\,dr\,d\varphi\,.$$

Ježto je to integrál spojité nezáporné funkce, existuje tento integrál tehdy a jen tehdy, je-li množina $\underset{[\varphi, r]}{\mathcal{E}}(\varphi \in (\alpha, \beta), 0 < r < F(\varphi))$ měřitelná (pozor! jde teď o množinu bodů $[\varphi, r]$ s „pravoúhlými" souřadnicemi φ, r. Že jsem před tím psal $[r, \varphi]$, nevadí — viz větu 30). Ale podle věty 77 je tato množina měřitelná tehdy a jen tehdy, je-li F měřitelná v (α, β). Tedy: *M je měřitelná tehdy a jen tehdy, je-li F měřitelná v (α, β), načež*

$$\mu(M) = \tfrac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta} F^2(\varphi)\,\mathrm{d}\varphi\,.$$

Na př. pro $\alpha < \beta \leqq \alpha + 2\pi$, $c > 0$, $a > 0$ a pro křivky (v „polárních souřadnicích") $r = c\varphi$ $(\alpha \geqq 0)$, $r = c\mathrm{e}^{a\varphi}$, $r = c \lg a\varphi$ $(a\alpha \geqq 1)$ vyjde po řadě

$$\mu(M) = \tfrac{1}{6}c^2(\beta^3 - \alpha^3),$$

$$\mu(M) = \frac{c^2}{4a}(\mathrm{e}^{2a\beta} - \mathrm{e}^{2a\alpha})\,,$$

$$\mu(M) = \frac{c^2}{a}\left[\tfrac{1}{2}\varphi \lg^2 \varphi - \varphi \lg \varphi + \varphi\right]_{\varphi = a\alpha}^{\varphi = a\beta}\,.$$

Vytkněme ještě zvláště tento speciální případ věty 103 pro $r = 1$:

Věta 104. *Budiž f funkce spojitá a ryze monotonní v (α, β); položme $\lim_{u \to \alpha+} f(u) = a$, $\lim_{u \to \beta-} f(u) = b$.*[28] *Nechť existuje množina $N \subset (\alpha, \beta)$ s těmito vlastnostmi:*

1. $\mu(N) = \mu(f(N)) = 0$;

2. $(\alpha, \beta) \dot{-} N$ *je otevřená;*

3. *v množině $(\alpha, \beta) \dot{-} N$ má f konečnou spojitou od nuly různou derivaci. Potom je*

$$\int_a^b F(x)\,\mathrm{d}x = \int_{\alpha}^{\beta} F(f(u))\,f'(u)\,\mathrm{d}u\,, \tag{59}$$

má-li jeden z těchto integrálů smysl.

Důkaz. f je zobrazení regulární a prosté v otevřené množině $(\alpha, \beta) \dot{-} N$ a zobrazuje ji (ježto f je prosté v celém (α, β)) na množinu

[28]) Tedy: f zobrazuje (α, β) na (a, b) při rostoucím f, ale na (b, a) při klesajícím f.

$(a, b) \dot{-} f(N)$ při rostoucím f a na množinu $(b, a) \dot{-} f(N)$ při klesajícím f. Tedy podle věty 103 je[29])

$$\int_{(a,b) \dot{-} f(N)} F(x)\,dx = \int_{(\alpha,\beta) \dot{-} N} F(f(u))\,f'(u)\,du \text{ při rostoucím } f\,,$$

$$\int_{(b,a) \dot{-} f(N)} F(x)\,dx = -\int_{(\alpha,\beta) \dot{-} N} F(f(u))\,f'(u)\,du \text{ při klesajícím } f\,,$$

existuje-li jeden z těchto integrálů. Ale do integračních oborů mohu přidat nulové množiny N, $f(N)$. Uvážím-li, že $\int_{(a,b)} = \int_a^b$ pro $a < b$, $\int_{(b,a)} = \int_b^a = -\int_a^b$ pro $a > b$, dostanu (59).

Poznámka 4. Věta je velmi pohodlná v praxi. Intervaly (α, β), (a, b) (po příp. (b, a)) nemusí být omezené. Podmínky 1, 2, 3 říkají prostě, že f má mít spojitou od nuly různou konečnou derivaci v otevřené množině, která vznikne z (α, β) odstraněním vhodné nulové množiny, jejíž obraz je také nulová množina; to bývá v praxi většinou splněno. (Vedle toho ovšem se požaduje spojitost a ryzí monotonnost v celém intervalu (α, β).)

§ 3.* Obecná zobrazení třídy C_1.* Budiž f zobrazení množiny $P \subset \mathbf{E}_r$ do $\mathbf{E}_r$, dané rovnicemi

(60) $$x_i = f_i(u_1, \ldots, u_r) \quad (i = 1, \ldots, r)\,.$$

Budeme říkati, že f je zobrazení třídy C_1 v P, jestliže P je otevřená a derivace $\dfrac{\partial f_i}{\partial u_j}$ $(i, j = 1, \ldots, r)$ jsou konečné a spojité v P. Na rozdíl od regulárních zobrazení může tedy býti $D_f(u) = 0$. Vymizení determinantu D_f má podstatný vliv na míru obrazu $f(P)$, jak ukážeme ve větě 105.

Poznámka 1. Každou otevřenou množinu $P \neq \emptyset$ lze vyjádřiti jako sjednocení spočetného systému uzavřených krychlových intervalů. Důkaz: Každému bodu $x \in P$ lze přiřaditi „racionální krychli" K_x (t. j. interval $\langle a_1, a_1 + h\rangle \times \langle a_2, a_2 + h\rangle \times \ldots \times \langle a_r, a_r + h\rangle$,

[29]) Jest $|f'| = f'$ při rostoucím f, ale $|f'| = -f'$ při klesajícím f.

kde $a_1, \ldots, a_r, h$ jsou racionální, $0 < h < +\infty$) tak, že $x \in K_x$, $K_x \subset P$. Zřejmě tedy $P = \bigcup_{x \in P} K_x$, ale mezi množinami K_x je jen spočetně mnoho různých množin (ježto množina všech racionálních krychlí je spočetná). Tedy každá otevřená množina je typu F_σ (čtenář to ostatně ví z **D II**, kap. VI, § 6, pozn. 2), její spojitý obraz je tedy podle pozn. 10 z § 1 také množina typu F_σ a tedy měřitelná množina.

Věta 105. *Budiž f zobrazení z $\mathbf{E}_r$ do $\mathbf{E}_r$, které je třídy C_1 v otevřené množině $P \subset \mathbf{E}_r$. Potom platí:*

I. Je-li $D_f(u) \neq 0$ aspoň v jednom bodě $u \in P$, obsahuje $f(P)$ neprázdnou otevřenou množinu a tedy je $\mu(f(P)) > 0$.[30]

II. Je-li $D_f(u) = 0$ pro všechna $u \in P$, je $\mu(f(P)) = 0$ a tedy $f(P)$ neobsahuje žádnou neprázdnou otevřenou množinu.

Důkaz. I. Existuje-li $u_0 \in P$ tak, že $D_f(u_0) \neq 0$, existuje okolí P_1 bodu u_0 ($u_0 \in P_1 \subset P$) tak, že všude v P_1 je $D_f(u) \neq 0$, takže f je regulární v P_1 a tedy $f(P_1)$ je (viz § 1, pozn. 3 nebo **D II**, věta 212) otevřená množina, obsažená v $f(P)$.

II. Budiž $D_f(u) = 0$ všude v P.[31] Dokážeme:

$\mathfrak{A}$) Je-li K libovolná uzavřená krychle (t. j. interval tvaru $\langle a_1, a_1 + h\rangle \times \langle a_2, a_2 + h\rangle \times \ldots \times \langle a_r, a_r + h\rangle$, $0 < h < +\infty$) obsažená v P, je $\mu(f(K)) = 0$.

Je zřejmé, že II plyne z $\mathfrak{A}$). Neboť podle pozn. 1 lze psáti $P = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n$, kde K_n jsou uzavřené krychle, tedy $f(P) = \bigcup f(K_n)$ a podle $\mathfrak{A}$) plyne $\mu(f(P)) \leqq \sum \mu(f(K_n)) = 0$. Stačí tedy dokázati $\mathfrak{A}$).

Místo $\mathfrak{A}$) dokážeme toto:

$\mathfrak{B}$) Budiž K uzavřená krychle, obsažená v P. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$ s touto vlastností: Je-li H libovolná uzavřená krychle obsažená v K a mající hranu kratší než η, je

$$\mu(f(H)) \leqq \varepsilon\, \mu(H)\,. \tag{61}$$

Z tvrzení $\mathfrak{B}$) plyne $\mathfrak{A}$) takto: Budiž dána uzavřená krychle $K \subset P$ o délce hrany h. Zvolme $\varepsilon > 0$, sestrojme příslušné $\eta(\varepsilon)$ a rozdělme

[30]) $f(P)$ je měřitelná podle pozn. 1.
[31]) Předpokládáme $P \neq \emptyset$; případ $P = \emptyset$ je zřejmý.

krychli K na n^r uzavřených krychlí $K_1, K_2, \ldots, K_{n^r}$ o hraně $\frac{h}{n}$,[32]) při čemž přirozené číslo n volíme tak velké, že $\frac{h}{n} < \eta(\varepsilon)$; tedy podle (61) $\mu(f(K_i)) \leqq \varepsilon\, \mu(K_i)$ a odtud

$$\mu(f(K)) = \mu(\bigcup_{i=1}^{n^r} f(K_i)) \leqq \sum_i \mu(f(K_i)) \leqq$$

$$\leqq \varepsilon \sum_i \mu(K_i) = \varepsilon \,.\, n^r \,.\, \frac{h^r}{n^r} = \varepsilon\, \mu(K)\,.$$

Ježto to platí pro každé $\varepsilon > 0$, je $\mu(f(K)) = 0$.

Stačí tedy, provedeme-li

důkaz tvrzení $\mathfrak{B}$). Budiž tedy $K \subset P$ uzavřená krychle. Spojité konečné funkce $\frac{\partial f_i}{\partial u_j}$ jsou v kompaktní množině K omezené a stejnoměrně spojité (viz **D II**, věta 169 a 170). Tedy existuje předně c $(0 < c < +\infty)$ tak, že

$$(62) \qquad u \in K \Rightarrow \left| \frac{\partial f_i(u)}{\partial u_j} \right| < c$$

a za druhé ke každému $\zeta > 0$ existuje $\delta = \delta(\zeta) > 0$ tak, že

$$(63) \qquad \begin{aligned} &(a \in K,\ b \in K,\ \operatorname*{Max}_{1 \leqq i \leqq r} |b_i - a_i| < \delta) \Rightarrow \\ &\Rightarrow \operatorname*{Max}_{\substack{1 \leqq i \leqq r \\ 1 \leqq j \leqq r}} \left| \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right)_{u=b} - \left(\frac{\partial f_i}{\partial u_j}\right)_{u=a} \right| < \zeta\,. \end{aligned}$$

Budiž nyní $\zeta > 0$, H uzavřená krychle, $H \subset K$; pišme $H = \langle a_1, a_1 + h\rangle \times \ldots \times \langle a_r, a_r + h\rangle$ a budiž $0 < h < \delta(\zeta)$. Je-li $u \in H$, je podle poznámky 1 k větě 203 v **D II**[33])

$$(64) \qquad f_i(u) - f_i(a) = \sum_{j=1}^{r} (u_j - a_j) \frac{\partial f_i(v)}{\partial u_j}\,,$$

[32]) Vnitřky těchto krychlí jsou disjunktní; mají však po příp. společné body na hranici.

[33]) Existence totálního diferenciálu plyne ze spojitosti parciálních derivací (viz **D II**, věta 187).

kde v značí nějaký bod úsečky o krajních bodech a, u; tedy $v \in H$, $|v_j - a_j| \leqq |u_j - a_j| \leqq h < \delta(\zeta)$. Tedy předně (podle (64), (62))

$$-rhc < f_i(u) - f_i(a) < rhc \quad (i = 1, 2, \ldots, r) \tag{64a}$$

a za druhé $\left(\frac{\partial f_i(a)}{\partial u_j} \text{ značí derivace v bodě } a\right)$ podle (64), (63)

$$f_i(u) - f_i(a) = \sum_{j=1}^{r} (u_j - a_j) \left(\frac{\partial f_i(a)}{\partial u_j} + \lambda_{ij}\right), \tag{65}$$

kde $|\lambda_{ij}| < \zeta$.[34] Ježto $D_f(a) = 0$, existují reálná čísla $A_1, \ldots, A_r$ (závislá pouze na a), která nejsou vesměs rovna nule a pro něž je

$$\sum_{i=1}^{r} A_i \frac{\partial f_i(a)}{\partial u_j} = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, r). \tag{66}$$

Násobím-li vhodným číslem, mohu docíliti toho, že $|A_i| \leqq 1$ pro všechna i, $A_i = 1$ aspoň pro jedno i; bez újmy obecnosti budiž $A_1 = 1$. Násobím (65) číslem A_i a sečtu pro $i = 1, 2, \ldots, r$; obdržím

$$\begin{aligned} &A_1 f_1(u) + A_2 f_2(u) + \ldots + A_r f_r(u) = \\ &= \sum_{i=1}^{r} A_i f_i(a) + \sum_{i,j=1}^{r} A_i \lambda_{ij} (u_j - a_j). \end{aligned} \tag{67}$$

Pro každý bod $x \in f(H)$, t. j. pro každý bod x, kde $x_i = f_i(u)$, $u \in H$, platí tedy rovnice (67) a nerovnosti (64a) (kterých užijeme pro $i = 2, \ldots, r$). Ježto $A_1 = 1$, $|A_i| \leqq 1$, $|\lambda_{ij}| < \zeta$, plyne odtud pro každý bod $x \in f(H)$:

$$\begin{gathered} \sum_{i=1}^{r} A_i f_i(a) - r^2 h\zeta < x_1 + A_2 x_2 + \ldots + A_r x_r < \sum_{i=1}^{r} A_i f_i(a) + r^2 h\zeta, \\ f_i(a) - rhc < x_i < f_i(a) + rhc \quad (i = 2, 3, \ldots, r). \end{gathered} \tag{68}$$ [35]

Tedy $f(H)$ je obsažena v rovnoběžnostěnu, definovaném nerovnostmi (68), jehož míra (objem) je (viz § 2, konec příkl. 1; zde je $\Delta = 1$) $2^r r^{r+1} c^{r-1} \zeta h^r$. Tedy

$$\mu(f(H)) \leqq 2^r r^{r+1} c^{r-1} \zeta\, \mu(H), \tag{69}$$

neboť $\mu(H) = h^r$. Budiž nyní $\varepsilon > 0$; volme $\zeta > 0$ tak, že $2^r r^{r+1} c^{r-1} \zeta = \varepsilon$. Jestliže H je libovolná uzavřená krychle ležící v K a mající

---

[34]) $\lambda_{i,j}$ závisí ovšem na a, u, i, j.

hranu kratší než $\delta(\zeta)$,[36]) platí (69), t. j. $\mu(f(H)) \leqq \varepsilon\,\mu(H)$, což bylo dokázati.

Poznámka 2. Srovnejte větu 105 s větou 213 v **D II** (pro speciální případ $s = r$). Budiž f zobrazení otevřené množiny $P \subset \mathbf{E}_r$ do $\mathbf{E}_r$, které je třídy C_1 v P a nechť $D_f(u) = 0$ všude v P. Tato podmínka má za následek — zhruba řečeno — že souřadnice $f_1(u), \ldots, f_r(u)$ bodu $f(u)$ jsou k sobě jistým způsobem vázány. Ve větě 213 v **D II** se to projevilo „lokálně" tím, že v okolí každého bodu $u_0 \in P$, který není „singulárním",[37]) lze aspoň jednu z funkcí $f_1, \ldots, f_r$ vyjádřiti jako funkci ostatních; ve větě 105 se to projevuje „globálně" tím, že bod $f(u) = [f_1(u), \ldots, f_r(u)]$ má „malou volnost pohybu": probíhá-li u množinu P, probíhá bod $f(u)$ pouze množinu míry nulové.

[35]) Pro $r = 1$ tyto nerovnosti odpadají.
[36]) Číslo $\delta(\zeta)$ závisí na ε; můžeme je označit $\eta(\varepsilon)$.
[37]) Těch singulárních bodů je „málo", tvoří pouze řídkou množinu — viz **D II**, pozn. 2 za větou 213.