Kapitola IX. Záměna proměnných

In: Vojtěch Jarník (author): Diferenciální počet II. (Czech). Praha: Academia, 1984.
pp. 475--503.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402016

KAPITOLA IX.

ZÁMĚNA PROMĚNNÝCH

Stejně jako v kap. VIII vystupují v této kapitole pouze konečná reálná čísla, reálné konečné funkce reálných proměnných a konečné neboli vlastní derivace — nebudu to v dalším opakovati.

V matematice i v jejích aplikacích mají často velký význam výrazy, složené z „nezávisle proměnných", z jedné nebo několika funkcí těchto proměnných a z derivací těchto funkcí. Na př. jsou velmi důležité výrazy

$$\text{(1)} \qquad \sum_{i=1}^{r} \left(\frac{\partial y}{\partial x_i}\right)^2, \quad \sum_{i=1}^{r} \frac{\partial^2 y}{\partial x_i^2}$$

(y je funkce r proměnných). Nebo: hlavním úkolem theorie diferenciálních rovnic je studium funkcí, které splňují danou diferenciální rovnici. Při tom na př. „obyčejnou diferenciální rovnicí n-tého řádu" rozumíme asi toto: Je dána nějaká funkce $n + 2$ proměnných

$$F(x, y, y', \ldots, y^{(n)})\,;$$

hledají se pak ony funkce (proměnné x) $y = y(x)$, které pro všechna x (nebo aspoň všechna x jistého intervalu) splňují rovnici $F(x, y(x), y'(x), \ldots, y^{(n)}(x)) = 0$, kde $y^{(k)}(x)$ znamená k-tou derivaci funkce $y(x)$. Vedle těchto „obyčejných" rovnic se studují také t. zv. parciální diferenciální rovnice, kde „neznámá funkce" y závisí na několika proměnných, na př. $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x_1^2} - \dfrac{\partial y}{\partial x_2} = 0$ (y je funkcí x_1, x_2), a dále diferenciální rovnice, v nichž se vyskytuje několik neznámých funkcí (obyčejně bývá pak dán systém několika diferenciálních rovnic, kterým mají neznámé funkce vyhovovati).

Ve všech těchto případech je často vhodno, zavésti místo nezávisle proměnných $x_1, \ldots, x_r$ nové nezávisle proměnné $\xi_1, \ldots, \xi_r$ rovnicemi tvaru

$$\text{(2)} \qquad x_i = \varphi_i(\xi_1, \ldots, \xi_r) \quad (i = 1, \ldots, r)\,,$$

načež se na př. y v (1) jeví funkcí proměnných $\xi_1, \ldots, \xi_r$ (ve tvaru

„složené funkce“) a jde o to, vyjádřiti $\frac{\partial y}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_k}, \ldots$ pomocí derivací $\frac{\partial y}{\partial \xi_i}, \frac{\partial^2 y}{\partial \xi_i \partial \xi_k}, \ldots$ a pomocí derivací „transformačních funkcí“ $\varphi_1, \ldots, \varphi_r$. Tímto úkolem se budeme zabývati v § 1. Někdy zavádíme současně i místo „závisle proměnné“ y novou „závisle proměnnou“ η a jde potom o vyjádření derivací $\frac{\partial y}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 y}{\partial x_i \partial x_k}, \ldots$ derivacemi $\frac{\partial \eta}{\partial \xi_i}, \frac{\partial^2 \eta}{\partial \xi_i \partial \xi_k}, \ldots$ Tomuto složitějšímu úkolu je věnován § 2.

Jde tedy v této kapitole o úkol rázu především početně technického; hlavním jejím cílem je podati návod, jak v jednotlivých případech postupovati. Proto nepodávám výsledky této kapitoly jako samostatně formulované věty; ale při tom problém vždy přesně formuluji a vytýkám také předpoklady, které zaručují oprávněnost prováděných úkonů. Jak čtenář uvidí, plyne oprávněnost jednotlivých početních operací ihned z vět o záměnnosti parciálních derivací, o totálních diferenciálech a parciálních derivacích složených funkcí a především z vět 210—213 o implicitních funkcích.

§ 1. Zavádění nových nezávisle proměnných.

I. Funkce jedné proměnné. Začněme nejjednodušším případem: funkcemi jedné proměnné. Pišme $y = f(x)$ a zaveďme sem „novou proměnnou“ t rovnicí $x = \varphi(t)$, takže se nám y jeví funkcí proměnné t, totiž $y = f(\varphi(t)) = g(t)$. Nechť φ má v (α, β) derivaci od nuly různou (takže podle věty 82 má φ' stále totéž znamení, a tedy φ je ryze monotonní v (α, β)). Funkce φ zobrazuje (α, β) na jistý interval (a, b).

O funkcích φ, f předpokládejme, že mají pro vyšetřované hodnoty t, x[1]) derivace až do toho řádu, do kterého je budeme počítati. Budeme psáti

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \ldots \quad \text{místo } f'(x), f''(x), \ldots, \tag{3}$$

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}, \ldots \quad \text{místo } g'(t), g''(t), \ldots; \tag{4}$$

[1]) Při tom se omezujeme na $t \in (\alpha, \beta)$, $x \in (a, b)$.

při tom x bude vždy značiti číslo $\varphi(t)$. Vyjádření derivací (4) derivacemi (3) obdržíme prostě opakovaným použitím pravidla o derivování složených funkcí:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\varphi'(t)\,, \quad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}(\varphi'(t))^2 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\varphi''(t), \ldots \tag{5}$$

(Chceme-li zde vpravo míti jen proměnnou x, musíme dosaditi $t = \psi(x)$, kde ψ je funkce inversní k φ — ovšem „sestrojení" funkce ψ může býti úkol velmi složitý, i když funkce φ je jednoduchá.)

Chceme-li naopak vyjádřiti derivace (3) derivacemi (4), můžeme z (5) postupně počítati $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \ldots$ Ale můžeme postupovati ještě jiným způsobem, který nyní vyložím.

Abychom odvodili obecné pravidlo, vezmeme libovolnou funkci $Y = F(x)$, mající v (a, b) derivaci; dosadíme-li sem $x = \varphi(t)$, máme $Y = F(\varphi(t)) = G(t)$. Pravidlo o derivování složených funkcí dává $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} \cdot \varphi'(t)$ a tedy

$$\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\varphi'(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} \tag{6}$$

(kdež ovšem $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}x} = F'(x)$, $\frac{\mathrm{d}Y}{\mathrm{d}t} = G'(t)$). Základní rovnice (6) řeší již náš úkol. Položme napřed $Y = y$, t. j. $F = f$; vyjde

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\varphi'(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,. \tag{7}$$

Vezměme nyní za Y funkci $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ (t. j. $f'(x)$); podle (6) dostanu $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)$ takto: vyjádřím $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$ jakožto funkci t (což je provedeno v (7) vpravo), derivuji tuto funkci podle t a dělím číslem $\varphi'(t)$; obdržím

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{\varphi'(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{\varphi'(t)} \cdot \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right) = -\frac{\varphi''(t)}{(\varphi'(t))^3}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{(\varphi'(t))^2}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}\,. \tag{8}$$

Vezmu nyní za Y funkci $\frac{d^2y}{dx^2}$; užitím rovnice (8) obdržím z (6)

$$\frac{d^3y}{dx^3} = \frac{1}{\varphi'}\left(-\frac{\varphi'''}{(\varphi')^3}\frac{dy}{dt} + \frac{3(\varphi'')^2}{(\varphi')^4}\frac{dy}{dt} - \frac{3\varphi''}{(\varphi')^3}\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{(\varphi')^2}\frac{d^3y}{dt^3}\right).$$

Obdobně bych dostal $\frac{d^4y}{dx^4}$ atd. Jest ovšem sotva vhodno, užívati ve speciálních případech těchto vzorců dosti složitých; je lépe, uvědomiti si jenom princip: Pravidlo o derivování složených funkcí dává $\frac{dY}{dt} = \frac{dY}{dx} \cdot \varphi'(t)$; odtud vypočtu $\frac{dY}{dx}$ a rovnici, kterou tak dostanu, aplikuji tak, že místo Y kladu po řadě $y, \frac{dy}{dx}, \frac{d^2y}{dx^2}, \ldots$ Podobného principu budeme užívati i v ostatních složitějších případech v této kapitole.

Cvičení

1. $y = f(x)$, $x = t + \sin t$. Postupným výpočtem dojděte až k vzorci (pro jednoduchost kladu $\sigma(t) = (1 + \cos t)^{-1}$; které hodnoty t jsou vyloučeny?)

$$\frac{d^4y}{dx^4} = \sin t\,(14 - 6\cos^2 t + 8\cos t)\,\sigma^7(t)\,\frac{dy}{dt} +$$

$$+ (15 - 11\cos^2 t + 4\cos t)\,\sigma^6(t)\,\frac{d^2y}{dt^2} + 6\sin t\,.\,\sigma^5(t)\,\frac{d^3y}{dt^3} +$$

$$+ \sigma^4(t)\,\frac{d^4y}{dt^4}.$$

2. Nechť funkce $\varphi(t)$, $\chi(t)$ mají v (α, β) derivace 2. řádu; nechť φ' je v tomto intervalu stále kladná nebo stále záporná, takže funkce φ zobrazuje interval (α, β) prostě na jistý interval (a, b). Rovnice $x = \varphi(t)$ znamená pro $t \in (\alpha, \beta)$, $x \in (a, b)$ totéž jako $t = \psi(x)$, kde ψ je funkce inversní k φ. Vyšetřujme množinu K všech bodů $[x, y]$, k nimž existuje $t \in (\alpha, \beta)$ takové, že $x = \varphi(t)$, $y = \chi(t)$ (říkává se, že tyto dvě rovnice dávají „parametrické vyjádření křivky K"). První z těchto rovnic dává $t = \psi(x)$ $(a < x < b)$ a druhá potom $y = \chi(\psi(x))$. Množina K je tedy množina oněch bodů $[x, y]$, pro něž je $a < x < b$, $y = f(x)$; při tom $f(x) = \chi(\psi(x))$. Označujme derivace podle t čárkami: $x' = \varphi'(t)$, $y' = \chi'(t)$, $x'' = \varphi''(t)$ atd.; z rovnic odvozených v textu plyne ihned

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'}{x'}; \quad \frac{\left(1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|} = \frac{(x'^2 + y'^2)^{\frac{3}{2}}}{|x'y'' - y'x''|}$$

(směrnice tečny a poloměr křivosti křivky K při parametrickém vyjádření; píši ovšem, jak jest obvyklé, x'^2 místo $(x')^2$ atd.).

3. Ptejme se, které funkce $y(x)$ vyhovují pro $x > 0$ diferenciální rovnici $x\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = 0$. Dosadím-li $x = \mathrm{e}^t$, jeví se y funkcí t, a levá strana rovnice jest $\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2}$. Všechna řešení jsou tedy dána vzorcem $y = at + b = a \lg x + b$ (a, b libovolné konstanty).

II. Funkce několika proměnných. Do funkce $z = f(x_1, \ldots, x_r)$ zavedeme nové proměnné $\xi_1, \ldots, \xi_r$ rovnicemi

(9) $$x_i = \varphi_i(\xi_1, \ldots, \xi_r) \quad (i = 1, \ldots, r);$$

tím přejde z ve funkci

(10) $$g(\xi_1, \ldots, \xi_r) = f(\varphi_1(\xi), \ldots, \varphi_r(\xi)).$$

Značme

(11) $$\frac{\partial z}{\partial x_i}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_i\, \partial x_k}, \ldots$$

derivace funkce f a značme

(12) $$\frac{\partial z}{\partial \xi_i}, \frac{\partial^2 z}{\partial \xi_i\, \partial \xi_k}, \ldots$$

derivace funkce g. Za předpokladů věty 189, 198 můžeme počítati

(13) $$\frac{\partial z}{\partial \xi_i} = \sum_{m=1}^{r} \frac{\partial z}{\partial x_m} \frac{\partial \varphi_m}{\partial \xi_i},$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi_i\, \partial \xi_k} = \sum_{m,n=1}^{r} \frac{\partial^2 z}{\partial x_m\, \partial x_n} \frac{\partial \varphi_m}{\partial \xi_i} \frac{\partial \varphi_n}{\partial \xi_k} + \sum_{m=1}^{r} \frac{\partial z}{\partial x_m} \frac{\partial^2 \varphi_m}{\partial \xi_i\, \partial \xi_k}$$

atd.

Řešme nyní obrácený úkol: vyjádřiti derivace (11) derivacemi (12) (a derivacemi „transformačních funkcí“ φ_i). Napřed však precisujeme předpoklady. Předpokládejme, že funkce φ_j mají spojité parciální derivace[2]) (až do toho řádu, který budeme potřebovati) v jistém okolí bodu $\xi_0 = [\xi_{10}, \ldots, \xi_{r0}]$ a že funkce f má spojité parciální derivace[2]) (týchž řádů) v jistém okolí bodu $x_0 = [x_{10}, \ldots, x_{r0}]$, kde $x_{j0} = \varphi_j(\xi_0)$; v bodě ξ_0 budiž

(14) $$\frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)}{D(\xi_1, \ldots, \xi_r)} \neq 0 .$$

Zvolíme-li dosti malé okolí M bodu ξ_0, platí: v celém okolí M platí (14), rovnicemi (9) je dáno prosté zobrazení množiny M na jisté okolí N bodu x_0 a v množině N má f spojité parciální derivace oněch řádů, o nichž jsme mluvili. Při řešení našeho úkolu se omezme na body $\xi = [\xi_1, \ldots, \xi_r]$ množiny M, t. j. na body $x = [x_1, \ldots, x_r]$ množiny N; bod x je určen bodem ξ pomocí rovnic (9).

Je-li $Z = F(x_1, \ldots, x_r)$ libovolná funkce, mající v N totální diferenciál, a dosadíme-li sem za $x_1, \ldots, x_r$ podle (9), dostáváme funkci

(15) $$G(\xi_1, \ldots, \xi_r) = F(\varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_r), \ldots, \varphi_r(\xi_1, \ldots, \xi_r))$$

a pravidlo o derivování složených funkcí dává

(16) $$\frac{\partial Z}{\partial \xi_j} = \sum_{k=1}^{r} \frac{\partial Z}{\partial x_k} \cdot \frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi_j} \quad (j = 1, \ldots, r) ;$$

při tom ovšem $\frac{\partial Z}{\partial x_k}$ značí $\frac{\partial F}{\partial x_k}$, kdežto $\frac{\partial Z}{\partial \xi_j}$ značí $\frac{\partial G}{\partial \xi_j}$. Z r rovnic (16) vypočteme r neznámých $\frac{\partial Z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial Z}{\partial x_r}$:

(17) $$\frac{\partial Z}{\partial x_k} = \left(\frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_r)}{D(\xi_1, \ldots, \xi_r)}\right)^{-1} \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial Z}{\partial \xi_j} T_{kj}(\xi_1, \ldots, \xi_r) ,$$

kde T_{kj} je doplněk prvku $\frac{\partial \varphi_k}{\partial \xi_j}$ v determinantu (14). Položím-li v (17) napřed $Z = z$, dostanu vzorec pro $\frac{\partial z}{\partial x_k}$; aplikuji-li vzorec (17) pro $Z = \frac{\partial z}{\partial x_l}$, dostanu $\frac{\partial^2 z}{\partial x_l \, \partial x_k}$ atd.

---

[2]) Tyto předpoklady by se daly poněkud zobecniti.

Proveďme několik prvních kroků pro $r = 2$; abych ušetřil indexy, píši $z = f(x, y)$, $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$. Je-li Z funkce x, y, máme

$$(18) \qquad \begin{aligned} \frac{\partial Z}{\partial u} &= \frac{\partial Z}{\partial x}\varphi_u + \frac{\partial Z}{\partial y}\psi_u, \\ \frac{\partial Z}{\partial v} &= \frac{\partial Z}{\partial x}\varphi_v + \frac{\partial Z}{\partial y}\psi_v \end{aligned} \qquad A = \begin{vmatrix} \varphi_u & \psi_u \\ \varphi_v & \psi_v \end{vmatrix} \neq 0$$

$\left(\text{píši } \varphi_u = \frac{\partial \varphi}{\partial u},\ \varphi_{uv} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial u\, \partial v} \text{ atd.}\right)$ a odtud

$$(19) \qquad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial Z}{\partial u}\psi_v - \frac{\partial Z}{\partial v}\psi_u\right), \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{1}{A}\left(-\frac{\partial Z}{\partial u}\varphi_v + \frac{\partial Z}{\partial v}\varphi_u\right).$$

Odtud předně (pro $Z = z$)

$$(20) \qquad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial z}{\partial u}\psi_v - \frac{\partial z}{\partial v}\psi_u\right), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{A}\left(-\frac{\partial z}{\partial u}\varphi_v + \frac{\partial z}{\partial v}\varphi_u\right).$$

Chci-li počítati dále na př. $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$, položím $Z = \frac{\partial z}{\partial x}$, takže $Z = C$, kde C je pravá strana první rovnice (20); z druhé rovnice (19) potom plyne

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{1}{A}\left(-\frac{\partial C}{\partial u}\varphi_v + \frac{\partial C}{\partial v}\varphi_u\right).$$

Provedeme-li parciální derivaci vpravo, obdržíme

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} = \frac{1}{A}\left(-\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{A}\psi_v\right)\cdot\varphi_v + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{A}\psi_v\right)\varphi_u\right)\frac{\partial z}{\partial u} + \\ + \frac{1}{A}\left(\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{A}\psi_u\right)\varphi_v - \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{A}\psi_u\right)\varphi_u\right)\frac{\partial z}{\partial v} - \\ - \frac{1}{A^2}\varphi_v\psi_v\frac{\partial^2 z}{\partial u^2} + \frac{1}{A^2}(\varphi_v\psi_u + \psi_v\varphi_u)\frac{\partial^2 z}{\partial u\, \partial v} - \frac{1}{A^2}\varphi_u\psi_u\frac{\partial^2 z}{\partial v^2}. \end{aligned}$$

Jest ovšem

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{A}\psi_v\right) = \frac{1}{A}\psi_{uv} - \frac{\varphi_{uu}\psi_v + \varphi_u\psi_{uv} - \psi_u\varphi_{uv} - \varphi_v\psi_{uu}}{A^2}\psi_v$$

a podobně dále. Tím je vypočteno $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$ pomocí derivací $\frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial v}, \frac{\partial \varphi}{\partial u}, \frac{\partial \varphi}{\partial v}, \frac{\partial \psi}{\partial u}, \frac{\partial \psi}{\partial v}, \frac{\partial^2 z}{\partial u^2}, \ldots$ (až do 2. řádu). Podobně se obdrží $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$ a postupně též parciální derivace vyšších řádů. Ale obecné vzorce se již v 2. řádu značně komplikují, jak vidíte; ve speciálních případech bývá proto výhodnější, postupovati přímým počtem ze vzorců (18), jak ukážeme na příkladě.

Příklad 1. Do funkce $z = f(x, y)$ zavedu nové proměnné ϱ, α rovnicemi $x = \varrho \cos \alpha$, $y = \varrho \sin \alpha$ (zavedení polárních souřadnic). Zde jde o úlohu typu, se kterým se velmi často setkáváme: transformační rovnice (9) jsou dány speciálním způsobem (zde $x = \varrho \cos \alpha$, $y = \varrho \sin \alpha$), kdežto funkce f zůstává „obecná“. Jak jsme řekli, budeme postupovati z rovnic (18), které zde mají tvar

$$(21)\quad \frac{\partial Z}{\partial \varrho} = \frac{\partial Z}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial Z}{\partial y} \sin \alpha\,, \quad \frac{\partial Z}{\partial \alpha} = -\frac{\partial Z}{\partial x}\varrho \sin \alpha + \frac{\partial Z}{\partial y}\varrho \cos \alpha$$

a odtud

$$(22)\quad \frac{\partial Z}{\partial x} = \frac{\partial Z}{\partial \varrho} \cos \alpha - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial Z}{\partial \alpha} \sin \alpha\,, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = \frac{\partial Z}{\partial \varrho} \sin \alpha + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial Z}{\partial \alpha} \cos \alpha\,.$$

Odtud pro $Z = z$

$$(23)\quad \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial \varrho} \cos \alpha - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial z}{\partial \alpha} \sin \alpha\,, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial \varrho} \sin \alpha + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial z}{\partial \alpha} \cos \alpha\,;$$

odtud na př. důležitý vzorec

$$(24)\qquad \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial z}{\partial \varrho}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial z}{\partial \alpha}\right)^2.$$

Z (22), (23) dostáváme dále

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = \cos \alpha \frac{\partial}{\partial \varrho}\left(\frac{\partial z}{\partial \varrho} \cos \alpha - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial z}{\partial \alpha} \sin \alpha\right) -$$

$$- \frac{1}{\varrho} \sin \alpha \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{\partial z}{\partial \varrho} \cos \alpha - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial z}{\partial \alpha} \sin \alpha\right) =$$

$$(25)\qquad = \frac{\partial^2 z}{\partial \varrho^2} \cos^2 \alpha - \frac{2}{\varrho}\frac{\partial^2 z}{\partial \varrho\, \partial \alpha} \cos \alpha \sin \alpha + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial \alpha^2} \sin^2 \alpha +$$

$$+ \frac{1}{\varrho}\frac{\partial z}{\partial \varrho} \sin^2 \alpha + \frac{2}{\varrho^2}\frac{\partial z}{\partial \alpha} \sin \alpha \cos \alpha$$

a obdobně

$$(26)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial \varrho^2}\cos\alpha\sin\alpha + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial^2 z}{\partial\varrho\,\partial\alpha}\cos 2\alpha - \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha^2}\sin\alpha\cos\alpha - {}$$
$$- \frac{1}{\varrho}\frac{\partial z}{\partial\varrho}\cos\alpha\sin\alpha - \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial z}{\partial\alpha}\cos 2\alpha\,,$$

$$(27)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial\varrho^2}\sin^2\alpha + \frac{2}{\varrho}\frac{\partial^2 z}{\partial\varrho\,\partial\alpha}\sin\alpha\cos\alpha + {}$$
$$+ \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha^2}\cos^2\alpha + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial z}{\partial\varrho}\cos^2\alpha - \frac{2}{\varrho^2}\frac{\partial z}{\partial\alpha}\sin\alpha\cos\alpha\,.$$

Odtud plyne na př. důležitý vzorec

$$(28)\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 z}{\partial\varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2}\frac{\partial^2 z}{\partial\alpha^2} + \frac{1}{\varrho}\frac{\partial z}{\partial\varrho}\,.$$

Poznámka 1. Při výpočtu derivací (11) bychom mohli postupovati též jinak: víme, že platí rovnice (13); počítejme z nich postupně derivace (11) (napřed 1. řádu, potom 2. řádu atd.). Jestliže při výpočtu zjistíme, že tyto rovnice určují derivace (11) jednoznačně, máme zaručeno, že dostaneme správný výsledek. Ježto máme řešiti napřed r lineárních rovnic pro neznámé $\frac{\partial z}{\partial x_m}$ $(m = 1, \ldots, r)$, potom r^2 lineárních rovnic pro neznámé $\frac{\partial^2 z}{\partial x_m\,\partial x_n}$ $(m, n = 1, \ldots, r)$ atd., jde o to, zda determinanty těchto soustav jsou různé od nuly. Nebudu to zde dokazovati; čtenář však může tohoto postupu používati, pokud nenarazí na soustavu, mající více než jedno řešení (že aspoň jedno řešení existuje, víme: neboť platí (13)).

III. Methoda diferenciálů. Problém, řešený v II (problém z I je jeho speciálním případem $r = 1$) lze řešiti též užitím totálních diferenciálů. Aby nebylo třeba psáti mnoho indexů, omezme se na případ $r = 2$. Budiž $z = f(x, y)$; dosazením $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ dostaneme $z = F(u, v)$. Jest

$$(29)\quad \mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y$$

(při tom dx, dy, dz značí diferenciály funkcí φ, ψ, F; $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \ldots$

značí derivace funkcí φ, ψ, F, kdežto $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ značí derivace funkce f). Vedle (29) platí

$$(30) \qquad dx = \frac{\partial x}{\partial u}\,du + \frac{\partial x}{\partial v}\,dv\,, \quad dy = \frac{\partial y}{\partial u}\,du + \frac{\partial y}{\partial v}\,dv\,,$$

$$dz = \frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv$$

Dosadíme-li z (30) do (29), obdržíme rovnici, platnou pro všechny hodnoty du, dv:

$$(31) \qquad \frac{\partial z}{\partial u}\,du + \frac{\partial z}{\partial v}\,dv = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u}\right)du + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v}\right)dv\,.$$

Tedy koeficienty při du (a rovněž při dv) na obou stranách si musí býti rovny; to dává dvě rovnice, z nichž lze vypočísti $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ (neboť $\frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial y}{\partial v} - \frac{\partial x}{\partial v}\frac{\partial y}{\partial u} \neq 0$ podle předpokladu). Diferencováním rovnice (29) plyne dále

$$(32) \quad d^2z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,dx^2 + 2\,\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,dx\,dy + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,dy^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\,d^2x + \frac{\partial z}{\partial y}\,d^2y\,.$$

Dosaďme sem za dx, dy, dz podle (30) a za d^2x, d^2y, d^2z podle rovnic

$$(33) \quad d^2x = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\,du^2 + 2\,\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\,du\,dv + \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\,dv^2\,,\ d^2y = \ldots,\ d^2z = \ldots;$$

dostaneme z (32) vlevo i vpravo kvadratickou formu v du, dv; rovnice pak platí pro všechna du, dv, takže koeficienty při du^2, du, dv, dv^2 vlevo musí být rovny koeficientům vpravo. To dává celkem tři lineární rovnice pro $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$;[3]) mají-li tyto rovnice jen jedno řešení (a dá se dokázat, že tomu tak jest),[4]) lze odtud tyto tři derivace vypočísti. Tak můžeme postupovati k vyšším derivacím, pokud snad

---

[3]) Napište tyto rovnice! Při tom ovšem $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$ považuji za známé — ty byly již vypočteny.

[4]) Vypočtěte determinant soustavy těchto tří rovnic!

nepřijdeme k systému rovnic, který má více než jedno řešení (nebudu dokazovati, že tento nepříjemný případ nemůže nastati).

Poznámka 2. Může se státi, že vztah $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ je dán „implicite" rovnicemi tvaru

$$\Phi(x, y, u, v) = 0\,, \quad \Psi(x, y, u, v) = 0\,.$$

Potom ovšem první dva vzorce (30) pro dx, dy je nutno odvodit z rovnic

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial \Phi}{\partial y}\,\mathrm{d}y + \frac{\partial \Phi}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial \Phi}{\partial v}\,\mathrm{d}v = 0\,, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \ldots + \frac{\partial \Psi}{\partial v}\,\mathrm{d}v = 0\,;$$

dalším diferencováním bychom dospěli k rovnicím pro d^2x, d^2y, z nichž bychom vypočítali d^2x, d^2y a tím bychom dostali první dvě rovnice z (33) atd. Nebudu uváděti podmínky pro Φ, Ψ, které plynou ihned z věty 210.

Čtenář učiní dobře, propočítá-li si následující cvičení jak užitím methody, spočívající na rovnici (17), tak podle pozn. 1 v II a konečně rovněž užitím methody diferenciálů. Totéž platí o cvičeních k § 2.

Poznámka 3. Značíme-li na př. $z = f(x, y)$ a dosadíme-li sem $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$, dostáváme $z = F(u, v)$, kde $F(u, v) = f(\varphi(u, v), \psi(u, v))$. Užívali jsme většinou znaků $\frac{\partial z}{\partial x}$ místo $\frac{\partial f}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial u}$ místo $\frac{\partial F}{\partial u}$. Při tom jest označení v celé této kapitole prováděno opatrně a k tomu ještě připojuji vysvětlivky, aby nevznikl zmatek; že zmatek může v některých případech vzniknout, ukázali jsme názorně v kap. VII, § 3, pozn. 4. Vezměme ještě jeden příklad. Mějme grammolekulu nějakého plynu, který má objem V, tlak p, absolutní teplotu T. Budiž F nějaká fysikální veličina, která závisí jen na stavu plynu, t. j. na p, V, T. Ale mezi p, V, T je vztah, t. zv. stavojevná rovnice; u t. zv. dokonalých plynů je to rovnice $pV = RT$, kde R je jistá konstanta. Z této rovnice je vidět, že stav plynu je určen hodnotami p, T (ty již určují hodnotu V) nebo na př. hodnotami V, T. Lze tedy psáti $F = f(p, T)$, ale také $F = f(RTV^{-1}, T) = g(V, T)$. Ve fysice se často určitá fysikální veličina označuje týmž písmenem bez ohledu na to, kterými proměnnými je vyjádřena. Znak $\frac{\partial F}{\partial T}$ je nyní nejasný: může znaménati $\frac{\partial f}{\partial T}$ nebo $\frac{\partial g}{\partial T}$. V thermodynamice se obyčejně píše $\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_p$ („derivace podle T při konstantním tlaku") místo $\frac{\partial f}{\partial T}$ a píše se $\left(\frac{\partial F}{\partial T}\right)_V$ („derivace podle T při konstantním objemu") místo $\frac{\partial g}{\partial T}$ a pod.

Poznámka 4. V jednotlivých případech nevypisuji již obyčejně podmínky, nutné pro platnost příslušného výpočtu. Tak v příkl. 1 je nutno vyloučiti bod $[x, y] = [0, 0]$; v okolí každého jiného bodu lze vzorců z příkl. 1 užíti, vedeme-li vhodný „řez", neprocházející tímto bodem (viz cvič. 6 v kap. VIII, § 2 a k němu příslušnou pozn. [18a]) pod čarou).

Cvičení

Budiž $u = f(x_1, \ldots, x_s)$; výrazy $\sum_{j=1}^{s} \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2$, $\sum_{j=1}^{s} \frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2}$ (t. zv. první a druhý diferenciální parametr) jsou důležité v mnohých aplikacích. Již v příkl. 1 jsme vypočetli, več se tyto výrazy změní (pro $s = 2$), zavedeme-li do $u = f(x, y)$ nové proměnné ϱ, α rovnicemi $x = \varrho \cos \alpha$, $y = \varrho \sin \alpha$. Nyní provedeme několik dalších příkladů.

4. Zavedu-li do $u = f(x, y, z)$ proměnné ϱ, φ, ϑ rovnicemi $x = \varrho \cos \varphi \cos \vartheta$, $y = \varrho \sin \varphi \cos \vartheta$, $z = \varrho \sin \vartheta$, jest

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial \varrho}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2 \cos^2 \vartheta} \left(\frac{\partial u}{\partial \varphi}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2} \left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta}\right)^2,$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \varrho^2} + \frac{1}{\varrho^2 \cos^2 \vartheta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{\varrho^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} + \frac{2}{\varrho} \frac{\partial u}{\partial \varrho} - \frac{\operatorname{tg} \vartheta}{\varrho^2} \frac{\partial u}{\partial \vartheta}.$$

Derivace vlevo jsou ovšem derivace funkce f, derivace vpravo jsou derivace funkce $F(\varrho, \varphi, \vartheta) = f(\varrho \cos \varphi \cos \vartheta, \varrho \sin \varphi \cos \vartheta, \varrho \sin \vartheta)$; podobně v dalších cvičeních.

5. Výsledek cvič. 4 odvoďte dvojím užitím výsledku z příkl. 1 tím, že substituci rozložíte: kladte napřed $x = \varrho_1 \cos \varphi$, $y = \varrho_1 \sin \varphi$, $z = z$ a potom $\varrho_1 = \varrho \cos \vartheta$, $z = \varrho \sin \vartheta$, $\varphi = \varphi$.

6. Zavedete-li do $u = f(x_1, \ldots, x_n)$ proměnné ϱ, $\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-1}$ jako v kap. VIII, § 2, cvič. 8, obdržíte

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x_1}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{\partial u}{\partial x_n}\right)^2 = \left(\frac{\partial u}{\partial \varrho}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi_{n-1}}\right)^2 + \frac{1}{\varrho^2 \cos^2 \varphi_{n-1}}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi_{n-2}}\right)^2 +$$
$$+ \ldots + \frac{1}{\varrho^2 \cos^2 \varphi_{n-1} \cos^2 \varphi_{n-2} \ldots \cos^2 \varphi_2}\left(\frac{\partial u}{\partial \varphi_1}\right)^2$$

(důkaz indukcí podle n; užijte rozkladu podobného jako v cvič. 5: druhá substituce bude $\varrho_1 = \varrho \cos \varphi_{n-1}$, $x_n = \varrho \sin \varphi_{n-1}$).

7. Do $u = u(x_1, \ldots, x_s)$ zavedeme proměnné $y_1, \ldots, y_s$ ortogonální substitucí $y = F(x)$, jak bylo vylíčeno v kap. VIII, § 2, cvič. 11, 12. Užívajíce označení a výsledků těchto cvičení, obdržíme (proveďte vše podrobně!)

$$\frac{\partial u}{\partial x_k} = \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial u}{\partial y_j} a_{jk},$$

načež

$$\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right)^2 = \sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial u}{\partial y_k}\right)^2 h_k^2 .$$

Dále

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \sum_{j,l=1}^{s} \frac{\partial^2 u}{\partial y_j\, \partial y_l} a_{jk} a_{lk} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial u}{\partial y_j} \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_k},$$

takže

$$I = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \sum_{j=1}^{s} h_j^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2} + \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial u}{\partial y_j} \varrho_j,$$

$$\varrho_j = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial a_{jk}}{\partial x_k} = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial (h_j^2 b_{kj})}{\partial x_k} = \sum_{k,l=1}^{s} \frac{\partial (h_j^2 b_{kj})}{\partial y_l} \frac{\partial y_l}{\partial x_k}.$$

Jest

$$\frac{\partial b_{kj}}{\partial y_l} = \frac{\partial^2 \varphi_k}{\partial y_l\, \partial y_j} = \frac{\partial b_{kl}}{\partial y_j},$$

takže

$$\varrho_j = \sum_{k,l=1}^{s} \frac{\partial (h_j^2)}{\partial y_l} b_{kj} a_{lk} + \sum_{k,l=1}^{s} h_j^2 \frac{\partial b_{kl}}{\partial y_j} a_{lk} = \frac{\partial (h_j^2)}{\partial y_j} + \frac{h_j^2}{Q} \sum_{k,l=1}^{s} \frac{\partial b_{kl}}{\partial y_j} \beta_{kl}.$$

Ale poslední součet je zřejmě $\dfrac{\partial Q}{\partial y_j}$, takže

$$\varrho_j = \frac{1}{Q} \frac{\partial}{\partial y_j} (h_j^2 Q), \quad I = \frac{1}{Q} \sum_{j=1}^{s} \frac{\partial}{\partial y_j}\left(h_j^2 Q \frac{\partial u}{\partial y_j}\right).$$

Tím je odvozen i druhý hledaný vzorec; h_j^2 jsou rovnicemi (85) v kap. VIII vyjádřena jako funkce $y_1, \ldots, y_s$ a dále je $Q = \pm 1 : (h_1 h_2 \ldots h_s)$; vezmeme-li snad nesprávné znamení, nestane se ve výrazu I nic — proč? Postup, jehož jsme zde užili, byl trochu jiný než náš obecný předpis; to je pochopitelno: ve speciálních početních problémech vede často určitý obrat rychleji k cíli než obecný předpis.

8. Pro ortogonální substituci z cvič. 10, 15 v kap. VIII, § 2 (eliptické souřadnice) obdržíte z cvič. 7

$$\sum_{j=1}^{r}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 = 4\sum_{j=1}^{r}\frac{g(\lambda_j)}{f'(\lambda_j)}\left(\frac{\partial u}{\partial \lambda_j}\right)^2, \quad Q\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = 4\sum_{j=1}^{r}\frac{\partial}{\partial \lambda_j}\left(Q\,\frac{g(\lambda_j)}{f'(\lambda_j)}\,\frac{\partial u}{\partial \lambda_j}\right),$$

$$Q^2 = \frac{(-1)^{\frac{1}{2}r(r-1)}}{2^{2r}g(\lambda_1)\dots g(\lambda_r)}\prod_{1\le k<j\le r}(\lambda_j-\lambda_k)^2 .$$

9. Výsledek cvič. 4 odvoďte znovu ze vzorců cvič. 7.

V dalších cvičeních budiž

$$\text{(33a)}\qquad \begin{aligned} x_1 &= b_{11}y_1 + \dots + b_{1s}y_s \\ x_2 &= b_{21}y_1 + \dots + b_{2s}y_s \\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ x_s &= b_{s1}y_1 + \dots + b_{ss}y_s \end{aligned} \qquad \Delta = \begin{vmatrix} b_{11}, \dots, b_{1s} \\ \dots\dots\dots \\ b_{s1}, \dots, b_{ss} \end{vmatrix} \neq 0$$

(b_{jk} konstanty). Pokud vystupují v dalším proměnné ξ_j, η_j, buďte vázány týmiž vztahy: $\xi_j = \sum_{k=1}^{s} b_{jk}\eta_k$.

10. Jsou-li $z_1, \dots, z_s$ funkce proměnných $x_1, \dots, x_s$, jež substitucí (33a) přecházejí ve funkce proměnných $y_1, \dots, y_s$, jest

$$\frac{D(z_1, \dots, z_s)}{D(y_1, \dots, y_s)} = \Delta\,\frac{D(z_1, \dots, z_s)}{D(x_1, \dots, x_s)} .$$

11. Budiž dána funkce $f(x_1, \dots, x_s)$ a sestrojme funkci $\xi_1\frac{\partial f}{\partial x_1} + \dots + \xi_s\frac{\partial f}{\partial x_s}$ (t. zv. polára funkce f s pólem ξ). Tvrdím, že tato funkce ($2s$ proměnných) se rovná $\eta_1\frac{\partial F}{\partial y_1} + \dots + \eta_s\frac{\partial F}{\partial y_s}$, kde $F(y_1, \dots, y_s)$ je funkce, kterou obdržíme, když do $f(x_1, \dots, x_s)$ dosadíme podle rovnic (33a).

12. Při označení předešlého cvičení budiž D_1 determinant, složený z prvků $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\,\partial x_k}$ (t. zv. Hessův determinant funkce f); D_2 budiž složen z prvků $\frac{\partial^2 F}{\partial y_j\,\partial y_k}$. Potom je $D_2 = \Delta^2 D_1$.

13. Jestliže matice čísel b_{kl} v (33a) splňuje pro $k = 1, \dots, s$; $l = 1, \dots, s$ podmínku $\sum_{j=1}^{s} b_{kj}b_{lj} = \delta_{kl}$ ($\delta_{kk} = 1$, $\delta_{kl} = 0$ pro $k \neq l$), jest

$$\sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)^2 = \sum_{j=1}^{s}\left(\frac{\partial u}{\partial y_j}\right)^2, \quad \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial^2 u}{\partial x_j^2} = \sum_{j=1}^{s}\frac{\partial^2 u}{\partial y_j^2} .$$

§ 2. Zavádění nových nezávisle i závisle proměnných. Pro větší přehlednost vyložím opět problém i methodu řešení napřed pro funkce jedné proměnné.

I. Funkce jedné proměnné. O funkcích f, φ, ψ, jež se zde budou vyskytovati, předpokládám opět, že mají spojité parciální derivace těch řádů, jež budeme potřebovati, v oněch množinách, v nichž je budeme vyšetřovati (budou to otevřené množiny). Buďte dány funkce $\varphi(\xi, \eta)$, $\psi(\xi, \eta)$; v bodě $[\xi_0, \eta_0]$ budiž

$$\varphi_\xi\psi_\eta - \varphi_\eta\psi_\xi \neq 0\,. \tag{34}$$

Rovnicemi

$$x = \varphi(\xi, \eta)\,,\ y = \psi(\xi, \eta) \tag{35}$$

je jisté okolí M bodu $[\xi_0, \eta_0]$ zobrazeno prostě na jisté okolí N bodu $[x_0, y_0]$, kde $x_0 = \varphi(\xi_0, \eta_0)$, $y_0 = \psi(\xi_0, \eta_0)$; volíme-li M dosti malé, bude nerovnost (34) platiti v celé množině M. Budiž dále dána funkce $f(x)$ taková, že $f(x_0) = y_0$. Klademe-li nyní $y = f(x)$, bude důsledkem tohoto vztahu jistý vztah mezi proměnnými ξ, η. Řekněme to přesněji: rovnice (35) definují nejenom zobrazení M na N, nýbrž i inversní zobrazení N na M, takže každému bodu $[x, y] \in N$ je přiřazen jeden a jen jeden bod $[\xi, \eta] \in M$. Vezmu-li z N jenom ty body $[x, y]$, pro něž je $y = f(x)$, budou jim přiřazeny (v důsledku rovnic (35)) právě ty body $[\xi, \eta] \in M$, pro něž jest

$$\psi(\xi, \eta) - f(\varphi(\xi, \eta)) = 0\,. \tag{36}$$

Předpokládám-li, že v bodě $[\xi_0, \eta_0]$ — a tedy i v jistém jeho okolí — jest

$$\frac{\partial\psi}{\partial\eta} - f'(\varphi(\xi, \eta))\,\frac{\partial\varphi}{\partial\eta} \neq 0\,, \tag{37}$$

víme, že lze z rovnice (36) vypočísti η jako funkci ξ, pišme třeba $\eta = \eta(\xi)$. Přesně: existují $\delta > 0$, $\Delta > 0$ tak, že ke každému $\xi \in (\xi_0 - \delta, \xi_0 + \delta)$ existuje jedno a jen jedno η (označme je $\eta(\xi)$) v intervalu $(\eta_0 - \Delta, \eta_0 + \Delta)$ tak, že platí (36). Volíme-li δ, Δ ještě tak malé, aby interval $J = (\xi_0 - \delta, \xi_0 + \delta) \times (\eta_0 - \Delta, \eta_0 + \Delta)$ byl částí množiny M, vidíme: rovnice (35) definují prosté zobrazení intervalu J na jisté okolí $N_1 (N_1 \subset N)$ bodu $[x_0, y_0]$; při tom rovnice $y = f(x)$ jest pro

$[x, y] \in N_1$ splněna tehdy a jen tehdy, jestliže příslušný bod $[\xi, \eta] \in J$ splňuje vztah $\eta = \eta(\xi)$.

Ne zcela přesně, ale výrazně řečeno: místo x, y zavádím ξ, η rovnicemi (35); je-li mezi x, y vztah $y = f(x)$, nebudou též ξ, η nezávislé, nýbrž bude mezi nimi vztah tvaru $\eta = \eta(\xi)$.

Naším úkolem nyní bude, vyjádřiti derivace funkce $f(x)$ [5]) (v bodě $x = \varphi(\xi, \eta(\xi))$) derivacemi $\frac{d\eta}{d\xi}, \frac{d^2\eta}{d\xi^2}, \ldots$ funkce $\eta(\xi)$ a parciálními derivacemi funkcí $\varphi(\xi, \eta)$, $\psi(\xi, \eta)$ (v bodě $[\xi, \eta(\xi)]$.[6]) Uvažme ještě: z definice funkce $\eta(\xi)$ (viz (36)) plyne $\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{d\eta}{d\xi} - f'(x) \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{d\eta}{d\xi} \right) = 0$. Kdyby bylo $\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{d\eta}{d\xi} = 0$, bylo by též $\frac{\partial \psi}{\partial \xi} + \frac{\partial \psi}{\partial \eta} \frac{d\eta}{d\xi} = 0$; z těchto dvou rovnic by plynulo, že výraz (34) by se rovnal nule, což není pravda. Tedy jest — což budeme za chvíli potřebovati —

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{d\eta}{d\xi} \neq 0 \,. \tag{38}$$

Methoda je nyní obdobná jako v § 1. Budiž $Y = G(x)$ libovolná funkce, mající derivaci; dosazením $x = \varphi(\xi, \eta(\xi))$ dostáváme $Y = G(\varphi(\xi, \eta(\xi))) = H(\xi)$. Podle věty o derivování složených funkcí jest

$$\frac{dH}{d\xi} = \frac{dG}{dx} \cdot \frac{dx}{d\xi} = \frac{dG}{dx} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \frac{\partial \varphi}{\partial \eta} \frac{d\eta}{d\xi} \right) \tag{39}$$

a tedy (viz (38))

$$\frac{dG}{dx} = \frac{\dfrac{dH(\xi)}{d\xi}}{\dfrac{\partial \varphi}{\partial \xi} + \dfrac{\partial \varphi}{\partial \eta} \dfrac{d\eta}{d\xi}} \,. \tag{40}$$

Zvolme napřed $Y = y$, t. j. $y = f(x)$, současně $y = \psi(\xi, \eta(\xi))$. Kladouce tedy $G(x) = f(x)$, máme $H(\xi) = \psi(\xi, \eta(\xi))$, takže z (40) plyne

---

[5]) Budu je značiti: $f'(x) = \frac{dy}{dx}$, $f''(x) = \frac{d^2y}{dx^2}$ atd.

[6]) Písmeno η značí vždy $\eta(\xi)$; x značí $\varphi(\xi, \eta)$ [t. j. $\varphi(\xi, \eta(\xi))$]; y značí $f(x)$ neboli $\psi(\xi, \eta(\xi))$ [viz rovnici (36)].

$$(41) \qquad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dfrac{\partial\psi}{\partial\xi} + \dfrac{\partial\psi}{\partial\eta}\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}}{\dfrac{\partial\varphi}{\partial\xi} + \dfrac{\partial\varphi}{\partial\eta}\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}}.$$

Klaďme nyní do (40) $G(x) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$, takže $H(\xi)$ bude pravá strana rovnice (41). Rovnice (40) potom dává

$$(42) \qquad \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{A}{\left(\varphi_\xi + \varphi_\eta\dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}\right)^3},$$

$$A = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\psi_\xi + \psi_\eta\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}\right)\cdot\left(\varphi_\xi + \varphi_\eta\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\varphi_\xi + \varphi_\eta\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}\right)\cdot\left(\psi_\xi + \psi_\eta\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}\right).$$

Zde jest ovšem

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\psi_\xi + \psi_\eta\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}\right) = \psi_{\xi\xi} + 2\psi_{\xi\eta}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} + \psi_{\eta\eta}\left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 + \psi_\eta\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}\xi^2},$$

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\xi}\left(\varphi_\xi + \varphi_\eta\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}\right) = \varphi_{\xi\xi} + 2\varphi_{\xi\eta}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi} + \varphi_{\eta\eta}\left(\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}\right)^2 + \varphi_\eta\frac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}\xi^2}.$$

Dosadíme-li odtud do (42), dostaneme $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$ v žádaném tvaru. Ale opět je výhodnější, pamatovati si jen základní myšlenku (obsaženou v (39), (40)) a počítati v každém speciálním případě zvlášť.

Příklad 1. $y = f(x)$; zaveďme proměnné r, α rovnicemi $x = r\cos\alpha$, $y = r\sin\alpha$, takže r se jeví jako funkce α, řekněme $r = r(\alpha)$.[7]) Je-li $Y = G(x)$, $G(r(\alpha)\,.\,\cos\alpha) = H(\alpha)$, jest

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\alpha} = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\,.\,(r'\cos\alpha - r\sin\alpha)\,,$$

$$(43) \qquad \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\alpha}\cdot\frac{1}{r'\cos\alpha - r\sin\alpha}.$$

[7]) Určená rovnicí $r\sin\alpha - f(r\cos\alpha) = 0$; podmínka $\sin\alpha - f'(x)\cos\alpha \neq 0$, t. j. $f'(x) \neq \operatorname{tg}\alpha$, což značí: tečna ke křivce $y = f(x)$ neprochází počátkem (rozmyslete si sami případ, kdy $\operatorname{tg}\alpha$ nemá smyslu).

Pro $Y = y$ (t. j. $G = f$, $H(\alpha) = r(\alpha)\sin\alpha$) vyjde

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{r'\sin\alpha + r\cos\alpha}{r'\cos\alpha - r\sin\alpha} \quad \text{(směrnice tečny)}\,. \tag{44}$$

Pro $G(x) = \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f'(x)$ je $H(\alpha)$ pravá strana rovnice (44); tedy podle (43)

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{1}{r'\cos\alpha - r\sin\alpha}\cdot\frac{A}{(r'\cos\alpha - r\sin\alpha)^2}\,,$$

$$A = (r''\sin\alpha + 2r'\cos\alpha - r\sin\alpha)(r'\cos\alpha - r\sin\alpha) -$$
$$- (r''\cos\alpha - 2r'\sin\alpha - r\cos\alpha)(r'\sin\alpha + r\cos\alpha),$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{-rr'' + 2r'^2 + r^2}{(r'\cos\alpha - r\sin\alpha)^3}\,.$$

Cvičení

1. V příkl. 1 vypočtěte především

$$\frac{\left(1 + \left(\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}\right|} = \frac{(r^2 + r'^2)^{\frac{3}{2}}}{|-rr'' + 2r'^2 + r^2|}$$

(poloměr křivosti v polárních souřadnicích); za druhé $\dfrac{\mathrm{d}^3y}{\mathrm{d}x^3} = B\,.\,(r'\cos\alpha -$ $- r\sin\alpha)^{-5}$, kde $B = r'''(r^2\sin\alpha - rr'\cos\alpha) + 3r''^2r\cos\alpha - r''(3r'^2\cos\alpha +$ $+ 9rr'\sin\alpha + 6r^2\cos\alpha) + 12r'^3\sin\alpha + 8rr'^2\cos\alpha + 4r^2r'\sin\alpha + 3r^3\cos\alpha$.

2. Budiž $y = f(x)$, položme $x = \eta$, $y = \xi$; jde nám o vztahy mezi derivacemi $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}, \dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}, \ldots$ a derivacemi $\eta' = \dfrac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}$, $\eta'' = \dfrac{\mathrm{d}^2\eta}{\mathrm{d}\xi^2}, \ldots$; zřejmě jsou $\eta', \eta'', \ldots$ derivace f u n k c e i n v e r s n í k f. Je-li předložena funkce $G(x)$ a klademe-li $G(\eta(\xi)) = H(\xi)$, jest (předpoklad: $f'(x) \neq 0$)

$$\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\xi} = \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}\eta}{\mathrm{d}\xi}\,, \quad \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{\eta'}\frac{\mathrm{d}H}{\mathrm{d}\xi}\,.$$

Pro $G(x) = f(x)$ je $H(\xi) = y = \xi$, tedy $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \dfrac{1}{\eta'}$ (známý vzorec); odtud $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = -\dfrac{\eta''}{\eta'^3}$ atd.; stanovte $\dfrac{\mathrm{d}^4y}{\mathrm{d}x^4} = \dfrac{1}{\eta'^7}(-\eta''''\eta'^2 + 10\eta'\eta''\eta''' - 15\eta''^3)$. Kladete-li jednou $y = \lg x$ $(x > 0)$, po druhé $y = \arcsin x$ $(|x| < 1)$, obdržíte z poslední rovnice

$$\frac{d^4 \lg x}{dx^4} = -\frac{6}{x^4}, \quad \frac{d^4 \arcsin x}{dx^4} = \frac{3x(3 + 2x^2)}{(1 - x^2)^{\frac{7}{2}}},$$

což můžete též ověřiti přímým výpočtem.

II. Několik funkcí několika proměnných. Budiž dáno s funkcí

(45) $$F_j(x_1, \ldots, x_r) \quad (j = 1, \ldots, s)$$

a dále $r + s$ funkcí

(46) $$\begin{aligned} &\varphi_k(\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta_1, \ldots, \eta_s) \quad (k = 1, \ldots, r), \\ &\psi_j(\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta_1, \ldots, \eta_s) \quad (j = 1, \ldots, s); \end{aligned}$$

předpokládáme, že tyto funkce mají spojité parciální derivace těch řádů, které budeme potřebovati, v těch množinách (otevřených), které budeme vyšetřovati.

Zhruba řečeno, půjde o tuto otázku: mezi x_k, y_j a ξ_k, η_j budou vztahy

(47) $$\begin{aligned} x_k &= \varphi_k(\xi_1, \ldots, \eta_s) \quad (k = 1, \ldots, r), \\ y_j &= \psi_j(\xi_1, \ldots, \eta_s) \quad (j = 1, \ldots, s) \end{aligned}$$

a dále budou x_k, y_j vázány vztahy

(48) $$y_j = F_j(x_1, \ldots, x_r) \quad (j = 1, \ldots, s),$$

jimž odpovídají vztahy

(49) $$\psi_j(\xi_1, \ldots, \eta_s) - F_j(\varphi_1(\xi_1, \ldots, \eta_s), \ldots, \varphi_r(\xi_1, \ldots, \eta_s)) = 0 \quad (j = 1, \ldots, s),$$

z nichž za jistých předpokladů lze vypočísti $\eta_1, \ldots, \eta_s$, takže dostaneme vztahy tvaru

(50) $$\eta_j = \eta_j(\xi_1, \ldots, \xi_r) \quad (j = 1, \ldots, s).$$

Naším úkolem jest, vypočísti $\frac{\partial F_j}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 F_j}{\partial x_k \partial x_l}, \ldots$ (budeme psáti $\frac{\partial y_j}{\partial x_k}, \frac{\partial^2 y_j}{\partial x_k \partial x_l}, \ldots$) derivacemi $\frac{\partial \eta_j}{\partial \xi_k}, \ldots$ a derivacemi funkcí φ_k, ψ_j.

Formulujme tento úkol přesně. Jsou dána čísla $a_1, \ldots, a_r$ a kladme $b_j = F_j(a_1, \ldots, a_r)$ $(j = 1, \ldots, s)$. Budiž $c = [a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_s]$; budiž dále $\gamma = [\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_s]$ bod, jenž je rovnicemi (47) zobrazen na bod c, t. j. $a_k = \varphi_k(\alpha_1, \ldots, \beta_s)$, $b_j = \psi_j(\alpha_1, \ldots, \beta_s)$.

V bodě γ a tedy i v jistém jeho okolí budiž

$$\frac{D(\varphi_1, \ldots, \varphi_r, \psi_1, \ldots, \psi_s)}{D(\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta_1, \ldots, \eta_s)} \neq 0 . \tag{51}$$

Potom existuje okolí M bodu γ tak, že rovnice (47) zobrazují M prostě na jisté okolí N bodu c a že v celém okolí M platí (51). Dále předpokládejme, že s-řadový determinant Γ, vytvořený z čísel

$$\Gamma_{jk}(\xi_1, \ldots, \eta_s) = \frac{\partial \psi_j}{\partial \eta_k} - \sum_{l=1}^{r} \frac{\partial F_j}{\partial x_l} \frac{\partial \varphi_l}{\partial \eta_k} \quad (j, k = 1, \ldots, s)\,,^{8)} \tag{52}$$

je rovněž v bodě γ — a tedy i v jeho okolí — různý od nuly. Každému bodu $[x_1, \ldots, y_s] \in N$ je rovnicemi (47) přiřazen jeden a jen jeden bod $[\xi_1, \ldots, \eta_s] \in M$. Oněm bodům $[x_1, \ldots, y_s] \in N$, jež splňují rovnice (48), jsou přiřazeny právě ony body $[\xi_1, \ldots, \eta_s] \in M$, jež splňují rovnice (49). Parciální derivace levých stran těchto rovnic podle η_k jsou právě čísla Γ_{jk}. Ježto $\Gamma \neq 0$, plyne z věty 210: existují čísla $\delta > 0$, $\Delta > 0$ tak, že ke každému bodu $[\xi_1, \ldots, \xi_r]$ intervalu $J = (\alpha_1 - \delta, \alpha_1 + \delta) \times \ldots \times (\alpha_r - \delta, \alpha_r + \delta)$ existuje v intervalu $K = (\beta_1 - \Delta, \beta_1 + \Delta) \times \times \ldots \times (\beta_s - \Delta, \beta_s + \Delta)$ jeden a jen jeden bod $[\eta_1, \ldots, \eta_s]$ takový, že platí (49); pišme $\eta_j = \eta_j(\xi_1, \ldots, \xi_r)$. Volím-li δ, Δ dosti malé, bude $J \times K \subset M$ a vidíme: Okolí $J \times K$ bodu γ je rovnicemi (47) prostě zobrazeno na jisté okolí N_1 bodu c; bod $[x_1, \ldots, x_r, y_1, \ldots, y_s] \in N_1$ splňuje rovnice (48) tehdy a jen tehdy, splňuje-li bod $[\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta_1, \ldots, \eta_s] \in J \times K$, jenž je rovnicemi (47) bodu $[x_1, \ldots, y_s]$ přiřazen, rovnice (50).

Methoda řešení našeho problému jest obdobná jako v I. Budiž $G(x_1, \ldots, x_r)$ funkce, mající ve vyšetřovaném bodě totální diferenciál. Dosadím-li za x_k do funkce G podle rovnic (47), (50)

$$x_k = \varphi_k(\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta_1(\xi_1, \ldots, \xi_r), \ldots, \eta_s(\xi_1, \ldots, \xi_r)) \quad (k = 1, \ldots, r)\,, \tag{53}$$

---

[8]) Do $\frac{\partial F_j}{\partial x_l}$ dosazuji ovšem za x_k, y_j podle rovnic (47) funkce φ_k, ψ_j.

obdržím funkci $H(\xi_1, \ldots, \xi_r)$. Podle věty o parciálních derivacích složených funkcí obdržím

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_m} = \sum_{l=1}^{r} \frac{\partial G}{\partial x_l} \left(\frac{\partial \varphi_l}{\partial \xi_m} + \sum_{t=1}^{s} \frac{\partial \varphi_l}{\partial \eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \xi_m} \right) \quad (m = 1, \ldots, r)\,.^{9)} \tag{54}$$

To je r rovnic, z nichž můžeme vypočísti $\frac{\partial G}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial G}{\partial x_r}$, ježto determinant čísel

$$\frac{\partial \varphi_l}{\partial \xi_m} + \sum_{t=1}^{s} \frac{\partial \varphi_l}{\partial \eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \xi_m} \quad (l, m = 1, \ldots, r) \tag{55}$$

je různý od nuly, jak se za chvíli přesvědčíme. Tím dostáváme rovnice tvaru

$$\frac{\partial G}{\partial x_l} = \sum_{m=1}^{r} \frac{\partial H}{\partial \xi_m} A_{lm} \quad (l = 1, \ldots, r)\,, \tag{56}$$

kde A_{lm} je jistá racionální funkce veličin $\frac{\partial \varphi_t}{\partial \xi_v}, \frac{\partial \varphi_t}{\partial \eta_v}, \frac{\partial \eta_t}{\partial \xi_v}$. Klademe-li speciálně $G(x_1, \ldots, x_r) = F_j(x_1, \ldots, x_r) = y_j$ — tedy $\frac{\partial G}{\partial x_l} = \frac{\partial y_j}{\partial x_l}$ — máme $H(\xi_1, \ldots, \xi_r) = \psi_j(\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta_1, \ldots, \eta_s)$ (viz pozn.[9]), takže

$$\frac{\partial H}{\partial \xi_m} = \frac{\partial \psi_j}{\partial \xi_m} + \sum_{t=1}^{s} \frac{\partial \psi_j}{\partial \eta_t} \frac{\partial \eta_t}{\partial \xi_m}\,; \tag{57}$$

dosazením do (56) obdržíme $\frac{\partial y_j}{\partial x_l}$ ve tvaru

$$\frac{\partial y_j}{\partial x_l} = R_{jl}\,, \tag{58}$$

kde R_{jl} je racionální funkce veličin $\frac{\partial \varphi_t}{\partial \xi_v}, \frac{\partial \varphi_t}{\partial \eta_v}, \frac{\partial \psi_t}{\partial \xi_v}, \frac{\partial \psi_t}{\partial \eta_v}, \frac{\partial \eta_t}{\partial \xi_v}$. Položme za druhé za G funkci $\frac{\partial y_j}{\partial x_p} = \frac{\partial F_j(x_1, \ldots, x_r)}{\partial x_p}$, tedy za H funkci R_{jp} z (58);

[9]) Omezuji se stále na body $[\xi_1, \ldots, \xi_r] \in J$; potom značí η_j funkci (50); x_k značí funkci (53); y_j značí $F_j(x_1, \ldots, x_r)$ nebo (což je podle (49) totéž) $y_j = \psi_j(\xi_1, \ldots, \xi_r, \eta_1, \ldots, \eta_s)$, kde ovšem η_l značí funkci proměnných $\xi_1, \ldots, \xi_r$, danou rovnicemi (50).

užitím rovnice (56) obdržíme $\frac{\partial^2 y_j}{\partial x_p\, \partial x_l}$ atd. Výpočty v obecném případě jsou příliš složité a nepřehledné; omezím se proto jen na speciální příklady.

Zbývá ještě dokázati, že r-řadový determinant, složený z čísel (55), je různý od nuly. Funkční determinant (51) — jenž je různý od nuly — pišme

$$
\begin{vmatrix}
\frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi_1}{\partial\xi_r}, \frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi_1}{\partial\eta_s} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\partial\varphi_r}{\partial\xi_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi_r}{\partial\xi_r}, \frac{\partial\varphi_r}{\partial\eta_1}, \ldots, \frac{\partial\varphi_r}{\partial\eta_s} \\
\frac{\partial\psi_1}{\partial\xi_1}, \ldots, \frac{\partial\psi_1}{\partial\xi_r}, \frac{\partial\psi_1}{\partial\eta_1}, \ldots, \frac{\partial\psi_1}{\partial\eta_s} \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\frac{\partial\psi_s}{\partial\xi_1}, \ldots, \frac{\partial\psi_s}{\partial\xi_r}, \frac{\partial\psi_s}{\partial\eta_1}, \ldots, \frac{\partial\psi_s}{\partial\eta_s}
\end{vmatrix}
= \left|\begin{array}{c:c} \mathrm{I} & \mathrm{II} \\ \hdashline \mathrm{III} & \mathrm{IV} \end{array}\right|. \tag{59}
$$

Při tom I znamená matici, složenou z prvních r řádků a sloupců, IV znamená matici složenou z posledních s řádků a sloupců; II se skládá z posledních s sloupců a prvních r řádků, III se skládá z prvních r sloupců a posledních s řádků. Násobím nyní $(r + t)$-tý sloupec číslem $\frac{\partial\eta_t}{\partial\xi_m}$ $(t = 1, \ldots, s)$ a všechny tyto výrazy přičtu k m-tému sloupci; tím dostanu v I výrazy

$$
\frac{\partial\varphi_l}{\partial\xi_m} + \sum_{t=1}^{s} \frac{\partial\varphi_l}{\partial\eta_t}\frac{\partial\eta_t}{\partial\xi_m} \quad (l, m = 1, \ldots, r) \tag{60}
$$

a v III dostanu výrazy

$$
\frac{\partial\psi_j}{\partial\xi_m} + \sum_{t=1}^{s} \frac{\partial\psi_j}{\partial\eta_t}\frac{\partial\eta_t}{\partial\xi_m} \quad \begin{pmatrix} j = 1, \ldots, s \\ m = 1, \ldots, r \end{pmatrix}, \tag{61}
$$

kdežto II, IV zůstanou beze změny. Nyní násobím l-tý řádek číslem $-\frac{\partial F_j}{\partial x_l}$ $(l = 1, \ldots, r)$ a přičtu všechny tyto výrazy k $(r + j)$-tému řádku. V I zůstanou tedy výrazy (60), kdežto v III budou nyní výrazy

$$(62)\qquad \frac{\partial\psi_j}{\partial\xi_m}+\sum_{t=1}^{s}\frac{\partial\psi_j}{\partial\eta_t}\frac{\partial\eta_t}{\partial\xi_m}-\sum_{l=1}^{r}\frac{\partial F_j}{\partial x_l}\left(\frac{\partial\varphi_l}{\partial\xi_m}+\sum_{t=1}^{s}\frac{\partial\varphi_l}{\partial\eta_t}\frac{\partial\eta_t}{\partial\xi_m}\right)$$
$$(j=1,\ldots,s;\quad m=1,\ldots,r)\,.$$

Víte však: dosadíte-li do (49) $\eta_t = \eta_t(\xi_1, \ldots, \xi_r)$, je rovnice (49) splněna; tedy také derivace levé strany podle ξ_m je rovna nule, t. j. výrazy (62) jsou vesměs rovny nule. Provedenými změnami se nezměnila hodnota (od nuly různá) determinantu (59); zároveň však přešel tento determinant ve tvar

$$\left|\begin{array}{c|c} \mathrm{I}' & \mathrm{II}' \\ \hline \mathrm{III}' & \mathrm{IV}' \end{array}\right|,$$

při čemž v I′ jsou právě výrazy (60), t. j. (55), kdežto v III′ jsou samé nuly (II′, IV′ nás nezajímají). Rozvinete-li tento determinant podle subdeterminantů, příslušných k posledním s řádkům, dostanete, že hodnota tohoto determinantu (od nuly různá) se rovná součinu z hodnoty determinantu I′ a z hodnoty determinantu IV′; tedy je hodnota determinantu I′ různá od nuly, což bylo dokázati.

Příklad 2. Vezměme případ $r = 2$, $s = 1$; máme tedy jednu rovnici $z = f(x, y)$, transformační rovnice (47) pak jsou $x = \varphi(u, v, w)$, $y = \psi(u, v, w)$, $z = \chi(u, v, w)$, odkudž $w = w(u, v)$ (předpoklady o nevymizení jistých determinantů již neopakuji). Máme vyjádřiti derivace $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \ldots$ derivacemi $\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}, \ldots$ a parciálními derivacemi funkcí φ, ψ, χ.

Budiž předložena funkce $G(x, y)$ a položme $H(u, v) = G(\varphi(u, v, w(u, v)), \psi(u, v, w(u, v)))$. Jest

$$\frac{\partial H}{\partial u}=\frac{\partial G}{\partial x}\left(\varphi_u+\varphi_w\frac{\partial w}{\partial u}\right)+\frac{\partial G}{\partial y}\left(\psi_u+\psi_w\frac{\partial w}{\partial u}\right),$$
$$\frac{\partial H}{\partial v}=\frac{\partial G}{\partial x}\left(\varphi_v+\varphi_w\frac{\partial w}{\partial v}\right)+\frac{\partial G}{\partial y}\left(\psi_v+\psi_w\frac{\partial w}{\partial v}\right).$$

Determinant soustavy jest zde

$$A=\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,v)}+\frac{D(\varphi,\psi)}{D(w,v)}\frac{\partial w}{\partial u}+\frac{D(\varphi,\psi)}{D(u,w)}\frac{\partial w}{\partial v},$$

načež snadno vypočteme základní rovnice

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{A}\left(\frac{\partial H}{\partial u}\left(\psi_v + \psi_w \frac{\partial w}{\partial v}\right) - \frac{\partial H}{\partial v}\left(\psi_u + \psi_w \frac{\partial w}{\partial u}\right)\right), \tag{63}$$

$$\frac{\partial G}{\partial y} = \frac{1}{A}\left(-\frac{\partial H}{\partial u}\left(\varphi_v + \varphi_w \frac{\partial w}{\partial v}\right) + \frac{\partial H}{\partial v}\left(\varphi_u + \varphi_w \frac{\partial w}{\partial u}\right)\right). \tag{64}$$

Položíme-li na př. $G(x, y) = z = f(x, y)$, jest $H(u, v) = \chi(u, v, w(u, v))$ a z (63) plyne

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{A}\left(\left(\chi_u + \chi_w \frac{\partial w}{\partial u}\right)\left(\psi_v + \psi_w \frac{\partial w}{\partial v}\right) - \right. \tag{65}$$
$$\left. - \left(\chi_v + \chi_w \frac{\partial w}{\partial v}\right)\left(\psi_u + \psi_w \frac{\partial w}{\partial u}\right)\right).$$

Pravá strana je složena racionálně z $\varphi_u, \varphi_v, \varphi_w, \psi_u, \psi_v, \psi_w, \chi_u, \chi_v, \chi_w$, $\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}$. Chci-li dále vypočísti třeba $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$, kladu $G(x, y) = \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x}$; $H(u, v)$ bude pak pravá strana rovnice (65) a rovnice (64) dává hledaný výsledek (při parciálním derivování podle u nebo podle v nesmíme ovšem zapomenouti, že w je funkcí u, v). Výrazy, jež vyjdou, jsou již velmi složité.

Poznámka 1. Předpoklady, jež jsme činili v této kapitole, by se daly poněkud zobecniti: na př. pokud jde o derivace řádu $n > 1$, stačila by existence totálních diferenciálů řádu n-tého (místo předpokládané spojitosti parciálních derivací n-tého řádu).

Poznámka 2. Problém, vyšetřovaný v § 1, je speciálním případem problému z § 2 (pro $s = 1$). Transformační rovnice (47) mají pro problém z § 1 tento tvar:

$$x_1 = \varphi_1(\xi_1, \ldots, \xi_r), \ldots, x_r = \varphi_r(\xi_1, \ldots, \xi_r), y = \eta$$

(„závisle proměnná" y zůstává i po transformaci beze změny). Čtenáři je však snad příjemnější zvolený postup, při kterém byl jednodušší problém probrán samostatně v § 1.

III. Methoda diferenciálů. Omezme se pro jednoduchost na případ $r = 2$, $s = 1$. Problém, řešený v II, můžeme opět řešiti methodou diferenciálů, kterou nyní vyložím. Máme zde rovnici

$$z = f(x, y) \tag{66}$$

a transformační rovnice

(67) $$x = \varphi(u, v, w)\,, y = \psi(u, v, w)\,, z = \chi(u, v, w)\,,$$

při čemž z (66) plyne vztah

(68) $$w = W(u, v)\,,$$

vše za předpokladů, uvedených v II. Máme zde funkce (67) tří proměnných, jejichž derivace značím $\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial x}{\partial w}, \ldots$, dále zde máme funkce dvou proměnných (66) (derivace značím $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$) a (68) (derivace značím $\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}$). Konečně označení diferenciálů: $\mathrm{d}w$, $\mathrm{d}^2w, \ldots$ značí ovšem diferenciály funkce W; $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}^2x, \ldots, \mathrm{d}y, \mathrm{d}^2y, \ldots, \mathrm{d}z, \mathrm{d}^2z, \ldots$ značí diferenciály funkcí dvou proměnných

(69) $$\varphi(u, v, W(u, v))\,, \quad \psi(u, v, W(u, v))\,, \quad \chi(u, v, W(u, v))\,;$$

poslední funkce je ovšem také hodnota „složené funkce" $f(x, y)$, kde je dosazeno $x = \varphi(u, v, W(u, v))$, $y = \psi(u, v, W(u, v))$. Z (66) plyne (po těchto úmluvách o označení)

(70) $$\mathrm{d}z = \frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}y\,;$$

avšak

(71) $$\mathrm{d}x = \frac{\partial x}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial x}{\partial v}\,\mathrm{d}v + \frac{\partial x}{\partial w}\,\mathrm{d}w\,, \quad \mathrm{d}y = \ldots, \mathrm{d}z = \ldots$$

Dosazením do (70) plyne

(72) $$\frac{\partial z}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial z}{\partial v}\,\mathrm{d}v + \frac{\partial z}{\partial w}\,\mathrm{d}w = \\ = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \ldots\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \ldots\right).$$

Podle (52) je $\frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} - \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} \neq 0$, takže z (72) lze vyjádřit $\mathrm{d}w$ jako lineární formu v $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$. Koeficienty této formy jsou $\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}$, jež lze takto vypočísti pomocí $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ a pomocí derivací transformačních funkcí (t. j. pomocí $\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{\partial \varphi(u, v, w)}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial w} = \frac{\partial \chi(u, v, w)}{\partial w}$). Chceme-li tedy vyjádřiti $\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}$ pomocí $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, jsme hotovi. Jestliže však chceme naopak vypočísti $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ pomocí $\frac{\partial w}{\partial u}, \frac{\partial w}{\partial v}$, musíme ještě dále počítati: jestliže dosadíme do (72) $\mathrm{d}w = \frac{\partial w}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial w}{\partial v}\,\mathrm{d}v$, dostaneme srovnáním koeficientů při $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$ dvě rovnice

$$\frac{\partial z}{\partial u} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u} = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial u} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial u}\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial v} + \frac{\partial z}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v} = \frac{\partial z}{\partial x}\left(\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial x}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right) + \frac{\partial z}{\partial y}\left(\frac{\partial y}{\partial v} + \frac{\partial y}{\partial w}\frac{\partial w}{\partial v}\right).$$

Z těchto dvou rovnic lze vskutku vypočísti $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$, ježto jejich determinant je podle (55) různý od nuly.

Další diferencování dává

$$\text{(73)} \quad \mathrm{d}^2 z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\,\mathrm{d}x^2 + 2\frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\,\mathrm{d}y^2 + \frac{\partial z}{\partial x}\,\mathrm{d}^2 x + \frac{\partial z}{\partial y}\,\mathrm{d}^2 y\,;$$

sem dosadíme (nezávisle proměnné jsou u, v) za $\mathrm{d}x$, $\mathrm{d}y$ podle (71), dále

$$\text{(74)} \qquad \mathrm{d}^2 x = \frac{\partial^2 x}{\partial u^2}\,\mathrm{d}u^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + 2\frac{\partial^2 x}{\partial u\,\partial w}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}w +$$

$$+ \frac{\partial^2 x}{\partial v^2}\,\mathrm{d}v^2 + 2\frac{\partial^2 x}{\partial v\,\partial w}\,\mathrm{d}v\,\mathrm{d}w + \frac{\partial^2 x}{\partial w^2}\,\mathrm{d}w^2 + \frac{\partial x}{\partial w}\,\mathrm{d}^2 w\,,$$

a podobně pro $\mathrm{d}^2 y$, $\mathrm{d}^2 z$. Za $\mathrm{d}w$ dosadíme výraz $A\,\mathrm{d}u + B\,\mathrm{d}v$ (který jsme již vypočetli) a dostaneme rovnici pro $\mathrm{d}^2 w$, kde koeficient při $\mathrm{d}^2 w$ je opět číslo $\frac{\partial z}{\partial w} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial w} - \frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial w} \neq 0$, takže lze vypočísti $\mathrm{d}^2 w$ jako kvadratickou formu

$$\text{(75)} \qquad \mathrm{d}^2 w = C\,\mathrm{d}u^2 + 2D\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + E\,\mathrm{d}v^2\,.$$

Tím jsou stanoveny $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2} = C$, $\frac{\partial^2 w}{\partial u\, \partial v} = D$, $\frac{\partial^2 w}{\partial v^2} = E$. Chci-li však počítat $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, musím ještě počítat dále: do (73) jsme si myslili dosazeno podle (71), (74), dosadíme-li potom ještě $\mathrm{d}w = \frac{\partial w}{\partial u}\,\mathrm{d}u + \frac{\partial w}{\partial v}\,\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}^2 w = \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\,\mathrm{d}u^2 + 2\,\frac{\partial^2 w}{\partial u\, \partial v}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\,\mathrm{d}v^2$, dostaneme v (73) vlevo i vpravo kvadratickou formu v $\mathrm{d}u$, $\mathrm{d}v$. Srovnáním koeficientů při $\mathrm{d}u^2$, $\mathrm{d}u\mathrm{d}v$, $\mathrm{d}v^2$ dostáváme tři lineární rovnice pro $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$, z nichž lze tyto tři funkce vypočítati, jestliže ovšem tyto tři rovnice mají jediné řešení. Podobně lze postupovati dále, pokud bychom nenarazili na systém lineárních rovnic, mající více než jedno řešení (že tento případ nemůže nastati, nebudu dokazovati).

Poznámka 3. Čtenář si již povšiml, že výpočet derivací $\frac{\partial w}{\partial u}$, $\frac{\partial w}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}$, ... pomocí $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, $\frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}$, ... je snazší než výpočet obrácený — podobně jako tomu bylo v § 1, rovnice (13).

Poznámka 4. (Viz pozn. 2 v § 1.) Jsou-li vztahy (67) dány „implicite“ rovnicemi

$$\Phi(x, y, z, u, v, w) = 0, \quad \Psi(\ldots) = 0, \quad X(\ldots) = 0, \tag{76}$$

musíme rovnice (71), (74) atd. odvodit diferencováním rovnic (76).

Cvičení

3. Budiž $z = f(x, y)$; odtud lze na př. za předpokladu $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ vypočísti x jako funkci y, z. Vyšetříme to; t. j. klademe (abychom se nemýlili) $x = \zeta$, $y = \eta$, $z = \xi$ a pohlížíme na ζ jako na funkci ξ, η. Základní rovnice: budiž dáno $G(x, y)$, klademe $H(\xi, \eta) = G(\zeta(\xi, \eta), \eta)$;

$$\frac{\partial H}{\partial \xi} = \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial H}{\partial \eta} = \frac{\partial G}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial \eta} + \frac{\partial G}{\partial y};$$

odtud základní rovnice

$$\frac{\partial G}{\partial x} = \frac{1}{\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}} \frac{\partial H}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial G}{\partial y} = -\frac{\frac{\partial \zeta}{\partial \eta}}{\frac{\partial \zeta}{\partial \xi}} \cdot \frac{\partial H}{\partial \xi} + \frac{\partial H}{\partial \eta}.$$

Klademe-li (což jest obvyklé označení)

$$p = \frac{\partial z}{\partial x}, \quad q = \frac{\partial z}{\partial y}, \quad r = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad s = \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y}, \quad t = \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

a píšeme-li obdobně $p_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial \xi}$, $q_1 = \frac{\partial \zeta}{\partial \eta}$ atd., vyjde

$$p = \frac{1}{p_1}, \quad q = -\frac{q_1}{p_1}, \quad r = -\frac{r_1}{p_1^3}, \quad s = \frac{r_1 q_1 - s_1 p_1}{p_1^3},$$

$$t = \frac{-r_1 q_1^2 + 2 s_1 p_1 q_1 - t_1 p_1^2}{p_1^3}.$$

4. Budiž $z = f(x, y)$, $x = \zeta$, $y = \eta\zeta$, $z = \xi\eta\zeta$; pojímáme ζ jako funkci ξ, η. Při označení jako v cvič. 3 jest

$$p_1 p = \eta(\zeta + \eta q_1), \quad p_1 q = p_1 \xi - q_1 \eta, \quad \zeta p_1^3 r = -r_1 \zeta^2 \eta + (4 p_1^2 q_1 - 2 q_1 r_1 \zeta)\, \eta^2 + \\ + (p_1^2 t_1 - q_1^2 r_1)\, \eta^3 .$$

5. Budiž $z = f(x, y)$, $x = r \cos \varphi \cos \vartheta$, $y = r \sin \varphi \cos \vartheta$, $z = r \sin \vartheta$, tedy je r funkcí φ, ϑ. Vypočtěte

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{A}\left(-r \frac{\partial r}{\partial \varphi} \sin \varphi - r \frac{\partial r}{\partial \vartheta} \cos \varphi \sin \vartheta \cos \vartheta - r^2 \cos \varphi \cos^2 \vartheta\right),$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{A}\left(r \frac{\partial r}{\partial \varphi} \cos \varphi - r \frac{\partial r}{\partial \vartheta} \sin \varphi \sin \vartheta \cos \vartheta - r^2 \sin \varphi \cos^2 \vartheta\right),$$

$$\text{kdež } A = r^2 \sin \vartheta \cos \vartheta - r \frac{\partial r}{\partial \vartheta} \cos^2 \vartheta .$$

6. Budiž $y = f(x)$, $z = g(x)$ (rovnice „křivky" v prostoru); $x = r \cos \varphi \cos \vartheta$, $y = r \sin \varphi \cos \vartheta$, $z = r \sin \vartheta$. Považujme r, ϑ za funkce φ; píšeme ovšem $r' = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\varphi}$, $\vartheta' = \frac{\mathrm{d}\vartheta}{\mathrm{d}\varphi}$ atd. Klademe-li $A = r' \cos \varphi \cos \vartheta - \vartheta' r \cos \varphi \sin \vartheta - r \sin \varphi \cos \vartheta$, jest

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{A}\,(r' \sin \varphi \cos \vartheta - \vartheta' r \sin \varphi \sin \vartheta + r \cos \varphi \cos \vartheta),$$

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{A}\,(r' \sin \vartheta + \vartheta' r \cos \vartheta)\,,$$

$$1 + \left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 + \left(\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \frac{1}{A^2}\,(r'^2 + r^2\vartheta'^2 + r^2 \cos^2 \vartheta)\,,$$

$$\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}x^2} = \frac{B}{A^2} - \frac{r' \sin \vartheta + \vartheta' r \cos \vartheta}{A^3} \,.\, C\,,$$

kde

$$B = r'' \sin \vartheta + 2r'\vartheta' \cos \vartheta + \vartheta'' r \cos \vartheta - \vartheta'^2 r \sin \vartheta,$$

$$C = \cos \varphi \cos \vartheta\,(r'' - r\vartheta'^2 - r) - 2r' \sin \varphi \cos \vartheta - \cos \varphi \sin \vartheta\,(2r'\vartheta' + \vartheta'' r) + {}$$
$$+ 2r\vartheta' \sin \varphi \sin \vartheta.$$

7. Ve všech cvičeních tohoto paragrafu vypište podmínky, zaručující oprávněnost provedených výpočtů (jsou to nerovnosti, pravící, že dva determinanty jsou různé od nuly).