Diferenciální počet II

Dodatek II

In: Vojtěch Jarník (author): Diferenciální počet II. (Czech). Praha: Academia, 1984. pp. 602--613.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402021

DODATEK II

V tomto dodatku se pokusíme o zobecnění vět 206 a 207 na derivace vyšších řádů. Jsou-li x_0, x_1, x_2 tři různá čísla, položme

$$Q_f(x_0, x_1, x_2) = \frac{Q_f(x_1, x_2) - Q_f(x_0, x_2)}{x_1 - x_0};$$

přímým výpočtem ihned zjistíme, že

$$Q_f(x_0, x_1, x_2) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & f(x_0) \\ 1 & x_1 & f(x_1) \\ 1 & x_2 & f(x_2) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix}}.$$

To nás vede obecně k tomuto označení: Jsou-li $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(n > 0)$ navzájem různá čísla,[1]) klaďme

$$(1) \qquad Q_f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix}}.$$

Funkce $n!\, Q_f(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ se nazývá často n-tým diferenčním podílem funkce f.

Permutuji-li čísla $x_0, x_1, \ldots, x_n$, permutují se v čitateli i ve jmenovateli řádky determinantů týmž způsobem a tedy se hodnota funkce Q_f nezmění.

---

[1]) a jsou-li ovšem $f(x_j)$ $(0 \leqq j \leqq n)$ definována, což budeme předpokládat,

Víte též, že jest

$$(2)\qquad \begin{vmatrix} 1 & a_0 & a_0^2 & \dots & a_0^m \\ 1 & a_1 & a_1^2 & \dots & a_1^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & a_m & a_m^2 & \dots & a_m^m \end{vmatrix} = \prod_{0 \leq j \leq k \leq m} (a_k - a_j).$$

Rozvinete-li čitatele v (1) podle prvků posledního sloupce a užijete-li vzorce (2), obdržíte pro Q_f toto vyjádření:

$$(3)\qquad Q_f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f(x_k)}{\prod\limits_{\substack{0 \leq l \leq n \\ l \neq k}} (x_k - x_l)}.$$

1. pomocná věta. *Pro $n > 1$ jest*

$$Q_f(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{Q_f(x_0, x_2, \dots, x_n) - Q_f(x_1, x_2, \dots, x_n)}{x_0 - x_1}.$$

Důkaz. Všechna tři Q_f vyjádříme podle (3) a srovnáme součinitele při $f(x_k)$ vpravo i vlevo. Součinitel při $f(x_0)$ vpravo jest zlomek $1/A$, kde $A = \prod\limits_{2 \leq l \leq n} (x_0 - x_l) \,.\, (x_0 - x_1) = \prod\limits_{\substack{0 \leq l \leq n \\ l \neq 0}} (x_0 - x_l)$; podobně při $f(x_1)$. Součinitel při $f(x_k)$ $(k > 1)$ jest pak

$$\frac{1}{x_0 - x_1} \,.\, \prod_{\substack{0 \leq l \leq n \\ l \neq k, l \neq 1}} \frac{1}{x_k - x_l} - \frac{1}{x_0 - x_1} \prod_{\substack{0 \leq l \leq n \\ l \neq k, l \neq 0}} \frac{1}{x_k - x_l} =$$

$$= \frac{1}{x_0 - x_1} \prod_{\substack{0 \leq l \leq n \\ l \neq k, l \neq 0, l \neq 1}} \frac{1}{x_k - x_l} \,.\, \frac{(x_k - x_1) - (x_k - x_0)}{(x_k - x_0)(x_k - x_1)} =$$

$$= \prod_{\substack{0 \leq l \leq n \\ l \neq k}} \frac{1}{x_k - x_l}.$$

2. pomocná věta. *Budiž $n > 1$. Existuje-li vlastní $f'(x_0)$, jest*

$$\lim_{\xi \to x_0} Q_f(x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, \xi) =$$

$$(4)\qquad = \frac{f'(x_0)}{\prod\limits_{l=1}^{n-1} (x_0 - x_l)} - \frac{f(x_0)}{\prod\limits_{l=1}^{n-1} (x_0 - x_l)} \,.\, \sum_{r=1}^{n-1} \frac{1}{x_0 - x_r} +$$

$$+ \sum_{r=1}^{n-1} \frac{f(x_r)}{\prod\limits_{\substack{l=0 \\ l \neq r}}^{n-1} (x_r - x_l) \,.\, (x_r - x_0)}.$$

Důkaz. Podle (3) jest

$$Q_f(x_0, \ldots, x_{n-1}, \xi) = \frac{1}{x_0 - \xi}\left(\frac{f(x_0)}{\prod\limits_{l=1}^{n-1}(x_0 - x_l)} - \frac{f(\xi)}{\prod\limits_{l=1}^{n-1}(\xi - x_l)}\right) +$$

$$+ \sum_{r=1}^{n-1} \frac{f(x_r)}{\prod\limits_{\substack{l=0 \\ l\neq r}}^{n-1}(x_r - x_l) \, . \, (x_r - \xi)} \, .$$

První člen vpravo má pro $\xi \to x_0$ za limitu derivaci funkce $f(\xi)$. $\cdot \prod\limits_{l=1}^{n-1} \frac{1}{\xi - x_l}$ v bodě x_0; vypočtete-li tuto derivaci, obdržíte ihned (4).

3. pomocná věta. *Existují-li vlastní derivace*

$f'(x_0), f'(x_1), \ldots, f'(x_{n-1})$ $(n > 1)$, *jest*

$$\begin{aligned} Q_{f'}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) &= \lim_{\xi \to x_0} Q_f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, \xi) + \\ &+ \lim_{\xi \to x_1} Q_f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, \xi) + \ldots + \\ &+ \lim_{\xi \to x_{n-1}} Q_f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, \xi). \end{aligned} \tag{5}$$

Důkaz. Užijme vzorce (3) (aplikovaného pro $n - 1, f'$ místo n, f) a vzorce (4), kde podmínku $\xi \to x_0$ nahradíme postupně podmínkami $\xi \to x_1, \ldots, \xi \to x_{n-1}$. Vzhledem k souměrnosti stačí dokázati, že ve výrazu (5) vpravo je součinitel při $f'(x_0)$ roven $\prod\limits_{1 \leq l \leq n-1} \frac{1}{x_0 - x_l}$ a že součinitel při $f(x_0)$ je roven nule. První věc je jasná podle (4); součinitel při $f(x_0)$ ve výrazu $\lim\limits_{\xi \to x_s} Q_f(x_0, \ldots, x_{n-1}, \xi)$ $(s = 1, \ldots, n - 1)$ je podle (4) (kde místo x_0 píši x_s a místo x_r píši x_0) roven

$$\prod_{l \neq 0}^{n-1} \frac{1}{x_0 - x_l} \cdot \frac{1}{x_0 - x_s} \, .$$

Sečtete-li tyto výrazy pro $s = 1, 2, \ldots, n - 1$, vidíte, že se jejich součet právě zruší se součinitelem při $f(x_0)$ ve výrazu $\lim\limits_{\xi \to x_0} Q_f(x_0, \ldots, x_{n-1}, \xi)$.

Poznámka 1. V tomto paragrafu budeme často vyšetřovati limity tvaru

$$\lim_{\substack{[x_0, x_1, \ldots, x_n] \to [a, a, \ldots, a] \\ [x_0, x_1, \ldots, x_n] \in M}} F(x_0, x_1, \ldots, x_n),$$

kde M je buďto množina všech bodů $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ takových, že $x_j \neq x_k$ pro $j \neq k$ nebo množina všech bodů $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ takových, že jest $x_j \neq x_k$ pro $j \neq k$ a současně

$$\min(x_0, x_1, \ldots, x_n) \leqq a \leqq \max(x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

V prvním případě označme tuto limitu znakem $\lim_{\mathrm{I}} F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, v druhém případě znakem $\lim_{\mathrm{II}} F(x_0, x_1, \ldots, x_n)$.

4. pomocná věta. *Budiž $n > 1$. Nechť existuje vlastní $f'(x)$ v okolí bodu a; nechť existuje vlastní limita*

(6) $$\lim\nolimits_{\mathrm{I}} Q_f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = A,$$

popříp.

$$\lim\nolimits_{\mathrm{II}} Q_f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = A.$$

Potom existuje též

(7) $$\lim\nolimits_{\mathrm{I}} Q_{f'}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = nA,$$

popříp.

$$\lim\nolimits_{\mathrm{II}} Q_{f'}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = nA.$$

Poznámka 2. Při $\lim_{\mathrm{II}}$ jde v (6) ovšem o limitu pro $[x_0, x_1, \ldots, x_n] \to$ $\to [a, a, \ldots, a]$ vzhledem k množině, definované podmínkami

(8) $$x_j \neq x_k \quad \text{pro} \quad 0 \leqq j < k \leqq n,$$

$$\min(x_0, \ldots, x_n) \leqq a \leqq \max(x_0, \ldots, x_n);$$

v (7) jde pak o limitu pro $[x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}] \to [a, a, \ldots, a]$ vzhledem k množině, definované podmínkami

(9) $$x_j \neq x_k \quad \text{pro} \quad 0 \leqq j < k \leqq n - 1,$$

$$\min(x_0, \ldots, x_{n-1}) \leqq a \leqq \max(x_0, \ldots, x_{n-1}).$$

Při $\lim_{\mathrm{I}}$ odpadá poslední podmínka v (8), (9).

Důkaz. Nechť platí např. druhá rovnost (6). Budiž $\varepsilon > 0$. Máme ukázati: existuje číslo $\delta > 0$ tak, že pro všechny systémy čísel $x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}$ intervalu $(a - \delta, a + \delta)$, splňující nerovnosti (9), jest

(10) $$| Q_{f'}(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) - nA | \leqq \varepsilon.$$

Podle předpokladu existuje číslo $\delta > 0$ tak, že pro všechny systémy čísel $x_0, x_1, \ldots, x_n$ intervalu $(a - \delta, a + \delta)$, splňující nerovnosti (8), jest

$$(11) \qquad | Q_f(x_0, \ldots, x_n) - A | \leqq \frac{\varepsilon}{n}.$$

Jsou-li tedy $x_0, \ldots, x_{n-1}$ čísla intervalu $(a - \delta, a + \delta)$, splňující nerovnosti (9), dostáváme z (11) pro $r = 0, 1, \ldots, n - 1$ též

$$(12) \qquad | \lim_{\xi \to x_r} Q_f(x_0, \ldots, x_{n-1}, \xi) - A | \leqq \frac{\varepsilon}{n}$$

(píšeme ξ místo x_n a provedeme limitní přechod $\xi \to x_r$; existence napsané limity plyne z 2. pomocné věty, bylo-li zvoleno δ tak malé, že v $(a - \delta, a + \delta)$ existuje vlastní $f'(x)$). Z (12) a z třetí pomocné věty plyne však (10).

Dokážeme nyní toto zobecnění věty o přírůstku funkce:

Věta 250. *Buďte $x_0, x_1, \ldots, x_n$ $(n > 0)$ navzájem různá čísla; funkce $f(x)$ nechť je spojitá v intervalu $J = \langle \min(x_0, \ldots, x_n), \max(x_0, \ldots, x_n)\rangle$ a nechť v každém vnitřním bodě intervalu J existuje vlastní $f^{(n)}(x)$. Potom existuje vnitřní bod ξ intervalu J tak, že*

$$(13) \qquad Q_f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{1}{n!} f^{(n)}(\xi).$$

Důkaz. Bez újmy obecnosti budiž $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$ (symetrie funkce Q); tedy $J = \langle x_0, x_n\rangle$. Vyšetřeme tuto funkci proměnné x (čísla $x_0, x_1, \ldots, x_n$ jsou pevně dána!):

$$\Phi(x) = \begin{vmatrix} 1, & x, & \ldots, & x^{n-1}, & f(x) \\ 1, & x_1, & \ldots, & x_1^{n-1}, & f(x_1) \\ & & \cdots & & \\ 1, & x_n, & \ldots, & x_n^{n-1}, & f(x) \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1, & x_0, & \ldots, & x_0^{n-1}, & x_0^n \\ 1, & x_1, & \ldots, & x_1^{n-1}, & x_1^n \\ & & \cdots & & \\ 1, & x_n, & \ldots, & x_n^{n-1}, & x_n^n \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} 1, & x, & \ldots, & x^{n-1}, & x^n \\ 1, & x_1, & \ldots, & x_1^{n-1}, & x_1^n \\ & & \cdots & & \\ 1, & x_n, & \ldots, & x_n^{n-1}, & x_n^n \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1, & x_0, & \ldots, & x_0^{n-1}, & f(x_0) \\ 1, & x_1, & \ldots, & x_1^{n-1}, & f(x_1) \\ & & \cdots & & \\ 1, & x_n, & \ldots, & x_n^{n-1}, & f(x_n) \end{vmatrix}.$$

Pouze první řádek prvního a třetího determinantu závisí na x. Jest $\Phi(x_0) = \Phi(x_1) = \ldots = \Phi(x_n) = 0$, takže podle věty 85 existuje v (x_0, x_n) alespoň jedno číslo ξ tak, že $\Phi^{(n)}(\xi) = 0$. Vypočteme-li tuto derivaci a dělíme ji jmenovatelem zlomku (1), obdržíme

$$0 = \begin{vmatrix} 0, & 0, & \ldots, & 0, & f^{(n)}(\xi) \\ 1, & x_1, & \ldots, & x_1^{n-1}, & f(x_1) \\ & & \ldots & & \\ 1, & x_n, & \ldots, & x_n^{n-1}, & f(x_n) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0, & 0, & \ldots, & 0, & n! \\ 1, & x_1, & \ldots, & x_1^{n-1}, & x_1^n \\ & & \ldots & & \\ 1, & x_n, & \ldots, & x_n^{n-1}, & x_n^n \end{vmatrix} .$$

$$. \, Q_f(x_0, x_1, \ldots, x_n),$$

z čehož tvrzení věty okamžitě plyne.

Dokažme nyní tuto větu, jež zobecňuje věty 206 a 207.

Věta 251. *Budiž $n \geqq 1$; v jistém okolí bodu $a \in R_1$ nechť existuje vlastní derivace $f^{(n-1)}(x)$.*[2] *Potom platí:*

I. Vlastní limita

$$\lim\nolimits_{\mathrm{I}} Q_f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = A \tag{14}$$

existuje tehdy a jen tehdy, jsou-li derivovaná čísla funkce $f^{(n-1)}(x)$ vlastně spojitá v bodě a (takže ovšem existuje $(f^{(n-1)}(x))'_{x=a} = f^{(n)}(a)$, viz věty 86, 89).

II. Vlastní limita

$$\lim\nolimits_{\mathrm{II}} Q_f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = A \tag{15}$$

existuje tehdy a jen tehdy, existuje-li vlastní $f^{(n)}(a)$.

V obou případech jest $f^{(n)}(a) = n!\, A$.

Důkaz. Pro $p = 1$ jsou to věty 206, 207; budiž tedy $n > 1$.

První část důkazu. Nechť znak K značí buďto I nebo II a nechť jest $\lim_K Q_f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = A$. Ježto v okolí bodu a mají funkce $f, f', \ldots, f^{(n-2)}$ vlastní derivaci, dává 4. pomocná věta postupně

$$\lim\nolimits_K Q_f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}) = nA,$$
$$\lim\nolimits_K Q_f(x_0, x_1, \ldots, x_{n-2}) = n(n-1)\, A,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\lim\nolimits_K Q_{f^{(n-1)}}(x_0, x_1) = n!\, A.$$

---

[2]) $f^{(0)}(x)$ znamená ovšem prostě $f(x)$.

Věty 206 a 207 dávají nyní tento výsledek: Je-li $\lim_{\mathrm{II}} Q_{f^{(n-1)}}(x_0, x_1) = n!\, A$, má funkce $f^{(n-1)}(x)$ v bodě a derivaci $n!\, A$, tj. $f^{(n)}(a) = n!\, A$. Je-li $\lim_{\mathrm{I}} Q_{f^{(n-1)}}(x_0, x_1) = n!\, A$, jsou derivovaná čísla funkce $f^{(n-1)}(x)$ spojitá (vlastně) v bodě a a mají v něm společnou hodnotu $f^{(n)}(a) = n!\, A$.

Druhá část důkazu. Předpokládejme nyní, že existuje vlastní $f^{(n)}(a)$ (to nastane, jak víme, jistě tehdy, jsou-li derivovaná čísla funkce $f^{(n-1)}(x)$ vlastně spojitá v bodě a). Probírejme napřed případy I, II věty 251 současně, teprve později je oddělíme. Napřed předpokládejme, že $f^{(n)}(a) = 0$. Buďte $x_0, x_1, \ldots, x_n$ navzájem různá čísla, dostatečně blízká číslu a; vzhledem k symetrii předpokládejme, že

$$x_0 = \min(x_0, x_1, \ldots, x_n), \qquad x_1 = \max(x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

Z 1. pomocné věty, z věty 250 a z předpokladu existence vlastní derivace $f^{(n-1)}(x)$ plyne

$$Q_f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \frac{Q_f(x_1, x_2, \ldots, x_n) - Q_f(x_0, x_2, \ldots, x_n)}{x_1 - x_0} =$$

$$= \frac{f^{(n-1)}(\xi) - f^{(n-1)}(\eta)}{x_1 - x_0}, \tag{16}$$

kde body ξ, η leží v intervalu (x_0, x_1). Jest

$$\lim_{\xi \to a} \frac{f^{(n-1)}(\xi) - f^{(n-1)}(a)}{\xi - a} = f^{(n)}(a) = 0,$$

tedy

$$f^{(n-1)}(\xi) = f^{(n-1)}(a) + \lambda(\xi)(\xi - a), \tag{17}$$

kde

$$\lim_{\xi \to a} \lambda(\xi) = 0, \quad \lambda(a) = 0.$$

(Pro $\xi = a$ je rovnice (17) samozřejmá, ať volím $\lambda(a)$ jakkoliv.) Podobná rovnice platí pro hodnotu η, takže odečtením plyne z (16)

$$Q_f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = \lambda(\xi)\frac{\xi - a}{x_1 - x_0} - \lambda(\eta)\frac{\eta - a}{x_1 - x_0}. \tag{18}$$

Jsou-li nyní $x_0, x_1, \ldots, x_n$ taková, že a leží v intervalu $\langle x_0, x_1\rangle$, jest $\left|\frac{\xi - a}{x_1 - x_0}\right| < 1$, $\left|\frac{\eta - a}{x_1 - x_0}\right| < 1$; když $x_0, x_1, \ldots, x_n$ se blíží k bodu a, blíží se tím spíše ξ, η bodu a, takže z (18) plyne

$$(19) \qquad \lim_{\mathrm{II}} Q_f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0 = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).$$

Jestliže za druhé jsou derivovaná čísla funkce $g(x) = f^{(n-1)}(x)$ v bodě a vlastně spojitá (majíce v bodě a podle pozn. 5 v kap. V, § 8 společnou hodnotu $g'(a) = f^{(n)}(a) = 0$), existuje ke každému $\varepsilon > 0$ číslo $\delta > 0$ tak, že pro $|x - a| < \delta$ jest

$$(20) \qquad -\varepsilon \leqq D^+g(x) \leqq \varepsilon$$

a obdobně pro ostatní tři derivovaná čísla. Podle věty 86 je tedy $g(x)$ spojitá v $(a - \delta, a + \delta)$ a podle věty 88 jest také (viz (20))

$$(21) \qquad -\varepsilon \leqq \frac{g(\xi) - g(\eta)}{\xi - \eta} \leqq \varepsilon$$

pro $\xi \neq \eta$, $|\xi - a| < \delta$, $|\eta - a| < \delta$.

Jestliže tedy jsou $x_0, x_1, \ldots, x_n$ jakákoliv navzájem různá čísla taková, že

$$x_0 = \min(x_0, x_1, \ldots, x_n), \qquad x_1 = \max(x_0, x_1, \ldots, x_n),$$
$$|x_0 - a| < \delta, \qquad |x_1 - a| < \delta,$$

jest v (16) též $|\xi - a| < \delta$, $|\eta - a| < \delta$ a z (16) plyne podle (21)

$$(22) \qquad |Q_f(x_0, x_1, \ldots, x_n)| = \left| \frac{g(\xi) - g(\eta)}{x_1 - x_0} \right| \leqq \varepsilon \left| \frac{\xi - \eta}{x_1 - x_0} \right| < \varepsilon,$$

neboť ξ, η leží v intervalu (x_0, x_1) (je-li náhodou $\xi = \eta$, je (22) samozřejmá). Tedy jest dokonce

$$(23) \qquad \lim_{\mathrm{I}} Q_f(x_0, x_1, \ldots, x_n) = 0 = \frac{1}{n!} f^{(n)}(a).$$

Zbývá ještě probrat případ $f^{(n)}(a) \neq 0$. Položme $f^{(n)}(a) = n!\, C$, $\varphi(x) = f(x) - C(x - a)^n$. Jest

$$(24) \qquad \begin{vmatrix} 1, & x_0, & \ldots, & f(x_0) \\ & & \ldots & \\ 1, & x_n, & \ldots, & f(x_n) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1, & x_0, & \ldots, & \varphi(x_0) \\ & & \ldots & \\ 1, & x_n, & \ldots, & \varphi(x_n) \end{vmatrix} + C \begin{vmatrix} 1, & x_0, & \ldots, & (x_0 - a)^n \\ & & \ldots & \\ 1, & x_n, & \ldots, & (x_n - a)^n \end{vmatrix}.$$

Rozvineme-li poslední sloupec v posledním determinantu podle binomické poučky a přičteme k němu vhodnou lineární kombinaci ostatních sloupců, zjistíme ihned, že hodnota tohoto determinantu je

$$\begin{vmatrix} 1, & x_0, & \dots, & x_0^n \\ & & \dots & \\ 1, & x_n, & \dots, & x_n^n \end{vmatrix}.$$

Dělíme-li rovnici (24) tímto determinantem, obdržíme podle (1)

$$Q_f(x_0, x_1, \dots, x_n) = Q_\varphi(x_0, x_1, \dots, x_n) + C.$$

Jest však $\varphi^{(n)}(a) = f^{(n)}(a) - n!\, C = 0$ a jinak má φ obdobné vlastnosti jako f; podle toho, co jsme před chvílí dokázali, je tedy — za příslušných předpokladů o funkci f —

$$\lim{}_{\mathrm{I}}\, Q_\varphi(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0, \text{ popříp. } \lim{}_{\mathrm{II}}\, Q_\varphi(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0$$

a tedy

$$\lim{}_{\mathrm{I}}\, Q_f(x_0, x_1, \dots, x_n) = C, \text{ popříp. } \lim{}_{\mathrm{II}}\, Q_f(x_0, x_1, \dots, x_n) = C,$$

přičemž $C.n! = f^{(n)}(a)$. Tím je věta 251 úplně dokázána.

Příklad 1. Buďte $x, x_0, x_1, \dots, x_n$ navzájem různá čísla. Je-li funkce f definována v bodech $x, x_0, x_1, \dots, x_n$, plyne z první pomocné věty

$$f(x) = f(x_0) + (x - x_0)\, Q_f(x_0, x) =$$
$$= f(x_0) + (x - x_0)\, Q_f(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)\, Q_f(x_0, x_1, x)$$

a dále indukcí

$$f(x) = P_f(x) + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)\, Q_f(x_0, x_1, \dots, x_n, x), \tag{25}$$

kde

$$\begin{aligned} P_f(x) = f(x_0) &+ (x - x_0)\, Q_f(x_0, x_1) + \\ + \dots &+ (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})\, Q_f(x_0, x_1, \dots, x_n). \end{aligned} \tag{26}$$

Budiž

$$J = \langle \min(x_0, x_1, \dots, x_n, x), \max(x_0, x_1, \dots, x_n, x) \rangle.$$

Je-li f spojitá v J a má-li vlastní derivaci $f^{(n+1)}$ uvnitř J, existuje podle (25) a podle věty 250 číslo ξ uvnitř J tak, že

$$(27) \qquad f(x) = P_f(x) + \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_n)}{(n + 1)!} f^{(n+1)}(\xi).$$

Budiž g Lagrangeův interpolační mnohočlen pro funkci f a pro hodnoty $x_0, x_1, \dots, x_n$ (kap. V, § 7, př. 1). Ježto výraz (26) závisí pouze na hodnotách funkce f v bodech $x_0, \dots, x_n$, je $P_g = P_f$; ježto $g^{(n+1)}(\xi) = 0$, je tedy $g(x) = P_g(x) = P_f(x)$ (to platí pro všechna x různá od $x_0, \dots, x_n$ a tedy — podle věty o neurčitých součinitelích — pro všechna x vůbec). Výraz (27) je tedy Lagrangeův mnohočlen pro funkci f a pro hodnoty $x_0, x_1, \dots, x_n$; rovnice (27) dává pak odhad pro „chybu" $f(x) - P_f(x)$.

Pravá strana rovnice (26) je tzv. Newtonův tvar Lagrangeova mnohočlenu, jenž je často výhodný pro numerické výpočty. Často se ještě do něho místo Q_f zavádějí tzv. diferenční podíly funkce f, definované rovnicí $\mathfrak{Q}_f(x_0, x_1, \dots, x_k) = k!\, Q_f(x_0, x_1, \dots, x_k)$ (viz poznámku za vzorcem (42)). 1. pomocná věta pak dává (vynechávám index f)

$$\mathfrak{Q}(x_0, x_1, \dots, x_k) = \frac{k}{x_k - x_0} [\mathfrak{Q}(x_1, \dots, x_k) - \mathfrak{Q}(x_0, \dots, x_{k-1})].$$

Ve speciálním případě „ekvidistantních" bodů $x_j = x_0 + j\Delta$ ($j = 0, 1, 2, \dots$) je $k : (x_k - x_0) = 1 : \Delta$. Např. pro $\Delta = 1$ lze diferenční kvocienty počítat snadno pomocí schématu

$$\begin{array}{llll}
f(x_0) & & & \\
 & \mathfrak{Q}(x_0, x_1) & & \\
f(x_1) & & \mathfrak{Q}(x_0, x_1, x_2) & \\
 & \mathfrak{Q}(x_1, x_2) & & \mathfrak{Q}(x_0, x_1, x_2, x_3), \\
f(x_2) & & \mathfrak{Q}(x_1, x_2, x_3) & \vdots \\
 & \mathfrak{Q}(x_2, x_3) & \vdots & \\
f(x_3) & \vdots & & \\
\vdots & & &
\end{array}$$

kde každý sloupec je vytvořen z diferencí předcházejícího sloupce (bere se vždy člen následující minus předcházející). Např. pro $f(x) = \frac{1}{x + 2}$, $n = 3$, $x_0 = 0$, $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $x_3 = 3$ vyjde pro $x > -2$

$$\frac{1}{x + 2} = \frac{1}{2} - \frac{x}{6} + \frac{x(x - 1)}{24} - \frac{x(x - 1)(x - 2)}{120} + R(x),$$

kde

$$R(x) = \frac{x(x-1)(x-2)(x-3)}{(\xi+2)^5}.$$

Pro $x > 0$ jest též $\xi > 0$, takže např. pro $0 < x < 1$ je jistě $|R(x)| < 3/64$.

Příklad 2. Nechť existuje vlastní $f^{(n)}(a)$; potom z věty 205 plyne

$$f^{(n)}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{l=0}^{n} (-1)^{n-l} \binom{n}{l} f(a+lh);$$

obecněji: je-li k libovolné číslo, jest

$$f^{(n)}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^n} \sum_{l=0}^{n} (-1)^{n-l} \binom{n}{l} f(a+lh+kh).$$

Pro $k = -\frac{1}{2}n$ dostáváme jednak pro sudé $n = 2m$, jednak pro liché $n = 2m-1$:

$$f^{(2m)}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{(-1)^m}{h^{2m}} \left[\binom{2m}{m} f(a) + \sum_{l=1}^{m} (-1)^l \binom{2m}{m+l} (f(a+lh) + \right.$$
$$\left. + f(a-lh))\right],$$

$$f^{(2m-1)}(a) = \lim_{h\to 0} \frac{(-1)^{m+1}}{h^{2m-1}} \sum_{l=0}^{m-1} (-1)^l \binom{2m-1}{m+l} \left[f\left(a+\left(l+\frac{1}{2}\right)h\right) - \right.$$
$$\left. - f\left(a-\left(l+\frac{1}{2}\right)h\right)\right].$$

Např. $f'(a) = \lim_{h\to 0} \dfrac{f\left(a+\frac{1}{2}h\right) - f\left(a-\frac{1}{2}h\right)}{h}$, dále obdržíme vzorec z cvičení 1, § 18, kap. VII; vypočtěte ještě $f'''(a)$, $f^{(4)}(a)$.

Příklad 3. Všimněme si ještě blíže věty 251 a to pro jednoduchost pro $n = 2$. Uvažme předně: v oné části, jež se týče limity

(28) $$\lim\nolimits_{\mathrm{II}} Q_f(x_0, x_1, x_2),$$

nelze vynechat předpoklad o existenci $f'(x)$. Důkaz viz kap. VII, § 12, cvičení 2.

Ukažme nyní za druhé: v oné části, jež se týká limity

(29) $$\lim_{\mathrm{I}} Q_f(x_0, x_1, x_2),$$

lze vynechat předpoklad o existenci vlastní $f'(x)$, neboť existence této vlastní derivace v okolí bodu a plyne z existence vlastní limity (29). Nechť tedy existuje vlastní limita (29). Výraz

(30) $$Q_f(x_0, x_1, x_2) = \frac{Q(x_0, x_1) - Q(x_0, x_2)}{x_1 - x_2}$$

je tedy omezený, jsou-li x_0, x_1, x_2 tři různá čísla jistého intervalu $(a - \delta, a + \delta)$. Zvolme x_0, x_2 pevně v $(a - \delta, a + \delta)$ a nechme x_1 konvergovati k x_0; z (30) je vidět, že $Q(x_0, x_1)$ zůstává omezené, takže všechna derivovaná čísla funkce f v bodě x_0 (tj. v libovolném bodě intervalu $(a - \delta, a + \delta)$) jsou vlastní. Nechme nyní probíhati x_1 a současně x_2 takové dvě posloupnosti čísel, konvergující k bodu x, že $Q(x_0, x_1)$ konverguje k číslu $\alpha = \limsup\limits_{\xi \to x_0} Q(x_0, \xi)$ a současně $Q(x_0, x_2)$ konverguje k číslu $\beta = \liminf\limits_{\xi \to x_0} Q(x_0, \xi)$. Potom v (30) konverguje čitatel k $\beta - \alpha$, jmenovatel k 0 a zlomek zůstává omezený; tedy $\beta = \alpha$, tj. existuje vlastní derivace $\lim\limits_{\xi \to x_0} Q(x_0, \xi) = f'(x_0)$, přičemž x_0 byl libovolný bod intervalu $(\alpha - \delta, \alpha + \delta)$.