# Diferenciální počet II

## Kapitola V. Reálné funkce jedné reálné proměnné

In: Vojtěch Jarník (author): Diferenciální počet II. (Czech). Praha: Academia, 1984.
pp. 151--221.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402012

**Terms of use:**

© Vojtěch Jarník, 1976

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

KAPITOLA V.

# REÁLNÉ FUNKCE JEDNÉ REÁLNÉ PROMĚNNÉ

Tato kapitola obsahuje detailnější studium některých vlastností reálných funkcí jedné reálné proměnné, které souvisí se spojitostí, limitou a derivací, jakož i studium některých speciálních tříd funkcí (funkce monotonní, funkce s variací konečnou, funkce absolutně spojité, funkce konvexní). Současně je tato kapitola, ve které se vykládají též základní pojmy z theorie množin reálných čísel, přípravou na obecnější úvahy v kap. VI.

**§ 1. Množiny v $E_1$.** Půjde o množiny, jejichž prvky jsou „body" v $E_1$, t. j. konečná reálná čísla. Přitom se seznámíme s několika základními pojmy a větami, které se v obecnějším tvaru objeví v kap. VI; proto definice nečísluji.

Vzdáleností bodů $a$, $b$, v $E_1$ rozumím číslo $|a - b| = |b - a|$; tato vzdálenost je rovna nule pro $a = b$, jinak je kladná. **Vzdáleností** (obšírněji: dolní vzdáleností) **bodu** $a$ **od množiny** $M$ rozumím číslo

$$\varrho(a, M) = \inf_{x \in M} |a - x|.^{1)} \tag{1}$$

Je-li $a \in M$, je ovšem $\varrho(a, M) = 0$, ale tato nerovnost může platiti i jindy: na př. bod 3 má vzdálenost 0 od intervalu (1, 3). Množina všech bodů $a$, pro něž je

$$\varrho(a, M) = 0\,, \tag{2}$$

se nazývá **uzávěrem** množiny $M$; budeme ji značit $\overline{M}$. Kdy patří bod $a$ do $\overline{M}$? Zřejmě tehdy a jen tehdy, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ obsahuje interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ aspoň jeden bod z $M$ (neboť tento interval je právě množina všech bodů, jež mají vzdálenost od $a$ menší než $\varepsilon$). Na př. uzávěrem kteréhokoliv z intervalů

$$(a, b),\ \langle a, b),\ (a, b\rangle,\ \langle a, b\rangle \quad (\text{kde } -\infty < a < b < +\infty) \tag{3}$$

je zřejmě interval $\langle a, b\rangle$.

[1]) Je-li $M = \emptyset$, je toto číslo $+\infty$ (jde o infimum prázdné množiny); pro $M \neq \emptyset$ je konečné nezáporné.

Vždy je $M \subset \overline{M}$; jestliže je současně také $\overline{M} \subset M$ (tedy $\overline{M} = M$), říkáme, že množina $M$ je **uzavřená**. Ze všech druhů intervalů jsou uzavřenými množinami právě tyto: $\langle a, b\rangle$, $(-\infty, b\rangle$, $\langle a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$. Také jednobodová a prázdná množina jsou uzavřené.

Bod $a$ nazýváme **vnitřním bodem** množiny $M$, jestliže existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset M$ (načež ovšem jistě $a \in M$). Množina všech vnitřních bodů množiny $M$ se nazývá **vnitřkem** množiny $M$, znak $M°$. Je ovšem vždy $M° \subset M$. Je-li také $M \subset M°$ (tedy $M = M°$), t. j. je-li každý bod $x \in M$ vnitřním bodem množiny $M$, říkáme, že množina $M$ je **otevřená.** Ze všech druhů intervalů jsou otevřenými množinami právě tyto: $(a, b)$, $(-\infty, b)$, $(a, +\infty)$, $(-\infty, +\infty)$ (poslední interval je současně uzavřenou množinou). Vnitřkem kteréhokoliv z intervalů (3) je interval $(a, b)$.

**Věta 64.** *Množina $M$ je uzavřená tehdy a jen tehdy, jestliže množina $N = \mathbf{E}_1 \dot{-} M$ je otevřená.*

Důkaz. Nechť předně $M$ je uzavřená, t. j. $M = \overline{M}$. Budiž $a \in N$. Bod $a$ nepatří k $M$, t. j. k $\overline{M}$; tedy existuje $\varepsilon > 0$ tak, že žádný bod intervalu $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ nepatří k $M$. Tedy $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset N$, t. j. $a$ je vnitřním bodem $N$. Tedy $a \in N \Rightarrow a \in N°$, t. j. $N \subset N°$.

Nechť za druhé $N$ je otevřená, t. j. $N = N°$. Budiž $a \in \overline{M}$; každý interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ obsahuje bod z $M$, t. j. není $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset$ $\subset N$. Bod $a$ nepatří tedy k $N°$, t. j. nepatří k $N$, t. j. $a \in M$. Tedy $a \in \overline{M} \Rightarrow a \in M$, t. j. $\overline{M} \subset M$.

Tento vztah mezi otevřenými a uzavřenými množinami nám často zkrátí důkazy.

**Věta 65.** *Sjednocení libovolného systému otevřených množin je otevřená množina. Průnik konečného počtu otevřených množin je otevřená množina.*

Důkaz. I. Buďte $M_\tau$ $(\tau \in T)$ otevřené, $M = \bigcup_{\tau \in T} M_\tau$. Budiž $a \in M$. Existuje $\tau$ tak, že $a \in M_\tau$. Dále existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset$ $\subset M_\tau$. Tedy $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset M$. Tedy $a \in M°$. T. j.: $M \subset M°$.

II. Buďte $M_k$ $(k = 1, \ldots, n)$ otevřené. Budiž $M = \bigcap_{k=1}^{n} M_k$. Budiž $a \in M$, tedy $a \in M_k$ $(k = 1, \ldots, n)$. Tedy existují čísla $\varepsilon_k > 0$ $(k =$

$= 1, \ldots, n)$ tak, že $(a - \varepsilon_k, a + \varepsilon_k) \subset M_k$. Položme $\varepsilon = \mathrm{Min}\,(\varepsilon_1, \ldots$ $\ldots, \varepsilon_n) > 0$. Potom $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \subset \bigcap_{k=1}^{n} M_k = M$, tedy $a \in M^\circ$. Tedy $M \subset M^\circ$.

**Věta 66.** *Sjednocení konečného systému uzavřených množin je uzavřená množina. Průnik libovolného systému uzavřených množin je uzavřená množina.*

Důkaz. Jest (viz větu 1)

$$\mathbf{E}_1 \dot{-} \bigcup_{k=1}^{n} M_k = \bigcap_{k=1}^{n} (\mathbf{E}_1 \dot{-} M_k)\,. \tag{4}$$

Jsou-li $M_k$ uzavřené, jsou (věta 64) $\mathbf{E}_1 \dot{-} M_k$ otevřené, tedy pravá strana v (4) je otevřená (věta 65), tedy i levá je otevřená, a tedy $\bigcup_{k=1}^{n} M_k$ je uzavřená (věta 64). Vidíte, jak zcela mechanicky z věty o otevřených množinách plyne věta o uzavřených. Podobně plyne druhá část věty 66 ze vzorce (viz větu 1)

$$\mathbf{E}_1 \dot{-} \bigcap_{\tau \in T} M_\tau = \bigcup_{\tau \in T} (\mathbf{E}_1 \dot{-} M_\tau)\,.$$

Bod $a \in \mathbf{E}_1$ nazýváme **hromadným bodem** množiny $M$, jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ obsahuje interval $(a - \varepsilon,\ a + \varepsilon)$ nekonečně mnoho bodů množiny $M$. Množinu všech hromadných bodů množiny $M$ nazýváme **derivací** (nebo derivovanou množinou) množiny $M$ a značíme ji $M'$. Příklady: Množina všech čísel $\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ má jediný hromadný bod 0, a ten k množině nepatří. Derivace kteréhokoliv z intervalů (3) je interval $\langle a, b\rangle$. Bod, který patří k množině $M$, ale není jejím hromadným bodem, se nazývá **isolovaným** bodem množiny $M$.

Poznámka 1. Bod $a$ patří jistě k $\overline{M}$, existuje-li posloupnost $x_1$, $x_2, \ldots$ bodů z $M$ s limitou $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Bod $a$ je jistě hromadným bodem množiny $M$, existuje-li prostá posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ bodů z $M$ s limitou $\lim_{n\to\infty} x_n = a$. Obě tato kriteria lze obrátit: Je-li $a \in \overline{M}$, existuje ke každému $n \in \mathbf{N}$ bod $x_n \in M$ tak, že $|a - x_n| < \frac{1}{n}$. Vyberu-li ke každému $n$ takové $x_n$, dostanu posloupnost, pro kterou $\lim_{n\to\infty} x_n = a$; jestliže je $a \in M'$, potom existuje v $M$ nekonečně mnoho bodů $x$, pro než $|x - a| < \frac{1}{n}$, takže, když $x_1, \ldots, x_{n-1}$ byly zvoleny, lze voliti $x_n \in M$ tak, že $|x_n - a| < \frac{1}{n}$ a že $x_n$ je různé od $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Tak dostáváme prostou posloupnost s limitou $a$. Jiné kriterium: $a$ je hromadným bodem množiny $M$ tehdy a jen tehdy, když každý interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ $(\varepsilon > 0)$ obsahuje aspoň jeden bod z $M$, různý od $a$. Je-li totiž $a \in M'$, je tato podmínka zřejmě splněna. Není-li však $a \in M'$, existuje interval $(a - \varepsilon_1, a + \varepsilon_1)$, obsahující nejvýše konečný počet bodů z $M$, načež zřejmě existuje menší interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, neobsahující žádný bod z $M$ kromě snad bodu $a$ samotného. Z tohoto kriteria je také vidět: bod $a \in M$ je isolovaným bodem množiny $M$ tehdy a jen tehdy, není-li hořejší kriterium splněno, t. j. existuje-li interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$, neobsahující kromě bodu $a$ již žádného dalšího bodu množiny $M$. Vše je velmi názorné, dělejte si náčrtky!

**Věta 67.** $\overline{M} = M \cup M'$.

Důkaz. Je jasno, že $M \cup M' \subset \overline{M}$. Budiž za druhé $y \in \overline{M}$. Potom je buďto $x \in M$ nebo $x \in \overline{M} \dot{-} M$. V druhém případě leží v každém intervalu $(x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ bod z $M$, který je ovšem různý od $x$. Tedy $x \in M'$ podle pozn. 1. Tedy: každý bod z $\overline{M}$ leží buďto v $M$ nebo v $M'$; t. j. $\overline{M} \subset M \cup M'$.

Poznámka 2. $M$ je uzavřená tehdy a jen tehdy, je-li $M' \subset M$ (neboť toto značí podle věty 67 totéž jako $\overline{M} = M$). Naproti tomu $M \subset M'$ značí, že $M$ nemá isolovaných bodů. Neprázdné množině bez isolovaných bodů se říká **hustě rozložená;** to tedy značí, že $\emptyset \neq M \subset M'$. Uzavřená hustě rozložená množina se nazývá **dokonalá** nebo **perfektní;** to tedy značí, že $\emptyset \neq M = M'$. (Někteří autoři při těchto definicích vynechávají podmínku $M \neq \emptyset$.)

Poznámka 3. Budiž $A \subset B \subset \mathbf{E}_1$. Říkáme, že $A$ je **hustá** v $B$, jestliže $B \subset \overline{A}$; to tedy znamená: Ke každému bodu $b \in B$ a ke každému

$\varepsilon > 0$ existuje bod $a \in A$ tak, že $a \in (b - \varepsilon,\ b + \varepsilon)$. Příklady: Množina $\mathbf{P}$ je hustá v $\mathbf{E}_1$. Množina všech racionálních čísel libovolného intervalu $J$ je hustá v $J$. Dokonce na př. množina všech čísel tvaru $\frac{k}{2^n}$ (kde $k$ probíhá všechna celá čísla, $n$ všechna přirozená čísla) je hustá v $\mathbf{E}_1$.[2])

**Věta 68.** *Každý disjunktní systém intervalů v $\mathbf{E}_1$ je spočetný.*

Podrobně řečeno: Budiž dán systém intervalů

$$J_\tau \ (\tau \in T),$$

kde $J_\tau J_\sigma = \emptyset$ pro $\tau \in T$, $\sigma \in T$, $\tau \neq \sigma$. Potom $T$ je spočetná množina.

Důkaz. Každý interval $J_\tau$ obsahuje racionální čísla; vyberme jedno z nich a označme je $r_\tau$; tedy $r_\tau \in J_\tau$. Je-li $\tau \neq \sigma$, je $r_\tau \neq r_\sigma$, ježto $J_\tau J_\sigma = \emptyset$. Přiřadím-li tedy každému $\tau \in T$ číslo $r_\tau$, dostávám prosté zobrazení množiny $T$ na jistou množinu racionálních čísel. Tedy je $T$ spočetná.

Poznámka 4. Bod $a$ nazvu *hromadným bodem* množiny $M$ *zprava* (resp. *zleva*), jestliže každý interval $(a, a + \varepsilon)$ (resp. $(a - \varepsilon, a)$), kde $\varepsilon > 0$, obsahuje nekonečně mnoho bodů množiny $M$. Zřejmě: $a$ je hromadným bodem množiny $M$ tehdy a jen tehdy, jestliže je buďto jejím hromadným bodem zprava nebo zleva. Tvrdím:

*Budiž $M \subset \mathbf{E}_1$; budiž $N$ množina oněch bodů množiny $M$, jež nejsou hromadnými body množiny $M$ zprava. Potom $N$ je spočetná.*

Důkaz: Každému bodu $x \in N$ přiřaďme určitý interval $J_x = (x, x + \varepsilon_x)$ $(\varepsilon_x > 0)$, neobsahující žádný bod z $M$.[3]) Kterékoliv dva intervaly $J_x$, $J_y$, přiřazené dvěma různým bodům $x \in N$, $y \in N$, jsou disjunktní. Neboť je-li na př. $x < y$, musí bod $y$ (ježto patří k $M$) ležeti mimo $J_x$, tedy $y \geq x + \varepsilon_x$. Podle věty 68 je tedy systém všech intervalů $J_x$ $(x \in N)$ spočetný. Ježto jsou tyto intervaly vzájemně jednoznačně přiřazeny bodům $x \in N$, je $N$ rovněž spočetná.

---

[2]) Vskutku, je-li $\frac{1}{2^m} < 2\varepsilon$, obsahuje $(b - \varepsilon, b + \varepsilon)$ aspoň jeden bod tvaru $k \cdot 2^{-m}$ ($k$ celé).

[3]) Jistě existuje interval $(x, x + \varepsilon)$, obsahující jen konečný počet bodů z $M$; vhodným zmenšením čísla $\varepsilon$ dostanu interval, neobsahující žádný bod z $M$.

Podobná věta platí „zleva“. Speciálně: *Množina všech isolovaných bodů libovolné množiny* $M \subset \mathbf{E}_1$ *je spočetná.*

Poznámka 5. *Budiž* $f$ *funkce* (reálná funkce jedné reálné proměnné), *definovaná v intervalu* $(a, b)$. *Budiž* $M$ *množina oněch bodů* $c \in (a, b)$, *v nichž* $f$ *má ostré lokální maximum.*[4]) *Potom* $M$ *je spočetná.*

Důkaz: Ke každému $c \in M$ existuje $n \in \mathbf{N}$ tak, že

$$(5) \qquad 0 < |x - c| < \frac{1}{n} \Rightarrow f(x) < f(c)\,.$$

Budiž $M_n$ množina oněch bodů $c \in (a, b)$, pro něž platí (5); zřejmě $M = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$. Každému bodu $c \in M_n$ přiřaďme interval $J_c = \left(c - \frac{1}{2n}, c + \frac{1}{2n}\right)$. Je-li $d \in M_n$, $d \neq c$, je $|c - d| \geqq \frac{1}{n}$; neboť jinak by bylo $0 < |c - d| < \frac{1}{n}$, a ježto pro body z $M_n$ platí (5), musilo by býti $f(d) < f(c)$ a současně $f(c) < f(d)$, což není možno. Tedy $|c - d| \geqq \frac{1}{n}$, $J_c J_d = \emptyset$, tedy (věta 68) systém intervalů $J_c$ je spočetný, tedy $M_n$ je spočetná,[5]) tedy $M$ je spočetná.

Podobně ovšem pro ostrá lokální minima.

Popíšeme nyní úplně strukturu otevřených množin v $\mathbf{E}_1$:

**Věta 69.** *Budiž* $G \neq \emptyset$ *otevřená množina v* $\mathbf{E}_1$. *Potom*

$$(6) \qquad G = \bigcup_{n \in \mathfrak{N}} I_n\,,$$

*kde vpravo je sjednocení disjunktního systému otevřených intervalů* $I_n \neq \emptyset$ *(takže podle věty* 68 *je* $\mathfrak{N}$ *spočetná).*[6]) *Toto vyjádření je jednoznačné. T. j. je-li*

$$(6a) \qquad G = \bigcup_{m \in \mathfrak{M}} J_m$$

---

[4]) Viz **DI**, def. 28.

[5]) Což plyne snadno i jinak.

[6]) Že naopak sjednocení jakéhokoliv systému otevřených intervalů je otevřená množina, plyne z věty 65.

*jiné vyjádření téhož druhu, je každý* $I_n$ *roven některému* $J_m$ *a každý* $J_m$ *roven některému* $I_n$.

Důkaz. Uvažme napřed toto: **A.** Jsou-li $I = (\alpha, \beta)$, $J = (\gamma, \delta)$ dva intervaly ležící v $G$, při čemž žádný z bodů $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$ neleží v $G$,[7]) potom je buďto $I = J$ nebo $IJ = \emptyset$. Důkaz: Je-li $I \neq J$, je buďto $\alpha \neq \gamma$ nebo $\beta \neq \delta$; budiž třeba $\alpha \neq \gamma$, a to $\alpha < \gamma$. Kdyby bylo $IJ \neq \emptyset$, musilo by býti $\gamma < \beta$, ale potom by bylo $\gamma \in (\alpha, \beta)$, tedy $\gamma \in G$ — spor. Tedy $IJ = \emptyset$.

Přiřaďme nyní každému číslu $x \in G$ interval $H_x = (\alpha_x, \beta_x)$ takto: budiž $\beta_x$ supremum oněch čísel $\beta > x$, pro něž interval $\langle x, \beta)$ leží v $G$. Taková $\beta$ existují, ježto $x$ je vnitřním bodem $G$. Tedy $\beta_x > x$. Tvrdím předně, že

$$\langle x, \beta_x) \subset G \, ; \tag{7}$$

neboť je-li $x \leqq y < \beta_x$, existuje podle definice suprema $\beta > y$ tak, že $\langle x, \beta) \subset G$, tedy $y \in G$. Za druhé tvrdím, že $\beta_x$ neleží v $G$. To je jasné, když $\beta_x = +\infty$. Kdyby $\beta_x < +\infty$ leželo v $G$, existovalo by $\varepsilon > 0$ tak, že $(\beta_x - \varepsilon, \beta_x + \varepsilon) \subset G$, načež by z (7) plynulo, že $\langle x, \beta_x + \varepsilon) \subset$ $\subset G$; ale to je ve sporu s definicí čísla $\beta_x$. Podobně budiž $\alpha_x$ infimum oněch $\alpha < x$, pro něž $(\alpha, x\rangle \subset G$. Podobně se dokáže, že $(\alpha_x, x\rangle \subset G$, ale že $\alpha_x$ neleží v $G$. Tím je tedy každému $x \in G$ přiřazen otevřený interval $H_x = (\alpha_x, \beta_x)$ s těmito vlastnostmi:

$$x \in H_x \subset G \, ; \quad \text{krajní body } H_x \text{ neleží v } G \, . \tag{8}$$

Tedy je

$$G = \bigcup_{x \in G} H_x \, . \tag{9}$$

Podle tvrzení **A** a podle (8) platí pro kterékoliv dva body $x, y$ z $G$ buďto $H_x = H_y$ nebo $H_x H_y = \emptyset$. Tedy je možno (9) psáti jako disjunktní sjednocení (napíši tam každý interval jen jednou — podrobně viz v poznámce [8])). Tím dostáváme jedno vyjádření tvaru (6).

---

[7]) Případy $\alpha = -\infty$, $\gamma = -\infty$, $\beta = +\infty$, $\delta = +\infty$ nejsou vyloučeny

[8]) Tomu je rozuměti takto: Budiž $\mathfrak{S}$ množina intervalů takto definovaná: Interval $I$ nechť patří do $\mathfrak{S}$ tehdy a jen tehdy, je-li $I$ roven některému $H_x$, takže $G$ je sjednocení všech intervalů $I \in \mathfrak{S}$. Ježto dva různé intervaly z $\mathfrak{S}$ jsou disjunktní (neboť $H_x \neq H_y \Rightarrow H_x H_y = \emptyset$), je množina $\mathfrak{S}$ spočetná (podle věty 68), takže intervaly $I \in \mathfrak{S}$ lze označiti $I_n$ ($n \in \mathfrak{N}$), kde $\mathfrak{N}$ je spočetná množina, načež máme pro $G$ vyjádření (6).

Podotkněme, že v každém takovém vyjádření (6) s disjunktními sčítanci platí, že krajní body žádného intervalu $I_n = (\gamma_n, \delta_n)$ nepatří ke $G$. Neboť kdyby bylo na př. $\delta_n \in G$, musil by bod $\delta_n$ ležeti uvnitř některého $I_k$ $(k \neq n)$, ale potom by zřejmě bylo $I_k I_n \neq \emptyset$ — spor. A nyní též snadno plyne jednoznačnost: Jsou-li (6), (6a) dvě taková vyjádření a vezmu-li nějaké $I_n$, existuje bod $x \in I_n$, načež existuje nutně $m$ tak, že $x \in J_m$, tedy $I_n J_m \neq \emptyset$, a tedy $I_n = J_m$ podle **A**. Podobně ke každému $J_m$ existuje $I_n$ tak, že $I_n = J_m$.

Poznámka 6. Tím je také popsána struktura všech uzavřených množin v $\mathbf{E}_1$. Budiž $\emptyset \neq M \neq \mathbf{E}_1$, budiž $M$ uzavřená, tedy $M = \mathbf{E}_1 \dot{-} G$, kde $G \neq \emptyset$, $G \neq \mathbf{E}_1$ je otevřená. Podle věty 69 tedy dostanu $M$ tak, že z $\mathbf{E}_1$ odstraním sjednocení disjunktního spočetného systému otevřených intervalů $\bigcup_{n \in \mathfrak{N}} I_n$, při čemž intervaly $I_n$ jsou jednoznačně určeny; říká se jim styčné intervaly množiny $M$.[9])

Poznámka 7. Je-li $\emptyset \neq M \subset \mathbf{E}_1$ shora omezená, je zřejmě $\sup M \in \in \overline{M}$; jestliže tedy $M$ je neprázdná, shora omezená a uzavřená, existuje v $M$ největší číslo, totiž $\sup M$. Podobně pro $\inf M$.

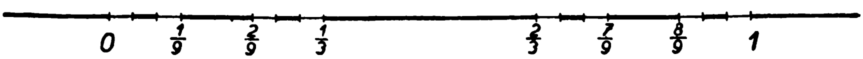
Poznámka 8. Sestrojíme nyní jednu dokonalou množinu v $\mathbf{E}_1$, důležitou po mnohých stránkách, která nám zároveň poskytne netriviální příklad k oživení obecných výkladů. Víme,[10]) že každé číslo $\alpha$ intervalu $\langle 0, 1 \rangle$ lze psáti v trojkové soustavě ve tvaru

$$\alpha = \frac{a_1}{3} + \frac{a_2}{3^2} + \frac{a_3}{3^3} + \ldots + \frac{a_n}{3^n} + \ldots \tag{10}$$

(píšeme krátce $0{,}a_1a_2a_3\ldots$), kde „cifry" $a_n$ jsou čísla 0, 1, 2 (pro $a_1 = a_2 = \ldots = 0$ dostaneme $\alpha = 0$, pro $a_1 = a_2 = \ldots = 2$ dostaneme $\alpha = 1$). Mám-li dva takové rozvoje různé $\alpha = 0{,}a_1a_2a_3\ldots$, $\beta = 0{,}b_1b_2b_3\ldots$ a je-li $n$ nejmenší index, pro nějž $a_n \neq b_n$, potom v případě $b_n > a_n$ je $\beta > \alpha$ — s touto výjimkou: Je-li $\beta = 0{,}b_1b_2\ldots b_{n-1}\,2222\ldots$ (samé dvojky na konci, $b_{n-1} < 2$), $\alpha = 0{,}b_1b_2\ldots(b_{n-1}+1)\,0000\ldots$ (samé nuly na konci), je $\beta = \alpha$. Označme znakem $D$ množinu oněch čísel intervalu $\langle 0, 1 \rangle$, jež lze aspoň jedním způsobem napsati ve tvaru (10) tak, že žádné $a_n$ není rovno jedné. Množinu $D$ dostaneme tím, že

[9]) Někdy se tak říká jenom těm intervalům $I_n$, které jsou omezené.
[10]) Viz větu 9.

z $\mathsf{E}_1$ odstraníme *předně* intervaly $(-\infty, 0)$, $(1, +\infty)$, za *druhé* interval $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ (neboť čísla tohoto intervalu jsou právě ona čísla, jež mají *nutně* první cifru 1, kdežto číslo $\frac{1}{3}$ lze ještě psáti 0,02222 ...), za *třetí* prostřední třetiny zbývajících intervalů $\langle 0, \frac{1}{3}\rangle$, $\langle \frac{2}{3}, 1\rangle$, t. j. intervaly $(\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $(\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$ (neboť čísla těchto intervalů jsou právě ona čísla, jež mají sice první cifru různou od 1, ale druhou cifru *nutně* rovnou 1) atd. Při $(n + 1)$-ním kroku odstraním všechny intervaly $(0{,}a_1a_2 \dots$ $\dots a_{n-1}1,\ 0{,}a_1a_2 \dots a_{n-1}2)$, kde cifry $a_1, \dots, a_{n-1}$ jsou různé od 1. (Počet těchto intervalů je $2^{n-1}$, délka každého z nich je $3^{-n}$ a tyto intervaly se skládají právě z těch čísel intervalu $\langle 0, 1\rangle$, jež mají první až $(n - 1)$-ní cifru různou od 1, ale $n$-tou cifru *nutně* rovnou 1.)




Obr. 2.

Označme $G$ sjednocení intervalů $(-\infty, 0)$, $(1, +\infty)$ a všech intervalů, které jsme dostali při druhém, třetím, ... kroku. To je *otevřená* množina, jež je sjednocením spočetného systému disjunktních otevřených intervalů:

$$(-\infty, 0), (1, +\infty), (\tfrac{1}{3}, \tfrac{2}{3}), (\tfrac{1}{9}, \tfrac{2}{9}), (\tfrac{7}{9}, \tfrac{8}{9}), (\tfrac{1}{27}, \tfrac{2}{27}), (\tfrac{7}{27}, \tfrac{8}{27}), (\tfrac{19}{27}, \tfrac{20}{27}), (\tfrac{25}{27}, \tfrac{26}{27}), \dots$$

(viz obr. 2). Zřejmě jest

$D = \mathsf{E}_1 \dot{-} G$. Tedy předně je $D$ *uzavřená*. Za druhé je $D$ *hustě rozložená*. Důkaz: Budiž $\alpha = 0{,}a_1a_2a_3 \ldots \in D$, t. j. cifry $a_1, a_2, \ldots$ jsou 0 nebo 2. Budiž $\alpha_n$ číslo, které se od $\alpha$ liší jen $n$-tou cifrou (a to tak, že je-li $a_n = 0$, resp. $a_n = 2$, volím $n$-tou cifru v $\alpha_n$ rovnu 2, resp. 0). Tedy $\alpha_n \in D$, $\alpha_n \neq \alpha$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$. Tedy $\alpha$ je hromadným bodem $D$.[11]) Tedy $D$ je *dokonalá* (t. j. uzavřená a hustě rozložená). Tvrdím dále, že $G$ je *hustá* v $\mathsf{E}_1$. Důkaz: Je-li $\alpha < 0$ nebo $\alpha > 1$, je $\alpha \in G$, tedy $\alpha \in \overline{G}$. Je-li však $\alpha \in \langle 0, 1\rangle$, lze psáti $\alpha = 0{,}a_1a_2a_3 \ldots$; budiž $\beta_n = 0{,}a_1a_2 \ldots$ $\ldots a_n111 \ldots$ Zřejmě $\beta_n \in G$, $\lim \beta_n = \alpha$, tedy opět $\alpha \in \overline{G}$. Tedy $\overline{G} = \mathsf{E}_1$, t. j. $G$ je hustá v $\mathsf{E}_1$. Tato důležitá množina $D$ se nazývá Cantorovo diskontinuum.

[11]) Neboť každý interval $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon)$ obsahuje bod z $D$, různý od $\alpha$.

Rozvažte si sami toto: Součet délek všech omezených styčných intervalů množiny $D$ (t. j. těch, které leží v $\langle 0, 1\rangle$) je $\frac{1}{3} + \frac{2}{3^2} + \frac{2^2}{3^3} + \frac{2^3}{3^4} + \ldots = 1$. Za druhé: Přiřadíte-li každému bodu $\frac{2a_1}{3} + \frac{2a_2}{3^2} + \frac{2a_3}{3^3} + \ldots$ množiny $D$ ($a_n = 0$ nebo 1) bod $\frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \ldots$, dostanete zobrazení množiny $D$ na $\langle 0, 1\rangle$. Vyloučíte-li z $D$ spočetnou množinu $M$ těch bodů, kde všechna $a_n$ až na konečný počet jsou rovna nule, bude parciální zobrazení (s oborem $D \dot{-} M$) prosté. Odtud (užitím věty 7) plyne, že $D$ má mohutnost kontinua, ač na pohled vypadá tak „řídké".

Poznámka 9. K intervalům, zavedeným v **DI** v kap. V, § 1, se někdy připojují ještě t. zv. „zvrhlé intervaly", t. j. jednobodové množiny (píše se pak též $\langle a, a\rangle$ místo $(a)$) a prázdná množina. Pracujeme-li v $\mathbf{E}_1^*$, připojujeme někdy ještě intervaly $\langle -\infty, b) = \underset{x}{\mathcal{E}}(-\infty \leqq x < b)$, $\langle -\infty, b\rangle = \underset{x}{\mathcal{E}}(-\infty \leqq x \leqq b)$ a pod. V této kapitole však, pokud nebude jinak poznamenáno, se omezíme na intervaly zavedené v **DI**, kap. V, § 1.

### Cvičení

*1.* Budiž $\emptyset \neq M \neq \mathbf{E}_1$, $M$ uzavřená. Dokažte: Bod $x \in M$ je isolovaným bodem množiny $M$ tehdy a jen tehdy, je-li společným krajním bodem dvou styčných intervalů. Tedy: $M$ je dokonalá tehdy a jen tehdy, nemají-li žádné dva styčné intervaly společný krajní bod.

*2.* Bod $a \in \mathbf{E}_1$ nazvu *kondensačním bodem* množiny $M \subset \mathbf{E}_1$, jestliže každý interval $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ obsahuje *nespočetně* mnoho bodů z $M$ (t. j. průnik $M . (a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ je nespočetná množina). Každý kondensační bod je ovšem hromadným bodem. Dokažte: Množina $M_c$ všech kondensačních bodů množiny $M$ je uzavřená (také $M'$ je vždy uzavřená — dokažte!).

*3.* Žádný bod $a \in M_c$ není isolovaným bodem množiny $M_c$. Návod: Nechť $a$ je isolovaným bodem $M_c$, takže jistý interval $I = (a - \delta, a + \delta)$ neobsahuje kromě $a$ žádného bodu z $M_c$. Ke každému bodu $x \in I$, $x \neq a$ existuje interval $(a_x, b_x)$ s racionálními krajními body ($a_x < x < b_x$), obsahující jen spočetně mnoho bodů z $M$ (neboť $x$ není kondensačním bodem). Různých intervalů $(a_x, b_x)$ je jen spočetně mnoho a jejich sjednocení obsahuje tedy jen spočetně mnoho bodů z $M$. Ale toto sjednocení obsahuje množinu $I \dot{-} (a)$, takže $I$ obsahuje jen spočetně mnoho bodů z $M$. To je ve sporu s $a \in M_c$.

**4.** Množina $M_c$ je prázdná nebo dokonalá — plyne z cvič. 2, 3.

**5.** Množina $M \dot{-} M_c$ je spočetná. Návod: Ke každému bodu $x \in M \dot{-} M_c$ existuje interval $(a_x, b_x)$ s racionálními krajními body $(a_x < x < b_x)$, obsahující jen spočetně mnoho bodů z $M$. Těchto intervalů je jen spočetně mnoho a jejich sjednocení obsahuje $M \dot{-} M_c$.

**6.** Každou uzavřenou množinu $M \subset \mathbf{E}_1$ lze psáti ve tvaru $M = A \cup B$ $(AB = \emptyset)$, kde $A$ je prázdná nebo dokonalá, $B$ spočetná. Důkaz: $M = M_c \cup \cup (M \dot{-} M_c)$. To je t. zv. věta Cantor-Bendixsonova.

## § 2. Borelova věta.

Říkáme, že systém $\mathfrak{S}$ množin

$$A_z \ (z \in Z)$$

pokrývá množinu $M$, jestliže

$$M \subset \bigcup_{z \in Z} A_z \,. \tag{11}$$

Dokážeme tuto důležitou větu (Borelovu) o množinách v $\mathbf{E}_1$:

**Věta 70.** *Budiž $M \subset \mathbf{E}_1$ uzavřená a omezená. Buďte $A_z$ $(z \in Z)$ otevřené množiny, pokrývající $M$, t. j. nechť platí* (11). *Potom existuje konečný počet množin $A_z$, pokrývající $M$; t. j. existují $z_1 \in Z, \ldots, z_p \in Z$ tak, že*

$$M \subset A_{z_1} \cup A_{z_2} \cup \ldots \cup A_{z_p} \,. \tag{12}$$

Důkaz: Budiž $M \neq \emptyset$ (jinak je vše jasné). Budiž

$$J_n \ (n = 1, 2, \ldots)$$

systém všech styčných intervalů množiny $M$ (viz pozn. 6 v § 1), takže

$$\mathbf{E}_1 \dot{-} M = \bigcup_n J_n \,. \tag{13}$$

Ježto $M$ je omezená, je mezi intervaly $J_n$ též interval tvaru $(-\infty, a)$ a interval $(b, +\infty)$ (dělejte si náčrtek!), dejme je na první místa:

$$J_1 = (-\infty, a), \quad J_2 = (b, +\infty) \,. \tag{14}$$

Všechny množiny $A_z$ a intervaly $J_n$ dohromady tvoří systém $\mathfrak{T}$ otevřených množin, pokrývající celý interval $(-\infty, +\infty) = \mathbf{E}_1$. Bod $x \in \mathbf{E}_1$ nazvu regulárním, jestliže interval $(-\infty, x)$ lze pokrýti konečným počtem množin systému $\mathfrak{T}$ (t. j. jestliže existuje konečný počet množin z $\mathfrak{T}$, jejichž sjednocení obsahuje interval $(-\infty, x)$). Budiž $\alpha$ supremum množiny všech regulárních bodů. Ježto bod $a$ je zřejmě regulární (viz (14)), je $a \leqq \alpha \leqq +\infty$. Předpokládejme, že $\alpha < +\infty$. Bod $\alpha$ leží v některé (otevřené!) množině $B$ systému $\mathfrak{T}$ a tedy existuje $\varepsilon > 0$ tak, že $(\alpha - \varepsilon, \alpha + \varepsilon) \subset B$. Jistě existuje regulární bod $\beta > \alpha - \varepsilon$. Tedy interval $(-\infty, \beta)$ lze pokrýti konečným počtem množin z $\mathfrak{T}$. Přidám-li k nim množinu $B$, je pokryt celý interval $(-\infty, \alpha + \varepsilon)$, tedy $\alpha + \varepsilon$ je regulární; ale to je spor, ježto $\alpha + \varepsilon > \alpha$. Tedy je jistě $\alpha = +\infty$ a tedy jistě existuje regulární bod $\gamma > b$ (viz (14)). Existuje tedy konečný počet množin z $\mathfrak{T}$:

$$B_1, B_2, \ldots, B_q, \tag{15}$$

který pokrývá interval $(-\infty, \gamma)$ a tedy množinu $M$ (neboť $M \subset \langle a, b\rangle$, $\gamma > b$). Mezi množinami (15) mohou býti jednak množiny $A_z$, jednak intervaly $J_n$. Ale intervaly $J_n$ nemají společných bodů s $M$; vynechám-li tedy z (15) intervaly $J_n$, dostanu opět systém množin pokrývajících $M$, složený pouze z množin $A_z$.

### Cvičení

**1.** Není-li $M$ omezená, neplatí pro ni tvrzení Borelovy věty. Důkaz: Intervaly $(-n, n)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ pokrývají $M$, ale žádný konečný systém těchto intervalů nepokrývá $M$.

**2.** Není-li $M$ uzavřená, neplatí pro ni tvrzení Borelovy věty. Důkaz: Existuje bod $a \in M' \dot{-} M$. Intervaly $\left(-\infty, a - \frac{1}{n}\right)$, $\left(a + \frac{1}{n}, +\infty\right)$ $(n = 1, 2, \ldots)$ pokrývají $M$, ale žádný konečný systém těchto intervalů nepokrývá $M$.

**3.** Užitím Borelovy věty dokažte větu 63 o stejnoměrné spojitosti. Návod: Budiž $\varepsilon > 0$; ke každému $x \in \langle a, b\rangle$ existuje interval $J_x = (x - \delta_x, x + \delta_x)$ tak, že $(y \in \langle a, b\rangle, |y - x| < 2\delta_x) \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Existuje konečný počet bodů $x_1, \ldots, x_p$ tak, že $\langle a, b\rangle \subset J_{x_1} \cup \ldots \cup J_{x_p}$. Budiž $\delta = \text{Min}\,(\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_p})$. Je-li $x \in \langle a, b\rangle$, $y \in \langle a, b\rangle$, $|x - y| < \delta$, leží $x$ v některém $J_{x_r}$ $(1 \leqq r \leqq p)$, tedy $|x - x_r| < \delta_{x_r}$, $|y - x_r| < 2\delta_{x_r}$, a odtud snadno $|f(x) - f(y)| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon$.

**§ 3. Spojitost a limita.** Slovem funkce budeme rozuměti v této kapitole, pokud nebude jinak řečeno, reálnou funkci jedné reálné proměnné ve smyslu kap. I, § 9. Oborem funkce bude tedy vždy nějaká množina $M \subset \mathsf{E}_1$; pro hodnoty $f(x)$ funkce $f$ připouštím však také hodnoty $+\infty$ a $-\infty$; kde jde o konečné funkce, řeknu to zvláště.[12])

Zobecníme trochu pojem limity a spojitosti. Budiž $A \subset \mathsf{E}_1$ nějaká množina, budiž $a \in \mathsf{E}_1$ její hromadný bod (t. j. $a \in A'$). Budeme říkati, že funkce $f$ má v bodě $a$ limitu (vlastní) $c$ vzhledem k množině $A$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

(16) $$(x \in A, 0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon\,;$$

znak

(17) $$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = c\,.$$

Je-li současně také $\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = d$, je nutně $d = c$ (t. j. $f$ má v $a$ vzhledem k $A$ nejvýše jednu limitu). Důkaz: k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že platí (16) a současně

(18) $$(x \in A, 0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - d| < \varepsilon\,.$$

Ježto $a$ je hromadným bodem množiny $A$, existuje $x$ tak, že premisa implikací (16), (18) je splněna, takže platí (pro toto $x$) nerovnosti v (16), (18) vpravo, a odtud

$$|c - d| \leqq |c - f(x)| + |f(x) - d| < 2\varepsilon\,.$$

Tedy $|c - d|$ je menší než každé kladné číslo, tedy $c = d$.

Rozdíl proti definici 19 v **DI** je jen ten, že si zde všímáme jen hodnot $x \in A$. Je-li na př. $A = (a, a')$ $(a' > a)$, značí (17) prostě limitu zprava, je-li $A = (a', a)$ $(a' < a)$, značí (17) limitu zleva; je-li $a$ vnitřním bodem množiny $A$, značí (17) prostě limitu v bodě $a$ ve smyslu def. 19 v **DI**.

Podobně definujeme: Je-li $a \in A'$, potom

(19) $$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = +\infty$$

---

[12]) Jediný rozdíl proti definici 14a v **DI** je ten, že připouštíme též hodnoty $f(x) = +\infty$, $f(x) = -\infty$. To je vhodné: nebylo by přehledné říkat na př., že derivace $f'$ je funkce, která není definována v bodech, kde $f'(x)$ existuje, ale je nevlastní. Teď ovšem již vzorec $f'(x) = +\infty$ nebude nedělitelným znakem, nýbrž bude prostě znamenat: Funkce $f'$ má v bodě $x$ hodnotu $+\infty$.

značí, že ke každému konečnému $K$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(x \in A, 0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow f(x) > K .$$[13])

Podobně pro limitu $- \infty$.

Budiž opět $A \subset \mathsf{E}_1$, ale nyní $a \in A$ (nemusí být $a \in A'$). Budiž předně $f(a)$ konečné. Potom říkáme, že $f$ je spojitá vzhledem k $A$ v bodě $a$, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(20) \qquad (x \in A, |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon .$$

Budiž za druhé $f(a) = + \infty$. Potom říkáme, že $f$ je spojitá v $a$ vzhledem k $A$, jestliže ke každému konečnému $K$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(21) \qquad (x \in A, |x - a| < \delta) \Rightarrow f(x) > K .$$

Podobně pro $f(a) = - \infty$.

Je-li $a \in AA'$, znamená tato spojitost zřejmě totéž jako

$$(22) \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = f(a)$$

(viz podobné věty 103, 104 v **DI**). K důkazu stačí poznamenat, že (20) značí totéž jako (16) pro $c = f(a)$ (podobně v případě $f(a) = + \infty$, $f(a) = - \infty$). Je-li však $a$ isolovaným bodem množiny $A$, je každá funkce, pro kterou $f(a)$ je definováno, spojitá v $a$ vzhledem k $A$. To je jasné, neboť při dostatečně malém $\delta > 0$ platí $(x \in A, |x - a| < \delta) \Rightarrow$ $\Rightarrow x = a$, tedy $f(x) = f(a)$. Je-li $f$ spojitá vzhledem k $A$ v každém bodě množiny $A$, říkáme krátce, že $f$ je spojitá v $A$ (to je ve shodě s definicí pojmu „$f$ je spojitá v intervalu $I$" v **DI**, def. 23, pokud ovšem $f$ je konečná v $I$).

Zachováváme též stará označení: $\lim_{x \to a} f(x)$, $\lim_{x \to a+} f(x)$, $\lim_{x \to a-} f(x)$ znamená limitu v bodě $a$ vzhledem k $\mathsf{E}_1$, vzhledem k $(a, + \infty)$, vzhledem k $(- \infty, a)$. Podobně spojitost v bodě $a$, spojitost v bodě $a$ zprava (zleva) znamená spojitost v bodě $a$ vzhledem k $\mathsf{E}_1$, vzhledem k $\langle a, + \infty)$, vzhledem k $(- \infty, a\rangle$.

Všechny tyto pojmy probereme s obecnějšího stanoviska v kap. VI.

Příklad 1. Budiž $f(x) = 1$ pro racionální $x$, $f(x) = 0$ pro iracionální $x$. Budiž $\boldsymbol{P}$ množina všech racionálních, $I$ množina všech iracio-

[13]) Zde ovšem některé hodnoty $f(x)$ mohou být $+ \infty$.

nálních čísel, $A$ množina všech čísel tvaru $\sqrt[3]{r}$, kde $r$ je racionální. Potom pro každé $a$ je

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in P}} f(x) = 1\,, \lim_{\substack{x \to a \\ x \in I}} f(x) = 0\,, \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) \text{ neexistuje.}^{14})$$

Dále: $f$ je spojité v $\mathsf{P}$, $f$ je spojité v $I$, ale $f$ není spojté v $\mathsf{P} \cup I = \mathsf{E}_1$.

Příklad 2. Budiž $A \subset B \subset \mathsf{E}_1$.

Potom platí: 1. Je-li $a \in A'$,

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x) = c\,, \quad \text{je též } \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = c\,.$$

2. Je-li v bodě $a \in A$ funkce $f$ spojitá vzhledem k $B$, je též v bodě $a$ spojitá vzhledem k $A$. To je zřejmé.

Zaveďme nyní tento pojem: Nechť $f$ je definována v jistém intervalu $(a - \delta, a + \delta)$ $(\delta > 0)$. Jestliže $f$ není spojitá v bodě $a$, ale jestliže existují

$$\lim_{x \to a+} f(x)\,, \quad \lim_{x \to a-} f(x)\,,$$

říkáme, že bod $a$ je bodem nespojitosti **prvního druhu** (pro funkci $f$).

**Věta 71.** *Budiž $f$ definována v otevřeném intervalu $J$; budiž $M$ množina jejích bodů nespojitosti* 1. *druhu, jež leží v $J$. Potom je $M$ spočetná.*

Důkaz. Budiž $M_1$ množina oněch bodů $x \in J$, pro něž $\lim_{y \to x+} f(y)$ existuje, ale je různá od $f(x)$. Budiž $M_2$ množina oněch bodů $x \in J$, pro něž $\lim_{y \to x-} f(y)$ existuje, ale je různá od $f(x)$. Stačí dokázati, že $M_1$, $M_2$ jsou spočetné. Stačí dokonce dokázati, že $M_1$ je spočetná (spočetnost množiny $M_2$ plyne pak přechodem k funkci $f(-x)$). Jest $M_1 = M_{11} \cup M_{12}$, kde $M_{11}$ je množina oněch $x \in J$, pro něž $f(x) < \lim_{y \to x+} f(y)$, $M_{12}$ pak je množina oněch $x \in J$, pro něž $f(x) > \lim_{y \to x+} f(y)$. Stačí ukázati, že $M_{11}$ je spočetná (spočetnost množiny $M_{12}$ plyne pak přechodem k funkci $-f(x)$). Ke každému $x \in M_{11}$ lze přiřaditi racionální číslo $r(x)$ tak, že $f(x) < r(x) < \lim_{y \to x+} f(y)$. (Číslo $r(x)$ je možno

[14]) To je vidět z toho, že jak racionální čísla z $A$, tak iracionální čísla z $A$ tvoří množinu hustou v $\mathsf{E}_1$ (dokažte!).

jednoznačně definovati třeba takto: Množinu $P$ všech racionálních čísel srovnáme nějak v posloupnost, načež bude $r(x)$ první člen $r$ této posloupnosti, pro nějž je

$$f(x) < r < \lim_{y \to x+} f(y)\,.) \tag{23}$$

Pro každé $r \in P$ budiž $N_r$ množina oněch $x \in M_{11}$, pro něž je $r(x) = r$. Je tedy $M_{11} = \bigcup_{r \in P} N_r$; ježto $P$ je spočetná, stačí ukázati, že každá množina $N_r$ je spočetná. Budiž tedy $r$ racionální číslo. Pro každé $x \in N_r$ platí (23) a existuje tedy $\delta(x) > 0$ tak, že pro $x < y < x + \delta(x)$ je $f(y) > r$. Tvrdím: jsou-li $x_1, x_2$ dva různé body množiny $N_r$, třeba $x_1 < x_2$, mají intervaly $(x_1, x_1 + \delta(x_1))$, $(x_2, x_2 + \delta(x_2))$ prázdný průnik. Kdyby tomu totiž tak nebylo, bylo by $x_1 < x_2 < x_1 + \delta(x_1)$, tedy $f(x_2) > r$, což není možno, neboť $x_2 \in N_r$ a tedy $f(x_2) < r$.

Máme tedy každému bodu $x \in N_r$ vzájemně jednoznačně přiřazen interval $(x, x + \delta(x))$ a tyto intervaly tvoří disjunktní systém. Tedy je systém těchto intervalů spočetný (věta 68), tedy i $N_r$ je spočetné.

## Cvičení

*1.* Budiž $f(x) = [x]$; jediné body nespojitosti jsou body $x = n$ ($n$ celé) a ty jsou vesměs 1. druhu.

*2.* Budiž $f(x) = 1$ pro racionální $x$, $f(x) = 0$ pro iracionální $x$. Žádný bod v $E_1$ není bodem nespojitosti 1. druhu. Dokonce: v žádném bodě nemá $f$ limitu ani zprava, ani zleva.

*3.* Budiž $f(x) = 0$ pro $x \leqq 0$, $f(x) = \sin \frac{1}{x}$ pro $x > 0$; jediný bod nespojitosti jest 0 a ten není 1. druhu.

*4.* Podobně jako v kap. II, § 1, pozn. 4 platí toto: Budiž $a \in A'$. Potom rovnice

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = q$$

($q$ konečné nebo nekonečné) platí tehdy a jen tehdy, jestliže platí toto:

1. Ke každému $q' > q$ existuje $\delta > 0$ tak, že $(x \in A,\ 0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) < q'$.

2. Ke každému $q'' < q$ existuje $\delta > 0$ tak, že $(x \in A,\ 0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) > q''$.

Podobně: $f$ je spojitá v bodě $a \in A$ vzhledem k $A$ tehdy a jen tehdy, platí-li toto:

1. Ke každému $q' > f(a)$ existuje $\delta > 0$ tak, že $(x \in A,\ |x - a| < \delta) \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) < q'$.

2. Ke každému $q'' < f(a)$ existuje $\delta > 0$ tak, že $(x \in A,\ |x - a| < \delta) \Rightarrow$ $\Rightarrow f(x) > q''$. (To platí, ať je $f(a)$ konečná či nekonečná.)

**§ 4. Podmínky pro existenci limity. Věta 72.** *Budiž $A \subset \mathbf{E}_1$, $a \in A'$. Potom limita* (vlastní nebo nevlastní)

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) \tag{24}$$

*existuje tehdy a jen tehdy, jestliže je splněna tato podmínka* $(P)$: *Pro každou posloupnost $x_1, x_2, \ldots$, pro kterou je*

$$x_n \neq a\,,\ x_n \in A \quad \textit{pro}\ n = 1, 2, \ldots,\ \lim_{n \to \infty} x_n = a\,, \tag{25}$$

*existuje*

$$\lim_{n \to \infty} f(x_n)\,. \tag{26}$$

*Je-li tato podmínka splněna, je limita* (26) *pro všechny uvedené posloupnosti táž a je rovna limitě* (24).

Poznámka 1. Tato věta dovoluje tedy převésti pojem limity funkce na pojem limity posloupnosti (ovšem, zjišťuji-li existenci limity (24), musím vyšetřiti *všechny* posloupnosti s vlastnostmi (25)).

Důkaz. I. Nechť limita (24) existuje, označme ji $c$. Budiž třeba $c$ konečné. Budiž $x_1, x_2, \ldots$ posloupnost s vlastnostmi (25). Budiž $\varepsilon > 0$. Podle definice z § 3 existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(x \in A,\ 0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - c| < \varepsilon\,. \tag{27}$$

Podle (25) existuje $n_0$ tak, že

$$n > n_0 \Rightarrow (x_n \in A,\ 0 < |x_n - a| < \delta)\,.$$

Je-li tedy $n > n_0$, je premisa v (27) splněna pro $x = x_n$, tedy je splněn i závěr, t. j. $|f(x_n) - c| < \varepsilon$, t. j. $\lim\limits_{n \to \infty} f(x_n) = c$. T. j. $(P)$ je splněna.

II. Nechť podmínka $(P)$ je splněna. Máme-li dvě posloupnosti $t_1, t_2, \ldots;\ u_1, u_2, \ldots$, pro něž $t_n \neq a \neq u_n$, $t_n \in A$, $u_n \in A$, $\lim t_n =$ $= \lim u_n = a$, potom existují

$$(28) \qquad \lim f(t_n) = \alpha\,, \quad \lim f(u_n) = \beta\,.$$

Tvrdím, že $\alpha = \beta$. Neboť posloupnost $t_1, u_1, t_2, u_2, \ldots$ rovněž splňuje podmínku tvaru (25), a tedy posloupnost $f(t_1), f(u_1), f(t_2), f(u_2), f(t_3) \ldots$ má limitu $\gamma$. Ale v (28) stojí limity vybraných posloupností, tedy $\alpha = \beta = \gamma$. Tedy: *pro všechny posloupnosti s vlastností* (25) *má* (26) *touž hodnotu, kterou označím c*. Budiž třeba $c$ konečné. Tvrdím, že

$$(29) \qquad \lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = c\,.$$

Nechť to není pravda. To znamená: Není pravda, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že platí implikace (27). T. j. existuje jisté $\varepsilon > 0$ (které nyní podržíme pevné), k němuž neexistuje příslušné $\delta > 0$. T. j. pro každé $\delta > 0$ implikace (27) je nesprávná, t. j. ke každému $\delta > 0$ existuje $x$, které splňuje sice premisu, ale nesplňuje závěr. Tedy speciálně: ke každému číslu $\frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ existuje $x_n$ tak, že je $x_n \in A$, $0 < |x_n - a| < \frac{1}{n}$, ale že není

$$(30) \qquad |f(x_n) - c| < \varepsilon\,.$$

Vyberu-li ke každému přirozenému $n$ jedno takové $x_n$,[15]) dostávám posloupnost $x_1, x_2, \ldots$, která splňuje (25), ale nesplňuje rovnici $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$ (neboť pro žádné $n$ neplatí (30)), což je však ve sporu s tím, co jsme již dokázali. Tedy platí (29).

III. Předpokládali jsme $c$ konečné. Pro $c = +\infty$ je důkaz obdobný, pouze místo $|f(x) - c| < \varepsilon$ se píše $f(x) > K$. Podobně pro $c = -\infty$.

Poznámka 2. Odtud plyne ihned, že platí věta o limitě absolutní hodnoty, součtu, součinu, podílu, maxima a minima, obdobná větě 13 o posloupnostech. A odtud plyne podle § 3 (viz text okolo vzorce (22)) obdobná věta o spojitosti absolutní hodnoty, součtu atd.

Příklad: Nechť $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} f(x) = c$, $\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} g(x) = d$ (vlastní nebo nevlastní) a nechť $cd$ má smysl. Potom pro každou posloupnost s vlastnostmi

---

[15]) Je zajímavo, že zde vystupuje axiom výběru.

(25) je $\lim f(x_n) = c$, $\lim g(x_n) = d$ (věta 72), tedy $\lim f(x_n)\, g(x_n) = cd$ (věta 13), tedy $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)\, g(x) = cd$ (věta 72).

**Věta 73.** *Budiž $A \subset \mathsf{E}_1$, $a \in A'$. Potom* vlastní *limita*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) \tag{31}$$

*existuje tehdy a jen tehdy, jestliže je splněna tato (t. zv.* Bolzano-Cauchyova) *podmínka:*

*(B. C.) Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že*

$$(x \in A,\, y \in A,\, 0 < |x - a| < \delta,\, 0 < |y - a| < \delta) \Rightarrow \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon\,. \tag{32}$$

Důkaz. I. Nechť existuje vlastní limita (31), označme ji $c$. Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(x \in A,\, 0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow |f(x) - c| < \tfrac{1}{2}\varepsilon\,.$$

Jestliže tedy $x, y$ splňují premisu implikace (32), je $|f(x) - c| < \frac{1}{2}\varepsilon$, $|f(y) - c| < \frac{1}{2}\varepsilon$, tedy $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

II. Nechť podmínka (B. C.) je splněna. Nechť $x_1, x_2, \ldots$ má vlastnost (25). Budiž $\varepsilon > 0$. Potom existuje $\delta > 0$ tak, že platí (32). Za druhé existuje (podle (25)) $n_0$ tak, že pro každé $n > n_0$ je

$$x_n \in A\,,\, 0 < |x_n - a| < \delta\,. \tag{33}$$

Je-li tedy $n > n_0$, $m > n_0$, platí vedle (33) ještě $x_m \in A$, $0 < |x_m - a| < \delta$, takže podle (32) je $|f(x_n) - f(x_m)| < \varepsilon$ pro $n > n_0$, $m > n_0$. Podle věty 26 existuje tedy vlastní $\lim f(x_n)$, a to pro každou posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ s vlastností (25). Podle věty 72 existuje tedy vlastní limita (31).

**§ 5. Monotonní funkce.** Budiž $f$ funkce (ne nutně konečná) definovaná v množině $A \subset \mathsf{E}_1$. Jestliže

$$(x_1 \in A,\, x_2 \in A,\, x_1 < x_2) \Rightarrow f(x_1) \leqq f(x_2)\,,$$

říkáme, že $f$ je *neklesající* v $A$. Podobně funkce *rostoucí* ($f(x_1) < f(x_2)$), *klesající* ($f(x_1) > f(x_2)$), *nerostoucí* ($f(x_1) \geqq f(x_2)$). Společný název: funkce *monotonní* v $A$.

**Věta 74.** *Budiž $f$ neklesající v $A$. Potom platí:*

*I. Je-li $a$ hromadným bodem množiny $A$ zleva, existuje*[16])

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A,\, x < a}} f(x) = \sup_{\substack{x < a \\ x \in A}} f(x) . \tag{34}$$

*II. Je-li $a$ hromadným bodem množiny $A$ zprava, existuje*

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A,\, x > a}} f(x) = \inf_{\substack{x > a \\ x \in A}} f(x) . \tag{35}$$

Poznámka 1. Přechodem k funkci $-f(x)$ dostaneme obdobnou větu pro funkce nerostoucí (vymění se jen sup a inf).[17]) Přechodem k funkci $g(x) = -f(-x)$ se vymění limity zprava a zleva a supremum s infimem (proveďte podrobně!), takže stačí dokázati I.

Důkaz. Položme $\sup\limits_{\substack{x<a \\ x \in A}} f(x) = b$. Je-li $b = -\infty$, je (34) zřejmá ($f(x) = -\infty$ pro $x < a$, $x \in A$). Budiž tedy $b > -\infty$. Zvolím-li libovolné $b' < b$, existuje podle definice suprema číslo $x_0 \in A$, $x_0 < a$ (tedy $x_0 = a - \delta$, $\delta > 0$) tak, že $f(x_0) > b'$. Ježto $f$ je neklesající v $A$, platí:

$$(x \in A, a - \delta < x < a) \Rightarrow b' < f(x) \leqq b$$

($b$ je supremum!). Ke každému $b' < b$ takové $\delta > 0$ existuje; ale odtud zřejmě plyne (34) .[18])

Poznámka 2. Obdobně platí (důkaz přenechávám čtenáři): Budiž $f$ neklesající v $A$. Není-li $A$ shora omezená, existuje

$$\lim_{\substack{x \to +\infty \\ x \in A}} f(x)^{19}) = \sup_{x \in A} f(x) ;$$

není-li $A$ zdola omezená, existuje

$$\lim_{\substack{x \to -\infty \\ x \in A}} f(x)^{19}) = \inf_{x \in A} f(x) .$$

[16]) Limitní znak značí limitu v bodě $a$ vzhledem k průniku $A \,.\, (-\infty, a)$.

[17]) Totéž platí o dalších větách tohoto paragrafu; proto je vyslovuji často jen pro funkce neklesající.

[18]) Viz § 3, cvič. 4.

[19]) Smysl těchto symbolů je jistě čtenáři jasný.

Je-li speciálně $A$ otevřený interval, dostáváme z věty 74 ihned:

**Věta 75.** *Budiž $f$ neklesající v $(a, b)$. Potom platí: V každém bodě $c \in (a, b)$ existují (podle věty 74) limity*

$$\lim_{x \to c-} f(x) = \sup_{a<x<c} f(x) , \quad \lim_{x \to c+} f(x) = \inf_{c<x<b} f(x) , \tag{36}$$

*takže zřejmě*

$$\lim_{x \to c-} f(x) \leqq f(c) \leqq \lim_{x \to c+} f(x) \tag{37}$$

*(z (36), (37) plyne, že obě limity při konečném $f$ jsou vlastní). Všechny body nespojitosti, ležící v $(a, b)$, jsou tedy 1. druhu a jejich množina je tedy spočetná (podle věty 71).*

Víme, že funkce spojitá a konečná v intervalu $(a, b)$ zobrazuje $(a, b)$ na interval nebo jednobodovou množinu (**DI**, věta 130). Pro monotonní funkce se však tato věta dá obrátit:

**Věta 76.** *Budiž $f$ funkce monotonní v $(a, b)$, jež zobrazuje $(a, b)$ na interval nebo jednobodovou množinu.*[20]) *Potom $f$ je spojitá v $(a, b)$.*

Důkaz stačí provésti pro neklesající funkci. Nechť $f$ *není* spojitá v jistém bodě $c \in (a, b)$. Tedy není $f(c) = \lim_{x \to c} f(x)$, takže podle (37) je $\lim_{x \to c-} f(x) < \lim_{x \to c+} f(x)$. Položím-li tedy $A = \sup_{a<x<c} f(x)$, $B = \inf_{c<x<b} f(x)$, je podle (36) $A < B$. Funkce $f$ nabývá jistě hodnot $f(x) \leqq A$ (pro $a < x < c$) i hodnot $f(x) \geqq B$ (pro $c < x < b$), ale nabývá nejvýše jedné hodnoty intervalu $(A, B)$ (totiž — možná — $f(c)$). Tedy množina všech hodnot $f(x)$ $(a < x < b)$ není ani jednobodová, ani interval.

Poznámka 3. Ve větě 76 není třeba předpokládati, že interval jest otevřený, jak si čtenář sám rozváží. Větu 75 je třeba v tomto případě nepatrně modifikovati, což si čtenář sám provede.

Pojednáme nyní o rozšíření oboru funkcí jedné proměnné. Budiž $f$ funkce konečná v uzavřené množině $M \subset \mathbf{E}_1$ $(M \neq \emptyset)$. Definujme konečnou funkci $g$ v intervalu $(-\infty, +\infty)$ takto:

1. Pro $x \in M$ klademe $g(x) = f(x)$.

---

[20]) Není-li $f$ konečná, musím ovšem připouštěti také intervaly, obsahující bod $-\infty$ nebo $+\infty$, na př. $\langle -\infty, b)$, $\langle -\infty, b\rangle$ a pod.; viz § 1, pozn. 9.

2. Je-li $(a_n, b_n) = J_n$ omezený styčný interval množiny $M$, klademe pro $x \in J_n$

$$g(x) = f(a_n) + \frac{x - a_n}{b_n - a_n} (f(b_n) - f(a_n)) ; \tag{38}$$

pravá strana je lineární funkce, mající pro $x = a_n$ resp. $b_n$ hodnotu $f(a_n)$ resp. $f(b_n)$, takže všechny její hodnoty pro $x \in J_n$ leží v intervalu $\langle f(a_n), f(b_n)\rangle$.[21])

3. Je-li $M$ zdola omezená, existuje styčný interval tvaru $(-\infty, a)$; v tomto intervalu klaďme

$$g(x) = f(a) + x - a .$$

4. Je-li $M$ shora omezená, existuje styčný interval tvaru $(b, +\infty)$; v tomto intervalu klaďme

$$g(x) = f(b) + x - b .$$

**Věta 77.** *Budiž $f$ konečná v uzavřené množině $M \neq \emptyset$. Sestrojme $g$ tak, jak bylo popsáno. Potom platí:*

$\alpha$) *Pro $x \in M$ je $g(x) = f(x)$.*

$\beta$) *Je-li $f$ spojitá v $M$, je $g$ spojitá v $(-\infty, +\infty)$.*

$\gamma$) *Je-li $f$ neklesající v $M$, je $g$ neklesající v $(-\infty, +\infty)$.*

$\delta$) *Je-li $f$ rostoucí v $M$, je $g$ rostoucí v $(-\infty, +\infty)$.*

Důkaz. $\alpha$) plyne z 1.

$\beta$) Budiž $f$ spojitá v $M$. Budiž $c \in \mathsf{E}_1$. Je-li $c$ v některém styčném intervalu nebo počátečním bodem některého styčného intervalu, je $g$ v jistém intervalu $\langle c, c + \delta\rangle$ lineární, a tedy je spojitá zprava v bodě $c$.

Zbývá případ, že $c \in M$ a že při tom $c$ není počátečním bodem žádného styčného intervalu. Není tedy možno, aby nějaký interval $(c, c + \Delta)$ ležel v $\mathsf{E}_1 \dot{-} M$, t. j. $c$ je hromadným bodem $M$ zprava. Budiž $\varepsilon > 0$. Ze spojitosti funkce $f$ v bodě $c$ vzhledem k $M$ plyne, že existuje bod $c_1 > c$, $c_1 \in M$ tak blízko bodu $c$, že

$$(c \leqq x \leqq c_1, x \in M) \Rightarrow f(x) \in (f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon) . \tag{39a}$$

[21]) Pro $f(a_n) > f(b_n)$ bych měl vyměnit krajní body; pro $f(a_n) = f(b_n)$ se interval redukuje na bod. Ale čtenář mně porozumí.

Budiž nyní $x$ nějaký bod z $\langle c, c_1 \rangle$, který neleží v $M$, tedy leží v některém styčném intervalu $K = (\lambda, \mu)$. Ježto body $c, c_1$ patří k $M$, nemohou ležeti v $K$, t. j. $c \leqq \lambda < \mu \leqq c_1$; ovšem $\lambda \in M$, $\mu \in M$, takže podle (39a) leží hodnoty $f(\lambda)$, $f(\mu)$ v intervalu $(f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon)$; podle 2. však v témže intervalu leží $f(x)$. Tedy také

$$(c \leqq x \leqq c_1, x \in \mathbf{E}_1 \dot{-} M) \Rightarrow f(x) \in (f(c) - \varepsilon, f(c) + \varepsilon) . \tag{39b}$$

Ale z (39a), (39b) plyne $c \leqq x \leqq c_1 \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$, t. j. $f$ je spojitá v bodě $c$ zprava.

Podobný je důkaz pro spojitost zleva.

$\gamma$) a $\delta$) Budiž $f$ neklesající [rostoucí][22]) v $M$. Podle 2, 3, 4 je $f$ neklesající [rostoucí] v každém styčném intervalu. Budiž $x_1 < x_2$. Leží-li $x_1, x_2$ v témže styčném intervalu, je $f(x_1) \leqq f(x_2)$ $[f(x_1) < f(x_2)]$. Neleží-li v témže styčném intervalu, je průnik $M \,.\, \langle x_1, x_2 \rangle$ neprázdná uzavřená množina; budiž $z_1$ její nejmenší, $z_2$ největší číslo.[23]) Potom buďto $x_1 = z_1$ nebo $x_1$ leží ve styčném intervalu o koncovém bodě $z_1$, tedy $f(x_1) \leqq f(z_1)$ [rovnost jen pro $x_1 = z_1$]. Dále buďto $x_2 = z_2$ nebo $x_2$ leží ve styčném intervalu o počátečním bodě $z_2$, tedy $f(z_2) \leqq f(x_2)$ [rovnost jen pro $z_2 = x_2$]. A konečně je $z_1 \in M$, $z_2 \in M$, $z_1 \leqq z_2$ a tedy $f(z_1) \leqq f(z_2)$ [rovnost jen pro $z_1 = z_2$]. Tedy $f(x_1) \leqq f(x_2)$ [rovnost by mohla platit jen pro $x_1 = z_1 = z_2 = x_2$, ale to není možno, ježto $x_1 < x_2$]. Tím je důkaz hotov.

Pro neuzavřené $M$ máme aspoň tuto větu:

**Věta 78.** *Budiž $\emptyset \neq M \subset \mathbf{E}_1$, budiž $f$ neklesající a konečná v $M$. Budiž $J$ nejmenší interval, obsahující množinu $M$. Potom existuje funkce $g$, neklesající a konečná v $J$, pro kterou platí, že $x \in M \Rightarrow g(x) = f(x)$.*[24])

Důkaz. Budiž $a = \inf M$, $b = \sup M$. Potom $J$ jest interval o krajních bodech $a, b$, při čemž $a$ patří (nepatří) do $J$, jestliže $a$ patří (nepatří) do $M$; podobně pro $b$. Pro $x \in J$ položme

[22]) Slova a vzorce v hranatých závorkách se vztahují na případ $\delta$ ($f$ rostoucí v $M$).

[23]) Toto největší a nejmenší číslo existuje podle § 1, pozn. 7.

[24]) Skládá-li se $M$ z jediného bodu, redukuje se $J$ také na bod a vše je triviální.

(40) $$g(x) = \sup_{\substack{y \in M \\ y \leqq x}} f(y) \,.$$

Zřejmě je $g$ neklesající v $J$. Je-li $x \in J$, existují v $M$ body $x_1 \leqq x$, $x_2 \geqq x$, a podle (40) je zřejmě $f(x_1) \leqq g(x) \leqq f(x_2)$, takže $g(x)$ je konečné. A je-li $x \in M$, je $\sup\limits_{\substack{y \in M \\ y \leqq x}} f(y) = f(x)$, t. j. $g(x) = f(x)$.

### Cvičení

*1.* Budiž $M$ množina všech racionálních čísel intervalu $(0, 1)$. Každému racionálnímu číslu $t = \dfrac{p}{q} \in M$ ($p$, $q$ celá, nesoudělná, $0 < p < q$) přiřaďme číslo $s(t) = q^{-3}$. Zobecněná řada (viz kap. III, § 3) $\sum\limits_{t \in M} s(t)$ jest absolutně konvergentní. Pro $0 < x < 1$ kladme $f(x) = \sum\limits_{\substack{t \in M \\ t \leqq x}} s(t)$. Dokažte: 1. $f$ je rostoucí v $(0, 1)$.

2. $f$ není spojitá zleva v žádném bodě množiny $M$ (takže její body nespojitosti tvoří množinu hustou v $(0, 1)$).

3. $f$ je spojitá zprava v každém bodě množiny $M$.

4. $f$ je spojitá v každém bodě množiny $(0, 1) \dot{-} M$.

**§ 6. Limes superior a inferior.** Budiž $A \subset \mathbf{E}_1$, $a \in A'$. Budiž $f$ funkce, definovaná ve všech bodech $x$ množiny $A$, pro něž $0 < |x - a| < \Delta$, kde $\Delta$ je jisté kladné číslo. Potom pro $0 < \delta \leqq \Delta$ jsou definovány funkce (proměnné $\delta$)

(41) $$\Phi(\delta) = \Phi_f(\delta) = \sup_{\substack{0 < |x-a| < \delta \\ x \in A}} f(x) \,,$$

(42) $$\varphi(\delta) = \varphi_f(\delta) = \inf_{\substack{0 < |x-a| < \delta \\ x \in A}} f(x) \,.$$

Zřejmě je $\varphi(\delta) \leqq \Phi(\delta)$, a dále je $\Phi$ funkce neklesající (při zvětšení čísla $\delta$ se supremum v (41) nemůže zmenšit) a $\varphi$ je nerostoucí v $(0, \Delta\rangle$. Tedy existují podle věty 75 limity (po příp. nevlastní)

(43) $$\lim_{\delta \to 0+} \Phi(\delta) = \limsup_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) \,, \quad \lim_{\delta \to 0+} \varphi(\delta) = \liminf_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$$

(čti: limes superior a inferior funkce $f$ v bodě $a$ vzhledem k $A$). Vždy je ovšem $\liminf \leqq \limsup$, ježto $\varphi(\delta) \leqq \Phi(\delta)$.

Poznámka 1. Položme $\limsup\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \beta$. Potom platí: I. Je-li $\beta' > \beta$, potom existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(x \in A,\ 0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow f(x) < \beta' \tag{44}$$

(neboť pro dostatečně malé $\delta$ je $\Phi(\delta) < \beta'$ podle definice (43)).

II. Je-li však $\beta' < \beta$, potom takové $\delta$ neexistuje. Neboť $\beta = \lim\limits_{\delta \to 0+} \Phi(\delta) = \inf\limits_{0 < \delta \leqq \Delta} \Phi(\delta)$, takže pro každé $\delta$ $(0 < \delta \leqq \Delta)$ je $\Phi(\delta) > \beta'$ a tedy existuje $x \in A$ tak, že

$$0 < |x - a| < \delta\,, \quad f(x) > \beta'\,.$$

Jinými slovy: $\limsup\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)$ je infimum množiny těch čísel $\beta'$, k nimž existuje $\delta > 0$ tak, že platí (44).[25]) Nebo také: lim sup je supremum čísel $\beta'$ s touto vlastností: Ke každému $\delta > 0$ existuje $x$ takové, že

$$x \in A,\ 0 < |x - a| < \delta\,,\ f(x) > \beta'\,. \tag{45}$$

Za předpokladů učiněných na počátku tohoto paragrafu existuje lim sup, lim inf vždy, kdežto limita nemusí existovat. Platí pak

**Věta 79.**

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) \tag{46}$$

*existuje tehdy a jen tehdy, je-li*

$$\limsup_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) = \liminf_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x)\,, \tag{47}$$

*načež čísla* (46), (47) *jsou stejná.*

Důkaz. I. Nechť existuje limita (46), označme ji $c$. Je-li $c = +\infty$, potom ke každému $K < +\infty$ existuje $\delta_0 > 0$ $(\delta_0 < \Delta)$ tak, že pro $x \in A$, $0 < |x - a| < \delta_0$ je $f(x) > K$, tedy $\varphi(\delta_0) \geqq K$, tedy též $\lim\limits_{\delta \to 0+} \varphi(\delta) = \sup\limits_{0 < \delta \leqq \Delta} \varphi(\delta) \geqq K$; tedy lim inf $= +\infty$ a tedy i lim sup $= +\infty$. Podobně pro $c = -\infty$ (vyšetřuji $\Phi(\delta)$). Konečně budiž $c$ konečné. Budiž $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta_0 > 0$ $(\delta_0 < \Delta)$ tak, že pro $x \in A$, $0 < |x - a| <$

[25]) To platí i pro $\limsup f(x) = +\infty$; potom totiž množina těch čísel $\beta'$ je prázdná a její infimum je $+\infty$.

$< \delta_0$ je $c - \varepsilon < f(x) < c + \varepsilon$, tedy $c - \varepsilon \leqq \varphi(\delta_0) \leqq \Phi(\delta_0) \leqq c + \varepsilon$, tedy

$$c - \varepsilon \leqq \sup_{0<\delta\leqq\Delta} \varphi(\delta) = \lim_{\delta\to0+} \varphi(\delta) \leqq \lim_{\delta\to0+} \Phi(\delta) = \inf_{0<\delta\leqq\Delta} \Phi(\delta) \leqq c + \varepsilon\,.$$

Ježto to platí pro každé $\varepsilon$, jsou obě čísla v (47) rovna $c$.

II. Nechť čísla (47) jsou obě rovna číslu $c$. Nechť předně $c = +\infty$. Ke každému $K < +\infty$ existuje $\delta > 0$ tak, že $\varphi(\delta) > K$, tedy

$$(x \in A, 0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow f(x) > K\,,$$

tedy limita (46) existuje a je $+\infty$. Podobně pro $c = -\infty$. Budiž konečně $c$ konečné. Budiž $\varepsilon > 0$. Ježto čísla (47) jsou rovna $c$, existuje $\delta > 0$ tak, že

$$c - \varepsilon < \varphi(\delta) \leqq \Phi(\delta) < c + \varepsilon\,,$$

tedy

$$(x \in A, 0 < |x - a| < \delta) \Rightarrow (c - \varepsilon < f(x) < c + \varepsilon)\,.$$

Tedy limita v (46) existuje a má hodnotu $c$.

Poznámka 2. Je-li $\lim\limits_{\substack{x\to a\\ x\in A}} g(x) = c$ vlastní, je

$$\lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} \sup\,(f(x) + g(x)) = \lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} \sup f(x) + \lim_{\substack{x\to a\\ x\in A}} g(x)\,. \tag{48}$$

Důkaz. Budiž $\varepsilon > 0$. Existuje $\delta_0 > 0$ tak, že pro $x \in A, 0 < < |x-a| < \delta_0$ je $c - \varepsilon \leqq g(x) \leqq c + \varepsilon$, tedy $f(x) + c - \varepsilon \leqq f(x) + g(x) \leqq \leqq f(x) + c + \varepsilon$. Pro $0 < \delta < \delta_0$ plyne odtud zřejmě $\Phi_f(\delta) + c - \varepsilon \leqq \leqq \Phi_{f+g}(\delta) \leqq \Phi_f(\delta) + c + \varepsilon$, načež $\lim\limits_{\delta\to0+} \Phi_f(\delta) + c - \varepsilon \leqq \lim\limits_{\delta\to0+} \Phi_{f+g}(\delta) \leqq \leqq \lim\limits_{\delta\to0+} \Phi_f(\delta) + c + \varepsilon$, a to platí pro každé $\varepsilon > 0$; tedy platí (48).

Poznámka 3. Jest $\lim\sup\,(-f(x)) = -\lim\inf f(x)$; proto jsem uváděl některé věty jen pro lim sup.

Poznámka 4. Je-li $A = (a - \Delta, a + \Delta)$, po příp. $A = (a, a + \Delta)$, po příp. $A = (a - \Delta, a)$,[26]) píšeme kratčeji $\lim\limits_{x\to a} \sup f(x)$, $\lim\limits_{x\to a+} \sup f(x)$,

[26]) Kde $\Delta$ je nějaké kladné číslo.

$\limsup\limits_{x \to a-} f(x)$ a čteme: limes superior funkce $f$ v bodě $a$, v bodě $a$ zprava, v bodě $a$ zleva. Ježto

$$\sup_{0<|x-a|<\delta} f(x) = \operatorname{Max}\,(\sup_{a<x<a+\delta} f(x), \sup_{a-\delta<x<a} f(x)) ,$$

je

$$\limsup_{x \to a} f(x) = \operatorname{Max}(\limsup_{x \to a+} f(x), \limsup_{x \to a-} f(x)) .$$

Podobně pro lim inf (Min místo Max).

### Cvičení

*1.* Položme $g(x) = f(-x)$. Potom

$$\limsup_{x \to a+} f(x) = \limsup_{x \to -a-} g(x) ,$$

je-li $f$ definováno pro $a < x < a + \Delta$ $(\Delta > 0)$. Podobně pro lim inf.

*2.* Výsledek pozn. 2 platí i pro $c = \pm \infty$, mají-li obě strany v (48) smysl.

*3.* V obecném případě platí pro lim sup $(f(x) + g(x))$, lim inf $(f(x) + g(x))$ nerovnosti, obdobné nerovnostem z věty 24 (pro posloupnosti).

*4.* $\limsup\limits_{x \to 0+} \sin \dfrac{1}{x} = 1$, $\liminf\limits_{x \to 0+} \sin \dfrac{1}{x} = -1$. Obdobně zleva.

*5.* Je-li $a \in A'$, $A \subset B$, $f$ definováno v $B$, je $\limsup\limits_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x) \leqq \limsup\limits_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x)$. Obráceně pro lim inf.

*6.* Je-li $a \in A'$, $a \in B'$, $f$ definováno v $A \cup B$, je

$$\limsup_{\substack{x \to a \\ x \in A \cup B}} f(x) = \operatorname{Max}\,(\limsup_{\substack{x \to a \\ x \in A}} f(x), \limsup_{\substack{x \to a \\ x \in B}} f(x)) .$$

Obdobně (s jakou změnou?) pro lim inf.

*7.* Z věty 129 v **DI** plyne ihned, že každá funkce $f$ jedné reálné proměnné, která je reálná, konečná a spojitá v intervalu $I$, má tuto vlastnost:

Jsou-li $a$, $b$ kterékoliv dva body z $I (a < b)$, potom $f$ nabývá v $(a, b)$ všech hodnot, které leží mezi čísly $f(a)$, $f(b)$.

Ale také některé nespojité funkce mají tuto vlastnost. Sestrojíme jako příklad konečnou reálnou funkci $f$ v oboru $I = (-\infty, +\infty)$, která zobrazuje každý interval $(a, b)$ na interval $(-\infty, +\infty)$. Tedy zřejmě má $f$ uvedenou vlastnost a přitom není spojitá v žádném bodě.

Sestrojme napřed funkci $\varphi$ s periodou 1, která v intervalu $\langle 0, 1)$ je definována takto: Budiž

$$x = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \frac{a_3}{2^3} + \dots \; (a_n = 0 \text{ nebo } 1)$$

dyadický rozvoj čísla $x \in \langle 0, 1)$ (viz větu 9; má-li $x$ dva takové rozvoje, vezmu ten, který končí nulami). Budiž $p(n)$ počet jedniček mezi čísly $a_1, \ldots, a_n$ (neboli $p(n) = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$) a položme $\varphi(x) = \limsup_{n\to\infty} \frac{p(n)}{n}$. Tím je $\varphi(x)$ definována pro $0 \leqq x < 1$; pro ostatní $x$ je definována podmínkou periodicity: je-li $n$ celé, $0 \leqq x < 1$, klademe $\varphi(n + x) = \varphi(x)$. Funkce $\varphi$ zobrazuje každý interval na interval $\langle 0, 1\rangle$. (Dokažte!) Položme $\psi(x) = \frac{1}{2}$, je-li $\varphi(x) = 0$ nebo $\varphi(x) = 1$; pro ostatní $x$ kladme $\psi(x) = \varphi(x)$. Konečně položme $f(x) = \operatorname{cotg} \pi\psi(x)$. Funkce $f$ má žádanou vlastnost.

**§ 7. Obecné věty o derivaci.** Vzpomeňme si na definici derivace, derivace zprava a derivace zleva v bodě $x$ (u konečné funkce $f$):

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x + h) - f(x)}{h}, \quad f'_+(x) = \lim_{h\to 0+} \frac{f(x + h) - f(x)}{h},$$

$$f'_-(x) = \lim_{h\to 0-} \frac{f(x + h) - f(x)}{h};$$

limity mohou být též nevlastní.

**Věta 80.** *Budiž $f$ spojitá a konečná v $\langle a, a + \Delta\rangle$, kde $\Delta > 0$. Nechť existuje vlastní nebo nevlastní limita*

$$\lim_{x\to a+} f'(x) = A\,. \tag{49}$$

*Potom existuje $f'_+(a) = A$.*

Podobná věta ovšem platí „zleva“.

Důkaz. Podle (49) existuje $f'(x)$ (třeba i nevlastní) v jistém intervalu $(a, a + \Delta_1)$ $(0 < \Delta_1 < \Delta)$. Podle věty o přírůstku funkce (**DI**, věta 133) platí pro $0 < h < \Delta_1$

$$\frac{f(a + h) - f(a)}{h} = f'(a + \Theta h) \quad (0 < \Theta < 1)\,.$$

Podle (49) je tedy vskutku

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(a + h) - f(a)}{h} = A\,.$$

**Věta 81.** *Budiž $f$ funkce konečná a spojitá v otevřeném intervalu $J$, jež má v každém bodě intervalu $J$ derivaci* (vlastní nebo nevlastní). *Funkce $f'$ budiž monotonní v $J$. Potom je $f'$ spojitá v $J$.*

Důkaz. Budiž $c$ libovolný bod intervalu $J$. Podle věty 75 existuje $\lim_{x\to c-} f'(x) = A$, $\lim_{x\to c+} f'(x) = B$. Podle věty 80 jest $A = f'_-(c)$, $B = f'_+(c)$. Ale $f'_-(c) = f'_+(c) = f'(c)$, takže $f'(c) = \lim_{x\to c} f'(x)$; tedy jest $f'(x)$ spojitá v bodě $c$.

**Věta 82.**[27]) *Budiž $f$ funkce konečná a spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$, jež má v každém bodě tohoto intervalu vlastní nebo nevlastní derivaci. Potom platí: je-li $C$ libovolné číslo, ležící mezi $f'(a)$, $f'(b)$, existuje aspoň jedno číslo $c \in (a, b)$ tak, že $f'(c) = C$.*

Poznámka 1. Z důkazu uvidíte, že v krajních bodech stačí předpokládati existenci derivací $f'_+(a)$, $f'_-(b)$.

Poznámka 2. Věta 82 by byla důsledkem věty **DI** 129, kdyby funkce $f'$ byla konečná a spojitá v $\langle a, b\rangle$; je však zajímavo, že platí i tehdy, není-li $f'$ spojitá v $\langle a, b\rangle$.

Důkaz. Stačí vyšetřovati případ $f'(a) > f'(b)$, takže $f'(a) > C > f'(b)$ (případ $f'(a) < f'(b)$ by se řešil přechodem k funkci $-f(x)$). Položme $g(x) = f(x) - Cx$, takže $g'(x) = f'(x) - C$, $g'(a) > 0$, $g'(b) < 0$. Spojitá funkce $g$ nabývá v některém bodě $c$ intervalu $\langle a, b\rangle$ své největší hodnoty, t. j. $g(x) \leqq g(c)$ pro $a \leqq x \leqq b$. Ježto $\lim_{h\to 0+} \frac{g(a+h) - g(a)}{h} = g'(a) > 0$, je pro dosti malá $h > 0$ podíl $\frac{g(a+h) - g(a)}{h}$ kladný, tedy $g(a+h) > g(a)$; tedy $c \neq a$. Ježto $\lim_{h\to 0-} \frac{g(b+h) - g(b)}{h} = g'(b) < 0$, je $\frac{g(b+h) - g(b)}{h} < 0$ pro záporná $h$ dosti blízká nule, tedy $g(b+h) > g(b)$, tedy $c \neq b$. Je tedy $a < c < b$; v bodě $c$ není $g$ ani rostoucí ani klesající, tedy není $g'(c) > 0$ ani $g'(c) < 0$ (viz **DI**, věta 131); ježto však $g'(c) = f'(c) - C$ existuje, je nutně $g'(c) = 0$, t. j. $f'(c) = C$.

**Věta 83.** *Nechť konečná funkce $f$ má v intervalu $\langle a, b\rangle$ vlastní derivaci $f'$; při tom v bodě $a$ označuji slovem „derivace“ a znakem $f'$ derivaci zprava $f'_+(a)$, v bodě $b$ derivaci zleva $f'_-(b)$. Funkce $f'$ budiž spojitá v $\langle a, b\rangle$. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že*

[27]) T. zv. věta Darbouxova.

$$(50)\qquad \begin{gathered}(x_1 \in \langle a, b\rangle, x_2 \in \langle a, b\rangle, 0 < |x_1 - x_2| < \delta\,) \Rightarrow \\ \Rightarrow \left|\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - f'(x_1)\right| < \varepsilon\,.\end{gathered}$$

Poznámka 3. Konvergence výrazu $(f(x_2) - f(x_1)) : (x_2 - x_1)$ k číslu $f'(x_1)$ je tedy v jistém smyslu „stejnoměrná": číslo $\delta$ můžeme — při daném $\varepsilon$ — voliti totéž pro všechna $x_1 \in \langle a, b\rangle$.

Důkaz. Budiž $\varepsilon > 0$. Podle věty 63 je $f'$ stejnoměrně spojitá v $\langle a, b\rangle$, t. j. existuje $\delta > 0$ tak, že platí: je-li $x_1 \in \langle a, b\rangle$, $\xi \in \langle a, b\rangle$, $|x_1 - \xi| < \delta$, jest $|f'(\xi) - f'(x_1)| < \varepsilon$. Je-li

$$x_1 \in \langle a\,,\ b\rangle, x_2 \in \langle a, b\rangle\ ,\ 0 < |x_1 - x_2| < \delta\,,$$

existuje (podle věty o přírůstku funkce) číslo $\xi$ mezi $x_1$, $x_2$ tak, že platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(\xi);\ \text{potom však jest}\ \xi \in \langle a, b\rangle,\ |\xi - x_1| <$$

$$< |x_2 - x_1| < \delta\ ,\ \text{takže} \left|\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} - f'(x_1)\right| = |f'(\xi) - f'(x_1)| < \varepsilon\,,$$

čímž implikace (50) dokázána.

Zobecníme nyní poněkud Rolleovu větu (**DI**, věta 132) způsobem, jehož se často užívá v aplikacích (ale omezíme se při tom jenom na vlastní derivace).

**Věta 84.** *Budiž $n$ přirozené číslo. Budiž $f(x)$ funkce, mající tyto vlastnosti:*

*I. Je konečná a spojitá v $\langle a, b\rangle$ a má vlastní $n$-tou derivaci $f^{(n)}(x)$ v každém vnitřním bodě intervalu $\langle a, b\rangle$.*

*II. Funkce $f$ se rovná nule aspoň v $n + 1$ různých bodech intervalu $\langle a, b\rangle$, t. j. existují čísla $x_1, \ldots, x_{n+1}$ tak, že $a \leqq x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+1} \leqq b$, $f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_{n+1}) = 0$. Potom existuje aspoň jeden bod $\xi$ tak, že $a < \xi < b$, $f^{(n)}(\xi) = 0$.*

Důkaz. Pro $n = 1$ je věta správná podle věty Rolleovy. Budiž tedy $n > 1$ a předpokládejme, že věta 84 je správná, píšeme-li v ní $n - 1$ místo $n$. Jsou-li splněny předpoklady I, II, existují podle věty Rolleovy čísla $\xi_1, \ldots, \xi_n$ tak, že

$$x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < \ldots < x_n < \xi_n < x_{n+1}\,,$$
$$f'(\xi_j) = 0$$

pro $j = 1, \ldots, n$. Užijeme-li nyní věty 84 (s hodnotou $n - 1$ místo $n$) na funkci $g(x) = f'(x)$ a na interval $\langle \xi_1, \xi_n \rangle$, vidíme, že existuje číslo $\xi$ tak, že $a < \xi_1 < \xi < \xi_n < b$, $g^{(n-1)}(\xi) = 0$, t. j. $f^{(n)}(\xi) = 0$.

Je záhodno, zobecniti trochu tuto větu. Je-li $x \in \mathbf{E}_1$, $n \in \mathbf{N}$, $f(x) = f'(x) = \ldots = f^{(n-1)}(x) = 0$, říkáme, že funkce $f$ má v bodě $x$ kořen aspoň $n$-násobný. Tvrdím nyní, že věta 84 zůstává v podstatě v platnosti, počítám-li každý kořen funkce $f(x)$ s jeho násobností. Přesně bude náš výsledek formulován takto:

**Věta 85.** *Budiž $n \in \mathbf{N}$. Budiž $f(x)$ funkce, mající tyto vlastnosti:*

*I. Má vlastní derivaci řádu n-tého v každém bodě intervalu $\langle a, b \rangle$.*[28]

*II. Existuje celé číslo $k > 1$ a čísla*

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_k$$

*v intervalu $\langle a, b \rangle$ tak, že funkce $f$ má v bodě $x_j$ kořen aspoň $m_j$-násobný, při čemž*

$$m_j > 0\,, \quad m_1 + m_2 + \ldots + m_k \geqq n + 1\,.$$

*Potom existuje aspoň jedno $\xi$ tak, že $a < \xi < b$, $f^{(n)}(\xi) = 0$.*

Důkaz. Pro $n = 1$ je věta správná podle věty Rolleovy. Budiž tedy $n > 1$ a předpokládejme, že věta 85 je správná, píši-li v ní $n - 1$ místo $n$. Buďte splněny podmínky I, II. Podle Rolleovy věty má funkce $f'$ kořen (aspoň „jednoduchý", t. j. jednonásobný) v $k - 1$ bodech $\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}$ takových, že $x_1 < \xi_1 < x_2 < \xi_2 < \ldots < x_{k-1} < \xi_{k-1} < x_k$. Dále má (podle definice násobnosti) funkce $f'$ kořen aspoň $(m_j - 1)$-násobný v každém bodě $x_j$, pro nějž $m_j > 1$; tyto body označme $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_l$. Máme tedy pro funkci $f'$ kořeny (navzájem různé)

$$\xi_1, \ldots, \xi_{k-1}, \eta_1, \ldots, \eta_l \quad (k - 1 > 0) \tag{51}$$

a součet „násobností" jest aspoň

$$k - 1 + (m_1 - 1) + (m_2 - 1) + \ldots + (m_k - 1) = \\ = m_1 + \ldots + m_k - 1 \geqq n\,.$$

Při tom je patrno: je-li $l = 0$, t. j. je-li $m_1 = \ldots = m_k = 1$, je $k \geqq n + 1$, tedy $k > 2$, $k - 1 \geqq 2$, je-li však $l > 0$, je $k - 1 + l \geqq 2$.

[28]) I v krajních bodech (nechci důkaz zbytečně komplikovati). Tedy jest $f$ spojitá v $\langle a, b \rangle$.

Počet bodů (51) je tedy aspoň 2; můžeme tedy užíti na funkci $g(x) = f'(x)$ a na interval $\langle a, b\rangle$ věty 85 s hodnotou $n - 1$ místo $n$. Tedy existuje $\xi \in (a, b)$ tak, že $g^{(n-1)}(\xi) = 0$, t. j. $f^{(n)}(\xi) = 0$.

Poznámka 4. Vyloučili jsme hodnotu $k = 1$, které by odpovídal tento případ: funkce $f$ má v bodě $x_1$ kořen aspoň $(n + 1)$-násobný. Tento případ je triviální, neboť podle definice násobnosti je potom $f^{(n)}(x_1) = 0$.

Poznámka 5. K následujícímu příkladu připomeňme toto: Budiž $P$ polynom neboli mnohočlen stupně nejvýše $n$-tého, t. j.

$$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n\,; \tag{52}$$

je-li $a_0 \neq 0$, říkáme, že $P$ je stupně $n$ (polynomu, který má všechny koeficienty rovny nule, nepřisuzujeme žádný stupeň). Abychom zbytečně nespecialisovali, připouštějme i komplexní koeficienty ($a_j \in \mathbf{K}$). Platí věta: Polynom $Q$ stupně $m$ má nejvýše $m$ různých komplexních kořenů, t. j. v $\mathbf{K}$ existuje nejvýše $m$ různých čísel $x$, pro něž $Q(x) = 0$. Důkaz byl proveden v **DI**, kap. V, § 2 — sice jen pro reálná $a_j$, $x$, ale ihned se přesvědčíte, že důkaz platí i pro komplexní čísla. Odtud ihned plyne: Jestliže polynom (52) má více než $n$ různých kořenů, je $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$; neboť jinak by měl $P$ jistý stupeň $m \leqq n$ a tedy nejvýše $m$ různých kořenů. Ještě jinak řečeno: Je-li vedle (52) dán ještě další polynom $Q(x) = b_0x^n + \ldots + b_n$ a je-li rovnice $P(x) = Q(x)$ splněna pro více než $n$ různých komplexních čísel $x$, je $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$ (neboť polynom $P(x) - Q(x)$ má více než $n$ kořenů).

Příklad 1. (Lagrangeův interpolační polynom.) Budiž dáno $n + 1$ různých čísel $x_0, x_1, \ldots, x_n$ ($n \geqq 1$). Pro každé $j$ ($j = 0, 1, \ldots, n$) sestrojme polynom

$$p_j(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(x - x_k)}{\prod\limits_{\substack{k=0\\k\neq j}}^{n}(x_j - x_k)}$$

(v čitateli je tedy vynechán činitel $x - x_j$, ve jmenovateli $x_j - x_j$). Je to polynom $n$-tého stupně; dále zřejmě $p_j(x_j) = 1$, $p_j(x_k) = 0$ pro

$k \neq j$ ($j, k = 0, 1, \ldots, n$). Je-li nyní dána funkce $f$, jež je definována (a konečná) v bodech $x_0, x_1, \ldots, x_n$, má polynom

$$(53) \qquad P(x) = \sum_{j=0}^{n} f(x_j)\, p_j(x)$$

zřejmě tyto dvě vlastnosti:

1. $P$ je polynom nejvýše $n$-tého stupně.[29])
2. $P(x_j) = f(x_j)$ pro $j = 0, 1, \ldots, n$.

Každý polynom $Q$ s vlastnostmi 1, 2 má v $n + 1$ bodech $x_j$ touž hodnotu jako $P$, a tedy má stejné koeficienty jako $P$ (viz pozn. 5); t. j. $P$ je jediný polynom s vlastnostmi 1, 2. Je to t. zv. Lagrangeův interpolační polynom (příslušný k funkci $f$ a k bodům $x_0, \ldots, x_n$).

Až dosud platilo vše i pro komplexní čísla. Nyní předpokládejme, že $f$ je konečná reálná funkce, mající v intervalu $\langle a, b \rangle$ vlastní $(n + 1)$-ní derivaci a že body $x_j$ leží v $\langle a, b \rangle$; očíslujme je podle velikosti:

$$a \leqq x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leqq b\,.$$

Ptáme se, jak lze odhadnouti rozdíl

$$R(x) = f(x) - P(x)$$
$$\text{pro} \quad a \leqq x \leqq b\,.$$

Jest ovšem $R(x_j) = 0$ ($j = 0, 1, \ldots, n$). Zvolme tedy pevně $x \in \langle a, b \rangle$, různé od $x_0, \ldots, x_n$, a sestrojme funkci proměnné $t$

$$F(t) = (x - x_0) \ldots (x - x_n)\, R(t) - (t - x_0) \ldots (t - x_n)\, R(x)\,.$$

Tato funkce má v $\langle a, b \rangle$ vlastní derivaci $F^{(n+1)}(t) = (x - x_0) \ldots$ $\ldots (x - x_n)\, f^{(n+1)}(t) - (n + 1)!\, R(x)$ (neboť $P^{(n+1)}(t) = 0$, a tedy $R^{(n+1)}(t) = f^{(n+1)}(t)$). Funkce $F$ se rovná nule pro těchto $n + 2$ hodnot intervalu $\langle a, b \rangle$: $t = x_0, \ldots, t = x_n, t = x$. Podle věty 84 tedy existuje $t \in (a, b)$ tak, že $F^{(n+1)}(t) = 0$, t. j.

$$(54) \qquad R(x) = \frac{(x - x_0) \ldots (x - x_n)}{(n + 1)!}\, f^{(n+1)}(t)\,.$$

Vím-li na př., že $|f^{(n+1)}(t)| \leqq M$ pro $a \leqq t \leqq b$, dostávám odtud odhad

[29]) T. j. $P(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$; není vyloučen případ, že všechny koeficienty jsou rovny 0.

$$|R(x)| \leqq \frac{M(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \text{ pro všechna } x \in \langle a, b \rangle .$$

Na př. budiž $f(x) = \mathrm{e}^{cx}$ $(c > 0)$; potom $0 < f^{(n+1)}(x) = c^{n+1}\mathrm{e}^{cx} \leqq$ $\leqq c^{n+1}\mathrm{e}^{cb}$ pro $x \leqq b$, tedy

$$|R(x)| \leqq \frac{c^{n+1}(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{e}^{cb} \,^{30}) \text{ pro } x \in \langle a, b \rangle .$$

Tedy: volím-li pro každé $n$ body $x_{n,0}, x_{n,1}, \ldots, x_{n,n}$ (navzájem různé) v intervalu $\langle a, b \rangle$ a sestrojím-li k nim příslušný polynom $P_n$ pro funkci $f(x) = \mathrm{e}^{cx}$, je

$$|\mathrm{e}^{cx} - P_n(x)| \leqq \frac{c^{n+1}(b-a)^{n+1}}{(n+1)!} \mathrm{e}^{cb} \text{ pro } x \in \langle a, b \rangle ,$$

takže $\lim_{n \to \infty} P_n(x) = \mathrm{e}^{cx}$ stejnoměrně v $\langle a, b \rangle$.

**§ 8. Derivovaná čísla. Definice 10.** *Budiž $f$ reálná funkce jedné reálné proměnné; zaveďme označení*

$$Q_f(x_1, x_2) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}, ^{31}) \text{ takže } Q_f(x_1, x_2) = Q_f(x_2, x_1) .$$

*Budiž $a \in \mathbf{E}_1$ a nechť existuje $\Delta > 0$ tak, že $f(x)$ je definována a konečná pro $a \leqq x \leqq a + \Delta$. Potom nazýváme čísla*

$$55) \quad D^+f(a) = \limsup_{h \to 0+} Q_f(a, a+h) , \quad D_+f(a) = \liminf_{h \to 0+} Q_f(a, a+h)$$

*horním a dolním derivovaným číslem funkce $f$ v bodě $a$ zprava. Obdobně definujeme horní a dolní derivované číslo zleva rovnicemi*

$$(56) \quad D^-f(a) = \limsup_{h \to 0-} Q_f(a, a+h) , \quad D_-f(a) = \liminf_{h \to 0-} Q_f(a, a+h) ,$$

*je-li $f$ definována a konečná v jistém intervalu $\langle a - \Delta, a \rangle$, kde $\Delta > 0$.*

Poznámka 1. Čísla (55) jsou si rovna tehdy a jen tehdy, existuje-li limita (třeba i nevlastní)

$$f'_+(a) = \lim_{h \to 0+} Q_f(a, a+h) = \lim_{h \to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} ,$$

kteroužto limitu jsme nazvali derivací zprava. Obdobně: čísla (56)

---

[30]) Toto má za limitu 0 pro $n \to \infty$.

[31]) $Q_f(x_1, x_2)$ je směrnice přímky, procházející body $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$.

jsou si rovna tehdy a jen tehdy, existuje-li derivace zleva $f'_-(a)$. Všechna čtyři derivovaná čísla jsou si pak rovna tehdy a jen tehdy, existuje-li

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a)\,.$$

Poznámka 2. Pro derivovaná čísla součtu dvou funkcí můžeme někdy užíti pozn. 2 v § 6 (uvážíme-li, že $Q_{f+g}(x_1, x_2) = Q_f(x_1, x_2) + Q_g(x_1, x_2)$): Má-li $g$ v bodě $x$ vlastní derivaci zprava, obdržíme

$$D^+(f(x)+g(x)) = D^+f(x) + g'_+(x)\,,$$
$$D_+(f(x)+g(x)) = D_+f(x) + g'_+(x)\,;$$

má-li konečně $g$ v bodě $x$ vlastní derivaci, obdržíme $D^+(f(x)+g(x)) = D^+f(x) + g'(x)$ a podobně pro další tři derivovaná čísla.

**Věta 86.** *Jsou-li $D^+f(a)$, $D_+f(a)$ konečná čísla, je funkce $f$ spojitá zprava v bodě $a$; obdobně zleva.*

Důkaz. Volme $\alpha \in \mathbf{E}_1$, $\beta \in \mathbf{E}_1$ tak, že $D_+f(a) > \alpha$, $D^+f(a) < \beta$. Podle pozn. 1 v § 6 existuje $\delta > 0$ tak, že pro $0 < h < \delta$ jest $\alpha < \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h} < \beta$, $\quad h\alpha < f(a+h) - f(a) < h\beta$, tedy $\lim\limits_{h\to 0+} (f(a+h) - f(a)) = 0$.

Poznámka 3. Jsou-li tedy všechna derivovaná čísla funkce $f$ konečná v jistém intervalu $J$, je $f$ spojitá v $J$. Při tom, patří-li počáteční (koncový) bod intervalu $J$ k intervalu $J$, beru v něm v úvahu pouze derivovaná čísla zprava (zleva).

Důležité je toto zobecnění věty Rolleovy:

**Věta 87.** *Budiž $f$ konečná a spojitá v intervalu $\langle a, b\rangle$; budiž $f(a) = f(b) = 0$. Potom platí:*

*I. Existuje-li aspoň jeden bod $x \in (a, b)$ tak, že $f(x) > 0$, existuje aspoň jeden bod $c_1 \in (a, b)$, v němž obě derivovaná čísla zleva jsou nezáporná, obě derivovaná čísla zprava nekladná. Je-li však v $(a, b)$ stále $f(x) \leqq 0$, jest*

$$D_+f(a) \leqq D^+f(a) \leqq 0\,, \quad D^-f(b) \geqq D_-f(b) \geqq 0\,. \tag{57}$$

*II. Existuje-li aspoň jeden bod $x \in (a, b)$ tak, že $f(x) < 0$, existuje aspoň jeden bod $c_2 \in (a, b)$, v němž obě derivovaná čísla zleva jsou nekladná, obě derivovaná čísla zprava nezáporná. Je-li však v $(a, b)$ stále $f(x) \geqq 0$, jest*

$$D^+f(a) \geqq D_+f(a) \geqq 0\,, \quad D_-f(b) \leqq D^-f(b) \leqq 0\,.$$

Důkaz. I. Existuje-li $x \in (a, b)$ tak, že $f(x) > 0$, nabývá funkce $f$ v některém vnitřním bodě $c_1$ intervalu $\langle a, b \rangle$ své největší hodnoty: $f(x) \leqq f(c_1)$ pro každé $x \in \langle a, b \rangle$. Potom zřejmě výraz $\dfrac{f(c_1 + h) - f(c_1)}{h}$ je nekladný pro $h > 0$, nezáporný pro $h < 0$ (pokud $a \leqq c_1 + h \leqq b$). Odtud limitním přechodem plyne tvrzení I v tomto případě. Je-li však $f(x) \leqq 0$ pro všechna $x \in (a, b)$, jest $\dfrac{f(a + h) - f(a)}{h} \leqq 0$ pro $h > 0$, $\dfrac{f(b + h) - f(b)}{h} \geqq 0$ pro $h < 0$ (pokud $|h| \leqq b - a$), z čehož plyne (57). Tvrzení II dostanu, aplikuji-li tvrzení I na funkci $-f(x)$.

**Věta 88.** *Budiž $f(x)$ konečná a spojitá v otevřeném intervalu $J$. Potom jest*

$$(58) \qquad \sup_{x \in J} D^+f(x) = \sup_{x \in J} D_+f(x) = \sup_{x \in J} D^-f(x) = \sup_{x \in J} D_-f(x) = \\ = \sup_{\substack{x_1 \in J,\, x_2 \in J \\ x_1 \neq x_2}} Q_f(x_1, x_2)\,.$$

*Obdobná rovnice platí pro infimum.*

Důkaz. Budiž $G = \sup Q_f(x_1, x_2)$, $H = \sup D^+f(x)$, $K = \sup D_+f(x)$. Nechť předně $G > K$. Existují tedy v $J$ body $z_1, z_2$ ($z_1 < z_2$) tak, že

$$Q_f(z_1, z_2) = \frac{f(z_2) - f(z_1)}{z_2 - z_1} > K\,.$$

Definujme funkci $F$ v $\langle z_1, z_2 \rangle$ rovnicí

$$F(x) = f(x) - f(z_1) - Q_f(z_1, z_2)\,(x - z_1)\,;$$

ihned zjistíte, že $F(z_1) = F(z_2) = 0$. Z věty 87, II plyne tedy: existuje $c$ tak, že

$$z_1 \leqq c < z_2\,, \quad D_+F(c) \geqq 0\,.$$

Podle pozn. 2 je však $D_+F(x) = D_+f(x) - Q_f(z_1, z_2)$, takže $D_+f(c) \geqq \geqq Q_f(z_1, z_2) > K$, což není možno. Tedy je $G \leqq K$.

Nechť za druhé $H > G$. Potom existuje bod $\alpha \in J$ tak, že $D^+f(\alpha) > > G$; podle definice „limes superior" existují libovolně malá $h > 0$ tak, že $Q_f(\alpha, \alpha + h) > G$, což není možné. Tedy je $H \leqq G$.

Konečně je zřejmě $K \leqq H$, tedy $K \leqq H \leqq G \leqq K$, takže tato tři čísla si jsou rovna. Obdobně dostáváme další rovnice v (58), což si čtenář již provede sám (viz následující poznámku); rovnice pro infimum dostáváme přechodem k funkci $-f$.

Poznámka 4. Položme $\varphi(x) = -f(x)$, $\psi(x) = -f(-x)$. Je jasno, že $D_+\varphi(x) = -D^+f(x)$ atd. Pro $\psi$ je to trochu složitější:

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{-\psi(b+k) + \psi(b)}{-k},$$

kde $b = -a$, $k = -h$; limitní přechod $h \to 0+$ dává $D^+f(a) = = D^-\psi(b)$ atd. (prostě se vymění „zprava" a „zleva").

**Věta 89.** *Budiž $\Delta > 0$; funkce $f$ budiž konečná a spojitá v $\langle a, a + \Delta\rangle$. Nechť existuje aspoň jedna (třeba i nevlastní) ze čtyř limit*

$$\text{(59)} \qquad \lim_{x \to a+} D^+f(x), \ \lim_{x \to a+} D_+f(x), \ \lim_{x \to a+} D^-f(x), \ \lim_{x \to a+} D_-f(x);$$

*potom existují všechny tyto limity a jsou si rovny. Je-li $L$ společná hodnota těchto limit, jest $D^+f(a) = D_+f(a) = L$, t. j. funkce (proměnné $x$) $D^+f(x)$, $D_+f(x)$ jsou spojité zprava v bodě $a$*[32]*) a existuje derivace zprava $f'_+(a) = L$.*

Důkaz. Budiž $0 < \delta < \Delta$.

Definujme $S(\delta)$, $s(\delta)$ rovnicemi

$$\text{(60)} \qquad S(\delta) = \sup_{a<x<a+\delta} D^+f(x) = \sup_{a<x<a+\delta} D_+f(x) = \sup_{a<x<a+\delta} D^-f(x) = $$
$$= \sup_{a<x<a+\delta} D_-f(x) = \sup_{\substack{a<x_1<a+\delta \\ a<x_2<a+\delta \\ x_1 \neq x_2}} Q_f(x_1, x_2)$$

(rovnost všech těchto pěti výrazů plyne z věty 88),

[32]) Je-li $L = \pm \infty$, je to ovšem spojitost ve smyslu definice v § 3 (viz implikaci (21)).

$$(61) \qquad s(\delta) = \inf_{a<x<a+\delta} D^+f(x) = \ldots = \inf_{\substack{a<x_1<a+\delta \\ a<x_2<a+\delta \\ x_1 \neq x_2}} Q_f(x_1, x_2)\,.$$

Z definice lim sup, lim inf plyne:

$$\lim_{\delta\to 0+} S(\delta) = \limsup_{x\to a+} D^+f(x) = \ldots = \limsup_{x\to a+} D_-f(x)\,,$$

$$\lim_{\delta\to 0+} s(\delta) = \liminf_{x\to a+} D^+f(x) = \ldots = \liminf_{x\to a+} D_-f(x)\,.$$

Existuje-li tedy jedna z limit (59) — její hodnotu označme $L$ — existují všechny čtyři (viz větu 79) a mají hodnotu $L = \lim\limits_{\delta\to 0+} S(\delta) = \lim\limits_{\delta\to 0+} s(\delta)$. Zbývá dokázati rovnici $f'_+(a) = L$. Budiž $0 < h < \frac{1}{2}\Delta$. Následkem spojitosti funkce $f$ je

$$(62) \qquad \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h_1\to 0+} \frac{f(a+h+h_1) - f(a+h_1)}{h}\,,$$

ale pro $h_1 \in (0, h)$ je $a < a + h_1 < a + h + h_1 < a + 2h$ a tedy podle (60), (61)

(63)
$$s(2h) \leqq Q_f(a+h_1, a+h+h_1) = \frac{f(a+h+h_1) - f(a+h_1)}{h} \leqq S(2h)\,,$$

takže limitním přechodem $h_1 \to 0+$ plyne z (62), (63)

$$s(2h) \leqq \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \leqq S(2h)\,;$$

ale zde první a poslední výraz mají pro $h \to 0+$ limitu $L$, tedy též

$$\lim_{h\to 0+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = L\,.$$

Poznámka 5. Obdobná věta platí ovšem též „zleva“. Kombinujeme-li výsledky zprava a zleva, dostáváme tuto větu: Budiž $f$ konečná a spojitá v $(a - \Delta, a + \Delta)$ $(\Delta > 0)$. Existuje-li jedna z limit

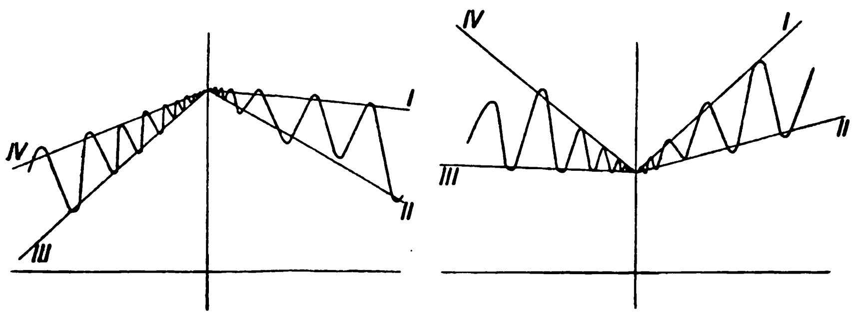
$$\lim_{x\to a} D^+f(x)\,, \quad \lim_{x\to a} D_+f(x)\,,$$

$$\lim_{x\to a} D^-f(x)\,, \quad \lim_{x\to a} D^-f(x)$$

(označme ji $L$; smí býti $L = \pm\infty$), existují všechny čtyři a mají touž hodnotu $L$; a současně je $f'(a) = L$ (takže všechna čtyři derivovaná čísla jsou spojitá v bodě $a$, majíce tam právě hodnotu $L$).

Věta 80 je zřejmě jednoduchým speciálním případem věty 89.

Poznámka 6. *Všechna čtyři derivovaná čísla funkce $f(x)$ buďte konečná a spojitá v bodě $a$; potom je funkce $f$ konečná a spojitá v jistém intervalu $(a - \delta, a + \delta)$ (kde $\delta > 0$) a existuje vlastní derivace $f'(a)$.* Důkaz: Z předpokladů plyne, že v jistém intervalu $(a - \delta, a + \delta)$ jsou všechna derivovaná čísla konečná, takže podle poznámky 3 je $f$ konečná a spojitá v tomto intervalu; existence vlastní derivace $f'(a)$ plyne pak na př. z věty 89.




Obr. 3a. $x \in N_1$. Obr. 3b. $x \in N_2$.
Přímky $I$, $II$, $III$, $IV$ mají po řadě směrnice $D^+f(x)$, $D_+f(x)$, $D^-f(x)$, $D_-f(x)$.

**Věta 90.** *Budiž $f$ konečná v intervalu $(a, b)$. Budiž $N_1$ množina oněch $x \in (a, b)$, pro něž $D^+f(x) < D_-f(x)$; budiž $N_2$ množina oněch $x \in (a, b)$, pro něž $D^-f(x) < D_+f(x)$. Potom je $N_1 \cup N_2$ spočetná množina.*

Poznámka 7. Na obr. 3a, 3b je schematicky naznačeno, jak asi vypadá průběh funkce v okolí bodu množiny $N_1$ (obr. 3a) nebo množiny $N_2$ (obr. 3b); graf funkce má tam jakýsi „roh“. (Průběh může býti ovšem ještě mnohem složitější.)

Důkaz. Ke každému bodu $c \in N_1$ existuje racionální číslo $r$ tak, že

$$D^+f(c) < r < D_-f(c)\,. \tag{64}$$

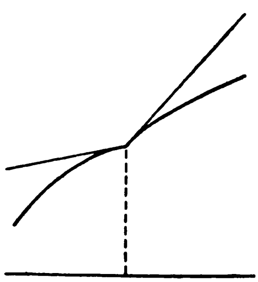
Při pevně zvoleném $r$ označme znakem $A_r$ množinu oněch $c \in N_1$, pro něž platí (64). Ježto $N_1 = \bigcup_{r \in P} A_r$ a ježto $P$ je spočetná, stačí dokázati, že každá množina $A_r$ je spočetná. Je-li $c \in A_r$, platí (64); podle pozn. 1 v § 6 existuje $\delta > 0$ tak, že pro $0 < h < \delta$ jest

$$\frac{f(c+h) - f(c)}{h} < r < \frac{f(c-h) - f(c)}{-h}. \tag{65}$$

Položme $g_r(x) = f(x) - rx$; potom z (65) plyne pro $0 < h < \delta$:

$$g_r(c+h) - g_r(c) = f(c+h) - f(c) - rh < 0\,,$$
$$g_r(c-h) - g_r(c) = f(c-h) - f(c) + rh < 0\,,$$

takže funkce $g_r(x)$ má ostré lokální maximum v každém bodě $c \in A_r$. Podle pozn. 5 v § 1 je tedy množina $A_r$ spočetná. Tedy jest i $N_1$ spočetná. Pro $N_2$ je důkaz obdobný.



Obr. 4.

Poznámka 8. Speciálně je tedy spočetná množina oněch bodů, v nichž $f'_+(x)$, $f'_-(x)$ existují a nejsou si rovny (obr. 4). Neboť místo $f'_+(x) < f'_-(x)$ mohu psáti $D^+f(x) < D_-f(x)$ a místo $f'_-(x) < f'_+(x)$ mohu psáti $D^-f(x) < D_+f(x)$.

Poznámka 9. K thematice tohoto a předešlého paragrafu se připíná ještě § 13 v kap. VII.

### Cvičení

*1.* Budiž $f(0) = 0$, $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$. Potom je $D^+f(0) = D^-f(0) = 1$, $D_+f(0) = D_-f(0) = -1$.

*2.* Budiž $f(0) = 0$, $f(x) = \left| x \sin \frac{1}{x} \right|$ pro $x \neq 0$. Potom je $D^+f(0) = 1$, $D_+f(0) = 0$, $D^-f(0) = 0$, $D_-f(0) = -1$.

*3.* Budiž $f(x) = 1$ pro racionální, $f(x) = 0$ pro iracionální $x$. Potom pro racionální $x$ je $D^+f(x) = 0$, $D_+f(x) = -\infty$, $D^-f(x) = +\infty$, $D_-f(x) = 0$. Pro iracionální $x$ dostaneme po řadě $+\infty, 0, 0, -\infty$.

*4.* Ukažte, že věta Rolleova (**D I**, věta 132) plyne přímo z věty 87.

**5.** O funkci $f$ říkejme, že je v bodě $a$ rostoucí zprava, existuje-li $\delta > 0$ tak, že $a < x < a + \delta \Rightarrow f(x) > f(a)$; říkejme, že je v bodě $a$ rostoucí zleva, existuje-li $\delta > 0$ tak, že $a - \delta < x < a \Rightarrow f(x) < f(a)$. Vyměníme-li $f(x) < f(a)$ s nerovností $f(x) > f(a)$, dostaneme definici funkce klesající v bodě $a$ zprava nebo zleva. Podobně neklesající a nerostoucí (připouští se znamení rovnosti). Ukažte: je-li $D_+f(a) > 0$, je $f$ rostoucí v bodě $a$ zprava, je-li $D^+f(a) < 0$, je $f$ klesající v bodě $a$ zprava, je-li $D_+f(a) < 0 < D^+f(a)$, není $f$ ani neklesající ani nerostoucí v bodě $a$ zprava.

**6.** Je-li $D_+f(a) > 0$, $D^-f(a) < 0$, má $f$ v bodě $a$ ostré lokální minimum; podobně pro maximum.

**7.** Z věty 88 dokažte: Budiž $f$ spojitá v $\langle a, b\rangle$. Je-li některé ze čtyř derivovaných čísel stále $\geqq 0$ (po příp. $\leqq 0$) v $(a, b)$, je $f$ neklesající (nerostoucí) v $\langle a, b\rangle$; je-li mimo to množina oněch $x$, pro něž toto derivované číslo je různé od nuly, hustá v $(a, b)$, je $f$ dokonce rostoucí (klesající) v $\langle a, b\rangle$. Toho lze užíti k hledání lokálních extrémů, neexistuje-li derivace. Vyslovte příslušné zobecnění věty 141 z **DI**.

**§ 9. Funkce s variací konečnou a funkce absolutně spojité.** Poznámka 1. Zaveďme napřed toto označení: Je-li $a$ reálné číslo (smí býti $+\infty$ nebo $-\infty$), položme

$$a^+ = \mathrm{Max}\,(a, 0)\,, \quad a^- = \mathrm{Max}\,(-a, 0)\,; \tag{66}$$

t. j.

$$\begin{aligned} a^+ &= a = |a| \quad \text{pro} \quad a \geqq 0\,, \quad a^+ = 0 \quad \text{pro } a \leqq 0\,; \\ a^- &= 0 \quad \text{pro } a \geqq 0\,, \quad a^- = -a = |a| \quad \text{pro } a \leqq 0\,. \end{aligned} \tag{67}$$

Odtud

$$|a| = a^+ + a^-\,, \quad a = a^+ - a^-\,. \tag{68}$$

Dále zřejmě

$$a^+ = (-a)^-\,, \quad a^- = (-a)^+ \tag{69}$$

Vždy je $a + b \leqq a^+ + b^+$, $0 \leqq a^+ + b^+$ (pokud $a + b$ má smysl), tedy

$$(a + b)^+ \leqq a^+ + b^+\,, \quad (a + b)^- \leqq a^- + b^-\,, \tag{70}$$

pokud $a + b$ má smysl (druhá nerovnost plyne z první pomocí (69)). Dále je

$$a^+ - b^+ \leqq (a - b)^+\,, \quad a^- - b^- \leqq (a - b)^-\,, \tag{71}$$

pokud $a - b$ má smysl. Dokažme první nerovnost; druhá pak vyplyne z (69). Je-li $b = +\infty$ (a tedy $a < +\infty$), je $a^+ - b^+ = -\infty$ a nerovnost platí. Je-li $b = -\infty$ (a tedy $a > -\infty$), je $(a - b)^+ = +\infty$ a nerovnost opět platí. Je-li za třetí $b$ konečné, je podle (70) $a^+ = ((a - b) + b)^+ \leqq (a - b)^+ + b^+$, načež převedením $b^+$ doleva dostaneme (71).

Poznámka 2. V tomto paragrafu budeme mluvit o intervalech $\langle\alpha, \beta\rangle$, kde $-\infty < \alpha \leqq \beta < +\infty$, připouštíme tedy též jednobodové intervaly $\langle\alpha, \alpha\rangle = (\alpha)$.

Budiž $f$ funkce konečná v intervalu $\langle a, b\rangle$; budiž $\mathfrak{S}$ systém konečného počtu intervalů

(72) $$\mathfrak{S}\colon\ \langle a_1, b_1\rangle, \langle a_2, b_2\rangle, \ldots, \langle a_n, b_n\rangle \quad (n \geqq 1)\,,$$

jež vesměs leží v $\langle a, b\rangle$ a tvoří systém „skoro disjunktní“; tím rozumím, že kterékoliv dva z těchto intervalů mají společný nejvýše jeden bod, a ten pak není vnitřním bodem žádného z nich. Jinými slovy: při vhodném očíslování jest

(73) $$a \leqq a_1 \leqq b_1 \leqq a_2 \leqq b_2 \leqq \ldots \leqq a_n \leqq b_n \leqq b\,.$$

Položme nyní

(74a) $$\mathfrak{V}(\mathfrak{S}, f) = \sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)|\,,$$

(74b) $$\mathfrak{P}(\mathfrak{S}, f) = \sum_{j=1}^{n} (f(b_j) - f(a_j))^+\,,$$

(74c) $$\mathfrak{N}(\mathfrak{S}, f) = \sum_{j=1}^{n} (f(b_j) - f(a_j))^-\,.$$

Lze také říci: $\mathfrak{P}$ resp. $\mathfrak{N}$ je součet oněch členů z $\mathfrak{V}$, pro něž rozdíl $f(b_j) - f(a_j)$ je kladný (resp. záporný); ostatní členy jsou nahrazeny nulami. Zřejmě

(75) $$\mathfrak{V}(\mathfrak{S}, f) = \mathfrak{P}(\mathfrak{S}, f) + \mathfrak{N}(\mathfrak{S}, f)\,.$$

Probíhá-li $\mathfrak{S}$ všechny systémy (72) s vlastností (73), probíhá $\mathfrak{V}(\mathfrak{S}, f)$ jistou množinu nezáporných čísel. Její supremum označíme

(76) $$V(\langle a, b\rangle; f) = \sup_{\mathfrak{S}} \mathfrak{V}(\mathfrak{S}, f)\,;$$

podobně klademe

$$(77)\qquad P(\langle a, b\rangle; f) = \sup_{\mathfrak{S}} \mathfrak{P}(\mathfrak{S}, f)\,, \quad N(\langle a, b\rangle; f) = \sup_{\mathfrak{S}} \mathfrak{N}(\mathfrak{S}, f)\,.$$

Názvy: *totální variace* ($V$), *positivní variace* ($P$), *negativní variace* ($N$) *funkce* $f$ *v* $\langle a, b\rangle$. *Jsou to tři nezáporná, konečná nebo nekonečná čísla.*

Poznámka 3. Jasno je toto:

1. Jestliže některý interval (72) je jednobodový, t. j. $b_j = a_j$, je $j$-tý sčítanec v (74a), (74b), (74c) roven nule, takže tento interval lze vynechati. Současně je patrno, že $V(\langle a, a\rangle; f) = 0$ (podobně pro $P$ a $N$).

2. Přidám-li k intervalům (72) ještě další interval (ale tak, aby podmínky (73) zůstaly zachovány), nezmenší se žádný ze součtů (74a), (74b), (74c); přidám-li tedy k systému $\mathfrak{S}$ ještě intervaly[33]) $\langle a, a_1\rangle$, $\langle b_1, a_2\rangle, \dots, \langle b_{n-1}, a_n\rangle$, $\langle b_n, b\rangle$, nezmenší se žádný z uvedených součtů. Při hledání suprema v (76), (77) mohu se tedy omezit na systémy $\mathfrak{S}$ tohoto tvaru: provedu libovolné rozdělení

$$(78)\qquad D\colon\quad a = c_0 \leqq c_1 \leqq \dots \leqq c_n = b$$

a vezmu za $\mathfrak{S}$ systém

$$(79)\qquad \mathfrak{S}\colon\quad \langle c_0, c_1\rangle, \langle c_1, c_2\rangle, \dots, \langle c_{n-1}, c_n\rangle\,.$$

(Vzhledem k 1. nemusím při tom v případě $a < b$ žádný bod opakovat; t. j. mohu psáti $a = c_0 < c_1 < \dots < c_n = b$.) Potom bude

$$(80)\qquad \mathfrak{V}(\mathfrak{S}, f) = \sum_{j=1}^{n} |f(c_j) - f(c_{j-1})|$$

a podobně $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{N}$.

3. Rozdělím-li libovolný interval $\langle a_j, b_j\rangle$ v (72) (nebo $\langle c_{j-1}, c_j\rangle$ v (79)) bodem $d \in \langle a_j, b_j\rangle$ na dva intervaly $\langle a_j, d\rangle$, $\langle d, b_j\rangle$, změní se součet (74b) tak, že místo $(f(b_j) - f(a_j))^+$ přijde $(f(b_j) - f(d))^+ + (f(d) - f(a_j))^+ \geqq (f(b_j) - f(a_j))^+$ (viz (70)), takže $\mathfrak{P}$ se nezmenší. Totéž platí pro $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{V}$.

4. Při hledání suprem v (76), (77) na př. se mohu omezit podle 3. na taková rozdělení (78), která jsou zjemněními libovolného předepsaného rozdělení

---

[33]) Načrtněte si to!

$$(81) \qquad \Delta\colon \quad a = d_0 < d_1 < \ldots < d_p = b\,.$$ [34])

Tyto čtyři triviální poznámky mějme stále na paměti.

Poznámka 4. *Vždy jest*

$$(82) \qquad V(\langle a, b\rangle; f) = P(\langle a, b\rangle; f) + N(\langle a, b\rangle; f)\,.$$

Důkaz. Z (75) a z definičních rovnic (76), (77) je patrno: Je-li $P = +\infty$[35]) nebo $N = +\infty$, je též $V = +\infty$; je-li $V = +\infty$, je buďto $P = +\infty$ nebo $N = +\infty$. Zbývá případ, kdy $V$, $P$, $N$ jsou konečná. Z (75) plyne $\mathfrak{V}(\mathfrak{S}, f) \leqq P + N$, tedy přechodem k supremu $V \leqq P + N$. Budiž za druhé $\varepsilon > 0$; existují rozdělení $D_1$, $D_2$ a k nim příslušné systémy tvaru (79) — označme je $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ — tak, že

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{S}_1, f) > P - \tfrac{1}{2}\varepsilon\,, \quad \mathfrak{N}(\mathfrak{S}_2, f) > N - \tfrac{1}{2}\varepsilon\,;$$

tytéž nerovnosti platí, nahradím-li rozdělení $D_1$, $D_2$ jejich společným zjemněním $D$ a systémy $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ příslušným systémem $\mathfrak{S}$. Ale potom podle (75)

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{S}, f) = \mathfrak{P}(\mathfrak{S}, f) + \mathfrak{N}(\mathfrak{S}, f) > P + N - \varepsilon\,,$$

tedy $V > P + N - \varepsilon$ pro každé $\varepsilon > 0$, tedy $V \geqq P + N$.

Poznámka 5. *Pro $a \leqq c \leqq b$ jest*

$$(83) \qquad V(\langle a, b\rangle; f) = V(\langle a, c\rangle; f) + V(\langle c, b\rangle; f)$$

*a podobně pro $P$, $N$.*

Důkaz. Omezme se na rozdělení (78), která mezi dělicími body $c_j$ obsahují bod $c$. Každý systém $\mathfrak{S}$ (79), kde na př. $c = c_k$, lze rozdělit na dva systémy

$$\mathfrak{S}_1\colon \ \langle a, c_1\rangle, \ldots, \langle c_{k-1}, c\rangle\,; \quad \mathfrak{S}_2\colon \ \langle c, c_{k+1}\rangle, \ldots, \langle c_{n-1}, b\rangle\,,$$

a naopak: každé dva takové systémy $\mathfrak{S}_1$, $\mathfrak{S}_2$ dávají dohromady systém $\mathfrak{S}$ (v němž $c$ je dělicím bodem). Zřejmě $\mathfrak{V}(\mathfrak{S}, f) = \mathfrak{V}(\mathfrak{S}_1, f) + \mathfrak{V}(\mathfrak{S}_2, f)$; odtud pak (83) plyne přechodem k supremu tak snadno, že to přenechávám čtenáři.

Poznámka 6. Z (83) plyne

$$(84) \qquad V(\langle a, b\rangle; f) \geqq V(\langle a, c\rangle; f)$$

[34]) Slovo „zjemnění“ značí, že každý z bodů $d_0, \ldots, d_p$ se vyskytuje mezi body $c_j$ v (78).

[35]) Zkracuji označení.

pro $a \leqq c \leqq b$. Tedy: *Budiž $f$ konečná v $\langle a, b\rangle$. Pro krátkost položme*

$$V(\langle a, x\rangle; f) = v(x)\,,\ P(\langle a, x\rangle; f) = p(x)\,,\ N(\langle a, x)\rangle; f) = n(x)\,;$$

*potom funkce $v$, $p$, $n$ jsou neklesající v $\langle a, b\rangle$; $v(a) = p(a) = n(a) = 0$.*

Podle (82) jest

$$v(x) = p(x) + n(x)\,. \tag{85}$$

Vezmu-li nyní speciálně systém $\mathfrak{S}$ tvaru (79) ($c_0 = a$, $c_n = b$), jest podle (74)

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{S}, f) - \mathfrak{N}(\mathfrak{S}, f) = \sum_{j=1}^{n} ((f(c_j) - f(c_{j-1}))^+ - (f(c_j) - f(c_{j-1}))^-) =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} (f(c_j) - f(c_{j-1})) = f(b) - f(a)\,,$$

$$\mathfrak{P}(\mathfrak{S}, f) = f(b) - f(a) + \mathfrak{N}(\mathfrak{S}, f)\,,$$

a přechodem k supremu

$$P(\langle a, b\rangle; f) = f(b) - f(a) + N(\langle a, b\rangle; f)\,; \tag{86}$$

tedy máme (píšíce $x$ místo $b$)

$$p(x) = f(x) - f(a) + n(x)\,. \tag{87}$$

**Definice 11.** *Budiž $f$ reálná a konečná v $\langle a, b\rangle$. Říkáme, že $f$ má variaci konečnou (zkratka v. k.) v $\langle a, b\rangle$, jestliže $V(\langle a, b\rangle; f) < +\infty$.*

Poznámka 7. Nechť $f$ má v. k. v $\langle a, c\rangle$ i v $\langle c, b\rangle$; potom má v. k. v $\langle a, b\rangle$. — Nechť $f$ má v. k. v $\langle a, b\rangle$ a nechť $a \leqq c < d \leqq b$. Potom $f$ má v. k. v $\langle c, d\rangle$. To plyne z (83).

Poznámka 8. *Má-li $f$ v. k. v $\langle a, b\rangle$, je $f$ omezená v $\langle a, b\rangle$.* Důkaz: Není-li $f$ omezená, existuje ke každému konečnému číslu $K$ číslo $c \in \langle a, b\rangle$ tak, že $|f(c) - f(a)| > K$, tedy $V(\langle a, b\rangle; f) > K$, $V(\langle a, b\rangle; f) = +\infty$.

Poznámka 9. *Každá funkce konečná a monotonní v $\langle a, b\rangle$ má v. k. v $\langle a, b\rangle$.*[36]) Důkaz: Všechny nenulové rozdíly $f(c_j) - f(c_{j-1})$ v (80) mají totéž znamení, tedy

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{S}, f) = \left|\sum_{j=1}^{n} (f(c_j) - f(c_{j-1}))\right| = |f(b) - f(a)|\,,$$

$$V(\langle a, b\rangle; f) = |f(b) - f(a)|\,.$$

[36]) Existují tedy nespojité funkce mající v. k. Naopak existují spojité funkce, mající variaci $+\infty$, viz cvič. 1.

**Věta 91.** *Nechť $f$, $g$ mají v. k. v $\langle a, b\rangle$. Potom funkce $|f|$, $f \pm g$, $fg$, $\operatorname{Max}(f, g)$, $\operatorname{Min}(f, g)$ — a konečně v případě, že funkce $\frac{1}{g}$ je omezená v $\langle a, b\rangle$, také $\frac{1}{g}$ — mají v. k. v $\langle a, b\rangle$.*

Důkaz. Funkce $f$, $g$ jsou omezené v $\langle a, b\rangle$ (pozn. 8): $|f(x)| < K$, $|g(x)| < K$. Jest

$$\begin{gathered}||f(b_j)| - |f(a_j)|| \leqq |f(b_j) - f(a_j)|\,; \\ |(f(b_j) \pm g(b_j)) - (f(a_j) \pm g(a_j))| \leqq \\ \leqq |f(b_j) - f(a_j)| + |g(b_j) - g(a_j)|\,;\end{gathered}$$

$$\text{(88)} \qquad \left\{\begin{aligned} &|f(b_j)\, g(b_j) - f(a_j)\, g(a_j)| = \\ &= |f(b_j)(g(b_j) - g(a_j)) + g(a_j)(f(b_j) - f(a_j))| \leqq \\ &\leqq K(|g(b_j) - g(a_j)| + |f(b_j) - f(a_j)|)\,;\end{aligned}\right.$$

$$\begin{aligned}&|\operatorname{Max}(f(b_j), g(b_j)) - \operatorname{Max}(f(a_j), g(a_j))| \leqq \\ &\leqq \operatorname{Max}(|f(b_j) - f(a_j)|, |g(b_j) - g(a_j)|)\,;\end{aligned}$$ [37]

je-li konečně $\left|\frac{1}{g(x)}\right| < L$, je

$$\left|\frac{1}{g(b_j)} - \frac{1}{g(a_j)}\right| = \left|\frac{g(a_j) - g(b_j)}{g(a_j)\, g(b_j)}\right| \leqq L^2 |g(b_j) - g(a_j)|\,.$$

Odtud pak věta bezprostředně plyne, neboť na př. podle (88) je

$$\mathfrak{V}(\mathfrak{S}, fg) \leqq K(\mathfrak{V}(\mathfrak{S}, f) + \mathfrak{V}(\mathfrak{S}, g))$$

atd.

**Věta 92.** *Budiž $f$ reálná a konečná v $\langle a, b\rangle$. Potom $f$ má v. k. v $\langle a, b\rangle$ tehdy a jen tehdy, lze-li psáti*

$$f(x) = f_1(x) - f_2(x)\,,$$

*kde $f_1$, $f_2$ jsou konečné a neklesající v $\langle a, b\rangle$.*

Důkaz. I. Jsou-li $f_1$, $f_2$ konečné a neklesající, má $f_1 - f_2$ v. k. v $\langle a, b\rangle$ podle poznámky 9 a věty 91.

---

[37]) Je totiž $|\operatorname{Max}(\alpha, \gamma) - \operatorname{Max}(\beta, \delta)| \leqq \operatorname{Max}(|\alpha - \beta|, |\gamma - \delta|)$ pro konečná $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$. Důkaz: Následkem symetrie stačí vyšetřit případ, že $\alpha = \operatorname{Max}(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$, načež levá strana je $\alpha - \operatorname{Max}(\beta, \delta) \leqq \alpha - \beta$.

II. Má-li $f$ v. k. v $\langle a, b\rangle$, jsou $v(x)$, $p(x)$, $n(x)$ podle pozn. 6 neklesající a konečné v $\langle a, b\rangle$; podle (87) je pak

$$f(x) = (f(a) + p(x)) - n(x) .$$

Tato věta úplně popisuje charakter funkcí s v. k.

Poznámka 10. Podle věty 75 má tedy funkce, jež má v. k. v $\langle a, b\rangle$, v intervalu $(a, b)$ pouze spočetnou množinu bodů nespojitosti, a ty jsou všechny 1. druhu.

**Věta 93.** *Nechť funkce $f$ má v. k. v $\langle a, b\rangle$ $(a < b)$. Budiž $x_0 \in \langle a, b)$. Potom tyto tři výroky jsou ekvivalentní:*

1. *$f$ je spojitá v bodě $x_0$ zprava.*
2. *$v$ je spojitá v bodě $x_0$ zprava.*
3. *Obě funkce $p$, $n$ jsou spojité v bodě $x_0$ zprava.*

*Obdobně pro spojitost zleva, je-li $x_0 \in (a, b\rangle$.*

Důkaz. A. Podle (85) je pro $0 < h < b - x_0$ (ježto $p$, $n$ jsou neklesající) $0 \leqq p(x_0 + h) - p(x_0) \leqq v(x_0 + h) - v(x_0)$, $0 \leqq n(x_0 + h) - n(x_0) \leqq v(x_0 + h) - v(x_0)$. Tedy zřejmě: platí-li 2, platí 3.

B. Platí-li 3, platí 1. To plyne z rovnice (87) neboli $f(x) - f(a) = p(x) - n(x)$.

C. Dokázali jsme, že z 2 plyne 3 a že z 3 plyne 1. Zbývá dokázati, že z 1 plyne 2. Předpokládejme tedy, že 1 platí a 2 neplatí; z toho jest odvoditi spor. Ježto $v$ není spojitá zprava v bodě $x_0$, je

$$\inf_{x_0 < x \leqq b} v(x) = \lim_{x \to x_0+} v(x) = v(x_0) + \lambda, \quad \text{kde } \lambda > 0 . \tag{89}$$

Ježto $f$ je spojitá zprava v bodě $x_0$, existuje $\delta_1 > 0$ $(\delta_1 < b - x_0)$ tak, že

$$(x_0 < x \leqq x_0 + \delta_1) \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \tfrac{1}{4}\lambda . \tag{90}$$

Tvrdím nyní:

(*D*) *Ke každému $\gamma \in (x_0, x_0 + \delta_1\rangle$ existuje $\gamma' \in (x_0, \gamma)$ tak, že*

$$v(\gamma) - v(\gamma') = V(\langle\gamma', \gamma\rangle; f) > \tfrac{1}{2}\lambda . \tag{91}$$

Důkaz: Podle (83) je

$$V(\langle x_0, \gamma\rangle; f) = v(\gamma) - v(x_0) \geqq \lambda .$$

Existuje tedy systém intervalů

$\mathfrak{S}$: $\langle c_0, c_1\rangle, \langle c_1, c_2\rangle, \ldots, \langle c_{n-1}, c_n\rangle$; $x_0 = c_0 < c_1 < \ldots < c_n = \gamma$; $n > 1$

tak, že

$$(92) \qquad \mathfrak{V}(\mathfrak{S}, f) = \sum_{j=1}^{n} |f(c_j) - f(c_{j-1})| > \tfrac{3}{4}\lambda .$$

Ježto $x_0 < c_1 \leqq x_0 + \delta_1$, je první člen v tomto součtu menší než $\frac{1}{4}\lambda$, takže $\sum_{j=2}^{n} |f(c_j) - f(c_{j-1})| > \frac{1}{2}\lambda$ a tedy $V(\langle c_1, \gamma\rangle; f) > \frac{1}{2}\lambda$, a stačí položiti $\gamma' = c_1$, aby platilo (91).

Volme nyní v (D) $\gamma = \gamma_1 = x_0 + \delta_1$; existuje $\gamma_2$ tak, že

$$x_0 < \gamma_2 < \gamma_1 , \quad v(\gamma_1) - v(\gamma_2) > \tfrac{1}{2}\lambda ;$$

volme nyní $\gamma = \gamma_2$; existuje $\gamma_3$ tak, že

$$x_0 < \gamma_3 < \gamma_2 , \quad v(\gamma_2) - v(\gamma_3) > \tfrac{1}{2}\lambda$$

atd. Tak dostáváme posloupnost $x_0 + \delta_1 = \gamma_1 > \gamma_2 > \gamma_3 > \cdots > x_0$ tak, že

$$v(\gamma_k) - v(\gamma_{k+1}) > \tfrac{1}{2}\lambda \quad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

a tedy pro každé přirozené $n$

$$v(\gamma_1) - v(x_0) \geqq v(\gamma_1) - v(\gamma_{n+1}) > \tfrac{1}{2}n\lambda ;$$

odtud plyne $v(\gamma_1) = +\infty$ — spor.

Hlavní výsledek je ten, že funkce $f$ a její variace $v$ mají t y t é ž body nespojitosti „zprava" a rovněž „zleva". Z věty 93 a z (87) plyne ihned:

**Věta 94.** *Je-li $f$ spojitá v $\langle a, b\rangle$ a má v. k. v $\langle a, b\rangle$, lze psáti $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, kde $f_1$, $f_2$ jsou neklesající, konečné a spojité v $\langle a, b\rangle$.*

**Definice 12.** *Budiž $f$ funkce konečná v $\langle a, b\rangle$ ($-\infty < a \leqq b < +\infty$). Říkáme, že $f$ je absolutně spojitá v $\langle a, b\rangle$ (zkratka a. s. v $\langle a, b\rangle$), jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$, tak, že pro každý systém*

$$(93) \quad \mathfrak{S}: \langle a_1, b_1\rangle, \ldots, \langle a_n, b_n\rangle \; (a \leqq a_1 \leqq b_1 \leqq a_2 \leqq b_2 \leqq \ldots \leqq a_n \leqq \leqq b_n \leqq b)$$

*platí implikace*

$$(94)\qquad \left(\sum_{j=1}^{n}(b_j - a_j) < \delta\right) \Rightarrow (\mathfrak{V}(\mathfrak{S}, f) < \varepsilon)\,.$$

Poznámka 11. *Budiž $f$ a. s. v $\langle a, b\rangle$; potom je $f$ spojitá v $\langle a, b\rangle$ a má v. k. v $\langle a, b\rangle$.*

Důkaz: 1. Spojitost: Z (94) plyne speciálně

$$(a \leqq x < y \leqq b,\ y - x < \delta) \Rightarrow |f(y) - f(x)| < \varepsilon\,.$$

2. Variace: Zvolme speciálně $\varepsilon = 1$ a sestrojme příslušné $\delta$. Rozdělme $\langle a, b\rangle$ na $p$ intervalů délky $< \delta$ dělicími body $a = c_0 < c_1 < \ldots$ $\ldots < c_p = b$. Následkem (94) má funkce $f$ v každém intervalu $\langle c_{j-1}, c_j\rangle$ variaci konečnou (nejvýše rovnou jedné). Tedy má $f$ v. k. v $\langle a, b\rangle$. Věta se nedá obrátit: Existují spojité funkce s v. k., jež nejsou a. s.; viz závažné cvič. 4.

Poznámka 12. Je-li $f$ a. s. v $\langle a, b\rangle$, a je-li $a \leqq c \leqq d \leqq b$, je $f$ též a. s. v $\langle c, d\rangle$.

Poznámka 13. Je-li $f$ a. s. v $\langle a, c\rangle$ i v $\langle c, b\rangle$, je $f$ též a. s. v $\langle a, b\rangle$. Důkaz: K číslu $\varepsilon > 0$ najdu $\delta > 0$ tak, že

$$(95)\qquad \left\{\begin{array}{l} (a \leqq \alpha_1 \leqq \beta_1 \leqq \ldots \leqq \alpha_m \leqq \beta_m \leqq c,\ \sum\limits_{j=1}^{m}(\beta_j - \alpha_j) < \delta) \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow \sum\limits_{j=1}^{m} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon\,, \\ (c \leqq \gamma_1 \leqq \delta_1 \leqq \ldots \leqq \gamma_p \leqq \delta_p \leqq b,\ \sum\limits_{k=1}^{p}(\delta_k - \gamma_k) < \delta) \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow \sum\limits_{k=1}^{p} |f(\delta_k) - f(\gamma_k)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon\,. \end{array}\right.$$

Budiž nyní $a \leqq a_1 \leqq b_1 \leqq \ldots \leqq a_n \leqq b_n \leqq b,\ \sum\limits_{j=1}^{n}(b_j - a_j) < \delta$.

Tvrdím, že

$$(96)\qquad \sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)| < \varepsilon\,.$$

Při důkazu smím předpokládat, že bod $c$ neleží uvnitř žádného $\langle a_j, b_j\rangle$; potom se však součet (96) rozpadá na dva součty, které podle (95) jsou menší než $\frac{1}{2}\varepsilon$.[38])

[38]) Kdyby bylo $c \in (a_q, b_q)$, nahradil bych $\langle a_q, b_q\rangle$ intervaly $\langle a_q, c\rangle$, $\langle c, b_q\rangle$; tím se součet v (96) nezmenší, a i tento zvětšený součet je podle předešlé úvahy $< \varepsilon$.

**Věta 95.** *Věta 91 zůstává v platnosti, nahradím-li v ní všude slova „v. k." slovy „a. s."*

Důkaz. Plyne přímo z nerovností v důkazu věty 91 a z definice 12.

Jak se pozná, že daná funkce je a. s.? Uveďme aspoň dvě jednoduchá kriteria.

Poznámka 14. *Budiž $f$ spojitá v $\langle a, b\rangle$ a nechť některé z jejích 4 derivovaných čísel je omezené v $(a, b)$* (t. j. menší v absolutní hodnotě než jisté číslo $K$ $(0 < K < +\infty)$). *Potom $f$ je a. s. v $\langle a, b\rangle$.* Důkaz: Podle věty 88 je

$$\left|\frac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}\right| \leqq K$$

pro $a \leqq x_1 < x_2 \leqq b$ (pro $x_1 = a$ nebo $x_2 = b$ to plyne limitním přechodem ze spojitosti). Tedy $\sum |f(b_j) - f(a_j)| \leqq K \sum (b_j - a_j)$ a věc je jasná.

Poznámka 15. *Nechť $f$ je spojitá a má v. k. v $\langle a, b\rangle$. Nechť pro každé $a' \in (a, b)$ je $f$ a. s. v $\langle a', b\rangle$. Potom $f$ je a. s. v $\langle a, b\rangle$.*[39])

Důkaz. Budiž $\varepsilon > 0$. Podle věty 93 je $v(x)$ spojitá zprava v bodě $a$, dále $v(a) = 0$; tedy existuje $\delta_1 > 0$ $(\delta_1 < b - a)$ tak, že $v(a + \delta_1) < \frac{1}{2}\varepsilon$. V intervalu $\langle a + \delta_1, b\rangle$ je $f$ a. s. Tedy existuje $\delta > 0$ tak, že

$$\begin{gathered}\left(a + \delta_1 \leqq \alpha_1 \leqq \beta_1 \leqq \ldots \leqq \alpha_m \leqq \beta_m \leqq b,\ \sum_{j=1}^{m} (\beta_j - \alpha_j) < \delta\right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \sum_{j=1}^{m} |f(\beta_j) - f(\alpha_j)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon\,.\end{gathered} \tag{97}$$

Je-li nyní

$$a \leqq a_1 \leqq b_1 \leqq \ldots \leqq a_n \leqq b_n \leqq b,\ \sum_{j=1}^{n} (b_j - a_j) < \delta\,,$$

mohu předpokládat, že bod $a + \delta_1$ nepadne dovnitř žádného intervalu $\langle a_j, b_j\rangle$.[40]) Součet $\sum_{j=1}^{n} |f(b_j) - f(a_j)|$ se rozpadne na dva součty: první se vztahuje na ty intervaly $\langle a_j, b_j\rangle$, jež leží v $\langle a + \delta_1, b\rangle$, a tento

[39]) Totéž ovšem platí s příslušnými změnami, je-li „nepříjemný" koncový bod $b$. A konečně také tehdy, dá-li se $\langle a, b\rangle$ rozdělit na konečný počet takových intervalů.

[40]) Kdyby bylo $a_j < a + \delta_1 < b_j$, rozdělím $\langle a_j, b_j\rangle$ na $\langle a_j, a + \delta_1\rangle$, $\langle a + \delta_1, b_j\rangle$.

součet je menší než $\frac{1}{2}\varepsilon$ podle (97); druhý se vztahuje na ty intervaly $\langle a_j, b_j \rangle$, které leží v $\langle a, a + \delta_1 \rangle$, a ten je nejvýše roven $v(a + \delta_1) < \frac{1}{2}\varepsilon$. Celý součet je tedy menší než $\varepsilon$.

Příklad 1. Budiž $s > 0$, $0 < b < +\infty$. Funkce $x^s$ je v $\langle 0, b \rangle$ spojitá a monotonní, tedy tam má v. k. V každém intervalu $\langle a, b \rangle$ $(0 < a < b)$ má omezenou derivaci a je tam tedy a. s. podle pozn. 14. Tedy je tato funkce a. s. v $\langle 0, b \rangle$ podle pozn. 15. (Pozn. 14 by pro $0 < < s < 1$ sama nestačila, ježto derivace $sx^{s-1}$ má limitu $+\infty$ pro $x \to \to 0+$).

Cvičení

*1.* Položme $f(0) = 0$, $f(x) = x \cos \frac{1}{x}$ pro $x \neq 0$. V int. $\langle 0, 1 \rangle$ je $f$ spojitá, ale nemá tam v. k. Návod: Pro celé $k > 0$ je $\left| f\left(\frac{1}{k\pi}\right) - f\left(\frac{1}{(k+1)\pi}\right) \right| = \frac{1}{k\pi} + + \frac{1}{(k+1)\pi}$; $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverguje.

*2.* Ve všech cvičeních půjde jen o konečná čísla. Pro krátkost budeme značit $f(c+) = \lim_{x \to c+} f(x)$, $f(c-) = \lim_{x \to c-} f(x)$. Rozdíly $f(c+) - f(c)$, $f(c) - f(c-)$ (mají-li smysl) nazveme skoky (nebo diskontinuitami) funkce $f$ v bodě $c$ zprava a zleva; skok zprava na př. je roven nule, je-li $f$ v bodě $c$ spojitá zprava.

Budiž

$$x_1, x_2, x_3, \ldots \tag{98}$$

prostá posloupnost (nekonečná nebo konečná, ba dokonce může býti „prázdná“) bodů intervalu $\langle a, b \rangle$. Buďte $\sum_n s_n$, $\sum_n t_n$ absolutně konvergentní řady (sčítá se přes ta $n$, pro něž $x_n$ je definováno; tedy jsou to po příp. obyčejné součty).[41]) Funkci $S$ v oboru $\langle a, b \rangle$ definujme rovnicí

$$S(x) = \sum_{x_n \leq x} s_n + \sum_{x_n < x} t_n; \tag{99}$$

každou funkci tohoto druhu nazýváme funkcí skoků. Dokažte:

1. V bodě $x_n$ má $S$ skok zprava $t_n$ a zleva $s_n$.[42])
2. V ostatních bodech intervalu $\langle a, b \rangle$ je $S$ spojitá.

[41]) Je-li $x_n = a$ (resp. $= b$), nebudiž $s_n$ (resp. $t_n$) definováno a příslušný člen řady jest vynechati.

[42]) Neformuluji zvlášť drobné odchylky, nutné v krajních bodech $a$, $b$. Čtenář to doplní sám.

3. Tedy: funkce skoků je jednoznačně určena svými skoky.

4. $S$ má v $\langle a, b\rangle$ konečnou variaci

$$V(\langle a, b\rangle;\, S) = \sum_n |s_n| + \sum_n |t_n|\,.$$

*3.* Nechť $f$ má v. k. v $\langle a, b\rangle$. Všechny body nespojitosti funkce $f$ (v int. $\langle a, b\rangle$) srovnejme v prostou posloupnost (98) a označme $s_n$, $t_n$ skok funkce $f$ zleva a zprava v bodě $x_n$. Dokažte:

1. Řady $\sum s_n$, $\sum t_n$ jsou absolutně konvergentní.

2. Existuje jeden a jen jeden rozklad (t. zv. Jordanův rozklad) funkce $f$ na součet

$$f(x) = C(x) + S(x)\,, \tag{100}$$

kde $C$, $S$ mají v. k. v $\langle a, b\rangle$, při čemž $C$ je spojitá v $\langle a, b\rangle$, $S$ je funkce skoků.

3. Funkce $S$ v (100) je funkce (99), kde $s_n$, $t_n$ jsou skoky funkce $f$ zleva a zprava v bodě $x_n$.

*4.* Podáme příklad funkce $f$, která v $\langle 0, 1\rangle$ je spojitá a neklesající (tedy má v. k.), ale není tam a. s. V intervalu $(\frac{1}{3}, \frac{2}{3})$ definujme $f(x) = \frac{1}{2}$, dále $f(x) = \frac{1}{4}$ pro $x \in (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$, $f(x) = \frac{3}{4}$ pro $x \in (\frac{7}{9}, \frac{8}{9})$, $f(x) = \frac{1}{8}$ pro $x \in (\frac{1}{27}, \frac{2}{27})$ atd. Obecně: v omezeném styčném intervalu Cantorova diskontinua (§ 1, pozn. 8), jehož koncový bod má rozvoj $\frac{2a_1}{3} + \frac{2a_2}{3^2} + \ldots + \frac{2a_k}{3^k}$ ($a_j = 0$ nebo 1), klademe $f(x) = \frac{a_1}{2} + \frac{a_2}{2^2} + \ldots + \frac{a_k}{2^k}$; mimo to položíme $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ a doplníme definici funkce $f$ v oboru $\langle 0, 1\rangle$ podobně jako v důkazu věty 78. Potom je $f$ neklesající a spojitá v $\langle 0, 1\rangle$.[49]) Uvažme, že součet délek všech omezených styčných intervalů Cantorovy množiny je 1; tedy ke každému $\delta > 0$ lze nalézti styčné intervaly $(\beta_1, \alpha_2)$, $(\beta_2, \alpha_3)$, ..., $(\beta_{n-1}, \alpha_n)$, $(0 < \beta_1 < \alpha_2 < \beta_2 < \alpha_3 < \ldots$ $\ldots < \beta_{n-1} < \alpha_n < 1)$, jejichž součet délek je $> 1 - \delta$. Položíme-li tedy $\alpha_1 = 0$, $\beta_n = 1$, je součet délek intervalů $(\alpha_1, \beta_1)$, $(\alpha_2, \beta_2)$, ..., $(\alpha_n, \beta_n)$ menší než $\delta$; ježto pak ve styčných intervalech je $f$ konstantní, vyjde snadno

$$\sum_{j=1}^{n} (f(\beta_j) - f(\alpha_j)) = f(1) - f(0) = 1\,.$$

Příklad nebyl triviální. To je přirozené podle pozn. 15: jestliže $f$ je spojitá a má v. k. v $\langle a, b\rangle$, ale není a. s. v $\langle a, b\rangle$, nemůže býti poslední okolnost způsobena přítomností jediného „nepříjemného bodu" (nebo konečného počtu ta-

[49]) Na styčných intervalech Cantorovy množiny nabývá $f$ všech hodnot tvaru $\frac{k}{2^m}$ ($k$, $m$ celá kladná, $k < 2^m$), takže její hodnoty nevynechávají žádný interval obsažený v $\langle 0, 1\rangle$, a odtud snadno plyne spojitost.

kových bodů). To je zcela jiné než u spojité funkce s nekonečnou variací, kde na př. v cvič. 1 nekonečnost variace byla způsobena průběhem funkce v okolí jediného bodu $x = 0$.

**§ 10. Spojitá funkce, nemající derivaci v žádném bodě.** Poznámka 1. Dříve než přistoupíme k hlavnímu thematu, uveďme tuto drobnost. Budiž $-\infty < a < b < c < +\infty$ a sestrojme body $P_1 = [a, f(a)]$, $P_2 = [b, f(b)]$, $P_3 = [c, f(c)]$ (čísla $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$ buďte konečná). Čísla

$$(101) \qquad Q_f(a, b) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \quad Q_f(b, c), \quad Q_f(a, c)$$

jsou směrnice přímek $P_1P_2$, $P_2P_3$, $P_3P_1$. Odtud je ihned vidět: Leží-li bod $P_2$ pod přímkou $P_1P_3$, je

$$(102) \qquad Q_f(a, b) < Q_f(a, c) < Q_f(b, c)\,;$$

leží-li bod $P_2$ nad přímkou $P_1P_3$, je

$$(103) \qquad Q_f(a, b) > Q_f(a, c) > Q_f(b, c)\,;$$

leží-li bod $P_2$ na přímce $P_1P_3$, jsou si čísla (101) rovna. Vždy je tedy

$$(104) \qquad \mathrm{Min}\,(Q_f(a, b), Q_f(b, c)) \leq Q_f(a, c) \leq \mathrm{Max}\,(Q_f(a, b), Q_f(b, c))\,;$$

této poznámky leckdy použijeme. Aritmetický důkaz je užitečným cvičením v počítání s nerovnostmi.

**Věta 96.** *Existuje konečná funkce $f$ v oboru $\mathbf{E}_1$, jež má tyto vlastnosti:*

*I. Funkce $f$ je spojitá v $(-\infty, +\infty)$.*

*II. Pro každé $x_0 \in \mathbf{E}_1$ jest*

$$\limsup_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty\,, \quad \liminf_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = -\infty\,.$$

*III. Podle II neexistuje tedy vlastní ani nevlastní derivace $f'(x)$ v žádném bodě.*

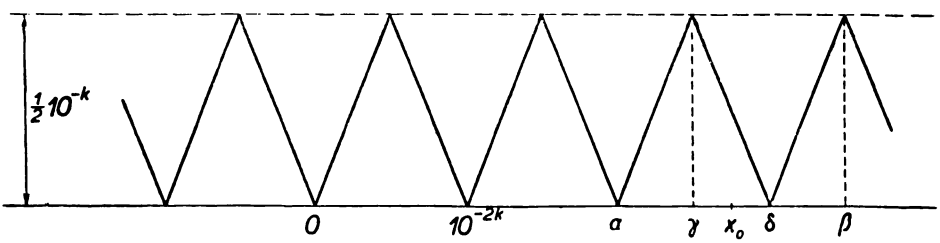
Důkaz provedeme tím, že takovou funkci sestrojíme. Pro $k = 0, 1, 2, \ldots$ definujme funkci $f_k(x)$ takto: pro $0 \leq x \leq \frac{1}{2} \cdot 10^{-2k}$ jest $f_k(x) = 10^k x$; funkce $f_k$ je sudá (t. j. $f_k(-x) = f_k(x)$) a má periodu $10^{-2k}$ (t. j. $f_k(x + 10^{-2k}) = f_k(x)$). Grafické znázornění funkce $f_k$ je schematicky naznačeno na obr. 5; skládá se z úseček o směrnicích

$\pm 10^k$. Funkce $f_k$ nabývá své nejmenší hodnoty 0 v bodech $m \,.\, 10^{-2k}$ ($m$ celé) a své největší hodnoty $\frac{1}{2} \,.\, 10^{-k}$ v bodech $(m + \frac{1}{2}) \,.\, 10^{-2k}$ ($m$ celé). Klaďme

(105) $$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)\,;$$

tato řada je v $(-\infty, +\infty)$ stejnoměrně konvergentní (ježto $0 \leqq f_n(x) \leqq \frac{1}{2} \,.\, 10^{-n}$) a tedy je $f$ spojitá v $(-\infty, +\infty)$ (věta 60). Pro všechna $x_1$, $x_2$ je dále zřejmě

(106) $$|f_n(x_1) - f_n(x_2)| \leqq 10^n |x_1 - x_2|\,.$$




Obr. 5.

Budiž dán bod $x_0 \in \mathbf{E}_1$; máme dokázati toto: ať je dáno jakékoliv (jakkoliv malé) kladné číslo $\Delta$ a jakékoliv (jakkoliv velké) kladné číslo $K < +\infty$, existují body $x_1$, $x_2$ tak, že

(107) $$0 < |x_1 - x_0| < \Delta\,, \quad \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} > K\,,$$

(108) $$0 < |x_2 - x_0| < \Delta\,, \quad \frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} < -K\,.$$

Tím bude totiž dokázáno, že pro každé $K < +\infty$ jest

$$\limsup_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geqq K\,, \quad \liminf_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leqq -K\,,$$

t. j. bude dokázáno II.

Buďte tedy dána: $x_0 \in \mathbf{E}_1$, $\Delta > 0$, $0 < K < +\infty$. Zvolme přirozené $k$ tak, že

(109) $$2 \,.\, 10^{-2k} < \Delta\,, \quad \frac{5}{36} 10^k > K\,.$$

Zvolme čtyři čísla $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$, různá od $x_0$, podle tohoto předpisu:

$$\left.\begin{array}{c}\alpha\\ \beta\\ \gamma\\ \delta\end{array}\right\}\text{ jest }\left\{\begin{array}{l}\text{největší hodnota } < x_0\\ \text{nejmenší hodnota } > x_0\\ \text{největší hodnota } < x_0\\ \text{nejmenší hodnota } > x_0\end{array}\right\},$$ pro kterou funkce $f_k(x)$ nabývá hodnoty $$\left\{\begin{array}{c}0\\ \frac{1}{2}10^{-k}\\ \frac{1}{2}10^{-k}\\ 0\end{array}\right\}$$ (zřetelně vidíte smysl tohoto předpisu na obr. 5). Jest $0 < \beta - \alpha \leqq 2 \,.\, 10^{-2k}$, $0 < \delta - \gamma \leqq 2 \,.\, 10^{-2k}$, tedy

$$(110)\qquad \begin{aligned} \frac{f_k(\beta) - f_k(\alpha)}{\beta - \alpha} &= \tfrac{1}{2}10^{-k} \,.\, \frac{1}{\beta - \alpha} \geqq \tfrac{1}{4}10^{k}\,,\\ \frac{f_k(\delta) - f_k(\gamma)}{\delta - \gamma} &= -\tfrac{1}{2}10^{-k} \,.\, \frac{1}{\delta - \gamma} \leqq -\tfrac{1}{4}10^{k}\,. \end{aligned}$$

Body $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ jsou celistvé násobky čísla $\frac{1}{2} \,.\, 10^{-2k}$, tedy jsou též celistvými násobky čísla $10^{-2n}$ pro každé $n > k$; tedy jest

$$f_n(\alpha) = f_n(\beta) = f_n(\gamma) = f_n(\delta) = 0 \quad \text{pro } n > k\,.$$

Podle (105), (106), (110) je tedy

$$(111)\qquad \begin{aligned} \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} &= \sum_{n=0}^{k} \frac{f_n(\beta) - f_n(\alpha)}{\beta - \alpha} \geqq \frac{10^k}{4} - \sum_{n=0}^{k-1} 10^n =\\ &= \frac{10^k}{4} - \frac{10^k - 1}{10 - 1} > \tfrac{5}{36} \,.\, 10^k > K\,; \end{aligned}$$

$$(112)\qquad \begin{aligned} \frac{f(\delta) - f(\gamma)}{\delta - \gamma} &= \sum_{n=0}^{k} \frac{f_n(\delta) - f_n(\gamma)}{\delta - \gamma} \leqq -\frac{10^k}{4} +\\ &+ \sum_{n=0}^{k-1} 10^n < -\tfrac{5}{36} \,.\, 10^k < -K\,. \end{aligned}$$

Podle pozn. 1 (uvažme, že $\alpha < x_0 < \beta$) platí aspoň pro jedno z čísel $\alpha$, $\beta$ — označme toto číslo $x_1$ — nerovnost

$$\frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \geqq \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha} > K\,.$$

Obdobně: aspoň pro jedno z čísel $\gamma$, $\delta$ — označme toto číslo $x_2$ — platí

$$\frac{f(x_2) - f(x_0)}{x_2 - x_0} \leqq \frac{f(\delta) - f(\gamma)}{\delta - \gamma} < -K\,.$$

Současně ovšem (viz (109))

$$|x_1 - x_0| < \beta - \alpha \leqq 2 \,.\, 10^{-2k} < \Delta \,,$$
$$|x_2 - x_0| < \delta - \gamma \leqq 2 \,.\, 10^{-2k} < \Delta \,.$$

Tedy platí vskutku (107), (108).

Poznámka 2. První příklady funkcí s vlastnostmi I, III sestrojili Bolzano a Weierstrass. Od té doby bylo sestrojeno mnoho takových příkladů. Jeden velmi jednoduchý příklad pochází od K. Petra (Časopis pro pěstování matematiky a fysiky **49** (1920), str. 25—31). Obtížná je konstrukce spojité funkce, která v žádném bodě nemá ani jednostrannou derivaci (konečnou ani nekonečnou). Takovou funkci sestrojil A. S. Bezikovič. Zcela jiný důkaz věty 96, pocházející v podstatě od polských matematiků Banacha a Mazurkiewicze, je vyložen v knize Ed. Čecha, Bodové množiny (Praha 1936, str. 249 až 252).

Cvičení

**1.** Nechť $f_n$, $f$ mají týž význam jako v důkazu věty 96. Budiž $\xi = m \,.\, 10^{-2k}$ ($m$ celé, $k$ přirozené). Potom pro celé $r > k$ a pro $0 < |x - \xi| < \frac{1}{2}10^{-2r}$ platí:

$$f_n(x) - f_n(\xi) = \quad 10^n|x - \xi| \geqq \quad 10^k|x - \xi| \text{ pro } k \leqq n \leqq r\,;$$
$$f_n(x) - f_n(\xi) \geqq -10^n|x - \xi| > -10^k|x - \xi| \text{ pro } 0 \leqq n < k\,;$$
$$f_n(x) - f_n(\xi) \geqq 0 \text{ pro } n > r.$$

Odtud $f(x) - f(\xi) \geqq (r - 2k + 1)\, 10^k|x - \xi|$, takže $f'_-(\xi) = -\infty$, $f'_+(\xi) = +\infty$; v bodě $\xi$ má $f$ ostré lokální minimum. Ježto body $\xi$ uvedeného tvaru tvoří množinu hustou v $\mathbf{E}_1$, není $f$ monotonní v žádném intervalu.

**2.** Vyšetřujme funkce $F$, $G$ takto definované: je-li $x$ iracionální, budiž $F(x) = G(x) = 0$; je-li $x = p : q$ ($p$, $q$ celá, nesoudělná, $q > 0$), budiž $F(x) = 1 : q$, $G(x) = 1 : q^3$.

I. Obě funkce jsou spojité v každém iracionálním bodě $\xi$. Je-li totiž $Q$ přirozené číslo a je-li $\delta$ vzdálenost bodu $\xi$ od množiny všech čísel $p : q$ ($p$, $q$ celá, $q > 0$), pro něž $q \leqq Q$, platí pro $|x - \xi| < \delta$ nerovnosti $0 \leqq G(x) \leqq F(x) < 1 : Q$; v bodě $\xi$ samotném je pak $F(\xi) = G(\xi) = 0$.

II. Je-li $\xi$ racionální, není ani $F$, ani $G$ spojitá zprava ani zleva v bodě $\xi$ a jest $F'_+(\xi) = G'_+(\xi) = -\infty$, $F'_-(\xi) = G'_-(\xi) = +\infty$.

III. Funkce $F$ nemá derivaci ani v žádném iracionálním bodě $\xi$. Důkaz: kdyby $F'(\xi)$ existovala, musila by býti rovna nule, ježto pro iracionální $x$ je $(F(x) - F(\xi)) : (x - \xi) = 0$. Ale ke každému přirozenému $q$ existuje celé $p$ tak, že $\left|\dfrac{p}{q} - \xi\right| < \dfrac{1}{q}$, takže $\left|F\left(\dfrac{p}{q}\right) - F(\xi)\right| : \left|\dfrac{p}{q} - \xi\right| > 1$ (dokonce neexistuje ani derivace zprava nebo zleva, protože bod $\dfrac{p}{q}$ lze voliti vlevo i vpravo od $\xi$).

IV. Ale funkce $G$ má derivaci rovnou nule na př. v každém iracionálním bodě $\xi$, pro nějž $\xi^2$ je racionální. Důkaz: budiž $\xi$ takové číslo, tedy $\xi$ iracionální, $\xi = \pm\sqrt{\dfrac{r}{s}}$ ($r$, $s$ přirozená čísla). Ježto podíl $(G(x) - G(\xi)) : (x - \xi)$ je roven nule pro iracionální $x$, stačí, vyšetříme-li jej ještě pro $x$ tvaru $x = p : q$ ($p$, $q$ celá nesoudělná, $q > 0$). Potom jest

$$\frac{G(x) - G(\xi)}{x - \xi} = \frac{1}{q^3(x - \xi)} = \frac{1}{q^3}\,\frac{\xi + x}{x^2 - \xi^2} = \frac{1}{q} \cdot \frac{\left(\pm\sqrt{\dfrac{r}{s}} + \dfrac{p}{q}\right)s}{sp^2 - rq^2} = \frac{1}{q} \cdot A\,.$$

Blíží-li se $x = p : q$ hodnotě $\xi$, roste $q$ nade všechny meze (viz I), kdežto $A$ je omezené: neboť jmenovatel je celé číslo $\neq 0$ a čitatel je omezený, ježto $r$, $s$ jsou pevná a $p : q$ se blíží číslu $\xi$; tím je důkaz proveden.

Máte ovšem podrobně dokázati všechno, co bylo v tomto cvičení naznačeno.

**§ 11. Konvexní funkce. Definice 13.** *Funkce $f$, konečná v intervalu $J$, nazývá se konvexní v $J$, má-li tuto vlastnost: Jsou-li $x_1 < x_3 < x_2$ tři libovolné body z $J$, leží bod $[x_3, f(x_3)]$ buďto pod přímkou, spojující body $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$, nebo na ní.*

Poznámka 1. Viz též **DI**, def. 26. Mnozí autoři požadují uvedenou vlastnost pouze pro $x_3 = \frac{1}{2}(x_1 + x_2)$; potom se obdrží trochu obecnější třída funkcí. Je zřejmo: Jsou-li $J_1$, $J_2$ dva intervaly, $J_1 \subset J_2$ a je-li $f$ konvexní v $J_2$, je též konvexní v $J_1$. V dalším vyšetřování se omezíme hlavně na otevřené intervaly $J$.

**Věta 97.** *Budiž $f$ konvexní v otevřeném intervalu $J$. Potom platí: V intervalu $J$ existuje vlastní derivace zprava $f'_+(x)$ a vlastní derivace zleva $f'_-(x)$. Pro $x \in J$ jest $f'_-(x) \leqq f'_+(x)$. Pro $x_1 \in J$, $x_2 \in J$, $x_1 < x_2$ jest $f'_+(x_1) \leqq f'_-(x_2)$.*

Poznámka 2. Z věty 86 a 97 plyne ihned: Je-li funkce $f$ konvexní v otevřeném intervalu $J$, je spojitá v $J$; ony body v $J$, v nichž $f$ nemá vlastní derivaci, tvoří spočetnou množinu (viz pozn. 8 v § 8). Funkce

$f'_+(x)$, $f'_-(x)$ jsou neklesající v $J$ (neboť podle věty 97 platí pro $x_1 \in J$, $x_2 \in J$, $x_1 < x_2$ nerovnosti

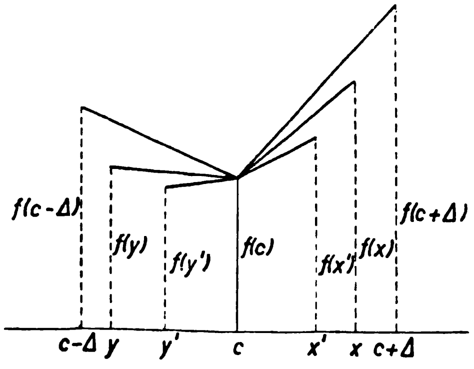
$$f'_-(x_1) \leqq f'_+(x_1) \leqq f'_-(x_2)\,,\ f'_+(x_1) \leqq f'_-(x_2) \leqq f'_+(x_2))\,.$$

Důkaz. Budiž $c \in J$ a zvolme $\Delta > 0$ tak, aby $\langle c - \Delta, c + \Delta\rangle \subset J$. Ježto pro $c < x' < x \leqq c + \Delta$ leží bod $[x', f(x')]$ pod spojnicí bodů $[c, f(c)]$, $[x, f(x)]$ nebo na ní, je zřejmě[44])

$$Q_f(c, x') \leqq Q_f(c, x) \leqq \leqq Q_f(c, c + \Delta)$$

(viz obr. 6 a pozn. 1 v § 10), takže $Q_f(c, x)$ je neklesající funkce proměnné $x$ v intervalu $(c, c + \Delta\rangle$, takže existuje limita

$$f'_+(c) = \lim_{x \to c+} Q_f(c, x) \leqq \leqq Q_f(c, c + \Delta) < +\infty\,.$$



Obr. 6.

Obdobně (viz obr. 6): pro $c - \Delta \leqq y < y' < c$ jest

$$Q_f(c, y') \geqq Q_f(c, y) \geqq \geqq Q_f(c, c - \Delta)\,,$$

takže $Q_f(c, y)$ je neklesající funkce proměnné $y$ v intervalu $\langle c - \Delta, c)$, takže existuje limita

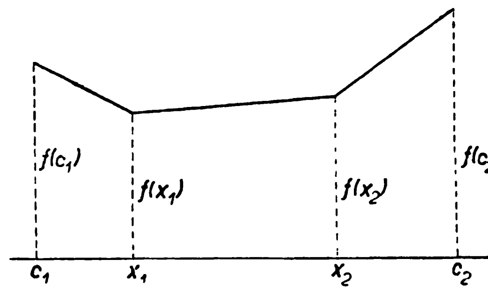
$$f'_-(c) = \lim_{y \to c-} Q_f(c, y) \geqq Q_f(c, c - \Delta) > -\infty\,.$$

Pro $c - \Delta < y < c < x < c + \Delta$ leží bod $[c, f(c)]$ pod spojnicí bodů $[x, f(x)]$, $[y, f(y)]$ nebo na ní, tedy (viz obr. 6) $Q_f(c, y) \leqq Q_f(c, x)$; odtud (limitním přechodem $x \to c+$ při pevném $y < c$) $Q_f(c, y) \leqq f'_+(c)$ a odtud (limitním přechodem $y \to c-$) $f'_-(c) \leqq f'_+(c)$; tedy celkem $-\infty < f'_-(c) \leqq f'_+(c) < +\infty$. Buďte dále $c_1 < c_2$ dva body intervalu $J$. Jsou-li $x_1$, $x_2$ tak voleny, že $c_1 < x_1 < x_2 < c_2$, je zřejmě $Q_f(c_1, x_1) \leqq \leqq Q_f(x_1, x_2) \leqq Q_f(x_2, c_2)$ (obr. 7). Z nerovnosti $Q_f(c_1, x_1) \leqq Q_f(x_2, c_2)$ plyne ($x_2 \to c_2-$) $Q_f(c_1, x_1) \leqq f'_-(c_2)$ a odtud dále ($x_1 \to c_1+$) $f'_+(c_1) \leqq \leqq f'_-(c_2)$.

[44]) Smysl symbolu $Q_f$ viz na začátku § 8.

Je-li $f$ konvexní v otevřeném intervalu $J$, je $f$ spojitá v $J$ a má v $J$ neklesající derivaci zprava (viz větu 97 a pozn. 2). Naopak dokážeme:

**Věta 98.** *Budiž $f$ spojitá v otevřeném intervalu $J$; v $J$ nechť existuje derivace zprava $f'_+(x)$ a funkce $f'_+(x)$ budiž neklesající v $J$. Potom je $f$ konvexní v $J$.*




Obr. 7.

Důkaz. Buďte $x_1 < x_3 < x_2$ tři body z $J$; máme dokázati, že bod $[x_3, f(x_3)]$ leží buďto pod spojnicí bodů $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$ nebo na ní. K tomu cíli stačí dokázati (viz stále pozn. 1 v § 10), že

$$Q_f(x_1, x_3) \leqq Q_f(x_3, x_2)\,.$$

Funkce $F(x) = f(x) - f(x_1) - Q_f(x_1, x_3)\,(x - x_1)$ je spojitá v $\langle x_1, x_3 \rangle$, $F(x_1) = F(x_3) = 0$. Podle věty 87, II existuje tedy $\xi$ tak, že $x_1 \leqq \xi < x_3$, $F'_+(\xi) = D_+F(\xi) \geqq 0$, t. j. $f'_+(\xi) - Q_f(x_1, x_3) \geqq 0$. Vyšetřením funkce $G(x) = f(x) - f(x_3) - Q_f(x_3, x_2)(x - x_3)$ obdržíme bod $\eta$ takový, že $x_3 \leqq \eta < x_2$, $G'_+(\eta) = D^+G(\eta) \leqq 0$ t. j. $f'_+(\eta) - Q_f(x_3, x_2) \leqq 0$; ale $\xi < \eta$, tedy $f'_+(\xi) \leqq f'_+(\eta)$, takže máme celkem

$$Q_f(x_1, x_3) \leqq f'_+(\xi) \leqq f'_+(\eta) \leqq Q_f(x_3, x_2)\,.$$

Odvoďme ještě tuto nerovnost:

**Věta 99.** *Budiž $f$ konvexní v intervalu $J$ (jakémkoliv). Buďte $x_1, x_2, \ldots, x_k$ ($k > 1$) jakékoliv body intervalu $J$, buďte $p_1, p_2, \ldots, p_k$ kladná čísla. Potom jest*

$$f\left(\frac{p_1x_1 + \ldots + p_kx_k}{p_1 + \ldots + p_k}\right) \leqq \frac{p_1f(x_1) + \ldots + p_kf(x_k)}{p_1 + \ldots + p_k}\,. \tag{113}$$

Důkaz. I. Budiž předně $k = 2$; je-li $x_1 = x_2$, jsou obě strany rovny $f(x_1)$. Předpokládejme tedy $x_1 \neq x_2$ a volme očíslování tak, že $x_1 < x_2$

Potom jest $x_1 < \dfrac{p_1x_1 + p_2x_2}{p_1 + p_2} < x_2$; sestrojme přímku

$$y = f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1),$$

procházející body $[x_1, f(x_1)]$, $[x_2, f(x_2)]$.

Bod $\left[\dfrac{p_1x_1 + p_2x_2}{p_1 + p_2}, f\left(\dfrac{p_1x_1 + p_2x_2}{p_1 + p_2}\right)\right]$ leží na této přímce nebo pod ní, t. j.

$$f\left(\frac{p_1x_1 + p_2x_2}{p_1 + p_2}\right) \leqq f(x_1) + \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}\left(\frac{p_1x_1 + p_2x_2}{p_1 + p_2} - x_1\right).$$

Pravá strana této nerovnosti dává po úpravě právě $\dfrac{p_1f(x_1) + p_2f(x_2)}{p_1 + p_2}$, čímž (113) dokázáno pro $k = 2$.

II. Budiž $k > 2$ a učiňme indukční předpoklad, že věta je správná s hodnotou $k - 1$ místo $k$. Buďte dána $x_1, \ldots, x_k$, $p_1, \ldots, p_k$. Položme

$$y_1 = \frac{p_1x_1 + \ldots + p_{k-1}x_{k-1}}{p_1 + \ldots + p_{k-1}}, \quad y_2 = x_k, \tag{114}$$

$$r_1 = \frac{p_1 + \ldots + p_{k-1}}{p_1 + \ldots + p_k}, \quad r_2 = \frac{p_k}{p_1 + \ldots + p_k}. \tag{115}$$

Jest $y_2 \in J$; dále Min $(x_1, \ldots, x_{k-1}) \leqq y_1 \leqq$ Max $(x_1, \ldots, x_{k-1})$, takže také $y_1 \in J$. Konečně je $r_1 > 0$, $r_2 > 0$, $r_1 + r_2 = 1$. Podle vzorce (113) pro $k = 2$ je tedy

$$f(r_1y_1 + r_2y_2) \leqq r_1f(y_1) + r_2f(y_2). \tag{116}$$

Zde je $r_1y_1 + r_2y_2 = \dfrac{p_1x_1 + \ldots + p_kx_k}{p_1 + \ldots + p_k}$.

Dále máme podle (114) a podle indukčního předpokladu

$$f(y_1) \leqq \frac{p_1f(x_1) + \ldots + p_{k-1}f(x_{k-1})}{p_1 + \ldots + p_{k-1}}. \tag{117}$$

Dosazením ze (117), (115), (114) do (116) plyne (113).

Z věty 99 odvodíme tuto nerovnost:

**Věta 100.** *Jsou-li* $a_1, a_2, \ldots, a_n$ *nezáporná čísla, jest* $\sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} \leqq \leqq \dfrac{a_1 + \ldots + a_n}{n}$ (t. j. geometrický průměr $n$ nezáporných čísel se nejvýše rovná jejich aritmetickému průměru).

**Důkaz.** Věc je jasná, je-li některé $a_j = 0$. Buďte tedy všechna $a_j > 0$. Vezmeme-li logaritmy a změníme znamení, vidíme, že stačí dokázati nerovnost

$$(118) \qquad -\lg \frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \leqq \frac{-\lg a_1 - \ldots - \lg a_n}{n}.$$

V intervalu $(0, +\infty)$ je funkce $-\lg x$ spojitá a má tam rostoucí derivaci $-1 : x$, je tam tedy konvexní (věta 98). Klademe-li ve větě 99 $x_j = a_j$, $p_j = 1$, $f(x) = -\lg x$, obdržíme právě (118).

Cvičení

*1.* Zobecněte větu 100 takto: jsou-li $p_1, \ldots, p_n, a_1, \ldots, a_n$ kladná čísla, jest

$$(a_1^{p_1} \ldots a_n^{p_n})^{\frac{1}{p_1 + \ldots + p_n}} \leqq \frac{p_1 a_1 + \ldots + p_n a_n}{p_1 + \ldots + p_n}.$$

*2.* Je-li $f$ konvexní v $(a, b)$, existují buďto tři intervaly $(a, c)$, $(c, d)$, $(d, b)$ tak, že $f$ je klesající v $(a, c)$, konstantní v $(c, d)$, rostoucí v $(d, b)$; nebo některý z těchto intervalů, po příp. i dva, schází, takže na př. $f$ může býti konstantní v $(a, b)$, nebo klesající v $(a, c)$, rostoucí v $(c, b)$ a pod.

*3.* Budiž $f(x)$ konečná v $(a, b)$. Potom je $f(x)$ konvexní v $(a, b)$ tehdy a jen tehdy, jestliže každým bodem $[x_0, f(x_0)]$ křivky $\mathfrak{K}$:

$$y = f(x), \; a < x < b$$

prochází přímka $y - f(x_0) = k(x - x_0)$ tak, že všechny body křivky $\mathfrak{K}$ leží nad touto přímkou nebo na ní. (Na př.: je-li $f$ konvexní, lze voliti za $k$ každé číslo takové, že $f'_-(x_0) \leqq k \leqq f'_+(x_0)$, ale žádné jiné číslo $k$.)

*4.* Funkce $f(x)$, konečná v intervalu $J$, je konvexní v $J$ tehdy a jen tehdy, má-li tuto vlastnost: Je-li $x_1 \in J$, $x_2 \in J$, $t_1 \geqq 0$, $t_2 \geqq 0$, $t_1 + t_2 = 1$, jest $f(t_1 x_1 + t_2 x_2) \leqq t_1 f(x_1) + t_2 f(x_2)$.

**§ 12. Nerovnosti.** V tomto paragrafu zavedeme následující označení: je-li $q \in \mathbf{E}_1$, $q \neq 0$, $q \neq 1$, bude $q'$ znamenati vždy číslo, definované rovnicí

$$(119) \qquad \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1, \text{ t. j. } q' = \frac{q}{q-1}.$$[45])

Odvodíme několik důležitých nerovností; jejich základem budou ná-

[45]) Poznamenejme: Je-li $q > 1$, je $q' > 1$; je-li $0 < q < 1$, je $q' < 0$; je-li $q < 0$, je $0 < q' < 1$.

sledující dvě jednoduché věty. Všechna čísla v tomto paragrafu jsou konečná čísla.

**Věta 101.** *Budiž $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $q > 1$. Potom jest*

$$ab \leqq \frac{a^q}{q} + \frac{b^{q'}}{q'}\,; \tag{120}$$

*znamení rovnosti platí tehdy a jen tehdy, je-li $a^q = b^{q'}$.*

Důkaz. Pro $b = 0$ je věc jasná; budiž tedy $b > 0$. Vyšetřujme, při pevném $b$, tuto funkci proměnné $a$:

$$\varphi(a) = \frac{a^q}{q} + \frac{b^{q'}}{q'} - ab\,.$$

Tato funkce je spojitá v $\langle 0, +\infty)$ a má v $(0, +\infty)$ derivaci $\varphi'(a) = a^{q-1} - b$. Tedy je funkce $\varphi$ klesající v intervalu $\langle 0, b^{\frac{1}{q-1}}\rangle$, rostoucí v $\langle b^{\frac{1}{q-1}}, +\infty)$, nejmenší hodnoty nabývá tedy pro $a = b^{\frac{1}{q-1}}$, t. j. pro $a^q = b^{\frac{q}{q-1}} = b^{q'}$. Pro tuto hodnotu $a$ je $\varphi(a) = \frac{a^q}{q} + \frac{a^q}{q'} - a\,.\,a^{q-1} = 0$, kdežto pro všechny ostatní hodnoty $a \geqq 0$ jest $\varphi(a) > 0$.

Také pro ostatní hodnoty $q \neq 0, 1$ platí obdobná věta, ale s opačným smyslem nerovnosti:

**Věta 102.** *Budiž $a > 0$, $b > 0$, $q < 1$, $q \neq 0$. Potom je*

$$ab \geqq \frac{a^q}{q} + \frac{b^{q'}}{q'}\,; \tag{121}$$

*znamení rovnosti platí tehdy a jen tehdy, je-li $a^q = b^{q'}$.*[46])

Důkaz téměř doslovně jako u věty 101; zde jest ovšem $q - 1 < 0$, takže $\varphi'(a) = a^{q-1} - b$ je kladná pro $a < b^{\frac{1}{q-1}}$, záporná pro $a > b^{\frac{1}{q-1}}$, takže funkce $\varphi(a)$ nabývá pro $a^q = b^{q'}$ své největší hodnoty (rovné nule).

**Věta 103** (t. zv. Hölderova nerovnost). *Buďte $a_1, \ldots, a_n$; $b_1, \ldots, b_n$ nezáporná čísla; budiž $q > 1$. Potom jest*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leqq \Big(\sum_{k=1}^{n} a_k^q\Big)^{\frac{1}{q}} \Big(\sum_{k=1}^{n} b_k^{q'}\Big)^{\frac{1}{q'}}\,. \tag{122}$$

---

[46]) Hodnoty $a = 0$, $b = 0$ jsem vyloučil, ježto zde vystupuje záporný mocnitel (buďto $q$ nebo $q'$; viz [45])).

**Důkaz.** Jsou-li všechna $a_j = 0$ nebo všechna $b_j = 0$, je nerovnost (122) zřejmá. Nenastane-li tento případ, položme

$$A_k = \frac{a_k}{(\sum_{l=1}^{n} a_l^q)^{\frac{1}{q}}}, \quad B_k = \frac{b_k}{(\sum_{l=1}^{n} b_l^{q'})^{\frac{1}{q'}}} \quad (k = 1, \ldots, n). \tag{123}$$

Potom jest $A_1^q + \ldots + A_n^q = B_1^{q'} + \ldots + B_n^{q'} = 1$ a z věty 101 plyne $A_k B_k \leqq \frac{1}{q} A_k^q + \frac{1}{q'} B_k^{q'}$ pro $k = 1, \ldots, n$. Odtud sečtením $\sum_{k=1}^{n} A_k B_k \leqq \leqq \frac{1}{q} + \frac{1}{q'} = 1$. Dosadíme-li za $A_k$, $B_k$ podle (123), obdržíme (122).

**Příklad 1.** Věty 103 se užívá často při studiu konvergence a součtu nekonečných řad. Buďte $a_1, a_2, \ldots, b_1, b_2, \ldots$ vesměs nezáporná čísla, $q > 1$. Potom platí: konvergují-li řady $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^q$, $\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{q'}$, konverguje též řada $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ a mezi součty těchto tří řad platí nerovnost

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k \leqq (\sum_{k=1}^{\infty} a_k^q)^{\frac{1}{q}} (\sum_{k=1}^{\infty} b_k^{q'})^{\frac{1}{q'}}. \tag{124}$$

**Důkaz.** Jsou-li první dvě řady konvergentní, je pravá strana v (122) omezená pro všechna $n \in \boldsymbol{N}$, tedy i levá strana, takže i třetí řada je konvergentní. Nerovnost (124) pak plyne z (122) limitním přechodem $n \to \infty$. Podobným zřejmým způsobem se dá i jiných vět tohoto paragrafu užíti k studiu nekonečných řad; nebudeme se tím zdržovati a budeme psáti výsledky tohoto paragrafu jen pro konečné součty.

Pro $q < 1$, $q \neq 0$ platí věta obdobná k větě 103, ale s obráceným znamením nerovnosti:

**Věta 104.** *Budiž $q < 1$, $q \neq 0$; buďte $a_1, \ldots, a_n$; $b_1, \ldots, b_n$ kladná čísla. Potom platí nerovnost obrácená k nerovnosti* (122) *(t. j. se znamením $\geqq$ místo $\leqq$).*

**Důkaz** jako u věty 103, místo (120) se však užije obrácené nerovnosti (121).

**Věta 105.** (T. zv. Minkovského nerovnost.) *Budiž* $q \geqq 1$. *Buďte* $a_k$, $b_k$ *nezáporná pro* $1 \leqq k \leqq n$. *Potom jest*

$$(125) \qquad \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Důkaz. Pro $q = 1$ je věta jasná. Budiž tedy $q > 1$. Pišme

$$(126) \qquad \sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^q = \sum_{k=1}^{n} c_k a_k + \sum_{k=1}^{n} c_k b_k,$$

kde

$$c_k = (a_k + b_k)^{q-1} = (a_k + b_k)^{\frac{q}{q'}}$$

($q'$ jest opět definováno rovnicí (119)).

Věta 103 dává

$$\sum_{k=1}^{n} c_k a_k \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} c_k^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^q\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^q\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

a obdobně pro $\sum_{k=1}^{n} c_k b_k$. Tedy (viz (126))

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^q \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} (a_k + b_k)^q\right)^{\frac{1}{q'}} \left(\left(\sum_{k=1}^{n} a_k^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^{n} b_k^q\right)^{\frac{1}{q}}\right).$$

Ježto $1 - \dfrac{1}{q'} = \dfrac{1}{q}$, plyne odtud (125).

**Věta 106.** *Buďte* $a_k$, $b_k$ *kladná* ($1 \leqq k \leqq n$), $q < 1$, $q \neq 0$. *Potom platí nerovnost obrácená k* (125).

Důkaz. Jako u věty 105; pouze místo věty 103 se užije obrácené nerovnosti z věty 104.

Poznámka 1. Vět 103 až 106 lze užíti také na komplexní čísla. Na př. jsou-li $a_j$, $b_j$ komplexní, máme pro $q > 1$ (vzorec (128) platí i pro $q = 1$)

$$(127) \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right| \leqq \sum_{k=1}^{n} |a_k b_k| \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^{q'}\right)^{\frac{1}{q'}},$$

$$(128) \quad \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k + b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} (|a_k| + |b_k|)^q\right)^{\frac{1}{q}} \leqq \left(\sum_{k=1}^{n} |a_k|^q\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\sum_{k=1}^{n} |b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Velmi často se užívá nerovnosti Buňakovského, t. j. nerovnosti (127) pro $q = 2$ (načež také $q' = 2$):

(129) $$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right|^2 \leqq \sum_{k=1}^{n} |a_k|^2 \sum_{k=1}^{n} |b_k|^2 .$$

Důležitý je také případ $b_k = 1$ v (127) pro $q > 1$:

(130) $$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|^q \leqq n^{q-1} \sum_{k=1}^{n} |a_k|^q .$$

Buďte nyní dána nezáporná čísla $a_1, \ldots, a_n$; sestrojme výraz

(131) $$S_\alpha = S_\alpha(a_1, \ldots, a_n) = \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}} \quad (\alpha \neq 0) .$$

Tento výraz, t. zv. *aritmetický průměr stupně* $\alpha$ z čísel $a_1, \ldots, a_n$, je při daných $a_k$ funkcí proměnné $\alpha$; vlastnosti této funkce budeme vyšetřovati.

Napřed však poznamenejme: 1. je-li $\alpha < 0$, nemá výraz $S_\alpha$ smyslu, když některé $a_k$ se rovná nule (viz však cvič. 5). Abych věc nekomplikoval, *budu předpokládati v dalším všechna $a_k$ kladná*; rozšíření výsledků na případ, že některá $a_k$ by se rovnala nule, dostal bych snadným limitním přechodem.

2. Výraz (131) nemá smyslu, je-li $\alpha = 0$. Definujme proto $S_0 = S_0(a_1, \ldots, a_n)$ jako limitu:

(132) $$S_0 = \lim_{\alpha \to 0} S_\alpha .$$

Existuje tato limita?

Pro $\alpha \neq 0$ platí (131). Logaritmujme (131); jde o limitu výrazu

(133) $$\frac{1}{\alpha} \cdot \lg \frac{a_1^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n} \quad (a_k > 0)$$

v bodě 0. Píšeme-li $f(\alpha) = \lg \dfrac{a_1^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}{n}$, jest $f(0) = \lg \dfrac{n}{n} = 0$, takže výraz (133) jest $\dfrac{1}{\alpha}\,(f(\alpha) - f(0))$ a jeho limita jest

$$f'(0) = \left(\frac{a_1^\alpha \lg a_1 + \ldots + a_n^\alpha \lg a_n}{a_1^\alpha + \ldots + a_n^\alpha}\right)_{\alpha=0} = \frac{1}{n}\,(\lg a_1 + \ldots + \lg a_n) .$$

Přechodem od logaritmů k číslům dostaneme

$$\lim_{\alpha \to 0} S_\alpha = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n};$$

definujeme-li tedy $S_0$ rovnicí (132), jest

$$S_0 = S_0(a_1, \dots, a_n) = \sqrt[n]{a_1 \dots a_n}, \tag{134}$$

t. j. $S_0$ je „geometrický průměr".

V dalším budeme předpokládati: jest dáno $n$ kladných čísel $a_1, \dots$ $\dots, a_n$; funkci $S_\alpha$ (proměnné $\alpha$) definujme pro $\alpha \neq 0$ rovnicí (131), pro $\alpha = 0$ rovnicí (132), načež platí (134).

**Věta 107.** *$S_\alpha$ je neklesající funkce v intervalu $(-\infty, +\infty)$.*

Důkaz. I. Budiž $0 < \alpha < \beta$, tedy $\beta = q\alpha$, $q > 1$; definujme $q'$ rovnicí (119). Ve větě 103 pišme $a_k^\alpha$ místo $a_k$, 1 místo $b_k$; vyjde $\sum a_k^\alpha \leqq$ $\leqq (\sum a_k^{q\alpha})^{\frac{1}{q}} \cdot n^{\frac{1}{q'}}$ [47]). Ježto $\frac{1}{q'} = 1 - \frac{1}{q}$, lze tuto nerovnost psáti též

$$n^{-1} \sum a_k^\alpha \leqq (n^{-1} \sum a_k^{q\alpha})^{\frac{1}{q}}. \tag{135}$$

Umocníme-li obě strany na $\frac{1}{\alpha}$ a všimneme-li si, že $\beta = q\alpha$, dostaneme $S_\alpha \leqq S_\beta$ pro $0 < \alpha < \beta$.

II. Budiž $0 > \alpha > \beta$, tedy $\beta = q\alpha$, $q > 1$; jako dříve obdržíme nerovnost (135). Umocníme-li nyní obě strany na záporný mocnitel $\frac{1}{\alpha}$, obrátí se smysl nerovnosti a obdržíme $S_\alpha \geqq S_\beta$ pro $0 > \alpha > \beta$.

III. Podle I, II jest $S_\alpha$ neklesající v intervalu $(0, +\infty)$ i v intervalu $(-\infty, 0)$. Stačí tedy, dokázati ještě toto: je-li $\beta < 0 < \alpha$, jest $S_\beta \leqq$ $\leqq S_0 \leqq S_\alpha$. Důkaz: zvolme $\delta > 0$ tak, že $\delta < \alpha$, $-\delta > \beta$. Potom podle I, II jest $S_\beta \leqq S_{-\delta}$, $S_\delta \leqq S_\alpha$. Pro $\delta \to 0+$ obdržíme odtud podle (132) vskutku $S_\beta \leqq S_0$, $S_0 \leqq S_\alpha$.

Poznámka. Podle věty 107 je speciálně $S_0 \leqq S_1$, což je věta 100.

**Věta 108.** *Funkce $F(\alpha) = \lg S_\alpha^\alpha$ je konvexní v intervalu $(-\infty, +\infty)$.*

---

[47]) Sčítá se ovšem podle $k$ od 1 do $n$.

Důkaz. Budiž $\alpha_1 < \alpha < \alpha_2$; tedy lze psáti $\alpha = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2$ ($t_1 > 0$, $t_2 > 0$, $t_1 + t_2 = 1$). Rovnice přímky, spojující body $[\alpha_1, F(\alpha_1)]$, $[\alpha_2, F(\alpha_2)]$, jest

$$y = F(\alpha_1) + (F(\alpha_2) - F(\alpha_1)) \frac{x - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} . \tag{136}$$

Máme dokázati, že

$$F(\alpha) \leqq F(\alpha_1) + (F(\alpha_2) - F(\alpha_1)) \frac{\alpha - \alpha_1}{\alpha_2 - \alpha_1} . \tag{137}$$

Ježto $\alpha = t_1\alpha_1 + t_2\alpha_2$, $t_1 + t_2 = 1$, lze (137) též psáti

$$F(\alpha) \leqq t_1F(\alpha_1) + t_2F(\alpha_2) . \tag{138}$$

Tuto nerovnost máme dokázati. Ve větě 103 klaďme $a_k^{\alpha_1 t_1}$, $a_k^{\alpha_2 t_2}$ místo $a_k$, $b_k$; dále klaďme $q = \frac{1}{t_1}$, takže $q' = \frac{1}{t_2}$; vyjde

$$\sum a_k^\alpha \leqq (\sum a_k^{\alpha_1})^{t_1} . (\sum a_k^{\alpha_2})^{t_2} ;$$

ježto $t_1 + t_2 = 1$, lze psáti též

$$\frac{1}{n} \sum a_k^\alpha \leqq \left(\frac{1}{n} \sum a_k^{\alpha_1}\right)^{t_1} . \left(\frac{1}{n} \sum a_k^{\alpha_2}\right)^{t_2} . \tag{139}$$

Jest však $\frac{1}{n} \sum a_k^\beta = S_\beta^\beta$, což platí i pro $\beta = 0$, neboť potom jsou obě strany rovny 1. Místo (139) lze tedy též psáti

$$S_\alpha^\alpha \leqq S_{\alpha_1}^{\alpha_1 t_1} . S_{\alpha_2}^{\alpha_2 t_2} ;$$

logaritmováním plyne odtud (138).

Věty 103 až 106 lze přepsati též pomocí funkce $S_\alpha$. Je-li na př. $q < 1$, $q \neq 0$, platí nerovnost obrácená k (125); násobíme-li ji $n^{-\frac{1}{q}}$, můžeme ji psáti ve tvaru

$$S_q(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \geqq S_q(a_1, \dots, a_n) + S_q(b_1, \dots, b_n) \tag{140}$$

(pro $q \geqq 1$ platí nerovnost opačná). Necháme-li v (140) konvergovati $q$ k nule, dostáváme

$$S_0(a_1 + b_1, \dots, a_n + b_n) \geqq S_0(a_1, \dots, a_n) + S_0(b_1, \dots, b_n) ,$$

t. j. dostáváme tuto větu o geometrickém průměru:

**Věta 109.** *Jsou-li* $a_1, \ldots, a_n$; $b_1, \ldots, b_n$ *nezáporná, jest*

$$(141) \qquad \sqrt[n]{(a_1 + b_1) \ldots (a_n + b_n)} \geqq \sqrt[n]{a_1 \ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1 \ldots b_n}\,.$$

Dokázali jsme tuto větu vlastně za předpokladu, že všechna $a_k$, $b_k$ jsou kladná; je-li však na př. některé $b_k$ rovno nule, odpadá poslední člen v (141) a nerovnost je samozřejmá.

Cvičení

**1.** Ve větě 103, 104 platí znamení rovnosti tehdy a jen tehdy, je-li

$$a_1^q : b_1^{q'} = a_2^q : b_2^q = \ldots = a_n^q : b_n^{q'}.$$ [48]

**2.** Ve větě 105, 106 platí pro $q \neq 1$ znamení rovnosti tehdy a jen tehdy, je-li

$$a_1 : b_1 = a_2 : b_2 = \ldots = a_n : b_n.$$ [48]

**3.** Rovnice $S_\alpha(a_1, \ldots, a_n) = S_\beta(a_1, \ldots, a_n)$ platí pro $\alpha < \beta$ tehdy a jen tehdy, je-li $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

**4.** Ve vztahu (138) platí znamení rovnosti tehdy a jen tehdy, je-li $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.[48]

**5.** Definujme $S_\alpha(a_1, \ldots, a_n)$ pro $\alpha \leqq 0$ i v tom případě, že některá $a_k$ jsou rovna nule (a ostatní ovšem kladná): ona $a_k$, jež jsou rovna nule, nahradím číslem $\delta > 0$ a najdu limitu pro $\delta \to 0$. Tato definice dává $S_\alpha(a_1, \ldots, a_n) = 0$ pro $\alpha \leqq 0$, jakmile některé číslo $a_k$ je rovno nule.

**6.** Všechny výsledky tohoto paragrafu lze poněkud zobecniti. Buďte pevně dána kladná čísla $\gamma_1, \ldots, \gamma_n$; pro kladná $a_1, \ldots, a_n$ a pro $\alpha \neq 0$ definujme[49]

$$\mathfrak{S}_\alpha = \mathfrak{S}_\alpha(a_1, \ldots, a_n) = \left(\frac{1}{\gamma_1 + \ldots + \gamma_n} \sum_{k=1}^{n} \gamma_k a_k^\alpha\right)^{\frac{1}{\alpha}},$$

dále definujme $\mathfrak{S}_0 = \lim\limits_{\alpha \to 0} \mathfrak{S}_\alpha$; vyjde

$$\mathfrak{S}_0(a_1, \ldots, a_n) = (a_1^{\gamma_1} \ldots a_n^{\gamma_n})^{\frac{1}{\gamma_1 + \ldots + \gamma_n}}.$$

(Pro $\gamma_1 = \ldots = \gamma_n = 1$ přechází $\mathfrak{S}_\alpha$ v naše dřívější $S_\alpha$.) Píšeme-li ve větě 103 $\gamma_k^{\frac{1}{q}} a_k$ místo $a_k$, $\gamma_k^{\frac{1}{q'}} b_k$ místo $b_k$, obdržíme pro $q > 1$

$$\mathfrak{S}_1(a_1 b_1, \ldots, a_n b_n) \leqq \mathfrak{S}_q(a_1, \ldots, a_n)\, \mathfrak{S}_{q'}(b_1, \ldots, b_n)\,.$$

Zobecněte podobným způsobem ostatní věty tohoto paragrafu, jakož i cvičení 1—4.

---

[48]) Pro jednoduchost se omezuji na kladná $a_k$, $b_k$.

[49]) Pro $\alpha > 0$ mohou býti též některá $a_k$ rovna nule; také pro $\alpha \leqq 0$ mohu připustiti $a_k = 0$, postupuji-li podobně jako v cvič. 5.

§ **13. Funkcionální rovnice pro funkce** $ax$, $x^a$, $a^x$, $a \lg x$. **Věta 110.** *Budiž $f$ konečná reálná funkce v oboru $\mathsf{E}_1$, která má tyto dvě vlastnosti:*

*I. Pro každé $x \in \mathsf{E}_1$, $y \in \mathsf{E}_1$ je*

$$f(x + y) = f(x) + f(y) \,.\text{[50]} \tag{142}$$

*II. Existuje interval $(\gamma, \delta)$, ve kterém $f$ je buďto shora nebo zdola omezená.*

*Potom existuje $a \in \mathsf{E}_1$ tak, že pro všechna $x \in \mathsf{E}_1$ je $f(x) = ax$.*

Důkaz rozdělíme na několik kroků. Ze (142) plyne $f(x) = f(x + 0) = f(x) + f(0)$, tedy

$$f(0) = 0\,. \tag{143}$$

Dále $f(2x) = f(x) + f(x) = 2f(x)$, $f(3x) = f(2x) + f(x) = 3f(x)$, a indukcí ihned

$$f(rx) = rf(x) \tag{144}$$

pro $r = 1, 2, 3, \ldots$ a každé $x$. Dále $f(x) + f(-x) = f(x - x) = 0$, tedy

$$f(-x) = -f(x)\,. \tag{145}$$

Odtud a ze (144) pro celé záporné $r = -m$: $f(rx) = -f(mx) = -mf(x) = rf(x)$, tedy (viz ještě (143)): (144) platí pro všechna celá $r$. Pro přirozené $n$ je dále $f(x) = nf\left(\frac{1}{n}x\right)$ (podle (144)), a tedy pro racionální $r = \frac{m}{n}$ ($m$ celé, $n$ celé kladné)

$$f(rx) = f\left(\frac{m}{n}x\right) = mf\left(\frac{1}{n}x\right) = m \cdot \frac{1}{n} f(x) = rf(x)\,,$$

t. j. (144) *platí pro každé racionální $r$ a každé $x$.*

Mohu dále předpokládati, že $\gamma$, $\delta$ mají totéž znamení (stačí, vezmu-li část intervalu $(\gamma, \delta)$), a konečně že $\gamma$, $\delta$ jsou kladná:

$$0 < \gamma < \delta\,,$$

neboť podle (145) je $f$ zdola nebo shora omezená v $(-\delta, -\gamma)$.

---

[50]) To je „funkcionální rovnice" pro funkci $f$, t. j. vztah mezi jejími hodnotami v různých bodech.

Smíme konečně předpokládati, že $f$ je shora omezená v $(\gamma, \delta)$ (jinak bych vyšetřoval funkci $-f$):

$$f(x) \leqq K < +\infty \quad \text{pro } \gamma < x < \delta\,.$$

Je-li $\gamma < x < \delta$, je též $\gamma < \gamma + \delta - x < \delta$, tedy $f(x) = f(\gamma + \delta) - f(\gamma + \delta - x) \geqq f(\gamma + \delta) - K$, takže $f$ je v $(\gamma, \delta)$ i zdola omezená:

$$|f(x)| \leqq L < +\infty \quad \text{pro } \gamma < x < \delta\,. \tag{146}$$

Budiž $x > 0$; sestrojme racionální $r$ tak, že $\gamma < rx < \delta$, t. j. $\frac{x}{\delta} < \frac{1}{r} < \frac{x}{\gamma}$. Podle (144), (146) je

$$|f(x)| = \frac{1}{r}\,|f(rx)| \leqq x\,\frac{L}{\gamma}\,.$$

Vzhledem k (143), (145) *je tedy pro každé* $x$

$$|f(x)| \leqq |x|\,\frac{L}{\gamma}\,.$$

Ale $f(x) = f(x - y) + f(y)$, takže

$$|f(x) - f(y)| = |f(x - y)| \leqq \frac{L}{\gamma}\,|x - y|\,.$$

Odtud je ihned vidět, že $f$ *je spojitá* v $\mathbf{E}_1$. Položme $f(1) = a$, takže podle (144) $f(r) = ar$ pro všechna racionální $r$. Budiž $x \in \mathbf{E}_1$; existuje posloupnost racionálních čísel $r_1, r_2, \ldots$ tak, že $\lim r_n = x$. Ze spojitosti plyne $f(x) = \lim f(r_n) = \lim ar_n = ax$.

Podrobnější informace, na př. také pro funkcionální rovnici kosinu, viz na konci této knihy (Dodatek, § 4).

### Cvičení

*1.* Budiž $F$ konečná reálná funkce v oboru $\mathbf{E}_1$, která má tyto vlastnosti:

I. $F(x + y) = F(x)\,F(y)$ pro $x \in \mathbf{E}_1$, $y \in \mathbf{E}_1$.

II. Existuje interval $(\gamma, \delta)$, v němž $F$ je shora omezená.

Potom je buďto $F = 0$ nebo existuje $a \in \mathbf{E}_1$ tak, že $F(x) = e^{ax}$ pro všechna $x \in \mathbf{E}_1$.

Návod. Je-li $F(x) = 0$ pro jedno $x$, je $F(x) = 0$ pro všechna $x$ (podle I). Vylučme tento případ. Potom $F(x) = F^2(\frac{1}{2}x) > 0$. Položte $f(x) = \lg F(x)$ a užijte věty 110.

**2.** Budiž $g$ konečná reálná funkce v oboru $(0, +\infty)$, která má tyto vlastnosti:

I. $g(xy) = g(x)\, g(y)$ pro $x > 0, y > 0$.

II. Existuje interval $(\gamma, \delta)$ $(0 < \gamma < \delta)$, v němž $g$ je shora omezená.

Potom je buďto $g = 0$ v $(0, +\infty)$ nebo existuje $a \in E_1$ tak, že $g(x) = x^a$ pro všechna $x \in (0, +\infty)$. Návod: Položte $F(t) = g(e^t)$ a užijte cvič. 1.

**3.** Budiž $h$ konečná reálná funkce v oboru $(0, +\infty)$, která má tyto vlastnosti:

I. $h(xy) = h(x) + h(y)$ pro $x > 0$, $y > 0$.

II. Existuje interval $(\gamma, \delta)$ $(0 < \gamma < \delta)$, v němž je $h$ shora nebo zdola omezená.

Potom existuje $a \in E_1$ tak, že $h(x) = a \lg x$ pro všechna $x > 0$. Návod: Položte $f(t) = h(e^t)$ a užijte věty 110.