KAPITOLA XII.

ELEMENTÁRNÍ FUNKCE KOMPLEXNÍ PROMĚNNÉ

Tímto názvem budeme označovati funkce e^z (obecněji a^z), $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{cotg} z$, $\lg z$, $\arcsin z$, $\arccos z$, $\operatorname{arctg} z$, $\operatorname{arccotg} z$, z^a. Dosud jsme je definovali (v **DI**) pouze pro reálné hodnoty z, a (a dokonce jsme na př. $\lg z$ definovali pouze pro $z > 0$, $\arcsin z$ pouze pro $|z| \leqq 1$); nyní rozšíříme tyto definice i na komplexní hodnoty z, a. Některé věci byly probrány již v **DI**, kap. XV; zopakuji je však, abych nerušil souvislost. Reálnou a imaginární část čísla z budeme někdy značiti $\Re z$, $\Im z$.

§ 1. Funkce e^z, $\sin z$, $\cos z$, $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{cotg} z$. Definujme funkce e^z, $\sin z$, $\cos z$ pro každé komplexní z řadami

$$(1)\qquad e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad \sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}, \quad \cos z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}.$$

Mocninné řady vpravo mají poloměr konvergence $+\infty$; pro reálná z jsou pak naše definice v souhlasu s definicemi, podanými v **DI**. Z věty 223 plyne, že pro každé komplexní z existují derivace (podle komplexní proměnné z, t. j. ve smyslu definice 41)

$$(2)\qquad \begin{gathered} \frac{de^z}{dz} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^{n-1}}{(n-1)!} = e^z, \quad \frac{d\sin z}{dz} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = \cos z, \\ \frac{d\cos z}{dz} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n-1}}{(2n-1)!} = -\sin z. \end{gathered}$$

Z (1) plyne pro každé z

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + \frac{iz}{1!} - \frac{z^2}{2!} - \frac{iz^3}{3!} + \frac{z^4}{4!} + \frac{iz^5}{5!} - \frac{z^6}{6!} - \frac{iz^7}{7!} + \frac{z^8}{8!} + \ldots = \\ &= \cos z + i \sin z. \end{aligned}$$

Píšeme-li sem ještě $-z$ místo z (a užijeme toho, že z (1) plyne $\cos(-z) = \cos z$, $\sin(-z) = -\sin z$), obdržíme důležité rovnice

$$(3)\qquad e^{iz} = \cos z + i \sin z, \quad e^{-iz} = \cos z - i \sin z,$$

a odtud sečtením a odečtením

(4) $$\cos z = \tfrac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})\,, \quad \sin z = \frac{1}{2i}\,(e^{iz} - e^{-iz})\,,$$

což platí pro každé z.

Vynásobím-li absolutně konvergentní řady $e^{z_1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z_1^k}{k!}$, $e^{z_2} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{z_2^m}{m!}$, obdržím zobecněnou (dvojnou) řadu absolutně konvergentní; dám-li v ní dohromady ony členy $z_1^k z_2^m (k!\,m!)^{-1}$, pro které číslo $m + k$ má touž hodnotu, obdržím

$$e^{z_1}e^{z_2} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \frac{z_1^k z_2^{n-k}}{k!(n-k)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z_1^k z_2^{n-k} =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(z_1 + z_2)^n}{n!} = e^{z_1+z_2}\,.$$

Tedy jest

(5) $$e^{z_1}e^{z_2} = e^{z_1+z_2}\,.$$

Ježto $e^0 = 1$, plyne odtud $e^z \,.\, e^{-z} = e^0 = 1$, tedy předně $e^z \neq 0$ pro každé z a za druhé $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$. Z (5) plynou užitím rovnic (3), (4) obdobné vztahy pro funkce cos, sin:

(6) $$\begin{aligned} \cos(z_1 + z_2) &= \tfrac{1}{2}(e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}) = \\ &= \tfrac{1}{2}(e^{iz_1} \,.\, e^{iz_2} + e^{-iz_1} \,.\, e^{-iz_2}) = \\ &= \tfrac{1}{2}(\cos z_1 + i \sin z_1)(\cos z_2 + i \sin z_2) + \tfrac{1}{2}(\cos z_1 - i \sin z_1)\,. \\ &\quad .\,(\cos z_2 - i \sin z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 \end{aligned}$$

a obdobně $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \sin z_2 \cos z_1$. Dosadíme-li do (6) $z_1 = z$, $z_2 = -z$, obdržíme (ježto $\cos 0 = 1$) rovnici $1 = \cos^2 z + \sin^2 z$. Z rovnic (3), (4) je patrný úzký vztah mezi funkcí exponenciální a funkcemi goniometrickými, jestliže připouštíme libovolné komplexní hodnoty proměnné.

Z (5), (3) plyne

$$e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y)\,;$$

tato rovnice platí pro libovolná komplexní x, y; zvláště důležitá je pro reálná x, y, dovolujíc vyjádřiti hodnotu e^z pro libovolné komplexní $z = x + \mathrm{i}y$ (x, y reálná) hodnotami funkcí e^x, $\cos y$, $\sin y$ pro reálná x, y.

Dále definujeme také pro komplexní hodnoty z

$$\text{(7)}\quad \operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z} \ (\text{pokud } \cos z \neq 0)\,, \quad \operatorname{cotg} z = \frac{\cos z}{\sin z} \ (\text{pokud } \sin z \neq 0),$$

t. j. [podle (4)]

$$\text{(8)}\qquad \operatorname{tg} z = \frac{1}{\mathrm{i}}\,\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} - 1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} + 1}\,, \quad \operatorname{cotg} z = \mathrm{i}\,\frac{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} + 1}{\mathrm{e}^{2\mathrm{i}z} - 1}\,.$$

Z (2) pak plyne užitím pravidla o derivaci podílu

$$\frac{\mathrm{d}\operatorname{tg} z}{\mathrm{d}z} = \frac{\cos^2 z + \sin^2 z}{\cos^2 z} = \frac{1}{\cos^2 z} \quad (\text{pokud } \cos z \neq 0)$$

a obdobně

$$\frac{\mathrm{d}\operatorname{cotg} z}{\mathrm{d}z} = -\frac{1}{\sin^2 z} \quad (\text{pokud } \sin z \neq 0)\,.$$

Budiž $z = x + \mathrm{i}y$ (x, y reálná). Podle (3) jest $|\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}| = \sqrt{\cos^2 y + \sin^2 y} = 1$; podle (5) je tedy $|\mathrm{e}^z| = |\mathrm{e}^x| \,.\, |\mathrm{e}^{\mathrm{i}y}| = \mathrm{e}^x$. Odtud plyne: *Rovnice* $\mathrm{e}^z = 1$ *platí tehdy a jen tehdy, je-li* $z = 2k\pi\mathrm{i}$ (k celé). Je-li totiž $z = x + \mathrm{i}y$ (x, y reálná), je předně $|\mathrm{e}^z| = \mathrm{e}^x$; má-li tedy býti $\mathrm{e}^z = 1$, musí býti $\mathrm{e}^x = 1$, t. j. $x = 0$, načež rovnice $\mathrm{e}^z = 1$, t. j. $\mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = 1$, t. j. $\cos y + \mathrm{i}\sin y = 1$ platí tehdy a jen tehdy, je-li $\cos y = 1$, $\sin y = 0$, t. j. $y = 2k\pi$, $z = 2k\pi\mathrm{i}$ (k celé). Odtud dále plyne: *Rovnice* $\mathrm{e}^{z_1} = \mathrm{e}^{z_2}$ *platí tehdy a jen tehdy, je-li* $z_2 = z_1 + 2k\pi\mathrm{i}$ (k celé). Důkaz: Rovnice $\mathrm{e}^{z_1} = \mathrm{e}^{z_2}$ znamená totéž co $\mathrm{e}^{z_2 - z_1} = 1$, t. j. totéž co $z_2 - z_1 = 2k\pi\mathrm{i}$ (k celé). Funkce e^z má tedy periodu $2\pi\mathrm{i}$,[1]) takže funkce $\sin z$, $\cos z$ mají podle (4) periodu 2π (ježto $\mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}(z+2\pi)} = \mathrm{e}^{\pm\mathrm{i}z}$) a funkce $\operatorname{tg} z$, $\operatorname{cotg} z$ mají podle (8) periodu π (ježto $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}(z+\pi)} = \mathrm{e}^{2\mathrm{i}z}$).

Cvičení

1. $\mathrm{e}^{2\pi\mathrm{i}} = 1$, $\mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} = -1$, $\mathrm{e}^{\frac{1}{2}\pi\mathrm{i}} = \mathrm{i}$, $\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}\pi\mathrm{i}} = -\mathrm{i}$,

$$\mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} = -\tfrac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \quad \mathrm{e}^{\frac{4}{3}\pi\mathrm{i}} = -\tfrac{1}{2} - \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,, \quad \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\pi\mathrm{i}} = \tfrac{1}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\sqrt{3}}{2}\,,$$

[1]) Říkáme, že funkce $f(z)$ má periodu p, platí-li toto: Je-li (pro nějaké z) definováno jedno z čísel $f(z)$, $f(z + p)$, jsou definována obě a jest $f(z) = f(z + p)$.

$$e^{-\frac{1}{3}\pi i} = \tfrac{1}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}, \quad e^{\frac{1}{4}\pi i} = \frac{1 + i}{\sqrt{2}}, \quad e^{\frac{3}{4}\pi i} = \frac{-1 + i}{\sqrt{2}},$$

$$e^{\frac{5}{4}\pi i} = \frac{-1 - i}{\sqrt{2}}, \quad e^{-\frac{1}{4}\pi i} = \frac{1 - i}{\sqrt{2}}.$$

2. Ukažte: Rovnice $\cos z_1 = \cos z_2$ platí tehdy a jen tehdy, je-li $z_2 = \pm z_1 + 2k\pi$.[2]) (Návod: Jde o to, kdy platí rovnice $e^{iz_2} + e^{-iz_2} = e^{iz_1} + e^{-iz_1}$; tu můžeme řešiti jako kvadratickou rovnici pro e^{iz_2}; vyjde $e^{iz_2} = e^{iz_1}$ nebo $e^{iz_2} = e^{-iz_1}$ a odtud snadno výsledek.) Jediné hodnoty, pro něž $\cos z = 0$, jsou tudíž $z = (k + \frac{1}{2})\,\pi$.[2])

3. Ukažte obdobně: Rovnice $\sin z_1 = \sin z_2$ platí tehdy a jen tehdy, je-li buďto $z_2 = z_1 + 2k\pi$ nebo $z_2 = -z_1 + (2k + 1)\,\pi$.[2]) Jediné hodnoty, pro něž $\sin z = 0$, jsou tudíž hodnoty $z = k\pi$.[2])

4. Ukažte obdobně: Rovnice $\operatorname{tg} z_1 = \operatorname{tg} z_2$ (nemá-li z_1 tvar $(k + \frac{1}{2})\,\pi$) platí tehdy a jen tehdy, je-li $z_2 = z_1 + k\pi$.[2])

5. Z rovnic pro $\cos(z_1 + z_2)$, $\sin(z_1 + z_2)$ ukažte, že $\sin(\frac{1}{2}\pi - z) = \cos z$, $\cos(z + \pi) = -\cos z$, $\sin(z + \pi) = -\sin z$.

6. Užijete-li cvič. 5, můžete výsledek cvič. 3 ihned odvoditi z výsledku cvič. 2 nebo naopak.

7. Odvoďte vzorec $\operatorname{tg}(z_1 + z_2) = \dfrac{\operatorname{tg} z_1 + \operatorname{tg} z_2}{1 - \operatorname{tg} z_1 \operatorname{tg} z_2}$ dvojím způsobem: jednak z obdobných vzorců pro $\cos(z_1 + z_2)$, $\sin(z_1 + z_2)$, jednak z (8) a z rovnice (5). Pro která z_1, z_2 neplatí tento vzorec?

8. Definujte i pro komplexní z funkce $\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$, $\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$, $\operatorname{tgh} z = \dfrac{\sinh z}{\cosh z}$. Kdy není $\operatorname{tgh} z$ definováno? (T. zv. *hyperbolické funkce*; pro reálná z viz **DI**, cvičení na konci kap. VI).

9. Ukažte, že $\cosh z = \cos(iz)$, $\sinh z = i \sin(-iz)$, $\operatorname{tgh} z = i \operatorname{tg}(-iz)$.

10. Pišme $z = x + iy$ (x, y reálná). Potom je (rozklad na reálnou a imaginární část)

$$2\cos z = (e^y + e^{-y}) \cos x + i(e^{-y} - e^y) \sin x\,,$$
$$2\sin z = (e^{-y} + e^y) \sin x + i(e^y - e^{-y}) \cos x\,,$$
$$\operatorname{tg} z = \frac{2\sin 2x + i(e^{2y} - e^{-2y})}{2\cos 2x + e^{2y} + e^{-2y}}\,.$$

Odtud je patrno, jak se chovají tyto funkce, je-li $|y|$ velmi velké. Je-li $z_n = x_n + iy_n$ ($n = 1, 2, \ldots$) nějaká posloupnost taková, že $\lim\limits_{n\to\infty} |y_n| = +\infty$, je

[2]) k celé.

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|\cos z_n|}{e^{|y_n|}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|\sin z_n|}{e^{|y_n|}} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n\to\infty} \operatorname{sgn} y_n \,.\, \operatorname{tg} z_n = i \,.$$

Přibližně řečeno: je-li $|y|$ velmi velké, je též $|\cos z|$ a $|\sin z|$ velmi velký, a to asi tak jako $\frac{1}{2}e^{|y|}$; naproti tomu je $\operatorname{tg} z$ přibližně rovna číslu $\pm$ i (hořejší znamení, je-li $y > 0$, dolejší, je-li $y < 0$).

II. Z **DI** znáte průběh funkcí $\sin z$, $\operatorname{tg} z$ na „reálné ose". Všimněme si jich trochu na libovolné jiné přímce rovnoběžné s reálnou osou. Budiž tedy dáno reálné $b > 0$. Vyšetřujme prostou hodnotu funkcí $\sin z$, $\operatorname{tg} z - i$ na přímce $\Im z = b$, t. j. vyšetřujme funkce (reálné proměnné x) $|\sin (x + ib)|$, $|\operatorname{tg} (x + ib) - i|$. Ukažte, že první z těchto funkcí má v intervalu $(-\infty, +\infty)$ největší hodnotu $\frac{1}{2}(e^b + e^{-b})$, a to v bodech $x = (k + \frac{1}{2})\pi$, a nejmenší hodnotu $\frac{1}{2}(e^b - e^{-b})$, a to v bodech $x = k\pi$. Druhá z nich má v intervalu $(-\infty, +\infty)$ největší hodnotu

$$\frac{2}{e^{2b} - 1} \text{ (pro } x = (k + \tfrac{1}{2})\pi\text{), nejmenší } \frac{2}{e^{2b} + 1} \text{ (pro } x = k\pi\text{)} \,.$$

Výsledky pro $b < 0$ se dostanou z rovnic $\sin(-z) = -\sin z$, $\operatorname{tg}(-z) = -\operatorname{tg} z$. Výsledky pro $\cos z$ plynou z rovnice $\cos z = \sin(\frac{1}{2}\pi - z)$.

§ 2. Amplituda a logaritmus komplexního čísla.

Již v **DI**, kap. XV, § 3 jsme zjistili, že každé komplexní číslo $z \neq 0$ lze psáti ve tvaru

$$z = re^{i\varphi} \quad (r > 0, \ \varphi \text{ reálné}) \,; \tag{9}$$

ale zopakujme to. Platí-li (9), je jasné, že musí býti $r = |z|$. Jde ještě o číslo φ.

Věta 237. *Budiž $z \neq 0$, $z = x + iy$ (x, y reálná). Potom existuje nekonečně mnoho reálných čísel φ, pro něž platí rovnice*

$$z = |z|\, e^{i\varphi} = \sqrt{x^2 + y^2}\,(\cos\varphi + i \sin\varphi) \,. \tag{10}$$

Je-li φ_0 jedno z těchto čísel, jsou všechna tato čísla dána vzorcem

$$\varphi_0 + 2k\pi \quad (k \text{ celé, libovolné}) \,. \tag{11}$$

Důkaz. Je-li $z = |z|\, e^{i\varphi_0}$, potom je současně také $z = |z|\, e^{i\varphi_1}$ tehdy a jen tehdy, je-li $e^{i\varphi_0} = e^{i\varphi_1}$, t. j. (viz § 1) je-li $i\varphi_1 = i\varphi_0 + 2k\pi i$ (k celé), t. j. má-li φ_1 tvar (11). Zbývá ještě dokázati existenci jednoho reálného čísla φ tak, aby platilo (10). Ježto $z = x + iy$, jde o splnění rovnic

$$(12) \qquad \cos\varphi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\varphi = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Položme $\psi = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$, tedy $0 \leqq \psi \leqq \pi$,

$$(13) \qquad \cos\psi = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}, \quad \sin\psi = \sqrt{1 - \frac{x^2}{x^2+y^2}} = \frac{|y|}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Jestliže tedy $y \geqq 0$, budou rovnice (12) splněny, položím-li

$$(14) \qquad \varphi = \psi = \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Je-li však $y < 0$, budou rovnice (12) splněny, položím-li

$$(15) \qquad \varphi = -\psi = -\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

Poznámka 1. Pro další účely poznamenejme: V případě $y \geqq 0$ plyne z (14) $0 \leqq \varphi \leqq \pi$; v případě $y < 0$ plyne z (15) $-\pi < \varphi < 0$; neboť pro $y < 0$ jsou případy $\varphi = 0$, $\varphi = -\pi$ vyloučeny, ježto z (12) plyne $\sin\varphi \neq 0$.

Definice 42. *Budiž $z \neq 0$. Každé reálné číslo φ, vyhovující rovnici* (9), *nazývám amplitudou čísla z. Je-li Θ libovolné reálné číslo, existuje podle věty 237 mezi amplitudami čísla z právě jedna, jež leží v polouzavřeném intervalu $(\Theta - \pi, \Theta + \pi\rangle$; tuto amplitudu budeme označovati* $\operatorname{ampl}_\Theta z$.[3]) *Pro zkrácení budeme psáti* $\operatorname{ampl} z = \operatorname{ampl}_0 z$.

Poznámka 2. Číslo $\operatorname{ampl}_\Theta z$ je tedy ono číslo a, jež vyhovuje vztahům

$$(16) \qquad z = re^{ia}, \quad r > 0, \quad \Theta - \pi < a \leqq \Theta + \pi;$$

speciálně číslo $\operatorname{ampl} z$ je ono číslo a, jež vyhovuje vztahům

$$(17) \qquad z = re^{ia}, \quad r > 0, \quad -\pi < a \leqq \pi.$$

Číslu $\operatorname{ampl} z$ se často říká *hlavní hodnota amplitudy* čísla z.

Z poznámky 1 plyne, že číslo φ, sestrojené v (14), (15), leží v $(-\pi, \pi\rangle$; tedy je to právě $\operatorname{ampl} z$. Tedy platí

---

[3]) Je to reálná funkce komplexní proměnné z. Označení $\operatorname{ampl}_\Theta z$ *není* obvyklé. Místo „amplituda" se říká též „argument".

Věta 238. *Budiž* $z = x + iy \neq 0$ *(x, y reálná). Potom jest*

$$\text{(18)}\qquad \begin{aligned} \operatorname{ampl} z &= \arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \textit{pro } y \geqq 0\,,\\ \operatorname{ampl} z &= -\arccos \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \quad \textit{pro } y < 0\,. \end{aligned}$$

Poznámka 3. Někdy je pohodlnější vyjádření amplitudy funkcemi arctg, arccotg. Proveďme to. Položme $\operatorname{ampl} z = \varphi$;[4]) tedy platí (12) a mimo to $-\pi < \varphi \leqq \pi$. Je-li $x \neq 0$, je $\operatorname{tg} \varphi = \frac{y}{x}$, $\varphi = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + k\pi$; je-li $y \neq 0$, je $\operatorname{cotg} \varphi = \frac{x}{y}$, $\varphi = \operatorname{arccotg} \frac{x}{y} + k\pi$ (k celé). Jde jenom o to, stanoviti k. Je-li $x > 0$, plyne z (12)[5]) $-\frac{1}{2}\pi < \varphi < \frac{1}{2}\pi$; je-li $x < 0$, $y \geqq 0$, plyne $\frac{1}{2}\pi < \varphi \leqq \pi$; je-li $x < 0$, $y < 0$, plyne $-\pi < < \varphi < -\frac{1}{2}\pi$. Tedy:

A) *Je-li* $x \neq 0$, *jest* $\operatorname{ampl} z = \operatorname{arctg} \frac{y}{x} + k\pi$; *při tom* $k = 0$ *pro* $x > 0$; $k = 1$ *pro* $x < 0$, $y \geqq 0$; $k = -1$ *pro* $x < 0$, $y < 0$.

Obdobně: Je-li $y > 0$, je $0 < \varphi < \pi$; je-li $y < 0$, je $-\pi < \varphi < 0$. Tedy:

B) *Pro* $y > 0$ *jest* $\operatorname{ampl} z = \operatorname{arccotg} \frac{x}{y}$; *pro* $y < 0$ *jest* $\operatorname{ampl} z = = \operatorname{arccotg} \frac{x}{y} - \pi$.

Poznámka 4. *Pro* $z \neq 0$ *a pro reálné* Θ *jest*

$$\text{(19)}\qquad \operatorname{ampl}_\Theta z = \operatorname{ampl}(ze^{-i\Theta}) + \Theta\,.$$

Důkaz: Jest (píši $\exp(\alpha) = e^\alpha$) $ze^{-i\Theta} = |ze^{-i\Theta}| \exp(i \operatorname{ampl}(ze^{-i\Theta}))$; ježto $|e^{-i\Theta}| = 1$, vychází $z = |z| \exp(i \operatorname{ampl}(ze^{-i\Theta}) + i\Theta)$. Píši-li tedy $a = \operatorname{ampl}(ze^{-i\Theta}) + \Theta$, je $z = |z|\, e^{ia}$, $\Theta - \pi < a \leqq \Theta + \pi$. Podle poznámky 2 je tedy vskutku $a = \operatorname{ampl}_\Theta z$.

Poznámka 5. Je-li φ reálné číslo, značme v tomto paragrafu znakem P_φ stále množinu všech čísel $re^{i\varphi}$ ($r \geqq 0$); geometricky je to polo-

[4]) Stále píši $z = x + iy$ (x, y reálná).
[5]) Vyšetři se znamení sinu a kosinu.

přímka.[6]) Tvrdím: *Funkce* ampl z *je spojitá v množině* $\mathbf{K}_1 \dot{-} P_\pi$. *V bodech množiny* P_π *není* ampl z *spojitá. Speciálně: je-li* $x_0 < 0$, *jest*

$$\text{ampl}\, x_0 = \pi, \lim_{\substack{z \to x_0 \\ y \geq 0}} \text{ampl}\, z = \pi, \lim_{\substack{z \to x_0 \\ y < 0}} \text{ampl}\, z = -\pi\,. \tag{20}$$

Výsledek je velmi názorný (načrtněte!). Proveďme důkaz. Budiž dán bod $z_0 = x_0 + iy_0$ (x_0, y_0 reálná). Je-li $y_0 \neq 0$, plyne spojitost v bodě z_0 z pozn. 3, **B**; je-li $y_0 = 0$, $x_0 > 0$, plyne spojitost v bodě z_0 z pozn. 3, **A**. Je-li $y_0 = 0$, $x_0 < 0$, plynou rovnice (20) na př. z (18) (ježto $\lim_{t \to -1+} \arccos t = \arccos(-1) = \pi$). Pro $x_0 = y_0 = 0$ není konečně ampl z_0 definována.

Poznámka 6. Z pozn. 5, z rovnice (19) a z věty o spojitosti složených funkcí plyne:

Funkce (proměnné z) $\text{ampl}_\Theta\, z$ *je spojitá v množině* $\mathbf{K}_1 \dot{-} P_{\Theta+\pi}$, *není však spojitá v žádném bodě množiny* $P_{\Theta+\pi}$.[7])

Definice 43. *Budiž* $M \subset \mathbf{K}_1$ *souvislá množina. Funkce* $A(z)$ *(v oboru* M*) se nazývá spojitou větví amplitudy* z *v množině* M, *platí-li toto:*

1. *Funkce* $A(z)$ *je funkce spojitá v* M.[8])
2. *Pro každé* $z \in M$ *je číslo* $A(z)$ *jednou z amplitud čísla* z.[9])

Poznámka 7. Funkce $\text{ampl}_\Theta\, z$ je spojitou větví amplitudy z v množině $\mathbf{K}_1 \dot{-} P_{\Theta+\pi}$.

Poznámka 8. Jsou-li M, N souvislé, $M \subset N \subset \mathbf{K}_1$, a je-li funkce A spojitou větví amplitudy z v N, je parciální funkce A_M spojitou větví amplitudy z v M.

Poznámka 9. Je-li $A(z)$ spojitá větev amplitudy z v souvislé množině M, jsou všechny spojité větve dány vzorcem

$$A(z) + 2k\pi \quad (k \text{ celočíselná konstanta})\,. \tag{21}$$

---

[6]) Jest $P_\varphi = P_\psi$ tehdy a jen tehdy, je-li $\psi = \varphi + 2k\pi$, k celé.

[7]) Je totiž podle (19) $\text{ampl}\, z = \text{ampl}_\Theta(ze^{i\Theta}) - \Theta$; kdyby byla $\text{ampl}_\Theta\, z$ spojitá v bodě $re^{i(\Theta+\pi)}$ ($r > 0$), byla by $\text{ampl}_\Theta(ze^{i\Theta})$ spojitá v bodě $z = re^{i\pi}$, a v témže bodě by byla spojitá i ampl z — spor s pozn. 5.

[8]) T. j. spojitá v každém bodě $z \in M$ vzhledem k M.

[9]) Existuje-li taková funkce $A(z)$, je $0 \text{ non} \in M$, ježto amplituda nuly není definována.

Důkaz: Že všechny funkce (21) jsou spojité větve amplitudy, je jasno. Je-li $A_1(z)$ další spojitá větev amplitudy v M, je podle věty 237

$$A_1(z) - A(z) = 2\pi k(z) ,$$

kde $k(z)$ je spojitá funkce v M, nabývající jen celočíselných hodnot. Podle věty 171 a podle pozn. 5 v kap. VI, § 18 zobrazuje $k(z)$ množinu M buďto na nezvrhlý interval nebo na jednobodovou množinu. První případ není možný, ježto $k(z)$ je stále celé číslo. Tedy je $k(z)$ *konstantní* v M.

Poznámka 10. Budiž dáno číslo $r > 0$; budiž M množina všech bodů $z = re^{it}$ (t reálné).[10] Tvrdím, že *neexistuje spojitá větev amplitudy z v množině M.* Důkaz: Nechť existuje spojitá větev amplitudy v M, označme ji $A(z)$. Množina bodů re^{it} $(0 \leqq t \leqq \pi)$ leží v množině $\mathbf{K}_1 \dot{-} \dot{-} P_{\frac{3}{2}\pi}$, v níž existuje spojitá větev amplitudy, totiž $\mathrm{ampl}_{\frac{1}{2}\pi}\, z$ (viz pozn. 7); podle pozn. 9 je tedy rozdíl

$$A(re^{it}) - \mathrm{ampl}_{\frac{1}{2}\pi}\,(re^{it})$$

konstantní pro $0 \leqq t \leqq \pi$. Podobně množina bodů re^{it} $(\pi \leqq t \leqq 2\pi)$ leží v množině $\mathbf{K}_1 \dot{-} P_{\frac{1}{2}\pi}$, a proto rozdíl

$$A(re^{it}) - \mathrm{ampl}_{\frac{3}{2}\pi}\,(re^{it})$$

je konstantní pro $\pi \leqq t \leqq 2\pi$. Ale pro $0 \leqq t \leqq \pi$ je zřejmě $\mathrm{ampl}_{\frac{1}{2}\pi}\,(re^{it}) = t$ a pro $\pi \leqq t \leqq 2\pi$ je obdobně $\mathrm{ampl}_{\frac{3}{2}\pi}\,(re^{it}) = t$. Tedy jest

$$A(re^{i\pi}) - \pi = A(re^{i\cdot 0}) - 0, \quad A(re^{2i\pi}) - 2\pi = A(re^{i\pi}) - \pi ,$$

tedy $A(re^{2i\pi}) - 2\pi = A(re^{i0})$; ale $e^{i\cdot 0} = e^{2i\pi} = 1$, tedy $A(r) - 2\pi = A(r)$, což je hledaný spor.

Zavedeme nyní pojem logaritmu komplexního čísla:

Věta 239. *Budiž $z \neq 0$. Potom rovnice*

$$z = e^w \tag{22}$$

je splněna tehdy a jen tehdy, je-li

$$w = \lg|z| + i(\mathrm{ampl}\, z + 2k\pi), \quad k \text{ celé číslo} . \tag{23}$$

---

[10]) Geometricky: kružnice o středu v počátku. Je to souvislá množina (podle věty 171).

Důkaz. Buďte a, b reálná. Jest $z = |z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{ampl}\,z}$. Rovnice $z = \mathrm{e}^{a+b\mathrm{i}}$ praví, že

$$|z|\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{ampl}\,z} = \mathrm{e}^{a+b\mathrm{i}}\,. \tag{24}$$

Srovnání absolutních hodnot dává $|z| = \mathrm{e}^a$, t. j. $a = \lg |z|$, načež (24) praví, že má býti $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\mathrm{ampl}\,z} = \mathrm{e}^{b\mathrm{i}}$, t. j. $b = \mathrm{ampl}\,z + 2k\pi$, k celé.

Poznámka 11. Imaginární části čísel (23) jsou právě všechny možné amplitudy čísla z. Je-li Θ libovolné reálné číslo, existuje mezi čísly (23) právě jedno, jehož imaginární část leží v intervalu $(\Theta - \pi, \Theta + \pi\rangle$; podle definice 42 je to číslo

$$\lg |z| + \mathrm{i}\,\mathrm{ampl}_\Theta\, z\,. \tag{25}$$

Poznamenejme: Je-li $z > 0$, je $\mathrm{ampl}_0\, z = 0$, takže číslo (25) se pro $z > 0$, $\Theta = 0$ rovná číslu $\lg z$.

Definice 44. *Číslo* (25) *značíme* $\lg_\Theta z$; *místo* $\lg_0 z$ *píšeme kratčeji* $\lg z$.[11])

Poznámka 12. Bývá zvykem, nazývati každé z čísel (23) logaritmem čísla z; číslo $\lg z$ se pak nazývá hlavní hodnotou logaritmu čísla z. To je pro $z > 0$ poněkud v nesouhlasu s názvoslovím z **DI**; co jsme tam nazývali (přirozeným) logaritmem kladného čísla, musili bychom teď nazvati hlavní hodnotou logaritmu. Proto budu raději užívati znaků $\lg z$, $\lg_\Theta z$ než slova logaritmus, abych se vyhnul nedorozumění.

Poznámka 13. Reálná část čísla (23) je $\frac{1}{2}\lg (x^2 + y^2)$; to je jednoznačně stanovená funkce proměnné z, jež je spojitá v každém bodě $z \neq 0$. Abychom také imaginární část mohli považovati za funkci proměnné z, musíme nějakým způsobem pro každé $z \neq 0$ předepsati celé číslo k v (23), t. j. musíme určiti, kterou z amplitud čísla z vezmeme za imaginární část čísla (23).

Definice 45. *Budiž* $M \subset \mathbf{K}_1$ *souvislá množina. Funkce* $L(z)$ *(v oboru* M*) se nazývá spojitou větví logaritmu* z *v množině* M, *platí-li toto:*

1. *Funkce* $L(z)$ *je spojitá v* M.
2. *Pro každé* $z \in M$ *je číslo* $L(z)$ *jednou z hodnot* (23).

---

[11]) Podle toho, co jsme právě řekli, je toto označení pro $z > 0$ ve shodě s definicí přirozeného logaritmu, známou z **DI**. Znak $\lg_\Theta z$ není obvyklý, ale hodí se nám.

Poznámka 14. Podle počátku poznámky 13 a podle definice 43 je patrno, že nejobecnější spojitá větev logaritmu z v M má tvar

$$L(z) = \lg |z| + iA(z) ,$$

kde $A(z)$ je libovolná spojitá větev amplitudy z v M. Existence spojité větve logaritmu znamená totéž jako existence spojité větve amplitudy.

Rovnice (23) nám umožňuje přenésti většinu vět o amplitudě na věty o logaritmu. Tak z pozn. 5—10 plyne: $\lg_\Theta z$ je funkce spojitá v $K_1 \dot{-} P_{\Theta+\pi}$, není však spojitá v žádném bodě množiny $P_{\Theta+\pi}$. Speciálně pro $\Theta = 0$: Pro $x_0 < 0$ je

$$\lg x_0 = \lim_{\substack{z \to x_0 \\ y \geqq 0}} \lg z = \lg |x_0| + \pi i ,$$

$$\lim_{\substack{z \to x_0 \\ y < 0}} \lg z = \lg |x_0| - \pi i .$$

Funkce $\lg_\Theta z$ je spojitou větví logaritmu z v $K_1 \dot{-} P_{\Theta+\pi}$. Je-li funkce L spojitou větví logaritmu z v N a je-li M souvislá, $M \subset N$, je parciální funkce L_M spojitou větví logaritmu v M. Z jedné spojité větve logaritmu $L(z)$ obdržíme všechny ostatní vzorcem $L(z) + 2k\pi i$ (k celočíselná konstanta). Na žádné kružnici o středu v počátku neexistuje spojitá větev logaritmu z.[12]) Z pozn. 4 plyne

$$\lg_\Theta z = \lg (ze^{-i\Theta}) + i\Theta . \tag{26}$$

Důkaz: $\lg_\Theta z = \lg |z| + i \operatorname{ampl}_\Theta z = \lg |ze^{-i\Theta}| + i \operatorname{ampl} (ze^{-i\Theta}) + i\Theta$ podle (19); poslední výraz je $\lg (ze^{-i\Theta}) + i\Theta$.

Věta 240. *Budiž M otevřená souvislá množina v K_1; budiž $L(z)$ spojitá větev logaritmu v M. Potom je*[13])

$$\frac{\mathrm{d}L(z)}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{z} \quad \textit{pro každé } z \in M . \tag{27}$$

[12]) Přiřadíme-li každému $z \neq 0$ některé z čísel (23), dostaneme jistou funkci $F(z)$. Na př. $\lg z$ je taková funkce: ta je nespojitá v bodech množiny P_π. Tyto body nespojitosti můžeme (až na bod 0) „přeložit" jinam, na př. na množinu $P_{\Theta+\pi}$, vezmeme-li místo $\lg z$ funkci $\lg_\Theta z$. Ale ať volíme $F(z)$ jakkoliv, nikdy nemůžeme tyto body nespojitosti úplně odstraniti: na každé kružnici o středu v počátku leží bod, v němž jest $F(z)$ nespojitá.

[13]) Jde ovšem o derivaci podle *komplexní* proměnné z ve smyslu def. 41.

Důkaz. Dokažme napřed: *Jest*

$$\frac{\mathrm{d}\lg z}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{z}, \quad \textit{není-li } z \leqq 0\,. \tag{28}$$

Píšeme-li $z = x + \mathrm{i}y$ (vylučujíce případ $y = 0$, $x \leqq 0$), jest podle (25) (pro $\Theta = 0$) $\lg z = P(x, y) + \mathrm{i}Q(x, y)$, kde $P(x, y) = \frac{1}{2}\lg(x^2 + y^2)$, $Q(x, y) = \operatorname{ampl}(x + \mathrm{i}y)$. Jest předně $\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{x}{x^2 + y^2}$, $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{y}{x^2 + y^2}$. Dokážeme-li rovnice $\frac{\partial Q}{\partial x} = -\frac{\partial P}{\partial y}$, $\frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{\partial P}{\partial x}$, bude tím podle věty 218 dokázáno, že

$$\frac{\mathrm{d}\lg z}{\mathrm{d}z} = \frac{\partial P}{\partial x} + \mathrm{i}\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x - \mathrm{i}y}{x^2 + y^2} = \frac{1}{x + \mathrm{i}y} = \frac{1}{z}\,.$$

Ale podle pozn. 3 **A** je v polorovině $x > 0$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\operatorname{arctg}\frac{y}{x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2},$$

a tytéž vzorce platí podle pozn. 3 **B** v polorovině $y > 0$ i v polorovině $y < 0$. Vskutku platí tedy (28), pokud není současně $y = 0$, $x \leqq 0$.

Za druhé dokažme: Jest

$$\frac{\mathrm{d}\lg_\Theta z}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{z}, \quad \textit{není-li } z \in P_{\Theta+\pi}\,. \tag{29}$$

To plyne ze vzorců (26), (28) a ze vzorce pro derivování složené funkce takto: Není-li $z \in P_{\Theta+\pi}$, není $z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta} \in P_\pi$; píšeme-li tedy $u = z\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta}$, je podle (28) $\frac{\mathrm{d}\lg u}{\mathrm{d}u} = \frac{1}{u}$, a tedy podle (26) $\frac{\mathrm{d}\lg_\Theta z}{\mathrm{d}z} = \frac{\mathrm{d}\lg u}{\mathrm{d}u}\cdot\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}z} = \frac{1}{u}\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\Theta} = \frac{1}{z}$.

Dokažme konečně (27). Budiž $L(z)$ spojitá větev logaritmu v M; budiž $z_0 \in M$.[14]) Zvolme Θ tak, že $z_0 \in \mathbf{K}_1 \dot{-} P_{\Theta+\pi}$. Existuje jistý otevřený interval I (dvojrozměrný), jenž obsahuje z_0 a je obsažen v průniku $M \,.\, (\mathbf{K}_1 \dot{-} P_{\Theta+\pi})$. V I máme dvě spojité větve logaritmu:

[14]) Tedy jisté $z_0 \neq 0$.

$L(z)$, $\lg_\Theta z$;[15]) ty se tedy v I liší pouze o konstantu (viz pozn. 14), a tedy je podle (29)

$$\left(\frac{\mathrm{d}L(z)}{\mathrm{d}z}\right)_{z=z_0} = \left(\frac{\mathrm{d}\lg_\Theta z}{\mathrm{d}z}\right)_{z=z_0} = \frac{1}{z_0}\,.$$

Poznámka 15. Jest užitečno, zapamatovati si vzorce (28), (29), ač jsou obsaženy v obecném vzorci (27).

Poznámka 16. V integrálním počtu budeme potřebovati tento vzorec: *Buďte a, b reálná čísla; potom funkce* reálné *proměnné x*

$$\lg(x + a + ib)$$

má derivaci

$$\frac{1}{x + a + ib}$$

v každém bodě, v němž $x + a + ib \neq 0$.

Důkaz: Funkce (komplexní proměnné z) $\lg(z + a + ib)$ má derivaci

$$\frac{1}{z + a + ib}$$

v každém bodě, vyjma v těch bodech, kde $z + a + ib \leqq 0$. Tentýž výsledek tedy platí (viz kap. XI, § 1, pozn. 3), omezíme-li se na reálné z a na derivaci podle reálné proměnné. Zbývá ještě odvoditi žádaný výsledek pro ona x, pro něž je $x + a + ib < 0$, t. j. $b = 0$ (ježto jde o reálná x), $a + x < 0$. Je-li však $a + x < 0$, je ampl $(a + x) = \pi$, tedy $\lg(x + a) = \lg|x + a| + \pi\mathrm{i} = \lg(-x - a) + \pi\mathrm{i}$. Tedy derivace této funkce (reálné proměnné x) jest $\dfrac{1}{-x-a}\,.\,(-1) = \dfrac{1}{x+a}\,.$

Poznámka 17. Z „funkcionální rovnice“ $e^{w_1+w_2} = e^{w_1}\,.\,e^{w_2}$ plyne ihned funkcionální rovnice pro logaritmus: Budiž $z_1 \neq 0$, $z_2 \neq 0$, položme $w_1 = \lg z_1$, $w_2 = \lg z_2$, takže $e^{w_1} = z_1$, $e^{w_2} = z_2$ a tedy $e^{w_1+w_2} = z_1 z_2$; odtud pak plyne, že $w_1 + w_2 = \lg z_1 z_2 - 2k\pi\mathrm{i}$, t. j.

(30) $$\lg z_1 z_2 = \lg z_1 + \lg z_2 + 2k\pi\mathrm{i}\quad.$$

[15]) Vlastně příslušné parciální funkce.

(k celé). Volba $z_2 = \frac{1}{z_1}$ dává

$$\lg \frac{1}{z} = -\lg z + \lg 1 - 2k\pi\mathrm{i}\,,$$

t. j.

$$\lg \frac{1}{z} = -\lg z + 2l\pi\mathrm{i} \quad (l \text{ celé})\,. \tag{31}$$

Pro $z \neq 0$ a pro celé n je

$$\lg (z^n) = n \lg z + 2k\pi\mathrm{i}\ (k \text{ celé})\,. \tag{32}$$

To plyne pro $n > 0$ úplnou indukcí z (30), pro $n < 0$ pak z (31).

Celá čísla k, l v (30), (31), (32) nutno ovšem voliti tak, aby imaginární část pravé strany ležela v $(-\pi, \pi\rangle$.

Cvičení

1. Funkce $\lg_\Theta z$ má konstantní reálnou část na každé kružnici o středu v počátku a má konstantní imaginární část na každém polopaprsku, vycházejícím z počátku.

2. $\lg 1 = 0$; $\lg(-1) = \pi\mathrm{i}$; $\lg \mathrm{i} = \frac{1}{2}\pi\mathrm{i}$; $\lg(-\mathrm{i}) = -\frac{1}{2}\pi\mathrm{i}$; $\lg(-1 + \mathrm{i}\sqrt{3}) = \lg 2 + \frac{2}{3}\pi\mathrm{i}$.

3. V rovnici (31) je vždy $l = 0$; pouze v případě $z < 0$ je $l = 1$.

4. Ukažte, že číslo k v (32) je rovno $\left[-\frac{n \operatorname{ampl} z}{2\pi} + \frac{1}{2}\right]$ ($[a]$ je největší celé číslo, jež jest $\leq a$).

§ 3. Obecná mocnina. Zaveďme tuto funkci dvou komplexních proměnných ξ, η:

$$f(\xi, \eta) = \mathrm{e}^{\eta \lg \xi} \ \text{ pro } \ \xi \neq 0\,.$$

Pro $\xi > 0$ a pro reálné η je $f(\xi, \eta) = \xi^\eta$ (to víme z **DI**); pro $\xi = \mathrm{e}$ a pro libovolné komplexní η je $\lg \xi = 1$, a tedy $f(\mathrm{e}, \eta) = \mathrm{e}^\eta$; pro libovolné komplexní $\xi \neq 0$ a pro celé η (píšeme $\eta = n$) je podle (32)

$$\xi^n = \mathrm{e}^{\lg(\xi^n)} = \mathrm{e}^{n \lg \xi + 2k\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{n \lg \xi} = f(\xi, n)\,.$$

Ve všech případech, v nichž byl dosud symbol ξ^η ($\xi \neq 0$) definován, je tedy $f(\xi, \eta) = \xi^\eta$. Nemůže tedy nastati nedorozumění, definujeme-li pro všechna komplexní ξ, η ($\xi \neq 0$) symbol ξ^η rovnicí $\xi^\eta = f(\xi, \eta)$. Klademe tedy

(33) $$\xi^\eta = e^{\eta \lg \xi} \text{ pro } \xi \neq 0 .$$

Volíme-li zde ξ pevně a místo η píšeme z, dostáváme funkci komplexní proměnné z

(34) $$a^z = e^{z \lg a} \ (a \neq 0;\ \text{t. zv. obecná funkce exponenciální}) .$$

Její derivace je podle pravidla o derivování složených funkcí

(35) $$\frac{da^z}{dz} = e^{z \lg a} \,.\, \lg a = a^z \,.\, \lg a .$$

Volíme-li v (33) η pevně, dostáváme funkci komplexní proměnné z

(36) $$z^a = e^{a \lg z} \ (z \neq 0) .\text{[16]}$$

Není-li $z \leqq 0$, jest (ježto $\frac{1}{z} = e^{-\lg z}$)

(37) $$\frac{dz^a}{dz} = e^{a \lg z} \,.\, \frac{a}{z} = ae^{a \lg z} \,.\, e^{-\lg z} = ae^{(a-1)\lg z} = az^{a-1} .$$

Poznámka 1. V integrálním počtu budeme potřebovati tuto větu: *Buďte α, β reálná; potom funkce* reálné *proměnné x*

$$(x + \alpha + i\beta)^a$$

má derivaci

$$a(x + \alpha + i\beta)^{a-1}$$

pro každé reálné x, pro něž jest $x + \alpha + i\beta \neq 0$.

Důkaz. Není-li $x + \alpha + i\beta \leqq 0$, platí tento výsledek podle vzorce (37) (viz kap. XI, § 1, pozn. 3). Zbývají tedy případy $x + \alpha + i\beta < 0$, t. j. $\beta = 0$, $x + \alpha < 0$. Potom však jest

$$(x + \alpha)^a = e^{a \lg(x+\alpha)} = e^{a(\lg(-x-\alpha)+\pi i)} = e^{a\pi i}\, e^{a \lg(-x-\alpha)}$$

a derivace této funkce jest

$$e^{a\pi i} \,.\, e^{a \lg(-x-\alpha)} \,.\, \frac{a}{-x-\alpha} \,.\, (-1) =$$
$$= ae^{a\pi i} \,.\, e^{-\pi i} \,.\, e^{a \lg(-x-\alpha)} \,.\, e^{-\lg(-x-\alpha)} = ae^{(a-1)(\lg(-x-\alpha)+\pi i)} =$$
$$= ae^{(a-1)\lg(x+\alpha)} = a(x + \alpha)^{a-1} .$$

[16]) Je-li $a \geqq 0$, definovali jsme v **DI** také 0^a, totiž $0^a = 0$ pro $a > 0$, $0^0 = 1$.

P o z n á m k a 2. U symbolu (33) se užívá obvyklým způsobem slov: mocnina, mocněnec nebo základ (ξ), mocnitel nebo exponent (η). Často se mocninou se základem ξ a mocnitelem η nazývá k t e r é k o l i v z čísel

$$\mathrm{e}^{\eta(\lg \xi + 2k\pi\mathrm{i})} = \xi^\eta \mathrm{e}^{2k\pi\mathrm{i}\eta} \quad (k \text{ celé, libovolné}) \tag{38}$$

a naší hodnotě (33) (odpovídající volbě $k = 0$) se potom říká hlavní hodnota mocniny. My se však přidržíme definice (33). Podotkněme však, že volba $k = 0$ v (38) nevede vždy k nejjednoduššímu výsledku. Na př. podle naší definice je $(-1)^{\frac{1}{3}} = \mathrm{e}^{\frac{1}{3}\pi\mathrm{i}} = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{i}\sqrt{3})$, avšak mezi čísly (38), t. j. $(-1)^{\frac{1}{3}}\mathrm{e}^{\frac{2}{3}k\pi\mathrm{i}}$ je jedno podstatně jednodušší (a to pro $k = 1$), totiž $(-1)^{\frac{1}{3}} . \mathrm{e}^{\frac{2}{3}\pi\mathrm{i}} = \mathrm{e}^{\pi\mathrm{i}} = -1$.

Nebudeme se do této věci pouštěti dále; na př. při pevném exponentu a proměnném základu bychom mohli definovati „spojité větve mocniny“ podobně, jako jsme to učinili u logaritmu. Ale o této věci se čtenář podrobněji poučí v theorii analytických funkcí.

P o z n á m k a 3. Je-li $a = \alpha + \mathrm{i}\beta$, $z = r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\varphi}$ (α, β reálná, $r > 0$, $-\pi < \varphi \leqq \pi$), je $z^a = \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)\lg z} = \mathrm{e}^{(\alpha+\mathrm{i}\beta)(\lg r + \mathrm{i}\varphi)}$ a odtud $|z^a| = \mathrm{e}^{\alpha \lg r - \beta\varphi} = |z|^\alpha . \mathrm{e}^{-\beta\varphi}$. Speciálně pro reálné a dostáváme $|z^a| = |z|^a$.

P o z n á m k a 4. Čtenář by měl z následujících cvičení si propočítat a l e s p o ň triviální cvičení 1. Z něho plyne, že pro $\alpha \neq 0$ je $(\alpha^{\frac{1}{2}})^2 = \alpha$; tento výsledek platí i pro $\alpha = 0$, zachováme-li starou definici $0^{\frac{1}{2}} = 0$. Odtud vynásobením ihned $(x - \alpha^{\frac{1}{2}})(x + \alpha^{\frac{1}{2}}) = x^2 - \alpha$, takže rovnice $x^2 = \alpha$ (α dané číslo) má kořeny $\alpha^{\frac{1}{2}}$, $-\alpha^{\frac{1}{2}}$ a žádné jiné. Provedl jsem tuto triviální úvahu, poněvadž budeme s výrazy $\alpha^{\frac{1}{2}}$ hojně počítati v § 4,5.

Cvičení

U všech cvičení předpokládám základ různý od nuly.

1. Dokažte: $\xi^{\eta_1}\xi^{\eta_2} = \xi^{\eta_1+\eta_2}$; $\xi^{-\eta} = 1 : \xi^\eta$; $\xi^{\eta_1} : \xi^{\eta_2} = \xi^{\eta_1-\eta_2}$; $(\xi^\eta)^n = \xi^{n\eta}$ pro celé n.

2. Pro necelé n nemusí býti $(\xi^\eta)^n = \xi^{n\eta}$ ani $(\xi^\eta)^n = (\xi^n)^\eta$. Návod: $\xi = -1$, $\eta = 2$, $n = \frac{1}{2}$. Rovněž nemusí býti $\xi_1^\eta\xi_2^\eta = (\xi_1\xi_2)^\eta$.

3. Obtíž s rovnicemi

$$\xi_1^\eta\xi_2^\eta = (\xi_1\xi_2)^\eta, \quad (\xi^\eta)^\lambda = (\xi^\lambda)^\eta, \quad (\xi^\eta)^\lambda = \xi^{\eta\lambda} \tag{39}$$

nás vede k tomu, vyšetřovati obecněji čísla (38). Jde předně o to, lze-li nalézt celá k, m, n tak, že platí

$$\xi_1^\eta e^{2k\pi\eta i} \,.\, \xi_2^\eta e^{2m\pi\eta i} = (\xi_1\xi_2)^\eta\, e^{2n\pi\eta i}\,. \tag{40}$$

Zjistíte, že dvě (kterákoliv) z čísel k, m, n lze zvolit libovolně a k nim stanovit třetí tak, aby platilo (40). Podobně jde o rovnici

$$(\xi^\eta e^{2k\pi\eta i})^\lambda\, e^{2m\pi\lambda i} = (\xi^\lambda\, e^{2n\pi\lambda i})^\eta\, e^{2p\pi\eta i} \tag{41}$$

a o rovnici

$$(\xi^\eta e^{2k\pi\eta i})^\lambda\, e^{2m\pi\lambda i} = \xi^{\eta\lambda} e^{2n\pi\eta\lambda i}\,. \tag{42}$$

Ukažte, že rovnice (41) je splněna při vhodné volbě celých čísel k, m, n, p; podobně pro (42). Postupujte opatrně! Na př. v (41) nemusí $\eta \lg \xi + 2k\pi\eta i$ být hlavní hodnotou logaritmu čísla $\xi^\eta e^{2k\pi\eta i}$.

4. První z rovnic (39) platí pro $\xi_1 > 0$, $\xi_2 > 0$; třetí platí, je-li $\xi > 0$, η reálné.

5. Jest $\left(\dfrac{1}{z}\right)^a = \varepsilon \,.\, \dfrac{1}{z^a}$, kde $\varepsilon = e^{2a\pi i}$, je-li $z < 0$; pro všechna ostatní $z \neq 0$ je $\varepsilon = 1$.

6. Při daném $\xi \neq 0$ a daném η vyšetřujme čísla (38) pro všechna celá k. Je-li η iracionální, jsou všechna tato čísla navzájem různá; je-li $\eta = r : s$ (r, s celá nesoudělná, $s > 0$), je mezi nimi právě s různých čísel.

7. Budiž $n > 0$, celé, $z = re^{i\varphi}$ ($r > 0$, φ reálné). Potom existuje právě n různých čísel ζ, která splňují rovnici $\zeta^n = z$. Jsou to čísla

$$\zeta = \sqrt[n]{r}\, e^{i\frac{\varphi + 2k\pi}{n}} \quad (k = 0, 1, \ldots, n-1)\,.$$

8. Je-li $z_0 < 0$, a komplexní, je

$$\lim_{\substack{z \to z_0 \\ y \geq 0}} z^a = z_0^a, \quad \lim_{\substack{z \to z_0 \\ y < 0}} z^a = z_0^a\, e^{-2\pi i a}\,.$$

Tedy: není-li a celé, není funkce z^a spojitá v žádném bodě záporné reálné poloosy. Vzpomeňte si na podobnou okolnost při hlavní větvi logaritmu.

§ 4. Funkce arctg z, arcsin z pro komplexní z.

Funkce

$$\operatorname{tg} w = \frac{\sin w}{\cos w} = \frac{1}{i} \cdot \frac{e^{2iw} - 1}{e^{2iw} + 1} \tag{43}$$

je definována pro všechna w, vyjma pro ty hodnoty, pro něž je $\cos w = 0$, t. j. $e^{iw} + e^{-iw} = 0$, $e^{2iw} = -1$, $2iw = (2k+1)\pi i$ (k celé), t. j. $w = (k + \frac{1}{2})\pi$. Pro všechna w, jež nejsou tvaru $w = (k + \frac{1}{2})\pi$

(k celé), je tedy $\cos w \neq 0$ a funkce $\operatorname{tg} w$ je definována. Výraz $\frac{A-1}{A+1}$ není nikdy roven 1 a je roven -1 jen tehdy, je-li $A = 0$. Ježto je vždy $e^{2iw} \neq 0$, nenabývá funkce $\operatorname{tg} w$ nikdy hodnot i, $-$ i. Ukážeme nyní, že funkce $\operatorname{tg} w$ nabývá všech ostatních hodnot:

Věta 241. *Budiž dáno číslo z ($z \neq \mathrm{i}$, $z \neq -\mathrm{i}$). Potom existuje nekonečně mnoho čísel w, pro něž je $\operatorname{tg} w = z$. Jedno z těchto čísel jest*

$$w = \frac{1}{2\mathrm{i}} \lg \frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\,; \tag{44}$$

ostatní se z něho dostanou přičtením libovolného čísla $k\pi$ (k celé).

Důkaz. Rovnice $\operatorname{tg} w = z$, t. j.

$$\frac{1}{\mathrm{i}} \frac{e^{2\mathrm{i}w}-1}{e^{2\mathrm{i}w}+1} = z\,,$$

je splněna tehdy a jen tehdy, je-li $e^{2\mathrm{i}w} \neq -1$ a současně $e^{2\mathrm{i}w} - 1 = \mathrm{i}z(e^{2\mathrm{i}w} + 1)$, t. j.

$$e^{2\mathrm{i}w} = \frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\,. \tag{45}$$

Zlomek vpravo má smysl (ježto $\mathrm{i}z \neq 1$), je různý od nuly (ježto $\mathrm{i}z \neq -1$) a je ovšem různý od -1; nerovnost $e^{2\mathrm{i}w} \neq -1$ je tedy již důsledkem rovnice (45). Rovnice (45) pak je splněna tehdy a jen tehdy, je-li

$$2\mathrm{i}w = \lg \frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z} + 2k\pi\mathrm{i} \quad (k \text{ celé})\,,$$

čímž je důkaz proveden.

Číslo (44) vyhovuje rovnici $\operatorname{tg} w = z$ a jeho reálná část leží v intervalu $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi\rangle$,[17]) kdežto reálné části ostatních řešení rovnice $\operatorname{tg} w = z$ leží podle věty 241 mimo tento interval. Pro reálná z je tedy číslo (44) rovno $\operatorname{arctg} z$. Nedojde tedy k nedorozumění, *definujeme-li funkci* $\operatorname{arctg} z$ *i pro komplexní z rovnicí*

$$\operatorname{arctg} z = \frac{1}{2\mathrm{i}} \lg \frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z} \quad \textit{pro } z \neq \mathrm{i},\ z \neq -\mathrm{i}\,. \tag{46}$$

[17]) Neboť imaginární část logaritmu leží v $(-\pi, +\pi\rangle$.

Ze vzorce pro derivaci logaritmu plyne

$$
(47)\qquad \begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\,\mathrm{arctg}\, z}{\mathrm{d}z} &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\cdot\frac{1-\mathrm{i}z}{1+\mathrm{i}z}\cdot\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}\left(\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\right) = \\ &= \frac{1}{2\mathrm{i}}\cdot\frac{2\mathrm{i}}{(1+\mathrm{i}z)(1-\mathrm{i}z)} = \frac{1}{1+z^2}\,. \end{aligned}
$$

Tato rovnice platí, pokud funkce $\lg y$ má v bodě $y = \frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}$ derivaci $\frac{1}{y}$ (podle proměnné y). To nastane, není-li $z = \pm\,\mathrm{i}$ a není-li $\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z} < 0$. Poslední nerovnost lze psáti (píšeme-li $z = x + \mathrm{i}y$, x, y reálná)

$$
\frac{(1-y)+\mathrm{i}x}{(1+y)-\mathrm{i}x} = \frac{(1-y+\mathrm{i}x)(1+y+\mathrm{i}x)}{(1+y)^2+x^2} = \frac{1-y^2-x^2+2\mathrm{i}x}{(1+y)^2+x^2} < 0;
$$

tato nerovnost je splněna tehdy a jen tehdy, je-li $x = 0$, $y^2 > 1$; přidáme-li k tomu ještě body $z = \pm\,\mathrm{i}$, obdržíme: *Rovnice* (47) *platí pro každé z, vyjma pro hodnoty tvaru*

$$
z = \mathrm{i}y,\ y\ \textit{reálné},\ |y| \geqq 1\,.
$$

Poznámka 1. Často se názvem „arkustangens z" označuje kterákoliv z hodnot w, vyhovujících rovnici $\mathrm{tg}\, w = z$; hodnotě (44) se potom říká „hlavní hodnota" výrazu $\mathrm{arctg}\, z$. Všechny tyto hodnoty se liší navzájem o celistvé násobky čísla π; všechny mají touž imaginární část, totiž $-\frac{1}{2}\lg\left|\frac{1+\mathrm{i}z}{1-\mathrm{i}z}\right|$; tato imaginární část má limitu $+\infty$ pro $z \to \mathrm{i}$ a limitu $-\infty$ pro $z \to -\mathrm{i}$.

Poznámka 2. Oba paprsky: $x = 0$, $y \geqq 1$ a $x = 0$, $y \leqq -1$ tvoří i zde jakýsi „řez" podobného druhu, s jakým jsme se setkali u funkce $\lg z$; viz cvič. 3.

Podobně jako jsme studovali funkci $\mathrm{tg}\, w$, studujme nyní funkci $\sin w = \frac{1}{2\mathrm{i}}(\mathrm{e}^{w\mathrm{i}} - \mathrm{e}^{-w\mathrm{i}})$. Tato funkce nabývá — na rozdíl od funkce $\mathrm{tg}\, w$ — všech hodnot vůbec:

Věta 242. *Ke každému z existuje nekonečně mnoho w tak, že* $\sin w = z$*; všechny tyto hodnoty w jsou dány vzorci*

(48a) $$w = \frac{1}{\mathrm{i}} \lg (\mathrm{i}z + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}) + 2k\pi\,,$$

(48b) $$w = \pi - \frac{1}{\mathrm{i}} \lg (\mathrm{i}z + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}) + 2k\pi \quad (k \text{ celé}).$$

(Číslo $(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$ je ovšem definováno vždy, i pro $z^2 = 1$; neboť $0^{\frac{1}{2}} = 0$.)

Důkaz. Rovnici $\sin w = z$ lze psáti ve tvaru $\mathrm{e}^{2\mathrm{i}w} - 2\mathrm{i}z\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} - 1 = 0$, t. j. $(\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} - \mathrm{i}z)^2 = 1 - z^2$; tato rovnice je splněna tehdy a jen tehdy, je-li $\mathrm{e}^{\mathrm{i}w} = \mathrm{i}z \pm (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$,

(49) $$w = \frac{1}{\mathrm{i}} \lg (\mathrm{i}z \pm (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}) + 2k\pi \quad (k \text{ celé})\,.$$

Avšak

(50) $$(\mathrm{i}z + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}})(\mathrm{i}z - (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}) = -1\,,$$

takže $\lg (\mathrm{i}z - (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}) = -\lg (\mathrm{i}z + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}) + \pi\mathrm{i} + 2k'\pi\mathrm{i}$ (k' celé); hodnoty w v (49) s dolním znamením lze tedy psáti ve tvaru $\pi - \frac{1}{\mathrm{i}} . \lg (\mathrm{i}z + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}) + 2k''\pi$ (k'' celé); tím je důkaz proveden.

Je-li z reálné, $|z| < 1$, jest $(1 - z^2)^{\frac{1}{2}} > 0$, takže zřejmě

$$-\tfrac{1}{2}\pi < \operatorname{ampl} (\mathrm{i}z + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}) < \tfrac{1}{2}\pi\,,$$

takže reálná část čísla

$$\frac{1}{\mathrm{i}} \lg (\mathrm{i}z + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}})$$

leží v intervalu $(-\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi)$, kdežto reálné části ostatních čísel (48a), (48b) leží mimo interval $\langle -\tfrac{1}{2}\pi, \tfrac{1}{2}\pi \rangle$. Odtud a z toho, že čísla (48a), (48b) dávají všechna řešení rovnice $\sin w = z$, plyne, že pro $-1 < z < 1$ jest

(51) $$\frac{1}{\mathrm{i}} \lg (\mathrm{i}z + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}) = \arcsin z$$

a tato rovnice platí i pro $z = \pm 1$ (neboť potom je levá strana rovna

$\frac{1}{i}\lg(\pm i) = \pm \frac{1}{2}\pi$). Není se tedy třeba obávati nesouhlasu s definicí, podanou v **DI**, kap. VII, § 2, *definujeme-li funkci* arcsin z *i pro každé komplexní* z *rovnicí* (51).

Z (51) plyne

$$\begin{aligned}(52)\quad \frac{\mathrm{d} \arcsin z}{\mathrm{d}z} &= \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot (i + \tfrac{1}{2}(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot (-2z)) = \\ &= \frac{1}{i} \cdot \frac{1}{iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{i(1 - z^2)^{\frac{1}{2}} - z}{(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1}{(1 - z^2)^{\frac{1}{2}}}.\end{aligned}$$

Tato rovnice platí, lze-li užíti vzorců pro derivování logaritmu a mocniny, t. j. není-li

$$(53)\qquad \text{ani}\quad iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} \leqq 0, \quad \text{ani}\quad 1 - z^2 \leqq 0\,.$$

Je-li $iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} < 0$,[18]) je podle (50) $iz - (1 - z^2)^{\frac{1}{2}} > 0$ a odečtením plyne $(1 - z^2)^{\frac{1}{2}} < 0$, což však neplatí pro žádné z (neboť pro $w \neq 0$ jest $w^{\frac{1}{2}} = |w|^{\frac{1}{2}} \,.\, e^{i\frac{1}{2}\mathrm{ampl}\, w}$, takže amplituda čísla $w^{\frac{1}{2}}$ není nikdy rovna π). První z nerovností (53) tedy není splněna nikdy; druhá pak tehdy a jen tehdy, je-li $z^2 \geqq 1$, t. j. z reálné, $|z| \geqq 1$. Tedy *rovnice* (52) *platí pro všechna* z, *vyjma pro hodnoty* $z \geqq 1$ *a pro hodnoty* $z \leqq -1$. Tyto dva paprsky tvoří opět jakýsi „řez", bližší o tom viz ve cvič. 7. Podobně jako u ostatních dosavadních funkcí se často každé z čísel (48a), (48b) označuje názvem arkussinus z, číslo (51) se potom nazývá „hlavní hodnotou" výrazu arcsin z.

Cvičení

V cvič. 1—6 je stále $z = x + iy$ (x, y reálné), $\Delta = \frac{1}{4}(x^2 + y^2 + 1)^2 - x^2 = \frac{1}{4}(x^2 + y^2 - 1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}(1 - x^2 + y^2)^2 + x^2y^2$.

Podobně jako jsme v rovnici $e^{x+iy} = e^x \cos y + ie^x \sin y$ rozložili funkci e^z na reálnou a imaginární část, jež jsme vyjádřili reálnými proměnnými x, y, provedeme nyní totéž pro některé jiné funkce.

1. $(x + iy)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2}(x + \sqrt{x^2 + y^2})} + i\varepsilon\sqrt{\frac{1}{2}(-x + \sqrt{x^2 + y^2})}$; při tom jest $\varepsilon = 1$ pro $y \geqq 0$, $\varepsilon = -1$ pro $y < 0$ (pamatujte stále, že při odmocňování platí $\sqrt{\alpha^2} = |\alpha| = \alpha \,.\, \mathrm{sgn}\, \alpha$ pro reálná α).

[18]) Toto číslo nemůže býti rovno nule, na př. podle (50).

2.

$$(54)\quad \operatorname{arctg}(x+iy) = \operatorname{arctg}\frac{x^2+y^2-1+\sqrt{(x^2+y^2+1)^2-4y^2}}{2x} + \\ + \frac{i}{4}\lg\frac{x^2+(1+y)^2}{x^2+(1-y)^2}\ \text{pro}\ x \neq 0\,.$$

Návod: Užijte rovnice (46). Jako reálná část vám vyjde $\frac{1}{2}$ampl $(1 - x^2 - y^2 + 2ix)$; užijte toho, že $\frac{1}{2}$ampl ξ = ampl $(\xi^{\frac{1}{2}})$. Že reálná část v (54) je arctg a nikoliv $k\pi$ + arctg ($k \neq 0$), plyne z nerovností pro $\Re$ arctg z.

3. Výsledek cvič. 2 platí i pro $x = 0$, $y \neq \pm 1$, nahradíme-li první člen vpravo jeho limitou pro $x \to 0+$, t. j. hodnotou 0 pro $|y| < 1$, hodnotou $\frac{1}{2}\pi$ pro $|y| > 1$. Zároveň plynou odtud limity: $\lim\limits_{\substack{x+iy\to iy_0\\ x\geq 0}} \operatorname{arctg} z = \lim\limits_{\substack{x+iy\to iy_0\\ x<0}} \operatorname{arctg} z + \pi =$ $= \operatorname{arctg} iy_0$ pro $|y_0| > 1$.

4. Jestliže v cvič. 2 počítáme přímo $\frac{1}{2}$ampl $(1 - x^2 - y^2 + 2ix)$ (a nikoliv ampl $(\ldots)^{\frac{1}{2}}$), obdržíme pro reálnou část v (54) pro $|z| \neq 1$ ihned výraz

$$(55)\quad \tfrac{1}{2}\pi\varepsilon + \tfrac{1}{2}\operatorname{arctg}\frac{2x}{1-(x^2+y^2)}\,,$$

kde $\varepsilon = 0$ pro $x^2 + y^2 < 1$; $\varepsilon = 1$ pro $x^2 + y^2 > 1$, $x \geq 0$; $\varepsilon = -1$ pro $x^2 + y^2 > 1$, $x < 0$.

5. Vyšetřením reálné a imaginární části výrazu $iz + (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$ zjistěte: Vždy jest $|\Re(\arcsin z)| \leq \frac{1}{2}\pi$; jestliže pak jest $\Re(\arcsin z) = \frac{1}{2}\pi$, jest $\Im(\arcsin z) \leq 0$; je-li $\Re(\arcsin z) = -\frac{1}{2}\pi$, jest $\Im(\arcsin z) \geq 0$.

Těmito vlastnostmi jest arcsin z mezi všemi čísly (48a), (48b) jednoznačně charakterisován, t. j. existuje právě jedno z čísel (48a), (48b), jehož reálná a imaginární část vyhovují těmto nerovnostem (jest ovšem si všimnouti toho: je-li jedno z čísel (48a), (48b) rovno $\pm\frac{1}{2}\pi$, je množina všech čísel (48a) totožná s množinou všech čísel (48b)).

6. Jest

$$(56)\quad \begin{cases} \arcsin(x+iy) = \arcsin\left(\varepsilon\sqrt{\tfrac{1}{2}(x^2+y^2+1)-\sqrt{\Delta}}\right) + \\ + i\lg\left(\sqrt{\tfrac{1}{2}(x^2+y^2+1)+\sqrt{\Delta}} + \varepsilon'\sqrt{\tfrac{1}{2}(x^2+y^2-1)+\sqrt{\Delta}}\right). \end{cases}$$

Přitom $\varepsilon = \operatorname{sgn} x$; $\varepsilon' = \operatorname{sgn} y$ pro $y \neq 0$; $\varepsilon' = -\operatorname{sgn} x$ pro $y = 0$.

Návod: Položíte-li $x + iy = \sin(u + iv)$ (u, v reálná), obdržíte rovnice

$$(57)\quad x = \tfrac{1}{2}\sin u\,.\,(e^v + e^{-v})\,,\quad y = \tfrac{1}{2}\cos u\,.\,(e^v - e^{-v})\,;$$

těmto rovnicím vyhovují právě všechny hodnoty $w = u + iv$ z rovnic (48a), (48b); z nich máte vybrati podle cvič. 5 onu, pro kterou je buďto $|u| < \frac{1}{2}\pi$ nebo

$u = \frac{1}{2}\pi$, $v \leqq 0$ nebo $u = -\frac{1}{2}\pi$, $v \geqq 0$; na to nutno při řešení rovnic (57) dát pozor. Pro $y \neq 0$ vychází $\cos u > 0$, tedy $\operatorname{sgn}(e^v - e^{-v}) = \operatorname{sgn} y$, $\operatorname{sgn} v = \operatorname{sgn} y$. Umocněním rovnic (57) na druhou obdržíte kvadratickou rovnici pro $\varrho = e^{2v} + e^{-2v} > 2$ atd. Pro $y = 0$, $|x| \leqq 1$ máme řešení $\sin u = x$, $v = 0$; pro $y = 0$, $|x| > 1$ je předně $e^v + e^{-v} > 2$, $v \neq 0$, tedy $\cos u = 0$, $u = \pm \frac{1}{2}\pi$ atd.

7. Z cvič. 6. odvoďte tyto vztahy, ukazující nespojitost funkce $\arcsin z$ pro $z > 1$ a pro $z < -1$: Je-li $x_0 > 1$, jest $\arcsin x_0 = \frac{1}{2}\pi - i \lg (x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1}) = \lim\limits_{\substack{x+iy \to x_0 \\ y \leqq 0}} \arcsin (x + iy) = \lim\limits_{\substack{x+iy \to x_0 \\ y > 0}} \arcsin (x + iy) - 2i \lg (x_0 + \sqrt{x_0^2 - 1})$. Obdobný vztah pro $x_0 < -1$ odvoďte z rovnice $\arcsin(-z) = -\arcsin z$, která plyne na př. též z cvič. 6.

8. Funkce (**reálné** proměnné x) $\arcsin x$ má derivaci $\dfrac{1}{(1 - x^2)^{\frac{1}{2}}}$ i pro $|x| > 1$; důkaz ze vzorce $\arcsin x = \frac{1}{2}\pi - i \lg (x + \sqrt{x^2 - 1})$, platného pro $x > 1$; obdobně pro $x < -1$.

9. Ze vzorce pro $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$ odvoďte rovnici $\operatorname{arctg} z_1 + \operatorname{arctg} z_2 = \operatorname{arctg} \dfrac{z_1 + z_2}{1 - z_1 z_2} + k\pi$ (kde $k = 0$ nebo 1 nebo -1), platnou pro $z_1 \neq \pm i$, $z_2 \neq \pm i$, $z_1 z_2 \neq 1$.

10. Podobně ze vzorce pro $\sin(\alpha + \beta)$ odvoďte: pro každé z_1, z_2 platí jedna z rovnic

$$\arcsin z_1 + \arcsin z_2 = \arcsin (z_1(1 - z_2^2)^{\frac{1}{2}} + z_2(1 - z_1^2)^{\frac{1}{2}}) ,$$

$$\arcsin z_1 + \arcsin z_2 = \pm \pi - \arcsin (z_1(1 - z_2^2)^{\frac{1}{2}} + z_2(1 - z_1^2)^{\frac{1}{2}}) .$$

(Při důkazu si všimněte tohoto: píši-li $u + iv = \arcsin z$, je buďto $|u| < \frac{1}{2}\pi$ nebo $u = \frac{1}{2}\pi$, $v \leqq 0$ nebo $u = -\frac{1}{2}\pi$, $v \geqq 0$ (cvič. 5). Ježto $\cos(u + iv) = \frac{1}{2} \cos u(e^v + e^{-v}) + \frac{1}{2} i \sin u(e^{-v} - e^v)$, odvodíte snadno, že ve vzorci $\cos(u + iv) = \pm (1 - z^2)^{\frac{1}{2}}$ jest vzíti hořejší znamení.)

§ 5. Mocninné řady pro elementární funkce.

Funkce e^z, $\cos z$, $\sin z$ jsme v § 1 přímo definovali mocninnými řadami. Odtud plyne okamžitě též rozvoj funkce a^z:

$$a^z = e^{z \lg a} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lg a)^n}{n!} \cdot z^n \quad (a \neq 0) .$$

Všechny tyto řady mají poloměr konvergence $+\infty$.

Funkce $\lg(1 + z)$ má v kruhu $|z| < 1$ derivaci $\frac{1}{1+z}$.[19]) Ale pro $|z| < 1$ jest (geometrická řada)

$$\frac{1}{1+z} = 1 - z + z^2 - z^3 + \ldots;$$

funkce

$$f(z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots$$

má tedy podle věty 223 pro $|z| < 1$ též derivaci $(1 + z)^{-1}$, takže (viz kap. XI, § 1, příkl. 6) rozdíl $f(z) - \lg(1 + z)$ je pro $|z| < 1$ roven konstantě a dosazením $z = 0$ zjistíme, že tato konstanta je rovna nule. Tedy jest

$$\lg(1 + z) = \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots \quad \text{pro } |z| < 1\,. \tag{58}$$

Obdobně: Funkce $\operatorname{arctg} z$ má pro $|z| < 1$ derivaci

$$\frac{1}{1+z^2} = 1 - z^2 + z^4 - z^6 + z^8 - \ldots$$

a proto jest

$$\operatorname{arctg} z = \frac{z}{1} - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^7}{7} + \ldots \quad \text{pro } |z| < 1\,. \tag{59}$$

(Pravá a levá strana mají touž derivaci, jejich rozdíl je tedy konstantní a dosazení $z = 0$ ukazuje, že tato konstanta je rovna nule.)

Pro $|z| < 1$ jest

$$(1 + z)^a = e^{aw} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{n!} w^n\,, \quad \text{kde } w = \lg(1 + z)\,. \tag{60}$$

Podle (58) a kap. XI, § 4, příkl. 2 lze tedy funkci $(1 + z)^a$ rozvinouti v mocninnou řadu

$$(1 + z)^a = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \quad (\text{pro } |z| < 1)\,, \tag{61}$$

kterou bychom dostali tak, že bychom do řady v (60) dosadili za w

[19]) V žádném bodě tohoto kruhu není totiž $1 + z \leq 0$; totéž platí pro body na kružnici $|z| = 1$, s výjimkou bodu $z = -1$.

řadu (58). Součinitele c_n vypočteme však snadněji takto [když už víme, že rovnice tvaru (61) platí]: Podle (37) je pro $|z| < 1$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}z}(1+z)^a = \frac{a}{1+z} \cdot (1+z)^a ;$$

vynásobíme-li obě strany číslem $1 + z$ a derivujeme-li řadu (61) člen po členu (věta 223), obdržíme pro $|z| < 1$

$$(62) \qquad (1+z) \sum_{n=1}^{\infty} n c_n z^{n-1} = a \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n .$$

Z (61) je zřejmo, že $c_0 = 1$; srovnáním součinitelů při z^n obdržíme z (62) (viz větu 226 o „neurčitých součinitelích") $nc_n + (n+1)\,c_{n+1} = = ac_n$, t. j.

$$c_{n+1} = \frac{a-n}{n+1}\,c_n \quad (n = 0, 1, \ldots) ,$$

takže

$$c_1 = \frac{a}{1}, \quad c_2 = \frac{a(a-1)}{1\,.\,2}, \quad c_3 = \frac{a(a-1)(a-2)}{1\,.\,2\,.\,3}$$

atd. Klademe-li tedy $\binom{a}{0} = 1$,

$$\binom{a}{n} = \frac{a(a-1)\ldots(a-n+1)}{1\,.\,2\,.\,\ldots\,.\,n} \quad \text{pro } n = 1, 2, 3, \ldots ,$$

máme

$$(63) \qquad (1+z)^a = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} z^n \quad \text{pro } |z| < 1 .$$

Píši-li zde $-z^2$ místo z a dosadím $a = -\frac{1}{2}$, obdržím

$$(64) \qquad \frac{1}{(1-z^2)^{\frac{1}{2}}} = 1 + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} z^4 + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6} z^6 + \ldots$$

a odtud [podobně jako u funkce $\lg(1+z)$]

$$(65) \qquad \begin{aligned} \arcsin z = \frac{z}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{z^3}{3} + \frac{1\,.\,3}{2\,.\,4} \cdot \frac{z^5}{5} + \\ + \frac{1\,.\,3\,.\,5}{2\,.\,4\,.\,6} \cdot \frac{z^7}{7} + \ldots \quad \text{pro } |z| < 1 . \end{aligned}$$

(Obě strany v této rovnici mají pro $|z| < 1$ touž derivaci $(1 - z^2)^{-\frac{1}{2}}$ a mají pro $z = 0$ touž hodnotu; liší se tedy obě strany pro $|z| < 1$ pouze o konstantu, jež se rovná nule.)

K řadám právě odvozeným připojím ještě několik poznámek. Budiž dána funkce $f(z)$, jež je pro $|z| < \varrho$ rozvinuta v mocninnou řadu o poloměru konvergence ϱ:

$$(66) \quad f(z) = c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \ldots \quad (c_n = a_n + ib_n;\ a_n, b_n \text{ reálná})\,.$$

Zvolím-li libovolná reálná čísla r, φ, při čemž $|r| < \varrho$, obdržím[20])

$$(67) \qquad f(re^{i\varphi}) = c_0 + c_1 re^{i\varphi} + c_2 r^2 e^{2i\varphi} + \ldots\,;$$

srovnáním reálné a imaginární části obdržím [jsou-li $P(r, \varphi)$, $Q(r, \varphi)$ reálná a imaginární část čísla $f(re^{i\varphi})$] rovnice

$$(68) \qquad \begin{aligned} P(r, \varphi) &= a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (a_n \cos n\varphi - b_n \sin n\varphi)\,, \\ Q(r, \varphi) &= b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (b_n \cos n\varphi + a_n \sin n\varphi).^{21)} \end{aligned}$$

Dosazujeme-li za f různé jednoduché funkce, dospíváme často k zajímavým vzorcům, týkajícím se příslušných funkcí P, Q (to jsou funkce reálných proměnných r, φ). Proveďme to na příklad pro řadu (58). Buďte r, φ reálná, $|r| < 1$, takže pro $z = re^{i\varphi}$ jest $1 + z = (1 + r\cos\varphi) + ir\sin\varphi$, $|1 + z|^2 = 1 + 2r\cos\varphi + r^2$; dále je $\Re(1 + z) = 1 + r\cos\varphi > 0$, takže podle § 2, pozn. 3, **A** jest $\operatorname{ampl}(1 + z) = \operatorname{arctg}\dfrac{r\sin\varphi}{1 + r\cos\varphi}$.[22])

Levá strana v (58) jest $\lg|1 + z| + i \operatorname{ampl}(1 + z)$; srovnáním reálné a imaginární části plynou rovnice

$$(69) \quad \tfrac{1}{2}\lg(1 + 2r\cos\varphi + r^2) = \frac{r\cos\varphi}{1} - \frac{r^2\cos 2\varphi}{2} + \frac{r^3\cos 3\varphi}{3} - \ldots,$$

---

[20]) Dosazuji $z = re^{i\varphi}$; obyčejně jsme v této rovnici předpokládali $r > 0$, ale není důvodu, proč bychom nemohli připouštěti též $r \leq 0$.

[21]) Při pevném r jsou řady vpravo t. zv. trigonometrické řady (vzhledem k proměnné φ). Trigonometrickými řadami se budeme podrobněji zabývati v integrálním počtu.

[22]) Tyto vzorce platí i pro $|r| = 1$, není-li $z = -1$.

$$(70)\quad \operatorname{arctg}\frac{r\sin\varphi}{1+r\cos\varphi}=\frac{r\sin\varphi}{1}-\frac{r^2\sin 2\varphi}{2}+\frac{r^3\sin 3\varphi}{3}-\ldots,$$

platné pro reálná r, φ, při čemž $|r| < 1$.

Ještě jednu poznámku. Je-li poloměr konvergence ϱ řady (66) konečné kladné číslo a je-li řada

$$(71)\quad c_0 + c_1\varrho e^{i\varphi} + c_2\varrho^2 e^{2i\varphi} + \ldots$$

pro určitou reálnou hodnotu φ konvergentní, potom existuje pro tuto hodnotu φ limita

$$(72)\quad \lim_{r\to\varrho-} f(re^{i\varphi})$$

a rovná se číslu (71) (Abelova věta 236). Je-li mimo to funkce $f(z)$ spojitá v bodě $\varrho e^{i\varphi}$, je limita (72) rovna číslu $f(\varrho e^{i\varphi})$ a rovnice (67) — a tedy i rovnice (68) (vzniklé srovnáním reálné a imaginární části) — platí i pro $r = \varrho$ (a pro uvedenou hodnotu φ). Užijme toho pro řadu (58): Položme $z = e^{i\varphi}$ (φ reálné) a nechť není $z = -1$; potom řada (58) je konvergentní, což dokážeme takto. Pro každé přirozené n jest

$$(73)\quad \begin{aligned}&|z - z^2 + z^3 - \ldots + (-1)^{n-1} z^n| = \left|\frac{z-(-1)^n z^{n+1}}{1+z}\right| \leq \\ &\leq \frac{2}{|1+z|} = \frac{2}{|1+e^{i\varphi}|} = \frac{2|e^{-\frac12 i\varphi}|}{|e^{-\frac12 i\varphi}+e^{\frac12 i\varphi}|} = \frac{1}{|\cos\frac12\varphi|}.\end{aligned}$$

Ježto $e^{\varphi i} \neq -1$, není $\varphi = (2k+1)\pi$, t. j. není $\frac12\varphi = (k+\frac12)\pi$, t. j. není $\cos\frac12\varphi = 0$. Posloupnost čísel $z - z^2 + z^3 - \ldots + (-1)^{n-1}z^n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ je tedy omezená; podle věty 44 je tedy řada $\frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \ldots$ konvergentní. Ježto pak funkce $\lg(1+z)$ je v bodě $z = e^{i\varphi}$ (φ reálné, $e^{i\varphi} \neq -1$) spojitá, platí rovnice (58) i v každém bodě kružnice $|z| = 1$, s výjimkou bodu $z = -1$. T. j.: Rovnice (69), (70) platí i pro $r = 1$ a pro každé reálné φ, jež není tvaru $\varphi = (2k+1)\pi$ (k celé). Omezme se na hodnoty $\varphi \in (-\pi, \pi)$. Potom je levá strana v (69) rovna $\frac12\lg(2(1+\cos\varphi)) = \frac12\lg(4\cos^2\frac12\varphi)$; dále je

$\dfrac{\sin\varphi}{1+\cos\varphi} = \dfrac{2\sin\frac12\varphi\cos\frac12\varphi}{2\cos^2\frac12\varphi} = \operatorname{tg}\frac12\varphi$; ježto pak $-\frac12\pi < \frac12\varphi < \frac12\pi$, je levá strana v (70) rovna $\frac{1}{2}\varphi$. Rovnice (69), (70) mají tedy pro $r = 1$ tvar

$$(74)\quad \lg 2 + \lg \cos \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{\cos \varphi}{1} - \frac{\cos 2\varphi}{2} + \frac{\cos 3\varphi}{3} - \dots (-\pi < \varphi < \pi),$$

$$(75)\quad \tfrac{1}{2}\varphi = \frac{\sin \varphi}{1} - \frac{\sin 2\varphi}{2} + \frac{\sin 3\varphi}{3} - \dots \;(-\pi < \varphi < \pi)\,.$$

Je ještě zajímavo, všimnouti si stejnoměrné konvergence řad. Budiž $0 < \varepsilon < \pi$; pro $-\pi + \varepsilon \leqq \varphi \leqq \pi - \varepsilon$ je $\cos \frac{1}{2}\varphi \geqq \cos (\frac{1}{2}\pi - - \frac{1}{2}\varepsilon) = \sin \frac{1}{2}\varepsilon$. Pro každé $n \in \boldsymbol{N}$ a pro každé $\varphi \in \langle -\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon \rangle$ je podle (73) $|e^{i\varphi} - e^{2i\varphi} + \dots + (-1)^{n-1} e^{ni\varphi}| \leqq \dfrac{1}{\sin \frac{1}{2}\varepsilon}$. Užijeme-li teď věty 55 (tvrzení I, s hodnotou třeba $K = (\sin \frac{1}{2}\varepsilon)^{-1}$), vidíme, že řada $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{(-1)^{n-1} e^{ni\varphi}}{n}$ a tedy i řady (74), (75) konvergují stejnoměrně v intervalu $\langle -\pi + \varepsilon, \pi - \varepsilon \rangle$ pro každé $\varepsilon \in (0, \pi)$, t. j. řady (74), (75) konvergují stejnoměrně uvnitř intervalu $(-\pi, \pi)$.

Cvičení

r, φ značí v těchto cvičeních stále reálná čísla.

1. Je-li $r > 1$ nebo $r < -1$, pišme v (69), (70) r^{-1} místo r; vyjde

$$\tfrac{1}{2} \lg(1 + 2r \cos \varphi + r^2) = \lg |r| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \cos n\varphi}{nr^n} \qquad (|r| > 1)\,,$$

$$\operatorname{arctg} \frac{\sin \varphi}{r + \cos \varphi} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} \sin n\varphi}{nr^n} \qquad (|r| > 1)\,.$$

2. Pro $|z| \leqq 1, z \neq \pm 1$ jest $\lg \dfrac{1+z}{1-z} = \lg (1 + z) - \lg (1 - z) + 2k\pi i$; ukažte, že $k = 0$, takže platí

$$\lg \frac{1+z}{1-z} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{2k+1}}{2k+1} \qquad (|z| \leqq 1, \quad z \neq \pm 1)$$

a odtud

$$\tfrac{1}{4} \lg \frac{1 + 2r \cos \varphi + r^2}{1 - 2r \cos \varphi + r^2} = \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k+1} \frac{\cos (2k + 1) \varphi}{2k+1} \qquad (|r| < 1)\,,$$

$$\operatorname{arctg} \frac{2r \sin \varphi}{1 - r^2} = 2 \sum_{k=0}^{\infty} r^{2k+1} \frac{\sin (2k + 1) \varphi}{2k+1} \qquad (|r| < 1)\,.$$

Odtud dále pro $0 < \varphi < \pi$:

$$\tfrac{1}{2} \lg \operatorname{cotg} \tfrac{1}{2}\varphi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos (2k+1)\varphi}{2k+1}, \quad \tfrac{1}{4}\pi = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin (2k+1)\varphi}{2k+1}.$$

Poslední dvě řady jsou stejnoměrně konvergentní uvnitř $(0, \pi)$.

3. Z cvič. 2 plyne rovnice (59), a to nejenom pro $|z| < 1$, nýbrž i pro $|z| = 1$, $z \neq \pm i$.

4. Rovnice (65) platí i pro $|z| = 1$, $z \neq \pm 1$. Ale pro $z = \pm 1$ platí též, viz **DI**, věta 161. Z konvergence této řady pro $z = 1$ plyne ostatně její absolutní a stejnoměrná konvergence v celém kruhu $|z| \leqq 1$.

5. Ke konci § 5 jsme do řady (58) dosadili $|z| = 1$ (t. j. $z = e^{i\varphi}$) a zjistili jsme, že řada je stejnoměrně konvergentní v každé množině, dané podmínkami $|z| = 1$, $|z + 1| \geqq \varepsilon$, ať je $\varepsilon > 0$ jakkoliv malé. Obecněji dokažte: řada (58) je stejnoměrně konvergentní v každé množině, dané podmínkami $|z| \leqq 1$, $|z + 1| \geqq \varepsilon$, ať je $\varepsilon > 0$ jakkoliv malé. Odtud odvoďte obdobné výsledky pro řady (69), (70). U řady (65) je to ještě jednodušší, viz cvič. 4.

6. Z mocninné řady pro $\dfrac{e^{i\alpha}z}{1-z}$ (α reálné) odvoďte

$$\frac{\cos (\varphi + \alpha) - r \cos \alpha}{1 - 2r \cos \varphi + r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \cos (n\varphi + \alpha) \,.\, r^{n-1} \; (|r| < 1),$$

$$\frac{\sin (\varphi + \alpha) - r \sin \alpha}{1 - 2r \cos \varphi + r^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \sin (n\varphi + \alpha) \,.\, r^{n-1} \; (|r| < 1).$$

Z první rovnice pro $\alpha = 0$ ještě odvoďte

$$\frac{1}{2} \frac{1 - r^2}{1 - 2r \cos \varphi + r^2} = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n \cos n\varphi \; (|r| < 1).$$

7. Vyšetřujme ještě řadu (63) pro reálná a. Je-li $a \leqq -1$, je $\left|\binom{a}{n}\right| \geqq 1$ a řada (63) je tedy pro $|z| = 1$ divergentní. Je-li $0 > a > -1$, je $\lim\limits_{n\to\infty} \binom{a}{n} = 0$ a podobně jako u řady (58) zjistíte, že je stejnoměrně konvergentní v každé množině $|z| \leqq 1$, $|z + 1| \geqq \varepsilon (\varepsilon > 0)$;[23]) pro $z = -1$ je však řada divergentní (Raabeovo kriterium, t. j. věta 46). Pro $a \geqq 0$ je řada konvergentní pro $z = -1$ (Raabeovo kriterium) a tedy jest absolutně a stejnoměrně konvergentní pro $|z| \leqq 1$.

---

[23]) Čísla $\binom{a}{n}$ v tomto případě mají od jistého n střídavá znamení, jejich absolutní hodnoty klesají a konvergují k nule (viz cvič. 1 v kap. III, § 7).