Dodatek III. Věta Weierstrassova a implicitní funkce

In: Vojtěch Jarník (author): Diferenciální počet II. (Czech). Praha: Academia, 1984.
pp. 614--660.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402022

DODATEK III

VĚTA WEIERSTRASSOVA A IMPLICITNÍ FUNKCE

§ 1. Věta Weierstrassova. V tomto dodatku se budeme zabývat řadami tvaru

$$(1) \qquad \sum_{j_1, \ldots, j_r}^{\infty} a_{j_1, \ldots, j_r} x_1^{j_1} \ldots x_r^{j_r} \qquad (r \geqq 1)$$

pro komplexní $x_1, \ldots, x_r$. Užijeme však dosažených výsledků též ke studiu reálných proměnných a bude nás tedy zajímati otázka, kdy součet řady (1) — pokud je absolutně konvergentní — je reálný pro reálné hodnoty $x_1, \ldots, x_r$. Odpověď je téměř samozřejmá:

Věta 252. *Řada* (1) *budiž absolutně konvergentní v okolí počátku; budiž $f(x_1, \ldots, x_r)$ její součet. Potom výrok „Existuje $R > 0$ tak, že f je reálná pro všechna reálná $x_1, \ldots, x_r$, splňující nerovnosti $| x_j | < R$ $(j = 1, \ldots, r)$“ platí tehdy a jen tehdy, jsou-li všechna čísla $a_{j_1, \ldots, j_r}$ reálná.*

Důkaz. I. Jsou-li $a_{j_1, \ldots, j_r}$ reálná, je součet řady (1) — pokud existuje — reálný pro reálná x_j.

II. Je-li f reálná pro všechny reálné hodnoty x_j takové, že $| x_j | < R$, jsou též parciální derivace funkce f reálné pro tyto reálné hodnoty x_j (neboť se tyto derivace dají počítati jako derivace reálné parciální funkce $f_N(x_1, \ldots, x_r)$ reálných proměnných, kde N je množina oněch (reálných) bodů $[x_1, \ldots, x_r]$, pro něž je $-R < x_j < R$, viz kap. XI, § 1, pozn. 3). Speciálně jsou tedy reálná též čísla (viz větu 232)

$$\frac{1}{j_1! \ldots j_r!} \, \frac{\partial^{j_1 + \ldots + j_r} f(0, \ldots, 0)}{\partial x_{x_1}^{j_1} \ldots \partial x_r^{j_r}} = a_{j_1, \ldots, j_r}.$$

Věta, kterou nyní odvodíme, se týká následující věci:
Budiž

$$(2) \qquad F(x_1, \ldots, x_r, y) = \sum_{k_1, \ldots, k_r, k = 0}^{\infty} a(k_1, \ldots, k_r; k)\, x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r} y^k$$

mocninná řada o $r + 1$ proměnných, absolutně konvergentní v okolí počátku. (Ježto indexy budou často složité, píši raději $a(k_1, \ldots, k_r; k)$ místo $a_{k_1, \ldots, k_r, k}$ apod.)

Předpokládáme, že $F(0, \dots, 0, 0) = a(0, \dots, 0; 0) = 0$, že však řada (2) obsahuje nějaký od nuly různý člen $a(0, \dots, 0; k)\, y^k$ (v němž tedy $k_1 = \dots = k_r = 0$); budiž n nejmenší taková hodnota k, takže

(3) $\quad a(0, \dots, 0; k) = 0 \quad \text{pro} \quad 0 \leqq k < n, \quad a(0, \dots, 0; n) \neq 0.$

Za tohoto předpokladu rozložíme funkci F ve dva činitele:

Věta 253. *Budiž řada* (2) *absolutně konvergentní v okolí počátku; budiž n přirozené číslo takové, že platí* (3). *Potom existuje jedna a jen jedna mocninná řada*

$$G(x_1, \dots, x_r, y) = \sum_{j_1, \dots, j_r, j=0}^{\infty} b(j_1, \dots, j_r; j)\, x_1^{j_1} \dots x_r^{j_r} y^j, \tag{4}$$

jež je absolutně konvergentní v okolí počátku a splňuje v okolí počátku rovnici tvaru

$$F(x_1, \dots, x_r, y) = \left(y^n + \sum_{k=0}^{n-1} y^k p_k(x_1, \dots, x_r)\right) G(x_1, \dots, x_r, y); \tag{5}$$

přitom jsou $p_k(x_1, \dots, x_r)$ mocninné řady, absolutně konvergentní v okolí počátku, bez prostého členu (tj. $p_k(0, \dots, 0) = 0$). Součinitele mocninných řad G, p_k lze stanoviti čtyřmi základními úkony početními ze součinitelů řady F. (Věta Weierstrassova.)

Poznámka 1. Z (4) plyne, že součinitel při y^n v (5) vpravo je prostý člen $b(0, \dots, 0; 0)$, takže

$$G(0, \dots, 0, 0) = b(0, \dots, 0; 0) = a(0, \dots, 0; n) \neq 0;$$

rovnicí (5) je tedy funkce F rozložena na dva činitele: druhý z nich je různý od nuly v okolí počátku, první z nich je vzhledem k proměnné y mnohočlen n-tého stupně.

Důkaz. Ježto z rovnice (5) plyne $G(0, \dots, 0, 0) \neq 0$ (viz pozn. 1), znamená rovnice (5) v jistém okolí počátku totéž jako rovnice

$$F(x_1, \dots, x_r, y) \,.\, H(x_1, \dots, x_r, y) = y^n + \sum_{k=0}^{n-1} y^k p_k(x_1, \dots, x_r), \tag{6}$$

kde $H = 1 : G$. Přitom má býti H mocninná řada

$$H(x_1, \dots, x_r, y) = \sum_{k_1, \dots, k_r, k=0}^{\infty} d(k_1, \dots, k_r; k)\, x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r} y^k \tag{7}$$

absolutně konvergentní v okolí počátku; všimněme si, že z (6) plyne nutně (srovnáním součinitelů při y^n)

$$d(0, \ldots, 0; 0) = \frac{1}{a(0, \ldots, 0; 0)} \neq 0. \tag{8}$$

Najdu-li takovou řadu H vyhovující rovnici (6) a zjistím-li, že je jednoznačně stanovena, bude tím také nalezena a jednoznačně stanovena řada $G = 1 : H$, vyhovující rovnici (5) (viz větu 235); součinitele řady G lze ze součinitelů řady H obdržeti čtyřmi základními úkony početními (viz větu 235) a součinitele řad p_k lze podle (6) obdržeti ze součinitelů řad F, H rovněž čtyřmi základními úkony početními (viz rovnici (49) ve větě 233). Máme tedy dokázat toto:

I. Existuje jedna a jen jedna řada (7) tak, že platí „formálně" rovnice (6), to znamená: vytvořím-li mocninnou řadu $F \,.\, H$ podle pravidla, vysloveného ve větě 233 (viz rovnici (49) v této větě), bude tato řada míti prostý člen 0, součinitele 0 při $y, y^2, \ldots, y^{n-1}$, součinitele 1 při y^n a konečně součinitele 0 při každém součinu $y^k x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r}$, kde je buďto $k > n$ nebo $k_1 + \ldots + k_r > 0$, $k = n$. Součinitele této řady (7) lze stanoviti ze součinitelů řady (2) čtyřmi základními úkony početními.

II. Řada (7), stanovená v bodě I, jest absolutně konvergentní v okolí počátku.

K bodu I. „Výškou" členu $d(l_1, \ldots, l_r; h)$ nazvu číslo $(n + 1)(l_1 + \ldots + l_r) + h$. Rovnice, jež mají býti splněny, jsou tyto: jsou-li $m_1, \ldots, m_r; m$ libovolná celá nezáporná čísla, má býti

$$\sum_{\substack{j_1 + k_1 = m_1 \\ \cdots\cdots\cdots \\ j_r + k_r = m_r \\ j + k = m}} a(j_1, \ldots, j_r; j)\, d(k_1, \ldots, k_r; k) = \tag{9}$$
$$= \begin{cases} 1 \text{ pro } m = n, m_1 + \ldots + m_r = 0 \\ 0 \text{ pro } m = n, m_1 + \ldots + m_r > 0 \\ 0 \text{ pro } m > n, m_1 + \ldots + m_r \geqq 0 \\ 0 \text{ pro } m < n, m_1 + \ldots + m_r = 0. \end{cases}$$

Přitom jest $a(j_1, \ldots, j_r; j) = 0$ pro $j_1 + \ldots + j_r = 0, j < n$; tyto členy budeme tedy v (9) vynechávati. Odtud je též patrno, že v (9) stojí ve čtvrtém případě vlevo nula, takže rovnice je splněna, ať jsou čísla „d“ jakákoliv; budeme se proto zabývati pouze prvními třemi případy této rovnice. Pišme $a(0, \ldots, 0; n) = \alpha \neq 0$; první rovnice potom jest

$$\alpha d(0, \ldots, 0; 0) = 1, \quad \text{tj.} \quad d(0, 0, \ldots, 0; 0) = \frac{1}{\alpha}, \tag{10}$$

čímž je určen člen výšky 0. V druhém nebo třetím případě lze rovnici (9) psát ve tvaru

$$\alpha d(m_1, \ldots, m_r; m - n) = -\Sigma\, a(j_1, \ldots, j_r; j)\, d(k_1, \ldots, k_r; k). \tag{11}$$

Přitom jest $m \geqq n$ a v případě $m = n$ jest $m_1 + \ldots + m_r > 0$; vpravo se sčítá přes ony systémy $j_1, \ldots, j_r; j; k_1, \ldots, k_r; k$, pro něž platí předně

$$j_1 + k_1 = m_1, \ldots, j_r + k_r = m_r, \qquad j + k = m \tag{12}$$

a za druhé

$$\text{buďto} \quad j_1 + \ldots + j_r > 0, \quad \text{nebo} \quad j > n. \tag{13}$$

Píši-li $m - n = h$, lze rovnice (11) psáti (vzhledem k (12), (13)) v tomto tvaru:

$$\begin{aligned} &\alpha d(m_1, \ldots, m_r; h) = \\ &= -\Sigma\, a(j_1, \ldots, j_r, j)\, d(m_1 - j_1, \ldots, m_r - j_r; h + n - j). \end{aligned} \tag{14}$$

Přitom je $h \geqq 0$ a v případě $h = 0$ je $m_1 + \ldots + m_r > 0$ (případu $h = 0$, $m_1 + \ldots + m_r = 0$ odpovídá rovnice (10)). Vpravo se sčítá přes všechna $j_1, \ldots, j_r; j$ taková, že je (viz (12), (13))

$$0 \leqq j_1 \leqq m_1, \ldots, 0 \leqq j_r \leqq m_r, \qquad 0 \leqq j \leqq h + n$$

a přitom

$$\text{buďto} \quad j_1 + \ldots + j_r > 0 \quad \text{nebo} \quad j > n.$$

Člen výšky nula je stanoven rovnicí (10); budiž $p \in N$ a předpokládejme, že byli již stanoveni všichni členové výšky $< p$; budiž $d(m_1, \ldots, m_r; h)$ nějaký člen výšky p, takže

$$(n + 1)(m_1 + \ldots + m_r) + h = p.$$

Členové d, vystupující v rovnici (14) vpravo, mají výšku

$$\begin{aligned} &(n + 1)(m_1 - j_1 + \ldots + m_r - j_r) + h + n - j = \\ &= p - (n + 1)(j_1 + \ldots + j_r) + n - j. \end{aligned} \tag{15}$$

Zde je buďto $j_1 + \dots + j_r \geqq 1, j \geqq 0$, takže výraz (15) je menší než p; nebo je $j_1 + \dots + j_r = 0$, $j > n$, načež výraz (15) je opět menší než p. Rovnice (14) určuje tedy postupně všechny členy kladné výšky pomocí členů menší výšky, přičemž se zřejmě užívá pouze čtyř základních úkonů početních. Ježto rovnice (10) stanoví člen výšky 0, je řada (7) sestrojena a bod I dokázán.

K bodu II. Položili jsme $a(0, \dots, 0; n) = \alpha$. Podle věty 232 existují čísla $0 < K_1 < +\infty$, $0 < K_2 < +\infty$ tak, že $| a(k_1, \dots, k_r; k) | \leqq \leqq K_1 K_2^{k_1 + \dots + k_r + k}$. Volme nyní $L < +\infty$ tak velké, že $L \, | \alpha | > K_1 K_2$, $L > K_2$; potom jest tedy

$$(16) \qquad | a(k_1, \dots, k_r; k) | \leqq | \alpha | \, L^{k_1 + \dots + k_r + k}$$

(tato nerovnost platí i pro $k_1 + \dots + k_r + k = 0$, neboť potom je levá strana 0). Volme ještě L tak velké, že $L > (r + 1) \, 2^{r+1}$. Tvrdím, že jest

$$(17) \qquad | d(k_1, \dots, k_r; k) | \leqq \frac{1}{| \alpha |} L^{(n^2+2n+2)(k_1 + \dots + k_r) + (n+2) k}.$$

To platí vskutku podle (10) pro člen $d(0, \dots, 0; 0)$ výšky 0. Budiž p přirozené číslo a předpokládejme, že (17) platí pro všechny členy výšky $< p$; budiž pak $d(m_1, \dots, m_r; h)$ nějaký člen výšky p, takže

$$(n + 1)(m_1 + \dots + m_r) + h = p.$$

Ježto v (14) mají všechna čísla „d" vpravo výšku menší než p, je podle (14), (16), (17)

$$(18) \qquad \begin{aligned} | d(m_1, \dots, m_r; h) | &\leqq \frac{1}{| \alpha |} \sum_{j_1, \dots, j_r, j} L^{j_1 + \dots + j_r + j} \times \\ &\times L^{(n^2+2n+2)(m_1 - j_1 + \dots + m_r - j_r) + (n+2)(h + n - j)} = \\ &= \frac{1}{| \alpha |} L^{(n^2+2n+2)(m_1 + \dots + m_r) + (n+2)(h+n)} \times \\ &\times \sum_{j_1, \dots, j_r, j} L^{-(n^2+2n+1)(j_1 + \dots + j_r) - (n+1) j}; \end{aligned}$$

přitom se sčítá přes takové hodnoty $j_1 \leqq m_1, \dots, j_r \leqq m_r, j \leqq h + n$, že je buďto $j > n$ nebo $j_1 > 0$ nebo $j_2 > 0 \dots$ nebo $j_r > 0$. Poslední řada má tedy součet menší než

$$\sum_{j_1=0}^{\infty} L^{-(n^2+2n+1)j_1} \dots \sum_{j_r=0}^{\infty} L^{-(n^2+2n+1)j_r} + \sum_{j=n+1}^{\infty} L^{-(n+1)j} +$$

$$(19) \qquad + r \sum_{j_1=1}^{\infty} L^{-(n^2+2n+1)j_1} \sum_{j_2=0}^{\infty} L^{-(n^2+2n+1)j_2} \dots \sum_{j_r=0}^{\infty} L^{-(n^2+2n+1)j_r} \sum_{j=0}^{\infty} L^{-(n+1)j}.$$

Ježto součet geometrické řady s kvocientem $q \left(0 < q < \frac{1}{2}\right)$ je menší než dvojnásobek prvního členu, je výraz (19) menší než

$$2^{r+1} L^{-(n+1)^2} + r 2^{r+1} L^{-(n^2+2n+1)} < L^{-n^2-2n}.$$

Dosadíme-li odtud do (18), obdržíme

$$| d(m_1, \dots, m_r; h) | \leqq \frac{1}{|\alpha|} L^{(n^2+2n+2)(m_1+\dots+m_r)+(n+2)h},$$

čímž je (17) dokázáno i pro výšku p. Položím-li nyní $A = L^{n^2+2n+2}$, $B = L^{n+2}$, jest

$$(20) \qquad | d(k_1, \dots, k_r; k) | \leqq \frac{1}{|\alpha|} A^{k_1+\dots+k_r} B^k.$$

Avšak řada

$$\frac{1}{|\alpha|} \sum_{k_1, \dots, k_r, k=0}^{\infty} A^{k_1+\dots+k_r} B^k x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r} y^k =$$

$$= \frac{1}{|\alpha|} \sum_{k_1=0}^{\infty} (Ax_1)^{k_1} \dots \sum_{k_r=0}^{\infty} (Ax_r)^{k_r} \sum_{k=0}^{\infty} (By)^k$$

jest absolutně konvergentní pro

$$|x_1| < A^{-1}, \dots, |x_r| < A^{-1}, \qquad |y| < B^{-1};$$

tím spíše je tedy (podle (20)) pro tyto hodnoty $x_1, \dots, x_r, y$ absolutně konvergentní řada (7).

§ 2. Základní věta o implicitních funkcích. Věta 254. *Budiž*

$$(21) \qquad F(x_1, \dots, x_r, y) = \Sigma\, a(k_1, \dots, k_r; k)\, x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r} y^k \text{ [1]}$$

mocninná řada absolutně konvergentní v okolí počátku; budiž $F(0, \dots, 0, 0) = a(0, \dots, 0; 0) = 0$, $\dfrac{\partial F(0, \dots, 0, 0)}{\partial y} = a(0, \dots, 0; 1) \neq 0$. *Potom*

[1]) Sčítá se ovšem přes všechna celá nezáporná $k_1, \dots, k_r, k$, což pro zkrácení (podobně jako později) nevypisuji.

existují dvě čísla R_1, R_2 $(0 < R_1 < +\infty,\ 0 < R_2 < +\infty)$ *s touto vlastností: ke každému systému čísel* $x_1, \ldots, x_r$ *takovému, že* $|x_1| < R_1$, $\ldots, |x_r| < R_1$, *existuje v kruhu* $|y| < R_2$ *jedno a jen jedno* y *tak, že jest*

$$F(x_1, \ldots, x_r, y) = 0. \tag{22}$$

Označíme-li toto y *znakem* $p(x_1, \ldots, x_r)$, *jest tato funkce pro* $|x_1| < R_1, \ldots$, $|x_r| < R_1$ *dána absolutně konvergentní mocninnou řadou*

$$p(x_1, \ldots, x_r) = \Sigma\, c(k_1, \ldots, k_r)\, x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r} \tag{23}$$

bez prostého členu $(c(0, \ldots, 0) = 0)$. *Čísla „c" lze z čísel „a" odvoditi čtyřmi základními úkony početními.*

Poznámka 1. Že při vhodné volbě čísel R_1, R_2 existuje ke každému systému $x_1, \ldots, x_r(|x_j| < R_1)$ jedno a jen jedno $y(|y| < R_2)$ tak, že platí (22), plynulo by snadno z obecných vět kap. VIII, § 1; obšírně to ukážeme v důkazu věty 255 (bod I), kde to budeme potřebovati; nové je zde hlavně toto: dá-li se F vyjádřiti mocninnou řadou, dá se též y vyjádřiti mocninnou řadou.[2])

Důkaz. Rovnice (3) z § 1 jsou u funkce (21) splněny pro $n = 1$; podle věty 253 platí tedy rovnice

$$F(x_1, \ldots, x_r, y) = (y - p(x_1, \ldots, x_r))\, G(x_1, \ldots, x_r, y), \tag{24}$$

přičemž p, G jsou mocninné řady, absolutně konvergentní např. pro $|x_j| < R_3$, $|y| < R_3$ $(0 < R_3 < +\infty)$; přitom je $p(0, \ldots, 0) = 0$, $G(0, \ldots, 0) \neq 0$ (viz poznámku 1 k větě 253). Existuje tedy R_2 $(0 < R_2 < R_3)$ tak, že pro $|x_j| < R_2$, $|y| < R_2$ je $G(x_1, \ldots, x_r, y) \neq 0$. Ježto $p(0, \ldots, 0) = 0$, existuje $R_1(0 < R_1 < R_2)$ tak, že pro $|x_j| < R_1$ je $|p(x_1, \ldots, x_r)| < R_2$. Rovnice (24) ukazuje pak: je-li $|x_j| < R_1$, $|y| < R_2$, je rovnice $F = 0$ splněna tehdy a jen tehdy, je-li $y = p(x_1, \ldots, x_r)$; a číslo $p(x_1, \ldots, x_r)$ má vskutku prostou hodnotu menší než R_2. Obecný úkol ($r + s$ proměnných, s rovnic) řeší tato věta:

---

[2]) Podle věty o neurčitých součinitelích lze ovšem funkci $p(x_1, \ldots, x_r)$ rozvinout jen jedním způsobem v mocninnou řadu, tj. čísla $c(k_1, \ldots, k_r)$ jsou jednoznačně určena.

Věta 255. *Budiž dáno s mocninných řad*

$$(25) \qquad \begin{aligned} F_n(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s) = \Sigma\, a_n(k_1, \dots, k_r; l_1, \dots, l_s) \,. \\ . \, x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r} y_1^{l_1} \dots y_s^{l_s} \qquad (n = 1, 2, \dots, s), \end{aligned}$$

absolutně konvergentních v okolí počátku; budiž $F_n(0, \dots, 0, 0, \dots, 0) = a_n(0, \dots, 0) = 0$ *pro* $n = 1, \dots, s$; *funkční determinant* $J(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s)$ *funkcí* $F_1, \dots, F_s$ *podle proměnných* $y_1, \dots, y_s$ *budiž v počátku různý od nuly*: $J(0, \dots, 0) \neq 0$. *Budiž dále dáno kladné číslo* δ. *Potom existují čísla* R_1, R_2 *s těmito vlastnostmi*:

I. $$0 < R_1 < \delta, \qquad 0 < R_2 < \delta.$$

II. *Ke každému systému čísel* $x_1, \dots, x_r$, *vyhovujících nerovnostem* $|x_1| < R_1, \dots, |x_r| < R_1$, *existuje jeden a jen jeden systém čísel* $y_1, \dots, y_s$ *takový, že je* $|y_1| < R_2, \dots, |y_s| < R_2$ *a že platí současně s rovnic*

$$(26) \qquad F_n(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s) = 0 \qquad (n = 1, \dots, s).$$

III. *Označíme-li tyto hodnoty* $y_1, \dots, y_s$ *znaky* $p_1(x_1, \dots, x_r), \dots, p_s(x_1, \dots, x_r)$, *jsou tyto funkce pro* $|x_1| < R_1, \dots, |x_r| < R_1$ *dány absolutně konvergentními řadami bez prostého členu*

$$(27) \qquad \begin{aligned} p_n(x_1, \dots, x_r) = \Sigma\, c_n(k_1, \dots, k_r)\, x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r}, \\ c_n(0, \dots, 0) = 0 \quad \text{pro} \quad n = 1, 2, \dots, s. \end{aligned}$$

Součinitele řad $p_1, \dots, p_s$ *lze odvoditi ze součinitelů řad* $F_1, \dots, F_s$ *čtyřmi základními úkony početními.*

Poznámka 2. Smysl i obsah věty je zajisté jasný, ač text je dlouhý. Body I, II připomínají větu 210 nebo 211, k níž se v důkazu též odvoláme. Podstatně nový je bod III, říkající: jsou-li $F_1, \dots, F_s$ rozvinutelny v mocninné řady, jsou též $p_1, \dots, p_s$ rozvinutelny v mocninné řady.

Důkaz. 1. Pišme $x_j = t_j + \mathrm{i}\, u_j$, $y_j = v_j + \mathrm{i}\, w_j$,

$$F_n(x_1, \dots, x_r, y_1, \dots, y_s) = P_n(t_1, \dots, t_r, v_1, \dots, v_s, u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s) + \mathrm{i}\, Q_n(t_1, \dots, t_r, v_1, \dots, v_s, u_1, \dots, u_r, w_1, \dots, w_s)$$

(rozklad na reálnou a imaginární část). Funkce P_n, Q_n tvoří systém $2s$ reálných funkcí, závislých na $2r + 2s$ reálných proměnných; tyto funkce jsou v počátku rovny nule a mají v okolí počátku spojité parciální derivace. Funkční determinant funkcí $P_1, \ldots, P_s, Q_1, \ldots, Q_s$ podle proměnných $v_1, \ldots, v_s, w_1, \ldots, w_s$ je (viz kap. XI, § 1, příkl. 7) $|J(x_1, \ldots, y_s)|^2$, je tedy v počátku různý od nuly. Rovnice (26) znamenají pak totéž jako rovnice

$$P_n(t_1, \ldots, w_s) = 0,\ Q_n(t_1, \ldots, w_s) = 0 \qquad (n = 1, \ldots, s). \tag{28}$$

Na rovnice (28) můžeme nyní užíti věty 211; spojíme-li opět reálné a imaginární části, dostáváme: Existují kladná čísla R_3, R_4 s těmito vlastnostmi: ke každému systému čísel $x_1, \ldots, x_r$, splňujícímu nerovnosti $|t_j| < R_3$, $|u_j| < R_3$ $(j = 1, \ldots, r)$, existuje jeden a jen jeden systém hodnot $y_n = p_n(x_1, \ldots, x_r)$ $(n = 1, \ldots, s)$, jenž vyhovuje nerovnostem $|v_n| < R_4$, $|w_n| < R_4$ $(n = 1, \ldots, s)$ a splňuje rovnice (26); přitom jsou p_n funkce spojité pro $|t_j| < R_3$, $|u_j| < R_3$ a jest $p_n(0, \ldots, 0) = 0$.

2. Teď přichází hlavní věc: zjistiti, že funkce p_n $(n = 1, \ldots, s)$ lze rozvinouti v absolutně konvergentní řady. Součinitel při y_m v (25) označme g_{nm}, takže $g_{nm} = a_n(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) = \partial F_n(0, \ldots, 0)/\partial y_m$.[3]) Jest

$$D = \begin{vmatrix} g_{11} & \cdots & g_{1s} \\ & \cdots & \\ g_{s1} & \cdots & g_{ss} \end{vmatrix} \neq 0. \tag{29}$$

Rovnice (26) pišme tak, že necháme vlevo členy $g_{nm}y_m$, ostatní dáme vpravo:

$$\begin{aligned} g_{11}y_1 + \ldots + g_{1s}y_s &= -\Sigma\, a_1(k_1, \ldots, l_s)\, x_1^{k_1} \ldots y_s^{l_s} \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ g_{s1}y_1 + \ldots + g_{ss}y_s &= -\Sigma\, a_s(k_1, \ldots, l_s)\, x_1^{k_1} \ldots y_s^{l_s}. \end{aligned} \tag{30}$$

Vpravo schází člen prostý, jakož i všichni členové, které jsme nechali vlevo, takže ve všech nenulových členech vpravo jest

$$\text{buďto } k_1 + \ldots + k_r > 0 \text{ nebo } l_1 + \ldots + l_s > 1. \tag{31}$$

Označíme-li pravé strany v (30) $B_1, \ldots, B_s$, lze rovnice (30) psáti

---

[3]) Jednička na $(r + m)$tém místě.

$$
\begin{aligned}
&g_{11}y_1 + \dots + g_{1s}y_s = B_1, \\
(32)\qquad &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\
&g_{s1}y_1 + \dots + g_{ss}y_s = B_s.
\end{aligned}
$$

Z nauky o soustavách lineárních rovnic je známo (viz např. V. Kořínek: Základy algebry):

Rovnice (32) jsou splněny tehdy a jen tehdy, platí-li rovnice

$$
(33)\qquad y_n = \frac{1}{D}\sum_{j=1}^{s} D_{jn}B_j \qquad (n = 1, \dots, s),
$$

kde D_{jn} je doplněk prvku g_{jn} v determinantu (29). Dosadíme-li do (33) za B_j řady z pravých stran rovnic (30), dostanou rovnice (33) tento tvar:

$$
(34)\quad y_n = \Sigma\, b_n(k_1, \dots, k_r, l_1, \dots, l_s)\, x_1^{k_1} \dots x_r^{k_r} y_1^{l_1} \dots y_s^{l_s} \qquad (n = 1, \dots, s),
$$

přičemž řady vpravo jsou absolutně konvergentní v okolí počátku a sčítá se přes všechna celá nezáporná $k_1, \dots, k_r, l_1, \dots, l_s$, pro něž platí (31); čísla „b“ se dají zřejmě vypočísti z čísel „a“ čtyřmi základními úkony početními. Zjistíme nyní toto:

Tvrzení A. *Existují řady* (27) *bez prostého členu, absolutně konvergentní v okolí počátku a takové, že rovnice* (34) *(a tedy též* (26)) *jsou splněny v okolí počátku, dosadím-li do nich $p_j(x_1, \dots, x_r)$ za y_j ($j = 1, \dots, s$); čísla „c“ lze určiti z čísel „b“ (a tedy též z čísel „a“) čtyřmi základními úkony početními.*

K tomuto cíli dosadíme především do (34) podle (27) $y_j = p_j(x_1, \dots, x_r)$ s dosud neurčenými činiteli „c“, upravíme levou i pravou stranu v (34) v mocninnou řadu (s proměnnými $x_1, \dots, x_r$) podle předpisu, vytčeného v kap. XI, § 4, příkl. 1, načež napíšeme rovnice, říkající, že každý součinitel vlevo se rovná stejnolehlému součiniteli vpravo. Číslo $k_1 + \dots + k_r$ nazveme výškou členu $c_n(k_1, \dots, k_r)$. Členy výšky 0 zvolíme rovny nule:

$$
(35)\qquad c_n(0, \dots, 0) = 0 \qquad (n = 1, \dots, s).
$$

Srovnáním součinitelů při $x_1^{m_1} \dots x_r^{m_r}$ v rovnici (34) vlevo i vpravo dostáváme rovnici tvaru

$$
\begin{aligned}
(36)\qquad c_n(m_1, \dots, m_r) = \Sigma\, b_n(k_1, \dots, k_r, l_1, \dots, l_s)\,.\, C(1)\, C(2) \dots \\
\dots C(l_1 + l_2 + \dots + l_s),
\end{aligned}
$$

přičemž[4])

$$C(1), C(2), \ldots, C(l_1 + l_2 + \ldots + l_s) \tag{37}$$

jsou některá čísla $c_p(q_1, \ldots, q_r, h_1, \ldots, h_s)$ kladné výšky (viz (35)); součet výšek členů (37) je pak zřejmě $m_1 + \ldots + m_r - (k_1 + \ldots + k_r)$. Je-li tedy $k_1 + \ldots + k_r > 0$, mají všechna čísla (37) výšku menší než $m_1 + \ldots + m_r$; je-li však $k_1 + \ldots + k_r = 0$, jest podle (31) počet čísel (37) aspoň roven dvěma, každé z nich má kladnou výšku a součet těchto výšek je právě $m_1 + \ldots + m_r$. Tedy i v tomto případě má každé číslo (37) výšku menší než $m_1 + \ldots + m_r$. Rovnice (36) určuje tedy postupně jednoznačně každý člen $c_n(m_1, \ldots, m_r)$ pomocí členů menší výšky (a to užitím čtyř základních úkonů početních). Zjistíme-li ještě, že takto sestrojené řady (27) jsou absolutně konvergentní v okolí počátku, bude tvrzení **A** dokázáno (neboť potom jest dosazení $y_j = p_j(x_1, \ldots, x_r)$ do (34) a úprava pravé strany v mocninnou řadu dovolena podle příkl. 1 v kap. XI, § 4.

Tuto absolutní konvergenci řad (27) dokážeme nejpřehledněji pomocí dominantních řad. V (34) jest $b_n(0, \ldots, 0) = 0$, $b_n(0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots, 0) = 0$ (jednička na $(r + j)$tém místě, $j = 1, \ldots, s$). Dále existují podle věty 232 vlastní kladná čísla K, L tak, že jest

$$|b_n(k_1, \ldots, k_r, l_1, \ldots, l_s)| < KL^{k_1+\ldots+k_r+l_1+\ldots+l_s} \tag{38}$$

pro $n = 1, \ldots, s$. K řadám, stojícím v s rovnicích (34) vpravo, existuje tedy společná dominantní řada

$$\Phi(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s) =$$
$$= K \sum L^{k_1+\ldots+k_r+l_1+\ldots+l_s} x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r} y_1^{l_1} \ldots y_s^{l_s} - K - KL(y_1 + \ldots + y_s)$$

(poslední členy odčítám, abych odstranil prostý člen a členy s $y_1, \ldots, y_s$). Tuto dominantní řadu, absolutně konvergentní pro $|x_j| < L^{-1}$, $|y_j| < L^{-1}$, lze sečísti:

$$\Phi(x_1, \ldots, y_s) = \frac{k}{(1 - Lx_1) \ldots (1 - Lx_r)(1 - Ly_1) \ldots (1 - Ly_s)} -$$
$$- K - KL(y_1 + \ldots + y_s). \tag{39}$$

[4]) Je-li $l_1 = \ldots = l_s = 0$, značí „prázdný“ součin $C(1) \ldots C(l_1 + \ldots + l_s)$ ovšem jedničku.

Napišme rovnice analogické rovnicím (34), ale s funkcí Φ vpravo:

$$y_n = \Phi(x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s) \qquad (n = 1, \ldots, s). \tag{40}$$

Jestliže lze nalézti řady bez prostého členu

$$\begin{gathered} \pi_n(x_1, \ldots, x_r) = \Sigma\, \gamma_n(k_1, \ldots, k_r)\, x_1^{k_1} \ldots x_r^{k_r}, \\ \gamma_n(0, \ldots, 0) = 0 \qquad (n = 1, \ldots, s) \end{gathered} \tag{41}$$

absolutně konvergentní v okolí počátku a takové, že rovnice (40) budou splněny, dosadím-li do nich za y_j funkci $\pi_j(x_1, \ldots, x_r)$, budou podle příkl. 1 v kap. XI, § 4 a podle věty o neurčitých součinitelích platny rovnice úplně obdobné rovnicím (36), pouze místo $b_n(k_1, \ldots, k_r, l_1, \ldots, l_s)$ bude státi příslušný součinitel řady (39), tj. $KL^{k_1+\ldots+k_r+l_1+\ldots+l_s}$, místo $c_p(q_1, \ldots, q_r, h_1, \ldots, h_s)$ pak $\gamma_p(q_1, \ldots, q_r, h_1, \ldots, h_s)$. Z nerovnosti (38) a z tvaru rovnic (36) je ihned patrno, že $|\, c_n(m_1, \ldots, m_r) \,| \leqq \gamma_n(m_1, \ldots, m_r)$ (to plyne ihned indukcí podle výšky); řada (41) je tedy dominantní k řadě (27), takže i řada (27) je absolutně konvergentní v okolí počátku. K úplnému důkazu tvrzení **A** stačí dokázati ještě existenci absolutně konvergentních řad (41)[5]), vyhovujících rovnicím (40). Tyto řady dostaneme pak takto: Rovnice (40) (pro $n = 1, \ldots, s$) budou splněny, položíme-li $y_1 = y_2 = \ldots = y_s = y$ a bude-li y splňovati rovnici (viz (39))

$$y - \frac{K}{(1 - Lx_1) \ldots (1 - Lx_r)\,(1 - Ly)^s} + K + KLsy = 0. \tag{42}$$

Podle věty 254 však existuje absolutně konvergentní řada $\pi(x_1, \ldots, x_r)$ bez prostého členu a taková, že rovnice (42) je splněna, dosadíme-li do ní $y = \pi(x_1, \ldots, x_r)$. Neboť levá strana v (42) je rozvinutelna v absolutně konvergentní řadu, má v počátku hodnotu 0 a její parciální derivace podle y má v počátku — jak ihned vypočteme — hodnotu 1. Žádané řady (41) tedy dostaneme, položíme-li všechny řady $\pi_1, \ldots, \pi_s$ rovny právě sestrojené řadě π. Tím je tvrzení **A** dokázáno.

3. Zbytek důkazu věty je již jen malá formální úprava. Zvolme $R_2 > 0$ tak, že $R_2 < \delta$, $R_2 < R_4$ (čísla R_3, R_4 byla zavedena v bodě 1 důkazu). Dále zvolme $R_1 > 0$ tak, že $R_1 < \delta$, $R_1 < R_3$ a přitom tak malé, že rovnice (26) jsou splněny pro $|\, x_j \,| < R_1$, dosadíme-li do nich za y_k

[5]) Všechno ovšem „v okolí počátku".

řady p_k z tvrzení **A**; dále budiž R_1 tak malé, že $| p_n(x_1, \ldots, x_r) | < R_2$ pro $| x_1 | < R_1, \ldots, | x_r | < R_1$. Je patrno: je-li $| x_j | < R_1$, je též $| t_j | < R_1 < R_3$, $| u_j | < R_1 < R_3$ a tedy existuje podle 1 nejvýše jeden systém $y_1, \ldots, y_s$ splňující rovnice (26) a takový, že $| y_n | < R_2$ (neboť z $| y_n | < R_2$ plyne $| v_n | < R_2 < R_4$, $| w_n | < R_2 < R_4$).

Ale jeden takový systém vskutku existuje, totiž právě $y_n = p_n(x_1, \ldots, x_r)$ (viz tvrzení **A**), neboť pro $| x_j | < R_1$ je $| p_n(x_1, \ldots, x_r) | < R_2$.

Poznámka 3. Obdobná věta platí ovšem též, jde-li o řady

$$F_n(x_1, \ldots, y_s) =$$
$$= \Sigma\, a_n(k_1, \ldots, l_s)\, (x_1 - \alpha_1)^{k_1} \ldots (x_r - \alpha_r)^{k_r}\, (y_1 - \beta_1)^{l_1} \ldots (y_1 - \beta_s)^{l_s}$$

(bez prostého členu), přičemž funkční determinant funkcí $F_1, \ldots, F_s$ podle $y_1, \ldots, y_s$ je různý od nuly v bodě $[\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s]$. Řešení mají potom ovšem tvar

$$y_n - \beta_n = \Sigma\, c_n(k_1, \ldots, k_r)\, (x_1 - \alpha_1)^{k_1} \ldots (x_r - \alpha_r)^{k_r},$$

kde $c_n(0, \ldots, 0) = 0$ (pro $n = 1, \ldots, s$).

Poznámka 4. Metoda dominantních funkcí, použitá při důkazu absolutní konvergence řad (27), má značně obecnou platnost a mimoto má tu výhodu, že se jí dá často užíti bez jakýchkoliv umělých obratů a podle jednotného předpisu, který vypadá asi takto:

Jsou dány nějaké mocninné řady $\mathcal{M}_n$ (ve větě 255 to byly řady v (34) vpravo), vyhovující nějakým podmínkám $\mathfrak{P}$ (v našem případě to byly podmínky: řady jsou absolutně konvergentní v okolí počátku, prostý člen a součinitel při $y_1, \ldots, y_s$ jsou rovni nule). Máme nalézti jiné mocninné řady p_j, jež jsou s řadami $\mathcal{M}_n$ v určitém vztahu $\mathfrak{V}$ (v našem případě to byl tento vztah: Řady $p_j(x_1, \ldots, x_r)$ $(j = 1, \ldots, s)$ mají býti absolutně konvergentní v okolí počátku, jejich prostí členové mají býti rovni nule a rovnice (34) mají býti v okolí počátku splněny, dosadíme-li do nich za y_j řady $p_j(x_1, \ldots, x_r)$).

Zjistíme často, že takové řady p_j dostaneme tehdy a jen tehdy, jestliže

I. bude splněn jistý systém rovnic $\mathfrak{S}$, určující jednoznačně součinitele řad p_j (v našem případě to byly rovnice (36)) ze součinitelů řad $\mathcal{M}_n$;

II. a jestliže takto sestrojené řady p_j budou absolutně konvergentní v okolí počátku.

Systém $\mathfrak{S}$ určuje tedy součinitele řad p_j a jde ještě o absolutní konvergenci. Systém $\mathfrak{S}$ má často tuto vlastnost: nahradím-li řady $\mathcal{M}_n$ nějakými dominantními řadami M_n, jež splňují rovněž podmínky $\mathfrak{P}$, dává nám soustava rovnic $\mathfrak{S}$ řady π_j, dominantní k řadám p_j. Zjistíme-li tedy, že při určité volbě dominantních řad M_n (vyhovujících podmínkám $\mathfrak{P}$) existují absolutně konvergentní (v okolí počátku) řady π_j, jež jsou ve vztahu $\mathfrak{B}$ k řadám M_n, budou tyto řady π_j určeny z řad M_n rovnicemi $\mathfrak{S}$ a tedy budou řady π_j dominantní k řadám p_j, takže řady p_j budou rovněž absolutně konvergentní v okolí počátku.

§ 3. Inversní funkce. Lagrangeova řada. Je-li dáno r funkcí, rozvinutelných v okolí bodu $[\beta_1, \ldots, \beta_r]$ v absolutně konvergentní mocninné řady

$$G_n(y_1, \ldots, y_r) = \Sigma\, b_n(k_1, \ldots, k_r)\,(y_1 - \beta_1)^{k_1} \ldots (y_r - \beta_r)^{k_r} \qquad (n = 1, \ldots, r) \tag{43}$$

a položíme-li $G_n(\beta_1, \ldots, \beta_r) = b_n(0, \ldots, 0) = \alpha_n$, jsou rovnicemi

$$G_1(y_1, \ldots, y_r) = x_1, \ldots, G_r(y_1, \ldots, y_r) = x_r \tag{44}$$

vyjádřeny $x_1, \ldots, x_r$ jako funkce proměnných $y_1, \ldots, y_r$ v okolí bodu $[\beta_1, \ldots, \beta_r]$; speciálně pro $y_1 = \beta_1, \ldots, y_r = \beta_r$ vyjde $x_1 = \alpha_1, \ldots, x_r = \alpha_r$. Je-li funkční determinant funkcí $G_1, \ldots, G_r$ v bodě $[\beta_1, \ldots, \beta_r]$ různý od nuly, lze podle věty 255 naopak z rovnic (44) vyjádřiti též $y_1, \ldots, y_r$ jako funkce proměnných $x_1, \ldots, x_r$ v okolí bodu $[\alpha_1, \ldots, \alpha_r]$. Z věty 255 (viz též pozn. 3 v § 2) plyne totiž (myslete si v rovnicích (44) převedeno $x_1, \ldots, x_r$ na levou stranu): existují vlastní kladná čísla R_1, R_2 s těmito vlastnostmi: ke každému bodu $[x_1, \ldots, x_r]$ takovému, že $|x_j - \alpha_j| < R_1$, existuje jeden a jen jeden bod $y_1, \ldots, y_r$ takový, že jest $|y_j - \beta_j| < R_2$ a že platí rovnice (44). $y_1, \ldots, y_r$ (jež jsou funkcemi $x_1, \ldots, x_r$ a nabývají v bodě $[\alpha_1, \ldots, \alpha_r]$ hodnot $\beta_1, \ldots, \beta_r$) se dají rozvinout v okolí bodu $[\alpha_1, \ldots, \alpha_r]$ v absolutně konvergentní řady

$$y_n - \beta_n = \Sigma c_n(k_1, \ldots, k_r)\,(x_1 - \alpha_1)^{k_1} \ldots (x_r - \alpha_r)^{k_r} \tag{45}$$
$$(n = 1, \ldots, r),$$

přičemž v řadě vpravo schází prostý člen. Více o této věci mluviti bylo by zbytečno.

Všimněme si však zvláště případu $r = 1$. Zde máme místo (44) jedinou rovnici

$$\sum_{k=1}^{\infty} b_k(y - \beta)^k = x - \alpha \qquad (b_1 \neq 0) \tag{46}$$

(prostý člen $b_0 = \alpha$ jsem dal vpravo). Z řady vlevo lze vytknouti $y - \beta$, načež zbude řada $b_1 + b_2(y - \beta) + b_3(y - \beta)^2 + \ldots\ (b_1 \neq 0)$, jejíž převrácená hodnota jest opět mocninná řada s nenulovým prostým členem; pro hodnoty y blízké hodnotě β lze tedy rovnici (46) psáti též ve tvaru

$$y - \beta = (x - \alpha)\ \varphi(y), \tag{47}$$

kde

$$\varphi(y) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(y - \beta)^k \qquad (a_0 \neq 0) \tag{48}$$

je mocninná řada s kladným poloměrem konvergence (jestliže, jak předpokládáme, řada (46) má kladný poloměr konvergence). Z rovnice (46) neboli (47) lze, jak víme, vyjádřiti y ve tvaru

$$y - \beta = \psi(x), \tag{49}$$

kde řada

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(x - \alpha)^k \tag{50}$$

má kladný poloměr konvergence. Je-li tedy

$$F(y) = F(\beta) + \sum_{k=1}^{\infty} f_k(y - \beta)^k \tag{51}$$

nějaká řada s kladným poloměrem konvergence, lze do ní podle příkladu v kap. XI, § 4 dosaditi za $y - \beta$ řadu (50) a dostaneme (je-li x dosti blízké číslu α)

$$F(\beta + \psi(x)) = F(\beta) + \sum_{k=1}^{\infty} g_k(x - \alpha)^k. \tag{52}$$

Lagrangeova řada, kterou nyní odvodíme, podává součinitele c_k, g_k v jednoduchém tvaru.

Věta 256. *Buďte dána čísla* α, β *a dvě mocninné řady* $\varphi(y)$, $F(y)$ *(rovnicemi* (48), (51)) *s kladným poloměrem konvergence. Podle věty* 254 *(pro* $r = 1$) *existují kladná čísla* R_1, R_2 *tak, že ke každému* x *kruhu* $|x - \alpha| < R_1$ *existuje v kruhu* $|y - \beta| < R_2$ *jedno a jen jedno číslo* y, *splňující rovnici* (47); *píšeme-li* $y = \beta + \psi(x)$, *lze* $\psi(x)$ *rozvinouti v řadu* (50) *konvergentní pro* $|x - \alpha| < R_1$. *Podle příkl.* 1, *kap. XI*, § 4 *existuje* $\delta > 0$ *tak, že pro všechna* x *kruhu* $|x - \alpha| < \delta$ *lze* $F(\beta + \psi(x))$ *psáti ve tvaru* (52). *Součinitelé* g_k *jsou dáni výrazy*[6])

(53) $$g_k = \frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}\beta^{k-1}}(F'(\beta)(\varphi(\beta))^k) \qquad (k = 1, 2, \dots);$$

speciálně pro řadu (50) *plyne (volbou* $F(y) = y - \beta$, $F'(y) = 1$)

(54) $$c_k = \frac{1}{k!}\frac{\mathrm{d}^{k-1}}{\mathrm{d}\beta^{k-1}}(\varphi^k(\beta)).$$

Důkaz. Budiž y tak blízko β, že $|y - \beta| < R_2$ a že číslo x, dané rovnicí (47), vyhovuje nerovnostem $|x - \alpha| < R_1$, $|x - \alpha| < \delta$. Potom bude $y - \beta = \psi(x)$, kde x je hodnota, daná rovnicí (47), tj.

(55) $$x - \alpha = \frac{y - \beta}{\varphi(y)}.$$

Podle (52) platí tedy rovnice

(56) $$F(y) = F(\beta) + \sum_{k=1}^{\infty} g_k \left(\frac{y - \beta}{\varphi(y)}\right)^k.$$

Přitom jest (je-li $|y - \beta|$ dosti malé)

(57) $$\frac{1}{\varphi(y)} = \lambda(y) = r_0 + r_1(y - \beta) + r_2(y - \beta)^2 + \dots, \qquad \left(r_0 = \frac{1}{a_0} \neq 0\right)$$

konvergentní řada. Derivováním dostaneme z (56) (derivuji řadu (52) podle x a násobím derivací $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}((y - \beta)\lambda(y))$)

(58) $$F'(y) = \sum_{k=1}^{\infty} k g_k (y - \beta)^{k-1}(\lambda(y))^{k-1}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}((y - \beta)\lambda(y)).$$

---

[6]) $\frac{\mathrm{d}^n f(\beta)}{\mathrm{d}\beta^n}$ značí ovšem n-tou derivaci funkce $f(y)$ v bodě β.

Budiž n přirozené číslo; z (58) plyne

$$\varphi^n(y)\,F'(y) = \sum_{k=1}^{n-1} kg_k(y-\beta)^{k-1}(\lambda(y))^{k-1-n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}((y-\beta)\,\lambda(y)) + \tag{59}$$
$$+\, ng_n(y-\beta)^{n-1}\lambda^{-1}(y)\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}((y-\beta)\,\lambda(y)) + (y-\beta)^n\,\chi_n(y),$$

kde $\chi_n(y)$ je mocninná řada o středu β (předpokládám $|\,y-\beta\,|$ v dalším tak malé, že se součet $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty}$ v (58) dá srovnati v mocninnou řadu podle pravidla, obsaženého v příkl. 1, kap. XI, § 4). Tvrdím, že výraz

$$kg_k(y-\beta)^{k-1}(\lambda(y))^{k-1-n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}((y-\beta)\,\lambda(y)) \tag{60}$$

neobsahuje (po rozvinutí v mocninnou řadu) — pro $k = 1, 2, \ldots, n-1$ — člen s $(y-\beta)^{n-1}$. Násobím-li totiž výraz (60) pro $y \neq \beta$ číslem $(y-\beta)^{-n}$, dostanu

$$kg_k((y-\beta)\,\lambda(y))^{k-1-n}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}((y-\beta)\,\lambda(y)) = \tag{61}$$
$$= \frac{k}{k-n}\,g_k\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}((y-\beta)^{k-n}\,.\,(\lambda(y))^{k-n}).$$

Ale $\dfrac{k}{k-n}\,g_k((y-\beta)^{k-n}\,(\lambda(y))^{k-n})$ je pro $y \neq \beta$ dáno řadou tvaru[7])

$$\frac{A_{-n+k}}{(y-\beta)^{n-k}} + \frac{A_{-n+k+1}}{(y-\beta)^{n-k-1}} + \ldots + \tag{62}$$
$$+ \frac{A_{-1}}{y-\beta} + A_0 + A_1(y-\beta) + \ldots,$$

takže výraz (61) je pro $y \neq \beta$ roven

$$-\frac{(n-k)\,A_{-n+k}}{(y-\beta)^{n-k+1}} - \ldots - \frac{A_{-1}}{(y-\beta)^2} + A_1 + 2A_2(y-\beta) + \ldots\,;^{8)}$$

---

[7]) Mocninnou řadu pro $\dfrac{kg_k}{k-n}\,\lambda^{k-n}(y)$ násobím číslem $(y-\beta)^{k-n}$.

[8]) Ve výrazu (62) jsem napřed derivoval prvních n—k členů a přičetl jsem derivaci mocninné řady $A_0 + A_1(y-\beta) + \ldots$

výraz (60) je tedy roven[9])

$$-(n-k)\,A_{-n+k}\,(y-\beta)^{k-1}-(n-k-1)\,A_{-n+k+1}\,(y-\beta)^{k}-\dots$$
$$-A_{-1}(y-\beta)^{n-2}+A_1(y-\beta)^n+2A_2(y-\beta)^{n+1}+\dots$$

a neobsahuje tedy člen s $(y-\beta)^{n-1}$. Rovněž poslední člen v (59), totiž

$$(y-\beta)^n\,\chi_n(y)=C_n(y-\beta)^n+C_{n+1}(y-\beta)^{n+1}+\dots,$$

neobsahuje člen s $(y-\beta)^{n-1}$. Zbývá člen

$$ng_n(y-\beta)^{n-1}\,\lambda^{-1}(y)\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}y}\,((y-\beta)\,\lambda(y))=$$
$$=ng_n(y-\beta)^{n-1}\left(1+\frac{\lambda'(y)}{\lambda(y)}\,(y-\beta)\right);$$

ježto $\lambda'(y):\lambda(y)$ lze rozvinouti v řadu o středu β (neboť $\lambda(\beta)\neq 0$), je součinitel při $(y-\beta)^{n-1}$ na pravé straně rovnice (59) roven ng_n. Rozvinu-li levou stranu v (59) v mocninnou řadu o středu β, je součinitel při $(y-\beta)^{n-1}$ roven

$$\frac{1}{(n-1)!}\,\frac{\mathrm{d}^{n-1}}{\mathrm{d}\beta^{n-1}}\,(\varphi^n(\beta)\,F'(\beta));$$

tento výraz je tedy podle věty o neučitých součinitelích roven číslu ng_n, čímž je (53) dokázáno.

§ 4. Úplná diskuse rovnice $F(x,y)=0$. Než přikročíme k vlastnímu předmětu tohoto paragrafu, musíme učiniti jednu úmluvu. Je-li $x\neq 0$, lze x psáti ve tvaru $x=r\,\mathrm{e}^{\varphi \mathrm{i}}$, kde $r>0$, φ reálné; přitom je r stanoveno jednoznačně, φ je určeno až na násobek čísla 2π. Je-li q přirozené číslo, existuje právě q čísel z takových, že $z^q=x$; jsou to čísla $z=r^{1/q}\,\mathrm{e}^{(\varphi/q)\,\mathrm{i}+(2k\pi/q)\,\mathrm{i}}$ $(k=0,1,\dots,q-1)$. Je patrno, že jedno a jen jedno z těchto q čísel má amplitudu $\varphi/q+2k\pi/q$, ležící v polouzavřeném intervalu $(-\pi/q,\pi/q\rangle$; toto číslo budeme značiti $x^{1/q}$. Zřejmě lze toto číslo obdržeti též takto: ve vyjádření $x=r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ volme $\varphi\in(-\pi,+\pi\rangle$ (čímž je φ jednoznačně stanoveno); potom je zřejmě $x^{1/q}=r^{1/q}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/q}$. Je-li p další celé číslo, klaďme

$$x^{p/q}=(x^{1/q})^p=r^{p/q}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}p\varphi/q}.\ ^{10})$$

---

[9]) Pro $y\neq\beta$; ale podle věty o neurčitých součinitelích to platí i pro $y=\beta$.

[10]) Vpravo jsou symboly nám dávno známé: číslo $r^{p/q}$, kde $r>0$ a hodnota funkce $\mathrm{e}^{\xi}=1+\xi:1!+\xi^2:2!+\dots$ v bodě $\xi=\mathrm{i}p\varphi:q$.

Je patrno, že toto číslo závisí pouze na x a na hodnotě čísla p/q, nikoliv na tom, jakým způsobem je toto číslo p/q vyjádřeno ve tvaru zlomku. Pro $x > 0$ (tj. $\varphi = 0$, $x = r$) je tato definice v souhlase s definicí mocniny $r^{p/q}$ z **DI** kap. III, § 1, def. 9; pro $q = 1$ je rovněž v souhlase s definicí z **DI** kap. XV, § 1 ($x^{p/1} = r^p \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi p}$). Jest $x^{p/q}x^{t/s} = x^{p/q+t/s}$, neboť levá strana jest [11])

$$r^{p/q} . \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi p/q} . r^{t/s} . \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi t/s} = r^{p/q+t/s} . \mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi(p/q+t/s)};$$

speciálně

$$x^{p/q} . x^{-p/q} = x^0 = 1, \qquad x^{-p/q} = 1 : x^{p/q}.$$

Dále je pro celá p, $q > 0$, $s > 0$: $(x^{1/s})^{p/q} = x^{p/sq}$ (tedy speciálně $(x^{1/s})^{1/q} = x^{1/sq}$); neboť je-li $x = r\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$, $r > 0$, $-\pi < \varphi \leqq \pi$, je $-\pi < \varphi/s \leqq \pi$ a tedy

$$(x^{1/s})^{p/q} = (r^{1/s}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi/s})^{p/q} = r^{p/qs}\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi p/qs} = x^{p/sq}.$$

Není však vždy $(x^{t/s})^{p/q} = x^{pt/qs}$ (příklad: $x = -1$, $t = 2$, $s = 1$, $p = 1$, $q = 3$, tedy $x = 1 . \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}$, $x^{pt/qs} = \mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}/3}$, $(x^{t/s})^{p/q} = (x^2)^{1/3} = 1^{1/3} = 1$). Nutno tedy dáti trochu pozor. Naše úmluva je pohodlná pro $x > 0$; pro $x < 0$ má tu nevýhodu, že pro $x < 0$ (tj. $x = |\,x\,|\,\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}}$), $q > 1$, q liché jest $x^{1/q} = |\,x\,|^{1/q}\,\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}/q}$, takže $x^{1/q}$ není reálná q-tá odmocnina z x. Ale nějakou definici symbolu $x^{p/q}$ jsme museli podati, abychom se mohli v dalším stručně vyjadřovati. Pro $x = 0$ jsme definovali ovšem již dávno $0^\alpha = 0$ pro $\alpha > 0$, $0^0 = 1$, kdežto pro $\alpha < 0$ nemá symbol 0^α smyslu. Budeme nyní vyšetřovati Weierstrassovu větu pro $r = 1$ a v souvislosti s tím podáme úplnou diskusi rovnice $F(x, y) = 0$. Hlavním obsahem tohoto paragrafu je tato věta:

Věta 257. *Budiž*

$$F(x, y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk} x^j y^k \tag{63}$$

řada absolutně konvergentní v okolí počátku a nechť existuje přirozené číslo n tak, že

$$a_{00} = a_{0,1} = \ldots = a_{0,n-1} = 0, \quad a_{0n} \neq 0. \tag{64}$$

---

[11]) φ je zvoleno v intervalu $(-\pi, +\pi\rangle$.

Číslo n nazvu pro krátkost **výškou** *řady $F(x, y)$. Potom existuje podle věty 253 jedna a jen jedna řada*

$$G(x, y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} b_{jk} x^j y^k, \tag{64}$$

jež jest absolutně konvergentní v okolí počátku a splňuje v okolí počátku rovnici tvaru

$$F(x, y) = (y^n + p_1(x)\, y^{n-1} + p_2(x)\, y^{n-2} + \ldots + p_n(x))\, G(x, y), \tag{65}$$

přičemž $p_j(x)$ jsou mocninné řady s kladným poloměrem konvergence, bez prostého členu:

$$p_j(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_{kj} x^k \qquad (j = 1, \ldots, n). \tag{66}$$

Jest potom $b_{00} = G(0, 0) = a_{0n} \neq 0$. Položme

$$\psi(x, y) = y^n + p_1(x)\, y^{n-1} + \ldots + p_n(x). \tag{67}$$

Tvrdím: existují vlastní kladná čísla R_1, R_2, přirozené číslo N a mocninné řady bez prostého členu

$$u_1(t), u_2(t), \ldots, u_n(t); \quad u_j(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{kj} t^k \qquad (j = 1, \ldots, n), \tag{68}$$

absolutně konvergentní pro $|t| < R_1$ tak, že pro $|x| < R_2$ jest

$$\psi(x, y) = \prod_{j=1}^{n} (y - u_j(x^{1/N})). \tag{69}$$

Poznámka 1. Pro každé x (pokud je $|x|$ tak malé, že řady $p_j(x)$ konvergují) lze rozložiti mnohočlen $\psi(x, y)$ v „kořenové činitele“ $\psi(x, y) = \prod_{j=1}^{n} (y - Y_j)$; ježto kořeny Y_j závisí na x, pišme $Y_j = \varphi_j(x)$, tedy

$$\psi(x, y) = \prod_{j=1}^{n} (y - \varphi_j(x)); \tag{70}$$

věta 257 pak praví, že kořeny $\varphi_j(x)$ lze při vhodném uspořádání rozvinouti v mocninnou řadu, postupující podle mocnin čísla $x^{1/N}$.[12])

[12]) Při nevhodném uspořádání nemusí býti takový rozvoj možný; je-li např. $\psi(x, y) = y^2 - x^2 = (y - x)(y + x)$ a klademe-li $Y_1 = x$, $Y_2 = -x$ pro racionální x, $Y_1 = -x$, $Y_2 = x$ pro iracionální x, nelze zřejmě funkce Y_1, Y_2 rozvinouti v řadu, postupující podle mocnin $x^{1/N}$.

Poznamenejme, že pro $x = 0$ je podle (66) $\psi(x, y) = y^n$, tj. $\varphi_1(0) = \dots = \varphi_n(0) = 0$; tyto rovnice jsou pak vskutku splněny, dosazuji-li za $\varphi_j(x)$ jakoukoliv řadu bez prostého členu, postupující podle mocnin čísla $x^{1/N}$. Ježto tedy pro $x = 0$ je vše v pořádku, budeme v dalším vyšetřovati téměř výhradně hodnoty $x \neq 0$, i když to vždy výslovně neřeknu.

Poznámka 2. Význam věty 257 je zřejmý: v jistém okolí počátku je $G(x, y) \neq 0$, takže rovnice $F = 0$ znamená v tomto okolí totéž jako $\psi = 0$ a rovnice $\psi(x, y) = 0$ je podle (69) splněna pro $|x| < R_2$ tehdy a jen tehdy, je-li $y = u_j(x^{1/N})$ pro nějakou hodnotu $j (1 \leqq j \leqq n)$. Řešení rovnice $F(x, y) = 0$ jsou tedy v okolí počátku dána n mocninnými řadami $u_j(t)$, kde $t = x^{1/N}$. Naším úkolem bude nejenom dokázati větu 257, nýbrž též ukázati, jak lze řadu $u_j(x^{1/N})$ vskutku sestrojiti, a to přímo z řady $F(x, y)$, bez předběžného provádění rozkladu (65). Tímto hlediskem se bude říditi též postup důkazu.

Poznámka 3. Zvolím-li nějaké x (v jistém okolí počátku)[13], je $F(x, y)$ mocninná řada v proměnné y, kdežto $\psi(x, y)$ je mnohočlen v y. Jest

$$F = \psi G, \quad \frac{\partial F}{\partial y} = G \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial G}{\partial y} \psi,$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = G \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial G}{\partial x} \frac{\partial \psi}{\partial y} + \frac{\partial^2 G}{\partial y^2} \psi, \dots,$$

obecně

$$\frac{\partial^k F}{\partial y^k} = G \frac{\partial^k \psi}{\partial y^k} + \sum_{l=0}^{k-1} \binom{k}{l} \frac{\partial^{k-l} G}{\partial y^{k-l}} \frac{\partial^l \psi}{\partial y^l}$$

(podle Leibnizova vzorce). Omezíme-li se na takové okolí počátku, v němž je $G \neq 0$, vidíme z těchto rovnic:

Je-li

$$\psi = \frac{\partial \psi}{\partial y} = \dots = \frac{\partial^{k-1} \psi}{\partial y^{k-1}} = 0, \quad \frac{\partial^k \psi}{\partial y^k} \neq 0, \tag{71}$$

je též

$$F = \frac{\partial F}{\partial y} = \dots = \frac{\partial^{k-1} F}{\partial y^{k-1}} = 0, \quad \frac{\partial^k F}{\partial y^k} \neq 0. \tag{72}$$

---

[13]) Stále se omezuji na jisté dosti malé okolí počátku.

Naopak, ze vztahů (72) dostaneme postupně vztahy (71). Tedy: dosadíme-li za x nějaké číslo dosti blízké počátku, má mocninná řada $F(x, y)$ (v proměnné y) v jistém okolí bodu $y = 0$ tytéž kořeny — i co do násobnosti (viz text mezi větou 223 a 224) — jako mnohočlen $\psi(x, y)$.

Poznámka 4. Při důkazu věty 257 budeme potřebovati jistou konstrukci, kterou nyní vyložíme. Budiž dána řada (63) výšky n, takže platí vztahy (64)[14]. Zvolme dvě pravoúhlé osy souřadné ξ, η a nakresleme všechny „mřížové body" $[j, k]$, tj. všechny body s celočíselnými souřadnicemi j, k, přičemž se omezme na první kvadrant (tj. $j \geqq 0$, $k \geqq 0$). Každému takovému bodu $[j, k]$ přísluší jistý součinitel a_{jk}; je-li $a_{jk} \neq 0$, vyznačme bod $[j, k]$ třeba kroužkem.

Příklad 1. $F(x, y)$ budiž řada absolutně konvergentní v okolí počátku, jež začíná těmito členy:

$$\begin{aligned} F(x, y) = {} & x^{13} + 2x^{20} + \dots + y(3x^{11} - x^{12} + \dots) + \\ & + y^2(3x^8 - x^{17} + \dots) + y^3(x^6 - x^7 + \dots) + \\ & + y^4(-2x^4 + x^9 + \dots) + y^5(x^4 - 3x^6 + \dots) + \\ & + y^6(3x^2 - x^3 + \dots) + y^8(-x + 7x^2 + \dots) + \\ & + y^9(x - 5x^{12} + \dots) + y^{10}(4 - 5x^2 + \dots) + \\ & + y^{11}(3 - x^4 + \dots) + y^{13}(x^2 - x^3 + \dots) + \dots . \end{aligned}$$

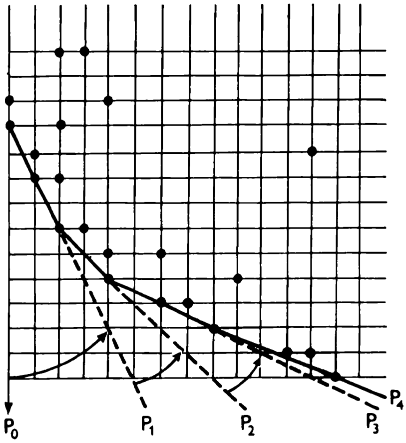
Řada — což je u absolutně konvergentních řad dovoleno — je srovnána podle mocnin y, součinitel při každé mocnině y je mocninná řada v x. (Viz obr. 14 na str. 636.)

Příklad 2. $F(x, y) = y^2(3x^8 - x^{17} + \dots) + y^3(x^6 - x^7 + \dots) + \dots$ budiž táž řada jako v příkladu 1, až na to, že člen bez y a člen s y^1 (tj. $x^{13} + 2x^{20} + \dots + y(3x^{11} - x^{12} + \dots)$) jsou vynecháni. (Viz obr. 15 na str. 636.)

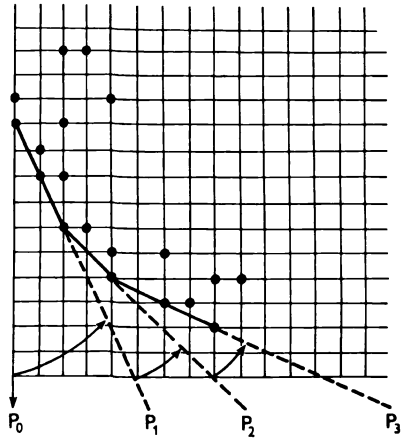
Myslete si nyní — pro názornost — do kroužkovaných bodů zapíchnuty špendlíky; v bodě $[0, n]$ (tedy v bodě $[0, 10]$ na obr. 14) uvažme jeden konec niti, kterou napnu ve směru záporné osy η, druhý konec držím v ruce; otáčím nyní touto nití proti ručičkám hodinovým tak

[14]) Pamatujme stále, že $a_{jk} = \dfrac{1}{j!\,k!}\,\dfrac{\partial^{j+k}F(0, 0)}{\partial x^j\,\partial y^k}$.

dlouho, až onen konec niti, který držím v ruce, bude míti směr kladné osy ξ. Je zřejmo, že se nit napne podél lomené čáry, silně vytažené na obr. 14, popříp. na obr. 15. Této lomené čáře se říká „**Newtonův polygon příslušný k řadě** $F(x,y)=\sum\limits_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}x^jy^k$.“ Jenom ještě jednu poznámku: existuje-li mezi kroužkovanými body bod na ose ξ, nakreslím Newtonův polygon až do kroužkovaného bodu $[j, 0]$ s nejmenší hodnotou j (na obr. 14 je to bod $[13, 0]$).



Obr. 14.



Obr. 15.

Jestliže však všechny kroužkované body $[j, k]$ mají pořadnici $k \geqq m$ $(m > 0)$, existuje-li však kroužkovaný bod s pořadnicí m, skončím polygon u kroužkovaného bodu $[j, m]$ s pořadnicí m a s nejmenší hodnotou j (na obr. 15 je $m = 2$ a Newtonův polygon se končí v bodě $[8, 2]$). Jinak řečeno: z bodu $A_0 = [0, n] = [j_0, k_0]$ vedu paprsek P_0 směrem záporné osy η; ten stáčím proti ručičkám hodinovým okolo bodu A_0 tak dlouho, až tento paprsek poprvé obsahuje aspoň dva kroužkované body; to budiž poloha P_1; budiž třeba $A_1 = [j_1, k_1]$ kroužkovaný bod s nejmenší pořadnicí η, ležící na P_1. Potom stáčím dále okolo bodu A_1, až poprvé dospěji do polohy P_2 takové, že paprsek P_2 obsahuje aspoň dva kroužkované body; budiž $A_2 = [j_2, k_2]$ kroužkovaný bod s nejmenší pořadnicí η, ležící na P_2; potom stáčím okolo bodu A_2 dále atd. Skončí se tato konstrukce takto: je-li $m \geqq 0$ nejmenší číslo takové, že existuje kroužkovaný bod o pořadnici m, skončí se konstrukce v onom kroužkovaném bodě A_l o pořadnici m, jenž má nejmenší abscisu. Tak na obr. 14 se konstrukce končí v bodě [13, 0], na obr. 15 v bodě [8, 2].

Úsečky $\overline{A_0A_1}$, $\overline{A_1A_2}$, ..., $\overline{A_{l-1}A_l}$ se nazývají **strany** (a to **vlastní** strany) Newtonova polygonu, body $A_0, A_1, \ldots, A_l$ jsou jeho „vrcholy". Rozdíl mezi pořadnicemi obou krajních bodů některé vlastní strany se nazývá výškou té strany; je-li číslo m, o němž jsme výše mluvili, různé od nuly, říkáme, že Newtonův polygon má vedle vlastních stran ještě „nevlastní stranu m". Součet výšek všech (vlastních i nevlastních) stran Newtonova polygonu nazvu **výškou** polygonu; je to právě číslo n, tj. výška řady $F(x, y)$. Tak na obr. 14 máme Newtonův polygon výšky 10 s čtyřmi vlastními stranami, jež mají výšky 4, 2, 2, 2; vrcholy jsou [0, 10], [2, 6], [4, 4], [8, 2], [13, 0]; na obr. 15 máme Newtonův polygon výšky 10 s třemi vlastními stranami (výšky 4, 2, 2) a s nevlastní stranou výšky 2; vrcholy jsou [0, 10], [2, 6], [4, 4], [8, 2].

Snadno zjistíme, co znamená přítomnost nevlastní strany, mající výšku m. To znamená, že $a_{jk} = 0$ pro $j \geqq 0$, $0 \leqq k < m$, že však existuje aspoň jedno j tak, že $a_{jm} \neq 0$. Ježto

$$\frac{\partial^k F(x, 0)}{\partial y^k} = k! \sum_{j=0}^{\infty} a_{jk} x^j \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots),$$

je vidět: zvolíme-li $\varrho > 0$ dosti malé, je (viz větu 222)

$$\frac{\partial^k F(x, 0)}{\partial y^k} = 0 \quad \text{pro} \quad 0 \leqq k < m, \ 0 < |x| < \varrho,$$

$$\frac{\partial^m F(x, 0)}{\partial y^m} \neq 0 \quad \text{pro} \quad 0 < |x| < \varrho.$$

Tedy: pro každé pevně zvolené x $(0 < |x| < \varrho)$ je nula právě m-násobným kořenem funkce $F(x, y)$ a tedy též mnohočlenu $\psi(x, y)$ (viz pozn. 3); mezi kořeny $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ v (70) je jich právě m, jež jsou rovny nule; tyto kořeny jsou ovšem rozvinutelny v mocninné řady (jejichž součinitelé jsou vesměs rovni nule).

Jak musí nyní vypadati řada $u_j(x^{1/N}) = \varphi_j(x)$, která nemá všechny součinitele rovny nule? Taková řada má tvar (vynechávám index j)

$$(73)\qquad u(x^{1/N}) = bx^{p/q} + \dots \qquad (p, q \text{ celá kladná, } b \neq 0),$$

kde vynechaní členové obsahují vyšší mocniny x. Dosadím-li do $F(x, y)$ za y řadu (73), mohu výsledek uspořádati v mocninnou řadu postupující podle mocnin čísla $x^{1/N}$ a všichni součinitelé této řady musí býti rovni nule (neboť rovnice $F(x, u(x^{1/N})) = 0$ musí býti splněna např. pro všechny dosti malé kladné hodnoty $x^{1/N}$, načež užiji třeba věty 224). Nejnižší mocnina x, kterou poskytuje člen

$$a_{jk}x^jy^k = a_{jk}x^j(u(x^{1/N}))^k,$$

vystupuje v členu

$$a_{jk}b^kx^{(jq+kp)/q}.$$

Probíhá-li a_{jk} všechny nenulové součinitele řady F (tj. probíhá-li $[j, k]$ všechny kroužkované body), probíhá číslo $jq + kp$ jistou množinu přirozených čísel; nejmenší z těchto čísel budiž λ, tedy

$$(74)\qquad \lambda = \min_{a_{jk}\neq 0} (jq + kp).$$

„Nejnižší" člen (tj. s nejnižší mocninou x) v řadě $F(x, u(x^{1/N}))$ je tedy

$$x^{\lambda/q} \sum_{jq+kp=\lambda} a_{jk}b^k,$$

kde se sčítá přes všechny kroužkované body $[j, k]$, vyhovující podmínce $jq + kp = \lambda$. Musí tedy býti

$$(75)\qquad \sum_{jq+kp=\lambda} a_{jk}b^k = 0,\ b \neq 0,\ p > 0,\ q > 0.$$

Musí tedy především součet vlevo obsahovati aspoň dva sčítance (aby se mohly rušit), tj. musí existovati aspoň dva kroužkované body $[j, k]$, vyhovující podmínce $jq + kp = \lambda$, tj. ležící na přímce

$$(76)\qquad \xi q + \eta p = \lambda.$$

Za druhé má býti výraz $\xi q + \eta p$ pro tyto body (podle definice čísla λ) nejmenší ze všech hodnot, jichž vůbec pro kroužkované body nabývá; tj. pro žádný kroužkovaný bod $[j, k]$ nemá býti $jq + kp < \lambda$; jinými slovy: žádný kroužkovaný bod nemá ležeti na téže straně přímky (76) jako počátek. Těmto podmínkám je zřejmě vyhověno tehdy a jen tehdy, obsahuje-li přímka (76) některou vlastní stranu Newtonova polygonu, třeba stranu S o krajních bodech $[j_{r-1}, k_{r-1}]$, $[j_r, k_r]$ $(k_{r-1} > k_r)$, číslo $-q/p$ je pak směrnicí této strany, výška strany jest $k_{r-1} - k_r$.

Za třetí musí býti číslo b od nuly různým kořenem rovnice (75), tj. rovnice

$$f(\beta) = 0, \quad \text{kde} \quad f(\beta) = \sum_{j,k} a_{jk}\beta^k; \tag{77}$$

sčítá se přitom přes všechny páry j, k takové, že $[j, k]$ je kroužkovaným bodem, ležícím na straně S (tedy $a_{jk} \neq 0$). Nejvyšší mocnitel čísla β, jenž se vyskytuje v $f(\beta)$, je tedy k_{r-1}, nejnižší k_r, takže rovnice $f(\beta) = 0$ má tvar

$$\beta^{k_r} \sum_{j,k} a_{jk}\beta^{k-k_r} = 0 \tag{78}$$

a má tedy právě $k_{r-1} - k_r$ kořenů od nuly různých, tj. právě tolik, kolik činí výška strany S.[15]

Důkaz věty 6 a konstrukce řad $u_j(x^{1/N_j})$.

I. První krok. Sestrojme napřed Newtonův polygon příslušný k funkci $F(x, y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}x^jy^k$. Bude to polygon výšky n; číslo n je také součet výšek všech stran (vlastních i nevlastních) tohoto polygonu. Má-li předně polygon nevlastní stranu výšky m, má rovnice $F(x, y) = 0$ m-násobný kořen $y = 0$.[16] Vezměme nyní za druhé nějakou vlastní stranu [17] S Newtonova polygonu; její výška budiž v, její směrnice $-q : p$ [18]). Rovnice přímky, obsahující stranu S, je $\xi q + \eta p = \lambda$, kde λ je hodnota výrazu $jq + kp$ pro všechny kroužkované body $[j, k]$, ležící na S. Pro všechny kroužkované body $[j, k]$, neležící na S, je $jq + kp > \lambda$. Rovnice (77) má právě v kořenů od nuly různých; budiž b_1 jeden z těchto kořenů, a to n_1-násobný. Je tedy

$$f^{(l)}(b_1) = 0 \quad \text{pro} \quad 0 \leqq l < n_1, \quad f^{(n_1)}(b_1) \neq 0, \quad b_1 \neq 0. \tag{79}$$

Vedeni tím, co jsme řekli v poznámce 4, dosadíme do $F(x, y)$

[15]) Kdekoliv v dalším mluvím o počtu kořenů nějaké rovnice (také u rovnic $F(x, y) = 0$, $\psi(x, y) = 0$ apod.), počítám vždy ν-násobný kořen za ν kořenů.

[16]) Podle poznámky 4.

[17]) Kdyby žádná vlastní strana neexistovala, měli bychom n-násobný kořen $y = 0$ a byli bychom s rozkladem (70) hotovi ($\varphi_j(x) = 0$ pro $j = 1, \ldots, n$).

[18]) Čísla p, q v zlomku $p : q$ nebo $-q : p$ budou vždy celá kladná nesoudělná; podobně pro zlomky $p_1 : q_1$, $p_2 : q_2$ apod.

$$(80) \qquad x = x_1^q, \qquad y = x_1^p(b_1 + y_1).^{19)}$$

Obdržíme

$$(81) \qquad F(x, y) = F(x_1^q, x_1^p(b_1 + y_1)) = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}x^{jq+pk}(b_1 + y_1)^k.$$

Ježto pro všechny kroužkované body, ležící na úsečce S, je $jq + pk = \lambda$, pro všechny ostatní kroužkované body je $jq + kp > \lambda$, je

$$F(x, y) = x_1^\lambda(\sum_{jq+kp=\lambda} a_{jk}(b_1 + y_1)^k + \sum_{jq+kp>\lambda} a_{jk}x^{jq+kp-\lambda}(b_1 + y_1)^k) =$$

$$(82) \qquad = x_1^\lambda(f(b_1 + y_1) + \sum_{\substack{j,k\\ j>0}} c_{jk}x_1^j y_1^k) =$$

$$= x_1^\lambda\left(\frac{y_1^{n_1}}{n_1!}f^{(n_1)}(b_1) + \ldots + \frac{y_1^\nu}{\nu!}f^{(\nu)}(b_1) + \sum_{\substack{j,k\\ j>0}} c_{jk}x_1^j y_1^k\right) = x_1^\lambda F_1(x_1, y_1),$$

kde $F_1(x_1, y_1)$ je mocninná řada podobného typu jako $F(x, y)$, avšak s výškou n_1 (místo n); jest ovšem $1 \leqq n_1 \leqq n$; číslo λ je přirozené číslo, totiž $\min\limits_{a_{jk} \neq 0} (jq + kp)$.

Takových funkcí F_1 jest ovšem obecně více: každé vlastní straně Newtonova polygonu a každému nenulovému n_1-násobnému kořenu b_1 příslušné rovnice $f(\beta) = 0$[20]) odpovídá jedna taková funkce F_1 výšky právě n_1. Z toho je patrno, že součet výšek všech těchto funkcí F_1, zvětšený o výšku eventuální nevlastní strany polygonu, se rovná právě číslu n. Podaří-li se nám přiřaditi každé takové funkci F_1 (výšky n_1) právě n_1 kořenů rovnice $F(x, y)$ tvaru

$$(83) \qquad b_1x^{p/q} + \text{členové vyššího stupně},^{21)}$$

budeme hotovi; neboť spolu s m kořeny nulovými (pocházejícími od eventuální nevlastní strany) dostáváme právě n kořenů funkce $F(x, y)$, tj. mnohočlenu $\psi(x, y)$. Je jenom nutno ukázati, že žádný z těchto kořenů nedostaneme několikrát. Především je patrno, že dvě řady (83),

---

[19]) K tomu nás vede přirozeně námět z pozn. 4, podle něhož hledáme kořen rovnice $F(x, y) = 0$ tvaru $y = b_1x^{p/q} + \ldots$

[20]) Počet nenulových kořenů této rovnice se rovná právě výšce příslušné strany Newtonova polygonu.

[21]) Myslím přitom ovšem na mocninné řady s kladným poloměrem konvergence, postupující podle mocnin čísla $x^{1/N}$.

pocházející od dvou různých funkcí F_1, se liší již v prvním členu (mají různé mocnitele $p : q$, pocházejí-li od dvou různých stran; mají různé součinitele b_1, pocházejí-li od téže strany, ale od dvou různých kořenů rovnice $f(\beta) = 0$). Rovněž je patrno, že se řady (83) liší od nulových řad, pocházejících od eventuální nevlastní strany. Podle věty o neurčitých součinitelích existuje tedy číslo $\varrho > 0$ tak, že pro každé x takové, že $0 < |x| < \varrho$, mají řady (83), pocházející od různých funkcí F_1, různé hodnoty a rovněž hodnoty různé od nuly,[22]) takže vyjadřují vskutku pro každé takové x všechy kořeny rovnice $\psi(x, y) = 0$.

II. Diskuse případu $n_1 = n$. Zjistili jsme, že jest $1 \leqq n_1 \leqq n$. Případ $n_1 = n$ nastává zřejmě tehdy a jen tehdy, neexistuje-li v Newtonově polygonu nevlastní strana, existuje-li dále jen jedna vlastní strana (mající ovšem výšku n) a má-li rovnice $f(\beta) = 0$ (jež je nyní n-tého stupně) n-násobný kořen b_1 různý od nuly, takže

$$(84) \qquad f(\beta) = \sum_{jq+kp=\lambda} a_{jk}\beta^k = A(\beta - b_1)^n, \qquad A \neq 0,\ b_1 \neq 0.$$

V $f(\beta)$ vystupuje člen $a_{0n}\beta^n$, takže $np = \lambda$. Dále vystupuje v $f(\beta)$ člen $a_{j,n-1}\beta^{n-1} = -nAb_1\beta^{n-1}$ se součinitelem různým od nuly; tedy existuje celé $j \geqq 0$ tak, že $a_{j,n-1} \neq 0$ [23]), $jq + (n-1)p = \lambda = np$, tedy $p = jq$; ježto p, q jsou nesoudělná, je $q = 1$. Tedy: *Je-li $n_1 = n$, je $q = 1$, $\lambda = np$, takže rovnice* (80), (82) *mají tvar*

$$(85) \qquad x = x_1,\ y = x_1^p(b_1 + y_1) = x^p(b_1 + y_1),$$

$$(86) \qquad F(x, y) = x^{np}F_1(x, y_1).$$

III. Opakování postupu z bodu I. Zvolme jednu z funkcí F_1, jež jsme obdrželi v bodě I a aplikujme na ni týž postup: sestrojíme Newtonův polygon příslušný k F_1, zvolíme jednu vlastní stranu tohoto

---

[22]) Podrobně řečeno: jsou-li (83) řady, postupující podle mocnin čísla $x^{1/N}$, pišme do nich t místo $x^{1/N}$; ježto nemají tyto mocninné řady v t tytéž součinitele, existuje $\varrho_1 > 0$ tak, že pro $0 < |t| < \varrho_1$ mají různé součty; totéž platí tedy, dosadím-li do nich nazpět číslo $x^{1/N}$ místo t, pokud $0 < |x^{1/N}| < \varrho_1$, tj. $0 < |x| < \varrho_1^N$.

[23]) Jest ovšem dokonce $j > 0$.

polygonu o směrnici $-q_2 : p_2$, zvolíme jeden kořen $b_2 \neq 0$ příslušné rovnice (třeba n_2-násobný), položíme

$$x_1 = x_2^{q_2}, \quad y_1 = x_2^{p_2}(b_2 + y_2)$$

a obdržíme $F_1(x_1, y_1) = x_2 F_2(x_2, y_2)$, kde λ_2 je celé kladné číslo a F_2 má výšku $n_2 \leqq n_1$. Tak pokračujme dále; pro větší rovnoměrnost pišme ještě λ_1, p_1, q_1 místo λ, p, q a dostaneme:[24])

$$(87) \quad \begin{cases} x = x_1^{q_1}, \quad y = x_1^{p_1}(b_1 + y_1), \qquad F(x, y) = x_1^{\lambda_1} F_1(x_1, y_1); \\ x_1 = x_2^{q_2}, \quad y_1 = x_2^{p_2}(b_2 + y_2), \qquad F_1(x_1, y_1) = x_2^{\lambda_2} F_2(x_2, y_2); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_{r-1} = x_r^{q_r}, y_{r-1} = x_r^{p_r}(b_r + y_r), F_{r-1}(x_{r-1}, y_{r-1}) = x_r^{\lambda_r} F_r(x_r, y_r); \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

Budiž n_r výška funkce $F_r(x_r, y_r)$, takže

$$(88) \qquad n \geqq n_1 \geqq n_2 \geqq n_3 \geqq \dots, \quad n_r > 0.$$

Je tedy

$$(89) \qquad x = x_r^{q_1 q_2 \dots q_r},$$

$$(90) \qquad y = b_1 x_1^{p_1} + b_2 x_1^{p_1} x_2^{p_2} + \dots + b_r x_1^{p_1} \dots x_r^{p_r} + x_1^{p_1} \dots x_r^{p_r} y_r,$$

takže $\dfrac{\partial}{\partial y} = \dfrac{1}{x_1^{p_1} \dots x_1^{p_r}} \dfrac{\partial}{\partial y_r}$ [25]); odtud a z (87) plyne

$$F(x, y) = x_1^{\lambda_1} \dots x_r^{\lambda_r} F_r(x_r, y_r),$$

$$(91) \qquad \frac{\partial F(x, y)}{\partial y} = x_1^{\lambda_1 - p_1} \dots x_r^{\lambda_r - p_r} \frac{\partial F_r(x_r, y_r)}{\partial y_r},$$

$$\frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial y^2} = x_1^{\lambda_1 - 2p_1} \dots x_r^{\lambda_r - 2p_r} \frac{\partial^2 F_r(x_r, y_r)}{\partial y_r^2}.$$

Odtud je patrno: Je-li pro nějakou hodnotu $x_r \neq 0$ číslo y_r m-násobným kořenem funkce $F(x_r, y_r)$, je pro příslušnou hodnotu x (danou rovnicí (89)) číslo y (dané rovnicí (90)) m-násobným kořenem funkce

[24]) Takových posloupností může býti více (ke každému F_{r-1} může existovat několik F_r), ale zřejmě jich nemůže býti více než n. Posloupnost může též skončit u členu F_r, nemá-li polygon příslušný k F_r žádnou vlastní stranu.

[25]) Vyšetřuji pouze hodnoty $x \neq 0$, tedy $x_1 \neq 0$, $x_2 \neq 0$, ...

$F(x, y)$ a tedy též m-násobným kořenem funkce $\psi(x, y)$, je-li $|x_r|$, $|y_r|$ dosti malé.

IV. Vliv nevlastní strany v Newtonově polygonu. Má-li polygon, příslušný k funkci F_r, nevlastní stranu výšky m, má (viz bod I) funkce F_r m-násobný kořen $y = 0$, takže (podle bodu III) má $F(x, y)$ a tedy i $\psi(x, y)$ m-násobný kořen tvaru $y = b_1 x_1^{p_1} + \ldots + b_r x_1^{p_1} x_2^{p_2} \ldots x_r^{p_r}$; položím-li $x_r = x^{1/q_1 \ldots q_r}$, platí (89) a dostávám tak m-násobný kořen, postupující podle čísla $x^{1/q_1 \ldots q_r}$; zde je dokonce pouze konečný počet součinitelů různý od nuly.

V. Zakončení důkazu. Kdyby v posloupnosti (87) měl Newtonův polygon, příslušný k nějaké funkci F_r, pouze nevlastní stranu, dostali bychom podle bodu IV právě n_r-násobný příslušný kořen funkce $\psi(x, y)$ a byli bychom s posloupností (87) hotovi.[26] Nenastane-li tento případ, je posloupnost $F, F_1, F_2, \ldots$ nekonečná a vzhledem k (88) existuje přirozené číslo r tak, že

$$(92) \qquad n_r = n_{r+1} = n_{r+2} = n_{r+3} = \ldots = \nu,$$

kde $\nu \geqq 1$. Podle bodu II mají všechny funkce F_k pro $k \geqq r$ Newtonův polygon, složený z jediné vlastní strany výšky ν, dále $q_k = 1$, $\lambda_k = \nu p_k$ pro $k > r$. Pišme kratčeji $x_r = \xi$, $y_r = \eta$, $F_r(x_r, y_r) = \Phi(\xi, \eta)$; (89), (90) pišme kratčeji ve tvaru

$$(91) \qquad x = \xi^\tau, \; y = b_1 \xi^{\gamma_1} + b_2 \xi^{\gamma_2} + \ldots + b_r \xi^{\gamma_r} + \xi^{\gamma_r} \eta,$$

kde $\tau, \gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_r$ jsou přirozená čísla $\gamma_1 < \gamma_2 < \ldots < \gamma_r$. Klademe-li ještě $y_{r+s} = \eta_s$, $p_{r+s} = \pi_s$ $(s = 1, 2, \ldots)$, $F_{r+s}(\xi, \eta_s) = \Phi_s(\xi, \eta_s)$, máme podle (87)

$$\eta = \xi^{\pi_1}(\beta_1 + \eta_1), \qquad \Phi(\xi, \eta) = \xi^{\nu\pi_1} \Phi_1(\xi, \eta_1)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$(92) \qquad \eta_{s-1} = \xi^{\pi_s}(\beta_s + \eta_s), \; \Phi_{s-1}(\xi, \eta_{s-1}) = \xi^{\nu\pi_s} \Phi_s(\xi, \eta_s)$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

Píšeme-li $\varrho_1 = \pi_1$, $\varrho_2 = \pi_1 + \pi_2$, $\ldots$, $\varrho_s = \pi_1 + \pi_2 + \ldots + \pi_s$, $\ldots$, je $0 < \varrho_1 < \varrho_2 < \varrho_3 < \ldots$,

$$(93) \qquad \eta = \beta_1 \xi^{\varrho_1} + \beta_2 \xi^{\varrho_2} + \ldots + \beta_s \xi^{\varrho_s} + \xi^{\varrho_s} \eta_s \qquad \text{pro } s = 1, 2, \ldots$$

[26]) Nezapomínejme ovšem, že máme obecně několik takových posloupností.

a dále podle (92), (93)

$$
(94)\qquad
\begin{aligned}
\Phi(\xi, \eta) &= \xi^{\nu\varrho_s}\Phi_s(\xi, \eta_s)\\
\frac{\partial\Phi(\xi, \eta)}{\partial\eta} &= \xi^{(\nu-1)\varrho_s}\frac{\partial\Phi_s(\xi, \eta_s)}{\partial\eta_s},\\
&\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\
\frac{\partial^{\nu-1}\Phi(\xi, \eta)}{\partial\eta^{\nu-1}} &= \xi^{\varrho_s}\frac{\partial^{\nu-1}\Phi_s(\xi, \eta_s)}{\partial\eta_s^{\nu-1}},\\
\frac{\partial^{\nu}\Phi(\xi, \eta)}{\partial\eta^{\nu}} &= \frac{\partial^{\nu}\Phi_s(\xi, \eta_s)}{\partial\eta_s^{\nu}}.
\end{aligned}
$$

Tvrdím nyní: *existuje* $\varDelta > 0$ *tak, že řada*

$$(95)\qquad \beta_1\xi^{\varrho_1} + \beta_2\xi^{\varrho_2} + \beta_3\xi^{\varrho_3} + \dots$$

pro $0 < |\xi| < \varDelta$ *konverguje* (ovšem absolutně) *a dává* ν*-násobný kořen funkce* $\Phi(\xi, \eta)$. Důkaz: Ježto Φ, Φ_1, Φ_2, ... mají výšku ν, jest

$$(96)\qquad \Phi(0, 0) = \frac{\partial\Phi(0, 0)}{\partial\eta} = \dots = \frac{\partial^{\nu-1}\Phi(0, 0)}{\partial\eta^{\nu-1}} = 0,\quad \frac{\partial^{\nu}\Phi(0, 0)}{\partial\eta^{\nu}} \neq 0;$$

$$(97)\qquad \Phi_s(0, 0) = \frac{\partial\Phi_s(0, 0)}{\partial\eta_s} = \dots = \frac{\partial^{\nu-1}\Phi_s(0, 0)}{\partial\eta_s^{\nu-1}} = 0,$$

$$\frac{\partial^{\nu}\Phi_s(0, 0)}{\partial\eta_s^{\nu}} \neq 0 \qquad (s = 1, 2, \dots).$$

Funkce $\dfrac{\partial^{\nu-1}\Phi(\xi, \eta)}{\partial\eta^{\nu-1}}$ má výšku 1 (neboť součinitel při η je $\dfrac{\partial^{\nu}\Phi(0, 0)}{\partial\eta^{\nu}} \neq$ $\neq 0$. Podle věty 254 existuje tedy jedna a jen jedna[27]) řada

$$(98)\qquad \chi(\xi) = \delta_1\xi + \delta_2\xi^2 + \dots$$

konvergentní v okolí počátku a taková, že v okolí počátku je

$$(99)\qquad \frac{\partial^{\nu-1}\Phi(\xi, \chi(\xi))}{\partial\eta^{\nu-1}} = 0.$$

Obdobně: zvolím-li libovolné přirozené číslo s, existuje jedna a jen jedna řada

$$(100)\qquad \chi_s(\xi) = \varepsilon_{1s}\xi + \varepsilon_{2s}\xi^2 + \dots$$

---

[27]) Viz pozn. 2 na str. 620.

taková, že v okolí počátku je

$$\frac{\partial^{\nu-1}\Phi_s(\xi, \chi_s(\xi))}{\partial\eta_s^{\nu-1}} = 0. \tag{101}$$

Položím-li pro $s = 1, 2, \ldots$

$$\tau_s(\xi) = \beta_1\xi^{\varrho_1} + \beta_2\xi^{\varrho_2} + \ldots + \beta_s\xi^{\varrho_s} + \xi^{\varrho_s}\chi_s(\xi), \tag{102}$$

je podle (93), (94)

$$\frac{\partial^{\nu-1}\Phi(\xi, \tau_s(\xi))}{\partial\eta^{\nu-1}} = \xi^{\varrho_s}\frac{\partial^{\nu-1}\Phi_s(\xi, \chi_s(\xi))}{\partial\eta_s^{\nu-1}} = 0.$$

Ježto však $\chi(\xi)$ je jediná řada, vyhovující rovnici (99), je nutně $\chi(\xi) = \tau_s(\xi)$. Odtud (viz (102)) je vidět, že $\chi(\xi)$ je řada, jejíž úsek až do mocniny ξ^{ϱ_s} je právě $\beta_1\xi^{\varrho_1} + \ldots + \beta_s\xi^{\varrho_s}$; ježto to platí pro jakékoliv s, je

$$\chi(\xi) = \beta_1\xi^{\varrho_1} + \beta_2\xi^{\varrho_2} + \ldots, \tag{103}$$

čímž je předně dokázána konvergence řady (95). Ježto $\tau_s(\xi) = \chi(\xi)$, platí pro $0 \leqq k < \nu - 1$ [28]) podle (102), (94)

$$\frac{\partial^k\Phi(\xi, \chi(\xi))}{\partial\eta^k} = \xi^{(\nu-k)\varrho_s}\frac{\partial^k\Phi_s(\xi, \chi_s(\xi))}{\partial\eta_s^k}; \tag{104}$$

zde je levá i pravá strana po rozvinutí konvergentní mocninná řada v proměnné ξ. Ježto $(\nu - k)\,\varrho_s > \varrho_s$, jsou v řadě vlevo (jež nezávisí na s) všichni součinitelé až do mocniny ξ^{ϱ_s} rovni nule; ježto s může být jakkoliv velké, má levá strana v (104) všechny součinitele rovny nule a tedy je

$$\frac{\partial^k\Phi(\xi, \chi(\xi))}{\partial\eta^k} = 0 \quad \text{pro} \quad 0 \leqq k < \nu - 1. \tag{105}$$

Podle (105) je tedy řada (95), tj. funkce $\chi(\xi)$, vskutku aspoň ν-násobným kořenem funkce $\Phi(\xi, \eta)$ pro $0 < |\xi| < \Delta$. Že nemůže býti více než ν-násobným kořenem, je patrno z toho, že

$$\frac{\partial^\nu\Phi(0, 0)}{\partial\eta^\nu} \neq 0, \quad \text{takže} \quad \frac{\partial^\nu\Phi(\xi, \chi(\xi))}{\partial\eta^\nu} \neq 0$$

[28]) Takové hodnoty k existují ovšem jen pro $\nu > 1$.

pro malá $|\xi|$. Tím je hořejší tvrzení dokázáno. Odtud pak ihned dostáváme ν-násobný kořen funkce $F(x, y)$, klademe-li $\xi = x^{1/\tau}$ (takže $x = \xi^\tau$),

$$y = b_1\xi^{\gamma_1} + \ldots + b_r\xi^{\gamma_r} + \xi^{\gamma_r}(\beta_1\xi^{\varrho_1} + \beta_2\xi^{\varrho_2} + \ldots)$$

(viz (91) a poznámku na konci bodu III). Tím jsme vskutku k funkci $\Phi = F_r$ výšky ν dostali ν kořenů funkce F v žádaném tvaru.[29]) Provedeme-li to pro všechny takové posloupnosti (87) a respektujeme-li ještě kořeny, sestrojené v bodě IV z nevlastních stran Newtonových polygonů, dostaneme právě n kořenů. Že tyto kořeny vystupují každý právě tolikrát, kolik činí jejich násobnost, tj. že kořen, sestrojený z nějaké nevlastní strany v bodě IV nebo z nějaké funkce Φ v bodě V, se už při žádném jiném obdobném kroku znovu neobjeví, nahlédnete ihned úvahou obdobnou oné, kterou jsme provedli na konci bodu I. Tím je věta 257 úplně dokázána a zároveň podán návod, jak sestrojiti řady $u_j(x^{1/N})$ přímo z funkce $F(x, y)$, bez předběžného provedení rozkladu (65).

VI. Poznámka pro početní praxi. Dospěji-li v (87) k nějaké funkci $F_r(x_r, y_r)$ výšky 1, nemusím postupovati dále podle bodu IV, V, nýbrž mohu ihned počítati příslušný (jediný) kořen této funkce. Píši-li totiž pro zjednodušení ξ, η místo x_r, y_r, jest

$$F_r(\xi, \eta) = \sum_{i,k=0}^{\infty} \gamma_{jk}\xi^j\eta^k, \qquad \gamma_{00} = 0,\ \gamma_{01} \neq 0.$$

Podle věty 254 existuje jedna a jen jedna[27]) mocninná řada

$$\tau(\xi) = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k\xi^k$$

s kladným poloměrem konvergence, vyhovující v okolí počátku rovnici $F_r(\xi, \tau(\xi)) = 0$. Příslušný kořen funkce $F(x, y)$ dostaneme pak z (89), (90), klademe-li

$\xi = x^{1/(q_1 \ldots q_r)}$, $x_r = \xi$, $x_{r-1} = \xi^{q_r}$, $x_{r-2} = \xi^{q_r q_{r-1}}$, $\ldots$, $x = \xi^{q_r q_{r-1} \ldots q_2 q_1}$, $y_r = \tau(\xi)$. Součinitele ε_k pak dostaneme metodou neurčitých součini-

[29]) Jednotlivé kořeny $\varphi_j(x)$, sestrojené z různých posloupností (87) a postupující podle mocnin čísla x^{1/N_j}, mohou odpovídati různým hodnotám N_j; abychom dostali tvar požadovaný ve větě 257, stačí zřejmě vzít za N nějaký (třeba nejmenší) společný násobek čísel N_j.

telů, jak bylo již vyloženo v důkazu věty 255; zde je ovšem postup jednodušší (tehdejší čísla r, s jsou zde rovna 1). Srovnáním součinitelů v rovnici $F_r(\xi, \tau(\xi)) = 0$, tj. v rovnici

$$\gamma_{01}\tau(\xi) = -\sum_{j,k} \gamma_{jk}\xi^j\tau^k(\xi)$$

(kdež vpravo se sčítá přes ony páry j, k, pro něž je buďto $j > 0$ nebo $j = 0$, $k > 1$) dostáváme

$$\gamma_{01}\varepsilon_k = -\Sigma\, \gamma_{jl}\varepsilon_{m_1} \dots \varepsilon_{m_l},\text{[30]} \tag{106}$$

kdež se vpravo sčítá přes takové systémy j, l, m_1, ..., m_l, pro něž je

$$m_1 > 0, \dots, m_l > 0, j + m_1 + \dots + m_l = k,$$

a současně buďto $j > 0$ nebo $j = 0$, $l > 1$. Odtud v případě $j > 0$ plyne $m_1 < k, \dots, m_l < k$; v případě $j = 0$ je $m_1 + \dots + m_l = k$, $l > 1$ a tedy opět $m_1 < k, \dots, m_l < k$. Rovnice (106) nám tedy vskutku postupně dává ε_k pomocí čísel ε_m, $0 \leqq m < k$.

Uvedu nyní několik příkladů, pouze částečně propočítaných; čtenář učiní dobře, ověří-li si uvedené výsledky vlastním podrobným výpočtem.

Příklad 1.

$$y^5 + y^4 + 2xy^3 + y^2(x + x^2 - x^3) + y(2x^2 - 4x^4) + x^3 = 0. \tag{107}$$

Newtonův polygon (obr. 16) má dvě strany o směrnicích -2, -1. Vyšetřujme napřed první stranu, jíž přísluší dva rozvoje $y = bx^{1/2} + \dots$ Bodům (kroužkovaným) na první straně odpovídají členové $y^4 + y^2x$; mnohočlen $f(\beta)$ dostanu tak, že sem za y přímo dosadím $\beta x^{1/2}$; dostanu $\beta^4x^2 + \beta^2x^2$; rovnice $\beta^4 + \beta^2 = 0$ má dva jednoduché, od nuly různé kořeny $b = \mathrm{i}$, $b = -\mathrm{i}$.[31]) Položme tedy $x = t^2$, $y = t\,(\pm\mathrm{i} + z)$.[32]) To

---

[30]) Pro $l = 0$ znamená ovšem součin $\varepsilon_{m_1} \dots \varepsilon_{m_l}$ jedničku.

[31]) Obecně: mnohočlen $f(\beta) = \sum\limits_{jq+kp=\lambda} a_{jk}\beta^k$ dostaneme zcela mechanicky takto: do členů $a_{jk}x^jy^k$ na příslušné straně mnohočlenu dosadím $y = \beta x^{p/q}$, načež vyjde vskutku

$$\sum_{jq+kp=\lambda} a_{jk}\beta^k x^{(jq+kp)/q} = x^{\lambda/q}f(\beta);$$

vynechám-li činitele $x^{\lambda/q}$, dostanu $f(\beta)$.

[32]) Píši t, z místo x_1, y_1, abych uspořil indexy.

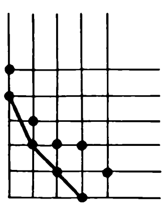
dosadím do (107), dělím nejvyšší mocninou t, jež se vyskytne, a tím dostanu funkci, kterou jsme v důkazu věty 257 (bod I) označili F_1. To bude již funkce výšky 1 (šlo o jednoduché kořeny), takže metodou neurčitých součinitelů (viz důkaz věty 257, bod VI) dostanete rozvoj z v mocninnou řadu: $z = \frac{1}{2} t \pm \frac{3}{8} it^2 - \frac{1}{2} t^3 + \dots$ a tedy

$$y_1 = ix^{1/2} + \frac{1}{2} x + \frac{3}{8} ix^{3/2} - \frac{1}{2} x^2 + \dots;$$

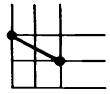
$$y_2 = -ix^{1/2} + \frac{1}{2} x - \frac{3}{8} ix^{3/2} - \frac{1}{2} x^2 + \dots.$$

Přistupme k druhé straně. Zde jde o rozvoje tvaru $y = bx + \dots$, kde b je kořenem rovnice $b^2 + 2b + 1 = 0$. Máme tedy dvojnásobný kořen $b = -1$. Klademe-li do (107) $y = x(-1 + z)$ a dělíme nejvyšší mocninou x, jež se vyskytne, obdržíme

$$(108) \quad z^5x^2 + z^4(x - 5x^2) + z^3(2x + 10x^2) + z^2(1 + x - 11x^2) + 5zx^2 = 0.$$



Obr. 16.



Obr. 17.

Newtonův polygon (viz obr. 17) má jednu nevlastní stranu výšky 1, takže máme jednoduché řešení $z = 0$, což je ostatně viděti přímo ze (108); tedy

$$y_3 = -x.$$

Druhé řešení bude $z = x^2(-5 + u)$, kde řadu u dostaneme již ze (108) metodou neurčitých součinitelů: $u = 5x - 60x^2 + \dots$, takže

$$y_4 = -x - 5x^3 + 5x^4 - 60x^5 + \dots$$

Poznámka 5. Okolnost, že řada $u_j(x^{1/N})$ je ν-násobným kořenem funkce $\psi(x, y)$, znamená toto: vztahy

$$(109)\qquad \frac{\partial^k \psi(t^N, u_j(t))}{\partial y^k} = 0 \qquad (0 \leqq k < \nu),$$
$$\frac{\partial^\nu \psi(t^N, u_j(t))}{\partial y^\nu} \neq 0$$

jsou splněny, dosadíme-li do nich $t = x^{1/N}$ (a tedy $t^N = x$), pokud $|x| \neq 0$ je dosti malé. Prvních ν rovnic $(0 \leqq k < \nu)$ je tedy splněno jistě pro všechna dosti malá kladná t (to jsou totiž n-té odmocniny kladných čísel t^N) a tedy levé strany v rovnicích (109) jsou pro $0 \leqq k < \nu$ mocninné řady v t, mající všechny součinitele rovny nule, kdežto poslední řada (nejsouc stále rovna nule) má nějaký součinitel od nuly různý.[33]) Tedy: *Řada $u_j(x^{1/N})$ je ν-násobným kořenem funkce $\psi(x, y)$ tehdy a jen tehdy, platí-li* (109) *pro všechna komplexní $t \neq 0$ s dosti malou prostou hodnotou* $|t|$. Z toho je vidět: budiž $|x|$ dosti malé; zvolme $t = \varepsilon x^{1/N}$, kde ε je nějaký N-tý kořen z jedničky, tj. nějaké číslo takové, že $\varepsilon^N = 1$ (jest N takových čísel, totiž $\varepsilon = e^{2\pi i(h/N)}$; $h = 0, 1, \ldots, N - 1$). Potom bude $t^N = \varepsilon^N x = x$, takže z (109) plyne

$$\frac{\partial^k \psi(x, u_j(\varepsilon x^{1/N}))}{\partial y^k} = 0 \qquad (0 \leqq k < \nu),$$
$$\frac{\partial^\nu \psi(x, u_j(\varepsilon x^{1/N}))}{\partial y^\nu} \neq 0,$$

tj. $u_j(\varepsilon x^{1/N})$ je také ν-násobným kořenem funkce $\psi(x, y)$. Z jednoho ν-násobného kořene $u_j(x^{1/N})$ dostáváme tedy bez jakéhokoliv počtu ještě další ν-násobné kořeny $u_j(\varepsilon x^{1/N})$ $(\varepsilon^N = 1)$; to je nejvýše N různých kořenů. Tímto způsobem lze často ulehčiti výpočet; tak v příkl. 3 dostáváme y_2 ihned z y_1, píšeme-li $-x^{1/2}$ místo $x^{1/2}$ (tj. dosazujeme-li $t = -x^{1/2}$ do řady $it + 1/2t^2 + 3/8\, it^3 - 1/2t^4 + \ldots$).

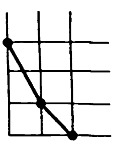
Příklad 4.

$$\begin{aligned} &(-x^3 + 10x^4 + \ldots) + y(-10x^3 + \ldots) + y^2(3x^2 - 43x^3 + \ldots) + \\ (110)\quad &+ y^3(16x^2 + \ldots) + y^4(-3x + 9x^2 + \ldots) + y^5(-6x + \ldots) + \\ &+ y^6(1 + 3x^2 + \ldots) + y^7(x + \ldots) + y^8(3x - \ldots) + \ldots = 0. \end{aligned}$$

[33]) A tedy je — podle věty 222 — stále různá od nuly, pro všechna dost malá $|t| \neq 0$.

Předpokládám ovšem, že nenapsaní členové jsou takoví, aby řada absolutně konvergovala v okolí počátku. Newtonův polygon má jedinou stranu výšky 6 o směrnici —2; příslušná rovnice ($y = bx^{1/2}$) je $b^6 - 3b^4 + 3b^2 - 1 = 0$, s dvěma trojnásobnými kořeny $b = 1$, $b = -1$. Dosazením $x = t^2$, $y = \pm t(1 + z)$ [34]) obdržíte

$$
\begin{aligned}
&t^6(1+z)^6 \mp 6t^7(1+z)^5 - 3t^6(1+z)^4 + 9t^8(1+z)^4 \pm \\
(111) \qquad &\pm 16t^7(1+z)^3 + 3t^6(1+z)^2 - 43t^8(1+z)^2 \mp \\
&\mp 10t^7(1+z) - t^6 + 10t^8 + \dots = 0.
\end{aligned}
$$



Obr. 18.

Dělíme-li t^6, dostáváme Newtonův polygon (viz obr. 18), odpovídající členům $8z^3$, $\pm 8tz$, $-24t^2$ (všimněte si, že nevypsaní členové v (111) obsahují aspoň t^9, takže neruší konstrukci Newtonova polygonu). Pro první stranu máme rovnici $8b^2 \pm 8 = 0$, tedy buďto $b = \pm i$ (pro $y = t(1 + z)$ nebo $b = \pm 1$ (pro $y = -t(1 + z)$), takže ($z = b \,.\, t^{1/2} + \dots$)

$$y_1 = x^{1/2} + ix^{3/4} + \dots, \quad y_2 = x^{1/2} - ix^{3/4} + \dots,$$
$$y_3 = -x^{1/2} - x^{3/4} + \dots, \; y_4 = -x^{1/2} + x^{3/4} + \dots$$

(Všechna tato řešení plynou ostatně podle pozn. 5 z prvního, píšeme-li místo $x^{1/4}$ v něm po řadě $-x^{1/4}$, $-ix^{1/4}$, $ix^{1/4}$). Druhá strana polygonu dává $b = \pm 3$, $z = \pm 3t + \dots$, tedy

$$y_5 = x^{1/2} + 3x + \dots, \qquad y_6 = -x^{1/2} + 3x + \dots$$

(zase plyne y_6 z y_5). Kdybychom chtěli počítati další členy řady y_j, museli bychom ovšem vypsati další součinitele v (110).

V dalších příkladech uvádím jenom výsledky; výpočty přenechávám čtenáři.

Příklad 5.

$$y^8 + y^4 + 2xy^3 + y^2(x + x^2 - x^3) + y(2x^2 - 2x^4) + x^3 = 0.$$
$$y_1 = ix^{1/2} + \dots, \quad y_2 = -ix^{1/2} + \dots, \quad y_3 = -x + ix^2 + \dots,$$
$$y_4 = -x - ix^2 + \dots$$

---

[34]) Píši raději takto místo $y = t(\pm 1 + z)$, abychom nemuseli dávat tolik pozor na znaménka.

Příklad 6.

$$y^6 - 2xy^5 + y^4(4x^2 + 4x^4) - 6x^3y^3 +$$
$$+ y^2(5x^4 + 3x^6) - 4yx^5 + 2x^6 + 2x^8 + x^9 = 0.$$

$$y_1 = \mathrm{i}x + \dots, \qquad y_2 = -\mathrm{i}x + \dots, \qquad y_3 = \mathrm{i}\sqrt{2}x + \dots,$$
$$y_4 = -\mathrm{i}\sqrt{2}x + \dots, \; y_5 = x + \sqrt{\frac{3}{2}}\mathrm{i}x^2 + \dots, \; y_6 = x - \sqrt{\frac{3}{2}}\mathrm{i}x^2 + \dots$$

Příklad 7.

$$y^7 + y^6(1 + x) + y^5(x - 2x^2) - y^4(x - x^5) -$$
$$- y^3(x + x^2 + 3x^3) - y^2(x^2 + x^4) + y(x^2 + 2x^4) + x^3 - x^4 = 0.$$

Položíme-li $\varepsilon = -\frac{1}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}\sqrt{3}$, máme řešení

$$y_1 = x^{1/3} + \dots, \qquad y_2 = \varepsilon x^{1/3} + \dots, \qquad y_3 = \varepsilon^2 x^{1/3} + \dots,$$
$$y_4 = x^{1/2} + \dots, \qquad y_5 = -x^{1/2} + \dots, \qquad y_6 = -x + \dots$$

Příklad 8.

$$y^4 - (2x + 2x^2)\,y^3 + 2(x^2 + x^3 + x^4)\,y^2 -$$
$$- 2(x^3 + x^4 + x^5 + x^6)\,y + x^4 + 2x^5 + 2x^6 + 2x^7 + x^8 = 0.$$

$y_1 = y_2 = x + x^2$ (dvojnásobný), $\quad y_3 = \mathrm{i}x + \dots, \quad y_4 = -\mathrm{i}x + \dots$

Příklad 9.

$$y^4 + (2x + x^2)\,y^3 + (3x^2 + 2x^4)\,y^2 + 2x^3y + x^4 + x^5 = 0.$$

$y_1 = \varepsilon x + \dots, \quad y_2 = \varepsilon x + \dots, \quad y_3 = \varepsilon^2 x + \dots, \quad y_4 = \varepsilon^2 x + \dots$ [35] [36].

Příklad 10.

$$y^6 + (2x - x^2)\,y^4 + x^2y^3 + 4x^2y^2 + x^5y + 4x^4 = 0.$$

Řešení

$$\sqrt{2}\left(\pm\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}\mathrm{i}\sqrt{3}\right)x^{1/2} + \dots, \qquad \pm\mathrm{i}x + \dots$$

se všemi kombinacemi znamének.

---

[35]) ε má týž význam jako v příkl. 7.

[36]) Kdybychom chtěli zjistiti, zda jde o jednoduché či dvojnásobné kořeny, musili bychom počítati ještě dále.

Příklad 11.

$$y^8 + 2xy^7 - 5x^2y^5 + 2x^2y^4 - 3x^3y^3 + 7x^4y^2 + x^4 = 0.$$

$$y_1 = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}x^{1/2} + \dots, \quad y_2 = \frac{1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}x^{1/2} + \dots,$$

$$y_3 = \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}x^{1/2} + \dots, \quad y_4 = \frac{1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}x^{1/2} + \dots,$$

$$y_5 = \frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}x^{1/2} + \dots, \quad y_6 = \frac{-1+\mathrm{i}}{\sqrt{2}}x^{1/2} + \dots,$$

$$y_7 = \frac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}x^{1/2} + \dots, \quad y_8 = \frac{-1-\mathrm{i}}{\sqrt{2}}x^{1/2} + \dots,$$

Příklad 12.

$$y^6 + x^2y^4 + x^4y^3 - x^4y^2 + 2x^6y - x^6 = 0.$$

$$y_1 = \mathrm{i}x + \dots, \quad y_2 = \mathrm{i}x + \dots, \quad y_3 = -\mathrm{i}x + \dots,$$

$$y_4 = -\mathrm{i}x + \dots, \quad y_5 = x + \dots, \quad y_6 = -x + \dots .$$

Poznámka 6. Věta 257 řeší i tento úkol, zdánlivě obecnější: budiž

$$g(\xi, \eta) = \sum_{j,k=0}^{\infty} b_{jk}(\xi - \xi_0)^j (\eta - \eta_0)^k$$

mocninná řada o středu $[\xi_0, \eta_0]$, absolutně konvergentní pro $|\xi - \xi_0| < \varrho$, $|\eta - \eta_0| < \varrho$, kde ϱ je jisté kladné číslo; hledáme všechna řešení rovnice $g(\xi, \eta) = 0$ v okolí bodu $[\xi_0, \eta_0]$. Klademe-li $\xi - \xi_0 = x$, $\eta - \eta_0 = y$, máme hledati v okolí počátku řešení rovnice $f(x, y) = 0$, přičemž $f(x, y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} b_{jk}x^jy^k$. Jsou-li všechna $b_{jk} = 0$, je úloha triviální; budiž tedy aspoň jedno $b_{jk} \neq 0$; budiž h nejmenší číslo, k němuž existuje číslo k tak, že $b_{hk} \neq 0$; z funkce f se dá tedy vytknouti x^h (nikoliv však x^{h+1}) a máme $f(x, y) = x^hF(x, y)$, kde $F(x, y) = \sum_{j,k} a_{jk}x^jy^k$ (přičemž může ovšem býti též $h = 0$). Ježto $a_{jk} = b_{j+h,k}$, existuje k tak, že $a_{0k} = b_{hk} \neq 0$. Řešení rovnice $f(x, y) = 0$ jsou pak tato:

I. $x = 0$, y libovolné (je-li $h > 0$).

II. Řešení rovnice $F(x, y) = 0$. Je-li $F(0, 0) = a_{00} \neq 0$, neexistují v okolí počátku žádná řešení rovnice $F = 0$; je-li však $a_{00} = 0$, existuje celé $n > 0$ tak, že $a_{0n} \neq 0$, $a_{0k} = 0$ pro $0 \leqq k < n$ a řešení rovnice $F = 0$ v okolí počátku se dostanou z věty 257.

§ 5. Reálné řešení rovnice $F(x, y) = 0$ při reálných a_{jk}. Napřed pomocnou větu:

Věta 258. *Budiž $f(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + c_3x^3 + \ldots$ mocninná řada s kladným poloměrem konvergence R. Potom existuje číslo $\varrho (0 < \varrho \leqq R)$ s touto vlastností:*

I. *Jsou-li všechna c_m reálná, je $f(x)$ reálné pro všechna reálná x taková, že $0 < |x| < \varrho$.*

II. *Je-li alespoň jedno c_m nereálné, není $f(x)$ reálné pro žádné reálné x takové, že $0 < |x| < \varrho$.*

Důkaz. Bod I je samozřejmý. Budiž nyní c_m první součinitel, jenž není reálný. Označím-li znakem $\Im\alpha$ obecně imaginární část čísla α, je $\Im c_m \neq 0$ a tedy existuje kladné ϱ tak $(0 < \varrho \leqq R)$, že pro $|x| < \varrho$ je $|c_{m+1}x + c_{m+2}x^2 + \ldots| < |\Im c_m|$ a tedy též $|\Im(c_{m+1}x + c_{m+2}x^2 + \ldots)| < |\Im c_m|$. Pro reálné x, $0 < |x| < \varrho$ je tedy $|\Im f(x)| = |x^m| \cdot |\Im c_m + \Im(c_{m+1}x + c_{m+2}x^2 + \ldots)| \geqq |x^m| (|\Im c_m| - |\Im(c_{m+1}x + c_{m+2}x^2 + \ldots)|) > 0$, takže $f(x)$ není reálné.

Věta 257 dává za předpokladů v ní uvedených úplné řešení rovnice $F(x, y) = 0$, kde

$$F(x, y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}x^jy^k, \tag{112}$$
$$a_{00} = \ldots = a_{0,n-1} = 0, \qquad a_{0n} \neq 0 \; (n > 0).$$

Za oněch předpokladů jest

$$\psi(x, y) = \prod_{j=1}^{n} (y - u_j(x^{1/N})) \tag{113}$$

a rovnice $F(x, y) = 0$ je v jistém okolí počátku splněna tehdy a jen tehdy, je-li $y = u_j(x^{1/N})$ pro nějaké j $(j = 1, 2, \ldots, n)$. Často však máme funkci $F(x, y)$, jež je reálná pro všechny reálná x, y v okolí počátku (to znamená podle věty 252, že všechna a_{jk} jsou reálná) a zajímáme se pouze o reálné hodnoty x, y v okolí počátku, jež splňují rovnici

$F(x, y) = 0$.[37]) Jednu takovou dvojici $x = y = 0$ známe. Abychom našli ještě ostatní, musíme zjistit, které řady $u_j(x^{1/N})$ a pro která reálná x mají reálnou hodnotu. O tom nás poučuje tato věta:

Věta 259. *Budiž $u(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots$ řada s kladným poloměrem konvergence; budiž N přirozené číslo. Potom existuje kladné číslo ϱ tak, že platí:*

I. *Jsou-li b_m, $b_m \mathrm{e}^{\pi i m/N}$ $(m = 0, 1, \dots)$ vesměs reálná, je $u(x^{1/N})$ reálné pro všechna x intervalu $(-\varrho, 0)$ i intervalu $(0, \varrho)$.*[38])

II. *Jsou-li čísla b_m vesměs reálná, je-li však aspoň jedno číslo $b_m \mathrm{e}^{\pi i m/N}$ nereálné, je $u(x^{1/N})$ reálné pro $0 < x < \varrho$, ale nereálné pro $-\varrho < x < 0$.*

III. *Jsou-li čísla $b_m \mathrm{e}^{\pi i m/N}$ vesměs reálná, je-li však aspoň jedno číslo b_m nereálné, je $u(x^{1/N})$ reálné pro $-\varrho < x < 0$, ale nereálné pro $0 < x < \varrho$.*

IV. *Je-li aspoň jedno z čísel b_m jakož i jedno z čísel $b^m \mathrm{e}^{\pi i m/N}$ nereálné, je $u(x^{1/N})$ nereálné pro $-\varrho < x < 0$ i pro $0 < x < \varrho$.*

Důkaz. Pro kladná x je $u(x^{1/N}) = u(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots$, kde $t = x^{1/N} > 0$; pro $x < 0$, tj. pro $x = \mathrm{e}^{i\pi} \mid x \mid$ kladu $x^{1/N} = \mathrm{e}^{i\pi/N} t$, kde $t = \mid x \mid^{1/N} > 0$, takže jde o řadu

$$u(x^{1/N}) = b_0 + b_1 \mathrm{e}^{i\pi/N} t + \dots + b_m \mathrm{e}^{m\pi i/N} t^m + \dots;$$

věta 259 plyne pak z věty 252 (intervalu $(0, \varrho)$ nebo $(-\varrho, 0)$ pro x odpovídá interval $(0, \varrho^{1/N})$ pro t).

Příklad 1. V příkladech 6, 9, 10, 11 z § 4 je $x = y = 0$ jediné reálné řešení; v příkl. 8. jsou všechna reálná řešení v jistém okolí počátku dána rovnicí $y = x + x^2$.

Věta 259 rozhoduje o realitě funkcí $u_j(x^{1/N})$ znám-li všechny součinitele těchto řad. Ukážeme však, že stačí znáti konečný (dostatečně velký) počet součinitelů, známe-li ovšem násobnost příslušného kořenu $u_j(x^{1/N})$:

Věta 260. *Ve větě 257 buďte a_{jk} vesměs reálná. Budiž např. $u_1(t) = b_1 t + b_2 t^2 + \dots$ a budiž $u_1(x^{1/N})$ v-násobným kořenem mnohočlenu*

[37]) Říká se někdy také, že hledáme „reálné body křivky $F(x, y) = 0$".

[38]) Tyto intervaly jsou ovšem množiny reálných čísel.

$\psi(x, y)$, takže např. $u_1(t) = u_2(t) = \dots = u_\nu(t)$. Existuje tedy přirozené číslo k tak, že žádná z řad $u_{\nu+1}(t), \dots, u_n(t)$ nezačíná úsekem $b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_k t^k$.

Tvrdím:

I. *Jsou-li $b_1, \dots, b_k$ vesměs reálná, jsou vůbec všechna čísla b_n reálná.*

II. *Jsou-li $b_1 e^{\pi i/N}, \dots, b_k e^{k\pi i/N}$ vesměs reálná, jsou vůbec všechna čísla $b_m e^{m\pi i/N}$ reálná.*

Důkaz. Pro všechna x, y [39]) jest

$$\psi(x, y) = \prod_{j=1}^{n} (y - u_j(x^{1/N})).$$

Odtud plyne (jako v § 4, pozn. 1), že pro všechna t, y jest

$$\psi(t^N, y) = \prod_{j=1}^{n} (y - u_j(t)) \tag{114}$$

a odtud též

$$\psi(-t^N, y) = \prod_{j=1}^{n} (y - u_j(e^{\pi i/N} t)), \tag{115}$$

neboť $(e^{\pi i/N} t)^N = -t^N$. Vpravo i vlevo jsou v (114), (115) mocninné řady v t, y; vzhledem k y jsou levé strany dokonce mnohočleny n-tého stupně. Součinitelé v (114), (115) vlevo jsou reálná čísla (neboť se podle věty 253 dostanou z reálných čísel a_{jk} čtyřmi základními úkony početními).

I. Buďte nyní čísla $b_1, \dots, b_k$ reálná a předpokládejme, že existuje nějaké b_m, jež není reálné; budiž b_{l+1} první nereálné z čísel b_m (tedy $l \geqq k$). Z toho odvodíme spor. Klademe-li

$$y = b_1 t + b_2 t^2 + \dots + b_l t^l + z, \tag{116}$$

jest

$$y - u_j(t) = z - b_{l+1} t^{l+1} - b_{l+2} t^{l+2} - \dots \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, \nu;$$

pro $j > \nu$ je však

$$y - u_j(t) = z + c(j, m_j)\, t^{m_j} + c(j, m_j + 1)\, t^{m_j+1} + \dots,$$

kde $c(j, m_j) \neq 0$, $0 < m_j \leqq k \leqq l$; neboť $u_j(t)$ $(j > \nu)$ se liší od $u_1(t)$

[39]) Myslím ovšem stále na jisté okolí počátku.

součinitelem při nějaké mocnině, t^{m_j}, kde $m_j \leqq k$. Dosazením ze (116) do (114) dostáváme

$$\begin{aligned}(117)\qquad &\psi(t^N, b_1 t + \dots + b_l t^l + z) = \\ &= (z - b_{l+1} t^{l+1} - \dots)^\nu \cdot \prod_{j=\nu+1}^{n} (z + c(j, m_j)\, t^{m_j} + \dots)\end{aligned}$$

(je-li $\nu = n$, znamená ovšem symbol $\prod_{j=n+1}^{n} a_j$ jedničku). Levá strana v (117) je mocninná řada v t, z s reálnými součiniteli (neboť $b_1, \dots, b_l$ jsou reálná). Nejnižší člen vpravo, neobsahující z, jest

$$(118)\qquad (-1)^\nu b_{l+1}^\nu \prod_{j=\nu+1}^{n} c(j, m_j) \,.\, t^{\nu(l+1)+m_{\nu+1}+\dots+m_n}$$

(mějme na paměti, že $b_{l+1} \neq 0$, $c(j, m_j) \neq 0$, $m_j < l + 1$). Nejnižší člen vpravo v (117), obsahující z^1, jest

$$(119)\qquad \nu(-1)^{\nu-1} b_{l+1}^{\nu-1} \prod_{j=\nu+1}^{n} c(j, m_j) \,.\, z \,.\, t^{(\nu-1)(l+1)+m_{\nu+1}+\dots+m_n}.$$

Součinitelé v (118), (119) jsou reálná, od nuly různá čísla; tedy je reálný i jejich podíl

$$((-1)^\nu b_{l+1}^\nu \prod_{j=\nu+1}^{n} c(j, m_j)) : (\nu(-1)^{\nu-1} b_{l+1}^{\nu-1} \prod_{j=\nu+1}^{n} c(j, m_j)) = -\frac{1}{\nu} b_{l+1},$$

což je spor.

II. Jsou-li $e^{\pi i/N} b_1, \dots, e^{k\pi i/N} b_k$ reálná, vyjdu z rovnice (115) místo ze (114); zde jest

$$u_1(e^{\pi i/N} t) = e^{\pi i/N} b_1 t + e^{2\pi i/N} b_2 t^2 + e^{3\pi i/N} b_3 t^3 + \dots$$

a další postup je stejný jako v I (klademe $y = e^{\pi i/N} b_1 t + \dots + e^{l\pi i/N} b_l t^l + z$ atd.).

Příklad 2. Uvedeme ještě reálná řešení v oněch z příkladů 3—12, § 4, jež nebyly rozřešeny v příkl. 1. Vedle triviálního řešení $x = y = 0$ máme ještě tato reálná řešení: V příkl. 3 y_1 a y_2 pro $x < 0$; y_3 a y_4 pro $x < 0$ i $x > 0$. V příkl. 4 y_3, y_4, y_5, y_6 pro $x > 0$. V příkl. 5 y_1, y_2 pro $x < 0$. V příkl. 7 y_1, y_4, y_5 pro $x > 0$, y_2 pro $x < 0$, y_6 pro $x < 0$ i $x > 0$. V příkl. 12 y_5, y_6 pro $x < 0$ i $x > 0$.

P o z n á m k a 1. O realitě kořenů $u_j(x^{1/N})$ mohu tedy rozhodnouti, jakmile jsem v rozvoji funkce $u_j(x^{1/N})$ postoupil tak daleko, že ji mohu odlišiti ode všech o s t a t n í c h kořenů (různých od $u_j(x^{1/N})$)[40]. K tomu dospěji vždy po dosti velkém počtu kroků, je-li $u_j(x^{1/N})$ jednoduchý kořen; u mnohonásobných kořenů mohou nastati obtíže (mají-li např. $u_1(t), u_2(t)$ stejné — a to reálné — součinitele až do t^{1000}, není tím ještě o násobnosti ani o realitě rozhodnuto). Z algebry známe ovšem věty, jež dovolují rozhodnouti o násobnosti kořenů mnohočlenu $\psi(x, y)$ a to tak, že se na součinitele tohoto mnohočlenu (což jsou mocninné řady $p_k(x)$ z věty 253) aplikují čtyři základní úkony početní; tím nám však není příliš pomoženo, protože zde musíme počítati zase s nekonečně mnoha součiniteli řad $p_k(x)$; pouze je-li $F(x, y)$ (nebo též $\psi(x, y)$) mnohočlen v o b o u proměnných x, y, odpadá tato obtíž.[41])

P o z n á m k a 2. Jsou-li a_{jk} reálná, je možno někdy ještě další zjednodušení výpočtu. Budiž

$$b_1x^{1/N} + b_2x^{2/N} + \dots \tag{120}$$

ν — násobný kořen; budiž c_m číslo komplexně sdružené k číslu b_m. Potom pro $x > 0$ je číslo komplexně sdružené k číslu (120), totiž číslo

$$c_1x^{1/N} + c_2x^{2/N} + \dots, \tag{121}$$

rovněž ν-násobným kořenem. Z toho však plyne (jako v poznámce 5, § 4), že číslo (121) je ν-násobným kořenem i pro všechna k o m p l e x n í x v jistém okolí počátku. Nejsou-li tedy všechna b_m reálná, dostáváme ve (121) další ν-násobný kořen. Tak v příkl. 6, § 4 plyne řešení y_2 ihned z y_1, y_4 plyne z y_3, y_6 plyne z y_5.

§ 6. Extrémy funkcí dvou proměnných. Budiž opět $F(x, y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk}x^jy^k$ řada s reálnými součiniteli a_{jk}, absolutně konvergentní

[40]) Je-li odpověď z á p o r n á, mohu dospěti k rozhodnutí již dříve; tak v příkl. 12, § 4 jsou $y_1, \dots, y_4$ nereálná pro $x > 0$ i $x < 0$, ač jsme rozlišení neprovedli.

[41]) Stejná obtíž se může naskytnouti i zde, jsou-li součinitelé např. iracionální čísla nebo vůbec čísla, daná nějakými limitními přechody; počítání s takovými čísly může také vyžadovati popřípadě nekonečně mnoho kroků.

v okolí počátku, $a_{0k} = 0$ pro $0 \leqq k < n$, $a_{0n} \neq 0$ $(n > 0)$. Ptáme se, zda má funkce F v počátku lokální extrém a jaký, přičemž se ovšem omezujeme na reálné hodnoty x, y dosti blízké nule, což nebudu stále opakovati.[42]) Jest $F(0, 0) = 0$, takže jde o znamení funkce F v okolí počátku. Ve smyslu věty 257 jest

$$F(x, y) = \varphi(x, y) \,.\, G(x, y),$$

kde $G(0, 0) = a_{0n} \neq 0$. Předpokládejme $a_{0n} > 0$ (kdyby bylo $a_{0n} < 0$, vyšetřujme $-F$ místo F, což znamená, že bychom prostě ve výsledcích vyměnili slova „maximum" a „minimum"). Potom má F totéž znamení jako φ (v jistém okolí počátku). Podle věty 257 jest pak

$$\varphi(x, y) = y^n + \sum_{k=0}^{n-1} y^k p_k(x) = \prod_{j=1}^{n} (y - u_j(x^{1/N})),$$

kdež $p_k(x)$ jsou reálná, $p_k(0) = 0$. Tedy $\varphi(0, y) = y^n$; pro $x \neq 0$ pak mají kořeny u_j tuto vlastnost: je-li (pro nějakou hodnotu $x \neq 0$) mezi nimi nějaký nereálný ν-násobný kořen $u_h(x^{1/N})$, je také číslo komplexně sdružené ν-násobným kořenem, třeba $u_k(x^{1/N})$. Pro součin příslušných kořenových činitelů pak platí $(y - u_h(x^{1/N}))^\nu\, (y - u_k(x^{1/N}))^\nu > 0$ pro každé (reálné) y. Kořeny $u_j(x^{1/N})$ patří ke čtyřem druhům, popsaným ve větě 259. Rozvažme všechny možné případy:

I. Jsou-li všechna u_j čtvrtého druhu, je předně n sudé (kořeny se sdružují v páry), tedy $\varphi(0, y) = y^n > 0$ pro $y \neq 0$; pro $x \neq 0$ je pak $\varphi(x, y) > 0$ pro každé y (součin komplexně sdružených čísel různých od nuly). *Tedy má f v počátku ostré lokální minimum* (pouze v počátku je $F = 0$, ve všech ostatních[43]) bodech je $F > 0$).

II. Nechť vystupují též kořeny prvního, druhého nebo třetího druhu; každý z nich nechť má však sudou násobnost[44]). Potom je opět n sudé, $\varphi(x, y) \geqq 0$ pro všechna x, y; zvolím-li však $y = u_j(x^{1/N})$, kde u_j je kořen 1., 2. nebo 3. druhu, jest $\varphi(x, y) = 0$ (znamení čísla $x \neq 0$

[42]) Jde tedy vlastně o extrémy parciální funkce $F_M(x, y)$, kde M je množina všech párů reálných hodnot x, y vyhovujících nerovnostem $|x| < \varrho$, $|y| < \varrho$, kde ϱ je jisté kladné číslo.

[43]) Rozuměj stále: dostatečně blízkých.

[44]) Tento požadavek se netýká kořenů čtvrtého druhu.

volím tak, aby $u_j(x^{1/N})$ bylo reálné). *V tomto případě má tedy F v počátku lokální minimum, ne však ostré.*

III. Nechť některý kořen 1., 2. nebo 3. druhu, třeba $u_1(x^{1/N})$, má lichou násobnost ν ($u_1 = u_2 = \ldots = u_\nu$). Zvolme $x \neq 0$ libovolně blízko počátku; znamení čísla x volme tak, aby $u_1(x^{1/N})$ bylo reálné. Potom lze zvoliti čísla $y_1 < u_1(x^{1/N})$, $y_2 > u_1(x^{1/N})$ tak blízko čísla $u_1(x^{1/N})$, že uzavřený interval $\langle y_1, y_2 \rangle$ neobsahuje žádný z kořenů $u_{\nu+1}(x^{1/N}), \ldots, u_n(x^{1/N})$. Tedy má $\prod_{j=\nu+1}^{n} (y - u_j(x^{1/N}))$ totéž znamení pro $y = y_1$ jako pro $y = y_2$, kdežto $(y_1 - u_1(x^{1/N}))^\nu < 0 < (y_2 - u_1(x^{1/N}))^\nu$, takže

$$\psi(x, y_1)\, \psi(x, y_2) < 0. \tag{122}$$

Existují tedy dvojice čísel $x = 0$, y_1, y_2 libovolně blízkých počátku tak, že platí (122). *Tedy nemá F v počátku lokální extrém.*

Vezměme nyní obecný případ: Budiž

$$f(x, y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} b_{jk} x^j y^k \tag{123}$$

zcela libovolná řada absolutně konvergentní v okolí počátku, b_{jk} reálná; vyšetřujme, zda má f lokální extrém v počátku. Místo $f(x, y)$ vyšetřujme raději funkci $f(x, y) - f(0, 0) = f(x, y) - b_{00}$, jež má v počátku hodnotu 0. Jsou-li všechna b_{jk} pro $[j, k] \neq [0, 0]$ rovna nule, je řešení samozřejmé. Budiž tedy aspoň jeden součinitel b_{jk} ($[j, k] \neq$ $\neq [0, 0]$) různý od nuly. Potom vytknu (jako v § 4, pozn. 6) z $f(x, y) -$ $- f(0, 0)$ nejvyšší mocninu x a obdržím

$$\begin{gathered} f(x, y) - f(0, 0) = x^h F(x, y), \\ F(x, y) = \sum_{j,k=0}^{\infty} a_{jk} x^j y^k; \end{gathered} \tag{124}$$

přitom jest $h \geqq 0$, a_{jk} reálná; budiž a_{0n} první z čísel $a_{00}, a_{01}, a_{02}, \ldots$, jež je různé od nuly, takže $n \geqq 0$. Předpokládejme opět, že $a_{0n} > 0$.

A. Je-li $n = 0$, je $F(x, y) > 0$ v okolí počátku (neboť $F(0, 0) =$ $= a_{00} > 0$.[45]) Tedy má $f(x, y) - f(0, 0)$ totéž znamení jako x^h : tedy

[45]) V tomto případě je nutně $h > 0$, ježto podle (124) jest $x^h F(x, y) = 0$ pro $x = y = 0$.

žádný extrém pro liché h, neostré minimum pro sudé h (neboť $f(0, y) - f(0, 0) = 0$ pro každé y).

B. Budiž $n > 0$, takže $F(x,y)$ má vlastnosti požadované ve větě 257. Znamení funkce $F(x,y)$ je pak totéž jako u funkce $\psi(x, y)$; jde tedy o znamení funkce $x^h \psi(x, y)$. Zde platí:

B 1. Budiž $h = 0$; potom máme případ, vyšetřený v bodech I, II, III.

B 2. Budiž h sudé, $h > 0$. Potom má $f(x, y)$ v případech II, III v počátku lokální minimum, ale neostré ($x^h \psi(x, y)$ má totéž znamení jako $\psi(x, y)$, až na to, že se $x^h \psi$ rovná nule pro $x = 0$, y libovolné). V případě I nemá f v počátku extrém: neboť existují trojice $x \neq 0$, y_1, y_2 čísel libovolně blízkých počátku, pro něž platí (122) a tedy též $x^h \psi(x, y_1) \,.\, x^h \psi(x, y_2) < 0$.

B 3. Budiž h liché. Zvolme libovolně malé $y > 0$; potom je $\psi(0, y) = y^n > 0$ a tedy existuje (spojitost!) číslo $\delta > 0$ tak, že pro $|x| < \delta$ je $\psi(x, y) > 0$; pro $-\delta < x < 0$ je tedy $x^h \psi(x, y) < 0$, pro $0 < x < \delta$ je $x^h \psi(x, y) > 0$; tedy nemá funkce f v počátku lokální extrém.

Tím je i tento obecnější případ úplně probrán.

Vyšetřování lokálních extrémů funkce $g(\xi, \eta)$ v libovolně zvoleném bodě $[\xi_0, \eta_0]$ se pak převede na případ právě vyšetřený substitucí $\xi - \xi_0 = x$, $\eta - \eta_0 = y$ (viz § 4, pozn. 6).

Jako příklady vyšetříme, zda funkce $F(x, y)$, vyšetřované v § 4, příkl. 3—12, mají v počátku lokální extrém.[46] Výsledek jest: v příkl. 3, 4, 5, 7, 12 žádný extrém, v příkl. 6, 9, 10, 11 ostré minimum, v příkl. 8 neostré minimum.

---

[46]) V příkl. 3 rozumím funkcí $F(x, y)$ funkci, stojící na levé straně rovnice (107). V příkl. 3 jsme hledali řešení rovnice $F(x, y) = 0$, nyní hledáme, zda funkce $F(x, y)$ má lokální extrém v počátku. Podobně v příkl. 4—12.