Diferenciální počet II

Kapitola IV. Stejnoměrná konvergence

In: Vojtěch Jarník (author): Diferenciální počet II. (Czech). Praha: Academia, 1984. pp. 128--150.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/402011

KAPITOLA IV.

STEJNOMĚRNÁ KONVERGENCE

V prvních dvou paragrafech této kapitoly značí slovo „funkce" konečnou reálnou funkci. To tedy znamená, že každému x jisté množiny M je přiřazeno jisté číslo $f(x) \in \mathbf{E}_1$. Přitom M je jakákoliv „abstraktní" množina (nemusí to být množina reálných čísel); komu by toto obecné hledisko dělalo obtíže, může si při prvním čtení představovat M jako nějakou množinu konečných reálných čísel, takže f je potom konečnou reálnou funkcí jedné reálné proměnné. Ostatně všechny věty § 3, 4 a většina příkladů a cvičení se vztahují na tento speciální případ.

§ 1. Posloupnosti a řady funkcí. Již v **DI**, kap. XII jsme se zabývali posloupnostmi a řadami, jejichž členové byli funkcemi (jedné reálné proměnné). Tak jsme na př. zjistili, že řada $1 + x : 1! + x^2 : 2! + \ldots$ je konvergentní a má součet e^x pro každé $x \in \mathbf{E}_1$. Nyní se budeme zabývati takovými posloupnostmi a řadami soustavněji. Budiž tedy dána posloupnost (reálných konečných) funkcí

$$(1) \qquad f_1(x), f_2(x), \ldots,^{1})$$

definovaných v jisté (zcela libovolné) množině M. Dosadíme-li za x nějaký prvek z M, přejde posloupnost (1) v posloupnost konečných reálných čísel (pro různé hodnoty $x \in M$ dostávám ovšem obecně různé posloupnosti) a mohu se ptáti, zda tato posloupnost je konvergentní. Je-li tato posloupnost konvergentní, ať je x jakýkoliv prvek množiny M, říkáme krátce, že posloupnost (1) je konvergentní v M. To tedy znamená, že pro každé $x \in M$ existuje vlastní limita

$$(2) \qquad \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\,.$$

(Hodnota té limity může ovšem záviseti na tom, který prvek $x \in M$ zvolíme; je to tedy jistá funkce — kterou jsme označili f — definovaná v množině M.) Obdobně: o řadě

[1]) Vlastně jsem měl psáti $f_1, f_2, \ldots$ a reservovati znak $f_n(x)$ pro hodnotu funkce f_n v bodě x; ale zde se mně hodí tato licence.

(3) $$u_1(x) + u_2(x) + \dots,$$

jejíž členové jsou funkce, definované v množině M, říkáme, že je konvergentní v M, jestliže je konvergentní, ať za x dosadíme jakýkoliv prvek množiny M. Součet řady (3) je potom opět jistá funkce, definovaná v M. Ježto konvergence řady (3) znamená totéž jako konvergence posloupnosti

(4) $$f_1(x), f_2(x), \dots, \text{ kde } f_n(x) = u_1(x) + \dots + u_n(x),$$

dají se mnohé věty o řadách (3) odvoditi přímo z příslušných vět o posloupnostech.

Specialisujme nyní na okamžik, předpokládajíce, že M je nějaká množina v E_1, takže f_n jsou funkce jedné reálné proměnné. Tu se naskytuje přirozeně tato otázka: do jaké míry se přenášejí vlastnosti funkcí $f_n(x)$ na funkci $\lim f_n(x)$? Platí na př., že funkce $\lim f_n(x)$ je spojitá, jsou-li funkce $f_n(x)$ vesměs spojité (v nějakém bodě nebo intervalu)? Odpověď je záporná, jak ukazují tyto příklady.

Příklad 1. Budiž $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + nx^2}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ pro každé $x \in E_1$. Funkce $f_n(x)$ jsou spojité v $(-\infty, +\infty)$. Pro $x = 0$ jest $f_n(0) = 1$, tedy $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(0) = 1$. Je-li však x nějaké číslo různě od nuly, jest $x^2 > 0$, $0 < f_n(x) < \dfrac{1}{x^2} \cdot \dfrac{1}{n}$; ježto $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x^2} \cdot \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{x^2} \cdot \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, jest $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Tedy: daná posloupnost je konvergentní v $(-\infty, +\infty)$; klademe-li $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$, jest $f(0) = 1$, $f(x) = 0$ pro $x \neq 0$; funkce f není tedy spojitá v intervalu $(-\infty, +\infty)$.

Příklad 2. $f_n(x) = \dfrac{2}{\pi} \operatorname{arctg} nx$. Položíme-li $f(x) = \lim f_n(x)$, obdržíme $f(0) = 0$, $f(x) = 1$ pro $x > 0$, $f(x) = -1$ pro $x < 0$. Tato funkce se často nazývá $\operatorname{sgn} x$ (čti: signum = znamení čísla x); není spojitá v $(-\infty, +\infty)$, ač funkce f_n jsou spojité v $(-\infty, +\infty)$.

Tato okolnost nás vede k tomu, že zavedeme ostřejší pojem konvergence, t. zv. stejnoměrnou konvergenci. Viz následující dva paragrafy.

Cvičení

Uvedeme ještě další příklady konvergentních posloupností spojitých funkcí, při nichž limita není spojitá.[2])

1. $\lim\limits_{n\to\infty} x^n = f(x)$ pro $-1 < x \leqq 1$; pro $|x| < 1$ jest $f(x) = 0$, $f(1) = 1$.

2. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x^n - 1}{x^n + 1} = f(x)$; $f(-1)$ není definováno, $f(1) = 0$, $f(x) = -1$ pro $|x| < 1$, $f(x) = 1$ pro $|x| > 1$.

3. Dvojím limitním přechodem můžeme ze spojitých funkcí obdržeti i funkce velmi složité. Pro celá kladná n, m položme $f_{n,m}(x) = (\cos \pi n! x)^{2m}$. Při pevném n položme $g_n(x) = \lim\limits_{m\to\infty} f_{n,m}(x)$; vyjde $g_n(x) = 1$, je-li $x = k : n!$, kde k je jakékoliv celé číslo; pro ostatní x je $g_n(x) = 0$. Nato vyjde $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = f(x)$, kde $f(x) = 1$ pro racionální x, $f(x) = 0$ pro iracionální x.

§ 2. Stejnoměrná konvergence.

Budiž opět

$$f_1(x), f_2(x), \ldots \tag{1}$$

posloupnost konvergentní v libovolné „abstraktní" množině M; položme opět pro $x \in M$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)\,. \tag{2}$$

To znamená tedy: dosadím-li za x jakýkoliv prvek množiny M, má posloupnost reálných čísel (1) za limitu číslo $f(x)$. Zvolím-li tedy jakkoliv kladné číslo ε, existuje přirozené číslo n_0 tak, že pro všechna $n \geqq n_0$ jest $|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon$. Číslo n_0 závisí ovšem jednak na ε, jednak na tom, který prvek $x \in M$ jsme zvolili (neboť změním-li x, dostanu obecně jinou posloupnost čísel (1)). Lze-li však zvoliti číslo n_0 tak, aby záviselo pouze na ε a nikoliv na x (t. j. tak, aby — při libovolně předem daném čísle $\varepsilon > 0$ — bylo číslo n_0 totéž pro všechna $x \in M$), říkáme, že posloupnost (1) je stejnoměrně konvergentní v množině M. Definujeme tedy:

Definice 9. *Budiž* (1) *posloupnost funkcí, konvergentní v množině M; funkci $f(x)$ definujme rovnicí* (2). *Jestliže ke každému číslu $\varepsilon > 0$ existuje číslo $n_0 \in$ **N** tak, že pro všechna $n \geqq n_0$ ($n \in$ **N**) a pro všechna $x \in M$ jest*

$$|f(x) - f_n(x)| < \varepsilon\,, \tag{5}$$

[2]) Také v těchto cvičeních jde o funkce jedné reálné proměnné.

říkáme, že posloupnost (1) *je stejnoměrně konvergentní v množině M. O řadě* (3) *říkáme, že je stejnoměrně konvergentní v M, je-li posloupnost* (4) *stejnoměrně konvergentní v M.*

Z definice je zřejmo: je-li posloupnost (nebo řada) stejnoměrně konvergentní v M a je-li $P \subset M$, je posloupnost (řada) též stejnoměrně konvergentní v P.

Pro stejnoměrnou konvergenci máme opět podmínku typu Bolzano-Cauchyova:

Věta 51 (pro posloupnosti). *Posloupnost* (1) *je stejnoměrně konvergentní v M tehdy a jen tehdy, je-li splněna tato podmínka: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že platí implikace*

$$(p \in \mathbf{N}, x \in M) \Rightarrow |f_{n_0+p}(x) - f_{n_0}(x)| < \varepsilon .$$

Poznámka 1. Zvykejte si na označení $\Rightarrow$; poslední implikace značí: je-li p libovolné přirozené číslo a je-li x libovolný prvek množiny M, jest $|f_{n_0+p}(x) - f_{n_0}(x)| < \varepsilon$. Dali jsme větě 51 tvar, obdobný poznámce 2 k větě 26; mohli jsme ovšem místo uvedené implikace psáti obdobně jako ve větě 26: $(n \geqq n_0, m \geqq n_0, x \in M) \Rightarrow |f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon$.

Důkaz. I. Nechť je (1) stejnoměrně konvergentní v M; $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že $(n \geqq n_0, n \in \mathbf{N}, x \in M) \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Je-li tedy $p \in \mathbf{N}$, $x \in M$, jest $|f_{n_0+p}(x) - f_{n_0}(x)| \leqq |f_{n_0+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_{n_0}(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon$.

II. Nechť je splněna podmínka věty 51. Potom je pro každé jednotlivé $x \in M$ splněna podmínka věty 26 (ve tvaru pozn. 2 z kap. II, § 3), a tedy existuje pro každé $x \in M$ vlastní limita $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x)$. Budiž $\varepsilon > 0$; potom existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že

$$(p \in \mathbf{N}, x \in M) \Rightarrow |f_{n_0+p}(x) - f_{n_0}(x)| < \tfrac{1}{3}\varepsilon ;$$

je-li tedy $m \geqq n_0$, $n \geqq n_0$, $x \in M$, jest

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leqq |f_m(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_n(x)| < \tfrac{2}{3}\varepsilon . \tag{6}$$

Zvolme jakkoliv číslo $n \geqq n_0$ a prvek $x \in M$. Potom platí (6) pro každé $m \geqq n_0$, a tedy

$$|f(x) - f_n(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_m(x) - f_n(x)| \leqq \tfrac{2}{3}\varepsilon < \varepsilon .$$

Tedy je (1) stejnoměrně konvergentní v M (k libovolnému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro všechna $n \geqq n_0$, $x \in M$ platí (5)).

Věta 52 (pro řady). *Řada* (3) *je stejnoměrně konvergentní v M tehdy a jen tehdy, je-li splněna tato podmínka: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že platí implikace*

$$(p \in \mathbf{N}, x \in M) \Rightarrow |u_{n_0+1}(x) + \ldots + u_{n_0+p}(x)| < \varepsilon .$$

Důkaz plyne okamžitě z věty 51; definujete-li totiž $f_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x)$, jest $u_{n_0+1}(x) + \ldots + u_{n_0+p}(x) = f_{n_0+p}(x) - f_{n_0}(x)$.

Příklad 1. Položme $f_n(x) = \dfrac{1}{1 + nx}$. Je-li $x > 0$, je $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = 0$. Zvolme libovolné konečné kladné číslo a. Tvrdím předně: *Konvergence je stejnoměrná v intervalu* $\langle a, +\infty)$. Důkaz: Pro $x \geqq a$ je $0 < f_n(x) \leqq \leqq \dfrac{1}{1 + na} < \dfrac{1}{na}$. Je-li tedy $\varepsilon > 0$, stačí za n_0 zvoliti celé číslo větší než $\dfrac{1}{a\varepsilon}$. Pro každé $x \geqq a$ a pro každé $n \geqq n_0$ bude potom vskutku $|f_n(x) - 0| = f_n(x) < \dfrac{1}{na} \leqq \dfrac{1}{n_0 a} < \varepsilon$. Za druhé tvrdím: *Konvergence není stejnoměrná v intervalu* $(0, a)$. Důkaz: Poznamenejme, že $f_n\left(\dfrac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}$. Jestliže tedy zvolím kladné $\varepsilon \leqq \frac{1}{2}$, neexistuje k němu žádné n_0 tak, aby platilo

$$(x \in (0, a), n > n_0) \Rightarrow |f_n(x) - 0| < \varepsilon .$$

Neboť ať si zvolím n_0 jakkoliv velké, lze vždy nalézti přirozené n tak, že jest $n > n_0$, $\dfrac{1}{n} < a$; položím-li tedy $x = \dfrac{1}{n}$, je splněna premisa $x \in (0, a)$, $n > n_0$, ale není splněn závěr implikace, neboť

$$|f_n(x) - 0| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \tfrac{1}{2} \geqq \varepsilon .$$

Poznámka 1. Rozdíl mezi konvergencí v M a stejnoměrnou konvergencí v M se vyjádří velmi výrazně, užijeme-li logických symbolů z kap. I, § 1. Výrok „posloupnost (1) konverguje v M k funkci f" lze vypsati takto:

$$\prod_{\varepsilon>0} \prod_{x\in M} \sum_{n_0\in N} \prod_{n\in N} (n \geqq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) .$$

Slovy: Ke každému $\varepsilon > 0$ a každému $x \in M$ existuje přirozené n_0 tak, že pro každé přirozené $n \geqq n_0$ je $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Naproti tomu výrok „posloupnost (1) konverguje v M stejnoměrně k funkci f" lze vypsati takto:

$$\prod_{\varepsilon>0} \sum_{n_0\in N} \prod_{x\in M} \prod_{n\in N} (n \geqq n_0 \Rightarrow |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon) .$$

Slovy: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje přirozené n_0 tak, že pro každé $x \in M$ a každé přirozené $n \geqq n_0$ je $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Vidíte, že se oba logické vzorce liší pouze přehozením kvantifikátorů $\prod_{x\in M}, \sum_{n_0\in N}$; neboli ve slovním vyjádření — přehozením slov „ke každému $x \in M$" a „existuje přirozené n_0". Začátečník často dělá hrubé chyby tím, že si plete obecný výrok („pro každé x") s existenčním výrokem („existuje x") nebo že přehazuje pořadí mezi existenčním a obecným výrokem.

Poznámka 2. Stejnoměrnou konvergenci

$$\lim f_n(x) = f(x) \quad \text{stejnoměrně v } M \tag{7}$$

lze formulovati ještě jinak než definicí 9 a snad ještě výrazněji takto: (7) značí, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že pro každé $n \geqq n_0$ jest[3])

$$|f_n(x) - f(x)| \leqq \varepsilon \quad \text{pro všechna } x \in M . \tag{8}$$

To však znamená právě toto: Položíme-li $\sigma_n = \sup_{x\in M} |f_n(x) - f(x)|$ (to už je číslo nezávislé na x), je $\sigma_n \leqq \varepsilon$ pro všechna $n \geqq n_0$; ke každému $\varepsilon > 0$ takové n_0 existuje. To tedy značí právě tolik, že

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = 0 . \tag{9}$$

Rovnice (9) je tedy nutnou a postačující podmínkou pro to, aby platilo (7). Dovedeme-li nalézti nebo aspoň odhadnouti σ_n, můžeme často rozhodnouti, zda platí (9). Osvětlím to dvěma příklady.

Příklad 2. Budiž $f_n(x) = \dfrac{x}{1 + nx^2}$. Pro každé x je $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$.

---

[3]) Že píši $\leqq \varepsilon$ místo $< \varepsilon$, je přirozeně lhostejné.

Nalezením maxima a minima funkce f_n $\left(\text{v bodech } \pm \sqrt{\frac{1}{n}}\right)$ zjistíme snadno, že

$$\sigma_n = \sup_{-\infty < x < +\infty} |f_n(x) - 0| = \frac{1}{2\sqrt{n}},$$

tedy $\lim \sigma_n = 0$; konvergence je stejnoměrná v intervalu $(-\infty, +\infty)$.

Příklad 3. Položme $f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$; pro každé x je $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Omezme se na interval $\langle 0, +\infty)$.[4] Funkce f_n roste v intervalu $\left\langle 0, \frac{1}{n} \right\rangle$, klesá v intervalu $\left\langle \frac{1}{n}, +\infty \right)$; její maximum v bodě $x = \frac{1}{n}$ je $\frac{1}{2}$; v bodě $+\infty$ má limitu 0. Vezměme libovolné konečné $a > 0$. Jakmile je $\frac{1}{n} < a$, t. j. pro všechna $n > \frac{1}{a}$, je maximum funkce f_n v intervalu $\langle a, +\infty)$ rovno hodnotě v bodě a, t. j.

$$\sup_{x \geqq a} |f_n(x) - 0| = \frac{na}{1 + n^2a^2},$$

a tento výraz konverguje k nule pro $n \to \infty$. Tedy: *konvergence je stejnoměrná v* $\langle a, +\infty)$. Za druhé: pro tytéž hodnoty n, t. j. pro $n > \frac{1}{a}$, leží bod $\frac{1}{n}$ v intervalu $(0, a)$, takže

$$\sup_{0 < x < a} |f_n(x) - 0| = f_n\left(\frac{1}{n}\right) = \tfrac{1}{2},$$

což nemá limitu 0: *konvergence není stejnoměrná v* $(0, a)$.

Stejnoměrnou konvergenci řady (3) zjistíme často srovnáváním s jinou řadou. Odvodíme tři věty (53, 54, 55) tohoto druhu. Je-li pro každé $n \in \boldsymbol{N}$ a pro každé $x \in M$

$$|u_n(x)| \leqq v_n(x)\,, \tag{10}$$

říkáme, že řada

$$v_1(x) + v_2(x) + \ldots \tag{11}$$

je **majorantní** k řadě (3) v **množině** M.

---

[4]) Jde o lichou funkci — tedy záporná x nedávají v podstatě nic nového.

Věta 53. *Budiž* (11) *majorantní k* (3) *v* M; *budiž* (11) *stejnoměrně konvergentní v* M; *potom je též* (3) *stejnoměrně konvergentní v* M.

Důkaz plyne ihned z věty 52, neboť

$$|u_{n_0+1}(x) + \ldots + u_{n_0+p}(x)| \leqq v_{n_0+1}(x) + \ldots + v_{n_0+p}(x) ;$$

splňuje-li tedy řada (11) podmínku věty 52, splňuje tuto podmínku i řada (3). Nejjednodušší speciální případ je ten, že členy řady (11) nezávisí na x:

Věta 54. *Budiž* $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$ *konvergentní řada (s členy nezávislými na* x*). Budiž* $|u_n(x)| \leqq a_n$ *pro všechna* $n \in \mathbf{N}$, $x \in M$.[5]) *Potom je řada* (3) *stejnoměrně konvergentní v* M.

Důkaz. Budiž $\varepsilon > 0$; existuje $n_0 \in \mathbf{N}$ tak, že pro $p \in \mathbf{N}$ jest $a_{n_0+1} + \ldots + a_{n_0+p} < \varepsilon$, takže pro $p \in \mathbf{N}$, $x \in M$ jest $|u_{n_0+1}(x) + \ldots + u_{n_0+p}(x)| < \varepsilon$; řada (3) je tedy stejnoměrně konvergentní v M.

Příklad 4. Ježto řada $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \ldots$ je konvergentní, je řada $\sin x + \frac{\sin 2x}{2^2} + \ldots + \frac{\sin nx}{n^2} + \ldots$ stejnoměrně konvergentní v $(-\infty, +\infty)$.

Příklad 5. Nejvýhodnější majorantní řadu $a_1 + a_2 + \ldots$ s konstantními členy k řadě $v_1(x) + v_2(x) + \ldots$ v množině M najdeme, jestliže položíme přímo $a_n = \sup_{x \in M} |v_n(x)|$ (menší a_n nesmím zvolit, má-li to být majoranta). Na př. pro řadu $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x}{n(1 + nx^2)}$ nám vyjde (výpočet je obsažen v příkl. 2) $a_n = \sup_{-\infty<x<\infty} \frac{|x|}{n(1 + nx^2)} = \frac{1}{2} n^{-\frac{3}{2}}$; z konvergence řady $a_1 + a_2 + \ldots$ pak plyne stejnoměrná konvergence naší řady v $(-\infty, +\infty)$. Ovšem: jestliže řada $\sum_{n=1}^{\infty} \sup_{x \in M} |v_n(x)|$ diverguje, n e s m í m e z toho ještě soudit, že $v_1(x) + v_2(x) + \ldots$ není v M stejnoměrně konvergentní; lze jenom tvrdit, že tato řada nemá v M konvergentní majorantu s konstantními členy. Na př. řada

[5]) Řada $a_1 + a_2 + \ldots$ je tedy majorantní řada (k řadě (3) v množině M) s konstantními členy.

$$\frac{\sin x}{1} - \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin x}{3} - \frac{\sin x}{4} + \dots$$

nemá vůbec žádnou konvergentní majorantu v $(0, \pi)$, poněvadž vůbec není absolutně konvergentní. Ale tato řada je v $(0, \pi)$ stejnoměrně konvergentní, protože její zbytek je v absolutní hodnotě nejvýše roven zbytku konvergentní řady $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ s členy nezávislými na x.

Věty 53, 54 jsou velmi jednoduché, ale obor jejich použití je velmi omezený (je na př. ihned patrno, že se jich dá užíti jen tehdy, je-li řada (3) absolutně konvergentní). Proto odvodíme ještě dvě jemnější věty tohoto druhu, ale shrneme je dohromady:

Věta 55. *Buďte u_n, ε_n $(n = 1, 2, 3, \dots)$ konečné reálné funkce, definované v množině M. Budiž $s_n(x)$ n-tý částečný součet řady*

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots ; \tag{12}$$

pro každé $x \in M$ budiž

$$\varepsilon_1(x) \geqq \varepsilon_2(x) \geqq \varepsilon_3(x) \geqq \dots \geqq 0 . \tag{13}$$

Budiž $K > 0$ konečné číslo. Potom platí:

I. Jestliže $|s_n(x)| \leqq K$ pro všechna $n \in \mathbf{N}$ a všechna $x \in M$ a jestliže $\lim_{n \to \infty} \varepsilon_n(x) = 0$ stejnoměrně v M, potom řada

$$u_1(x)\, \varepsilon_1(x) + u_2(x)\, \varepsilon_2(x) + \dots \tag{14}$$

je stejnoměrně konvergentní v M.

II. Jestliže $\varepsilon_1(x) \leqq K$ pro všechna $x \in M$ a jestliže řada (12) *je stejnoměrně konvergentní v M, je také řada* (14) *stejnoměrně konvergentní v M.*

Důkaz je téměř doslova stejný jako u věty 44.

I. Pro každé $n_0 \in \mathbf{N}$, $j \in \mathbf{N}$, $x \in M$ je

$$|u_{n_0+1}(x) + \dots + u_{n_0+j}(x)| = |s_{n_0+j}(x) - s_{n_0}(x)| \leqq 2K .$$

Podle Abelova lemmatu (věta 43) je tedy pro každé $n_0 \in \mathbf{N}$, $p \in \mathbf{N}$, $x \in M$

$$|u_{n_0+1}(x)\, \varepsilon_{n_0+1}(x) + \dots + u_{n_0+p}(x)\, \varepsilon_{n_0+p}(x)| \leqq 2K\varepsilon_{n_0+1}(x) . \tag{15}$$

Ze stejnoměrné konvergence posloupnosti (13) k nule plyne toto: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje n_0 tak, že $\varepsilon_{n_0+1}(x) < \frac{\varepsilon}{2K}$ pro všechna $x \in M$. Tedy levá strana v (15) je (zvolím-li takto n_0) menší než ε pro všechna $x \in M$, $p \in \mathbf{N}$; t. j. řada (14) splňuje podmínku věty 52.

II. Zde je (12) stejnoměrně konvergentní v M. Budiž $\varepsilon > 0$. Podle věty 52 existuje n_0 tak, že pro všechna $x \in M$ a všechna $j \in \mathbf{N}$ je $|u_{n_0+1}(x) + \ldots + u_{n_0+j}(x)| < \frac{\varepsilon}{K}$. Podle věty 43 je tedy pro všechna $x \in M$ a všechna $p \in \mathbf{N}$

$$|u_{n_0+1}(x)\, \varepsilon_{n_0+1}(x) + \ldots + u_{n_0+p}(x)\, \varepsilon_{n_0+p}(x)| \leqq \varepsilon_{n_0+1}(x) \cdot \frac{\varepsilon}{K} \leqq \varepsilon\,,$$

t. j. řada (14) splňuje podmínku věty 52.

Příklad 6. Jestliže x je reálné a není celé, je $e^{2\pi i x} = \cos 2\pi x + i \sin 2\pi x \neq 1$ (viz **DI**, kap. XV, § 3).[6] Geometrická řada dává

$$\sigma_n(x) = 1 + e^{2\pi i x} + e^{4\pi i x} + \ldots + e^{2n\pi i x} =$$
$$= \frac{e^{2(n+1)\pi i x} - 1}{e^{2\pi i x} - 1} = e^{-\pi i x}\, \frac{e^{2(n+1)\pi i x} - 1}{e^{\pi i x} - e^{-\pi i x}}\,;$$

ale $e^{\pi i x} - e^{-\pi i x} = 2i \sin \pi x$; ježto $|e^{iz}| = \sqrt{\cos^2 z + \sin^2 z} = 1$ pro reálné z, dostáváme

$$|\sigma_n(x)| \leqq \frac{2}{2|\sin \pi x|}\,.$$

Týž odhad platí ovšem pro reálnou a imaginární část čísla $\sigma_n(x)$, t. j. pro částečné součty řad

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos 2\pi n x\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \sin 2\pi n x$$

(tyto řady jsou téměř vždy divergentní, jak by se snadno zjistilo, viz kap. III, § 5, cvič. 3, ale to nám nebude vadit). Zvolme číslo δ $(0 < \delta < \frac{1}{2})$ a označme znakem M množinu všech čísel $x \in \mathbf{E}_1$, jež mají od množiny všech celých čísel vzdálenost aspoň δ.[7] Ihned zjistíte, že

[6]) Na citovaném místě bylo dokázáno, že pro komplexní z_1, z_2 je $e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}$, tedy $e^{2z} = e^z \cdot e^z = (e^z)^2$; $e^{3z} = e^{2z} \cdot e^z = (e^z)^2 e^z = (e^z)^3$, a indukcí $e^{nz} = (e^z)^n$ pro každé přirozené n.

[7]) Tedy dostanu M tak, že z $\mathbf{E}_1$ vynechám všechny intervaly $(n - \delta, n + \delta)$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

pro každé $x \in M$ je $|\sin \pi x| \geqq \sin \pi\delta > 0$, tedy $|\sigma_n(x)| \leqq K$, kde $K = \frac{1}{\sin \pi\delta}$. Užitím věty 55 (část I) plyne tedy: Jestliže pro všechna $x \in M$ je $f_n(x) \geqq f_{n+1}(x)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ a jestliže $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ stejnoměrně v M, jsou řady

$$\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x) \cos 2\pi n x\,, \quad \sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \sin 2\pi n x$$

konvergentní stejnoměrně v M. To platí na př., jsou-li $f_n(x)$ konstanty $f_n(x) = a_n$ takové, že $a_n \geqq a_{n+1}$, $\lim a_n = 0$.[8])

Pojem stejnoměrné konvergence je velmi důležitý; také je důležito dovésti v jednoduchých případech rozhodnouti, zda jde o stejnoměrnou konvergenci. Doporučuji proto tento paragraf i připojená cvičení bedlivé pozornosti čtenářově.

Cvičení

1. Pro $|x| < 1$ jest

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \ldots \tag{16}$$

Součet $s_n(x)$ prvních n členů jest $(1 - x^n) : (1 - x)$, tedy

$$\left| \frac{1}{1-x} - s_n(x) \right| = \frac{|x|^n}{1-x}\,. \tag{17}$$

Je-li $0 < q < 1$, je řada (16) stejnoměrně konvergentní v intervalu $(-q, q)$. Vskutku: je-li $0 < \varepsilon < 1$, je výraz (17) menší než ε pro všechna $|x| < q$ tehdy a jen tehdy, je-li

$$\frac{q^n}{1-q} \leqq \varepsilon\,, \quad \text{t. j.} \quad n \geqq \frac{\lg \frac{1}{\varepsilon(1-q)}}{\lg \frac{1}{q}}\,. \tag{18}$$

Vskutku tedy existuje číslo $n_0 \in N$, požadované definicí 9. Nejmenší takové n_0 je právě nejmenší přirozené číslo n, pro něž platí (18). Vidíte: čím je q blíže

[8]) Konvergentní posloupnost (nebo řada) funkcí konstantních v jakékoliv množině M je zřejmě stejnoměrně konvergentní v M; neboť je-li $f_n(x) = a_n$, $\lim a_n = a$, existuje ke každému $\varepsilon > 0$ takové $n_0 \in N$, že pro každé přirozené $n \geqq n_0$ je $|a_n - a| < \varepsilon$, t. j. $|f_n(x) - a| < \varepsilon$ pro všechna $x \in M$.

číslu 1, tím větší musíte voliti číslo n_0. Zároveň je viděti, že v intervalu $(-1, 1)$ je řada (16) sice konvergentní (dokonce absolutně), ale nikoliv stejnoměrně: neboť je-li dáno $\varepsilon > 0$, lze k libovolně velkému n sestrojiti číslo x $(0 < x < 1)$ tak blízko jedničce, že výraz (17) je větší než ε. Totéž platí ostatně i pro čísla x blízká číslu -1 $(-1 < x < 0)$, je-li $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$.

2. Je-li posloupnost (1) stejnoměrně konvergentní v každé z konečného počtu množin $M_1, \ldots, M_n$, je stejnoměrně konvergentní i v množině $M_1 \cup \ldots \cup M_n$. Pro nekonečný počet množin to neplatí: na př. posloupnost $s_1(x), s_2(x), \ldots$ z cvič. 1 je stejnoměrně konvergentní v každém intervalu $\left(-\frac{m-1}{m}, \frac{m-1}{m}\right)$ $(m = 2, 3, 4, \ldots)$, nikoliv však v intervalu $(-1, 1) = = \bigcup_{m=2}^{\infty}\left(-\frac{m-1}{m}, \frac{m-1}{m}\right)$.

3. Je-li (1) konvergentní v množině M a skládá-li se M pouze z konečného počtu bodů, je (1) stejnoměrně konvergentní v M.

4. Cvičení 2, 3 vyslovte též pro řady.

§ 3. Základní věty o stejnoměrně konvergentních posloupnostech a řadách. Důležitost pojmu stejnoměrné konvergence spočívá především v tom, že se nejdůležitější pojmy, jako na př. spojitost, existence derivace, existence primitivní funkce, přenášejí při vhodných předpokladech o stejnoměrné konvergenci z jednotlivých členů posloupnosti (nebo řady) na její limitu (nebo součet). Jak to míním, ukazují následující tři věty, které v tomto paragrafu dokáži. Přitom slovo funkce značí v tomto paragrafu konečnou reálnou funkci jedné reálné proměnné, t. j. totéž jako v **DI**, definice 14.

Věta 56. *Funkce $f_1(x), f_2(x), \ldots$ buďte spojité v intervalu (jakéhokoliv druhu) J. Posloupnost* (1) *budiž stejnoměrně konvergentní v J. Potom také funkce*

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) \tag{2}$$

je spojitá v J.

Věta 57. *Funkce $f_1(x), f_2(x), \ldots$ nechť mají vlastní derivace*

$$f_1'(x), f_2'(x), \ldots \tag{19}$$

v omezeném otevřeném intervalu (a, b). Posloupnost (1) *budiž konvergentní* *aspoň v jednom bodě c intervalu (a, b); posloupnost* (19) *budiž stejnoměrně konvergentní v (a, b).*[8a]) *Potom platí:*

I. Posloupnost (1) *je stejnoměrně konvergentní v (a, b).*

II. Definuji-li funkci $f(x)$ v (a, b) rovnicí (2), *má funkce f v (a, b) derivaci*

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x) .$$

K následující větě připomínám tuto definici (užívanou hlavně v integrálním počtu): Jsou-li $f(x)$, $F(x)$ dvě funkce a je-li v každém bodě otevřeného intervalu J[9]) splněna rovnice $F'(x) = f(x)$, říkáme, že F je primitivní funkcí k f v intervalu J. Potom je ovšem též $F(x) + c$ (kde c je libovolná konstanta) primitivní funkcí k f v J a jiných primitivních funkcí již není: je-li totiž také $G(x)$ primitivní funkce k $f(x)$ v intervalu J, platí v intervalu J rovnice $F'(x) = G'(x)$ a tedy $G(x) = F(x) + c$ (viz větu 136 v **DI**).

Věta 58. *Funkce* (1) *nechť mají v omezeném otevřeném intervalu (a, b) primitivní funkce*

$$F_1(x), F_2(x), \dots , \tag{20}$$

jež volíme tak, aby posloupnost (20) *byla konvergentní aspoň v jednom bodě $c \in (a, b)$.*[10]) *Budiž* (1) *posloupnost stejnoměrně konvergentní v (a, b). Potom je též* (20) *stejnoměrně konvergentní v (a, b) a položíme-li $f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, $F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x)$, jest $F(x)$ primitivní funkcí k $f(x)$ v (a, b).*

Věta 58 jest bezprostředním důsledkem věty 57. Jsou-li totiž splněny předpoklady věty 58, jest $F'_n(x) = f_n(x)$ v (a, b). Užijeme-li tedy věty 57 na posloupnost (20), obdržíme ihned větu 58: posloupnost (20) je stejnoměrně konvergentní v (a, b) a pro $x \in (a, b)$ jest $F'(x) = \lim_{n\to\infty} F'_n(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. Stačí tedy dokázati věty 56, 57. Společným základem k důkazu těchto vět bude tato základní věta:

[8a]) Pozor na předpoklady! Stejnoměrná konvergence se předpokládá u posloupnosti (19), nikoliv u (1).

[9]) Jenž nemusí býti omezený.

[10]) Toho lze vždy dosáhnouti: je-li $G_n(x)$ nějaká primitivní funkce k $f_n(x)$ v (a, b), volme $F_n(x) = G_n(x) - k_n$, kde konstantu k_n volím třeba tak, aby bylo $F_n(c) = 0$, t. j. $k_n = G_n(c)$.

Věta 59. *Posloupnost* (1) *budiž stejnoměrně konvergentní v omezeném otevřeném intervalu* $(c, c + \delta)$, *kde* $\delta > 0$; *pro* $c < x < c + \delta$ *definujme* $f(x)$ *rovnicí* (2). *Nechť pro každé* $n \in \mathbf{N}$ *existuje vlastní limita*

$$\lim_{x \to c+} f_n(x) = b_n .$$

Potom existují též vlastní limity $\lim\limits_{x \to c+} f(x)$, $\lim\limits_{n \to \infty} b_n$ *a jest* $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} b_n$.

Podobná věta platí též pro limitu zleva, t. j. věta 59 *zůstane správná, píši-li* $(c - \delta, c)$, $x \to c -$ *místo* $(c, c + \delta)$, $x \to c +$.

Poznámka 1. Rovnici $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = \lim\limits_{n \to \infty} b_n$ lze psáti též ve tvaru

$$\lim_{x \to c+} (\lim_{n \to \infty} f_n(x)) = \lim_{n \to \infty} (\lim_{x \to c+} f_n(x)) ; \tag{21}$$

věta 59 je tedy důležitá věta o záměnnosti limitních úkonů $n \to \infty$, $x \to c +$.

Důkaz. Stačí, dokážeme-li onu část věty 59, v níž se mluví o $x \to \to c +$; druhou část, pojednávající o $x \to c -$, bychom pak dostali tím, že bychom místo funkcí $f_n(x)$ vzali funkce $f_n(- x)$.

I. Budiž $\varepsilon > 0$. Potom existuje $q_1 \in \mathbf{N}$ tak, že

$$(n \in \mathbf{N}, n \geqq q_1, c < x < c + \delta) \Rightarrow |f(x) - f_n(x)| < \tfrac{1}{4}\varepsilon . \tag{22}$$

Tvrdím, že pro $m \geqq q_1$, $n \geqq q_1$[11]) jest $|b_m - b_n| < \varepsilon$. Buďte tedy $m \geqq q_1$, $n \geqq q_1$ dvě přirozená čísla. Existují dvě čísla $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ tak, že

$$\begin{aligned} (c < x < c + \delta_1) &\Rightarrow |f_m(x) - b_m| < \tfrac{1}{4}\varepsilon , \\ (c < x < c + \delta_2) &\Rightarrow |f_n(x) - b_n)| < \tfrac{1}{4}\varepsilon \end{aligned} \tag{23}$$

(neboť $\lim\limits_{x \to c+} f_m(x) = b_m$, $\lim\limits_{x \to c+} f_n(x) = b_n$). Zvolím-li tedy x tak, že $c < < x < c + \text{Min}\,(\delta, \delta_1, \delta_2)$, je (viz (22), (23))

$$|b_m - b_n| \leqq |b_m - f_m(x)| + |f_m(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - b_n| < \varepsilon .$$

Tedy: ke každému $\varepsilon > 0$ existuje q_1 tak, že pro $m \geqq q_1$, $n \geqq q_1$ je $|b_m - b_n| < \varepsilon$. Podle věty 26 existuje tedy vlastní $\lim\limits_{n \to \infty} b_n = b$.

---

[11]) Písmena m, n značí v tomto důkazu i v důkazu věty 57 stále přirozená čísla.

II. Zbývá dokázati, že $\lim_{x \to c+} f(x) = b$. Je-li $x \in (c, c + \delta)$, $m \in N$, jest

$$(24) \qquad |f(x) - b| \leqq |f(x) - f_m(x)| + |f_m(x) - b_m| + |b_m - b| .$$

Budiž $\varepsilon > 0$; potom existuje jistě m tak, že jest $|b_m - b| < \frac{1}{3}\varepsilon$ a že pro všechna $x \in (c, c + \delta)$ je $|f(x) - f_m(x)| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Zvolme takové m; k němu existuje číslo $\delta_3 > 0$ tak, že pro $c < x < c + \delta_3$ je $|f_m(x) - b_m| < \frac{1}{3}\varepsilon$. Položíme-li $\Delta = \text{Min}(\delta, \delta_3)$, vidíme podle (24): je-li $c < x < c + \Delta$, jest $|f(x) - b| < \varepsilon$; tedy je vskutku $\lim_{x \to c+} f(x) = b$.

Důkaz věty 56. Buďte splněny předpoklady věty 56.

Budiž předně c bod intervalu J, jenž není jeho koncovým bodem. Máme dokázati, že funkce f je spojitá zprava v bodě c. Existuje $\delta > 0$ tak, že $(c, c + \delta) \subset J$, takže posloupnost (1) je stejnoměrně konvergentní v $(c, c + \delta)$. Dále jsou $f_n(x)$ spojité zprava v bodě c, tedy $\lim_{x \to c+} f_n(x) = f_n(c)$ a konečně $\lim_{n \to \infty} f_n(c) = f(c)$. Předpoklady věty 59 jsou tedy splněny, klademe-li $b_n = f_n(c)$. Podle věty 59 je tedy $\lim_{x \to c+} f(x) = \lim_{n \to \infty} b_n = \lim_{n \to \infty} f_n(c) = f(c)$, t. j. $f(x)$ je spojitá zprava v bodě c. Budiž za druhé c bod intervalu J, jenž není jeho počátečním bodem. Máme dokázati, že funkce f je spojitá zleva v bodě c. To mohu již zajisté přenechati čtenáři.

Důkaz věty 57. Buďte splněny předpoklady věty 57 a klaďme $J = (a, b)$. I. Budiž $\varepsilon > 0$. Potom existuje předně $q_1 \in N$ tak, že pro $m \geqq q_1$, $n \geqq q_1$ je $|f_m(c) - f_n(c)| < \frac{1}{2}\varepsilon$ (věta 26). Za druhé existuje $q_2 \in N$ tak, že

$$(\xi \in (a, b), m \geqq q_2, n \geqq q_2) \Rightarrow |f'_m(\xi) - f'_n(\xi)| < \frac{\varepsilon}{2(b - a)}$$

(věta 51 ve tvaru pozn. 1, § 2). Položme $n_0 = \text{Max}(q_1, q_2)$. Je-li $p \in N$ a je-li $x \in J$, platí podle věty o přírůstku funkce (**DI**, věta 133)

$$(f_{n_0+p}(x) - f_{n_0}(x)) - (f_{n_0+p}(c) - f_{n_0}(c)) = (x - c)(f'_{n_0+p}(\xi) - f'_{n_0}(\xi)) ,$$

kde ξ leží mezi c, x, tedy $\xi \in J$ (pro $x = c$ platí tato rovnice též, na př. s hodnotou $\xi = c$). Tedy jest

$$|f_{n_0+p}(x) - f_{n_0}(x)| \leqq |f_{n_0+p}(c) - f_{n_0}(c)| + (b - a)\,|f'_{n_0+p}(\xi) - f'_{n_0}(\xi)| <$$
$$< \tfrac{1}{2}\varepsilon + (b - a) \cdot \frac{\varepsilon}{2(b - a)} = \varepsilon .$$

Podle věty 51 je tedy posloupnost (1) stejnoměrně konvergentní v J; budiž $f(x)$ její limita.

II. Budiž $a < x_0 < b$. Máme dokázati, že existuje vlastní derivace $f'(x_0)$ a má hodnotu $\lim\limits_{n\to\infty} f'_n(x_0)$. Zvolme $\Delta > 0$ tak malé, že $a + \Delta < < x_0 < b - \Delta$. Položme

$$\text{(25)} \qquad \frac{f_m(x_0 + h) - f_m(x_0)}{h} = \varphi_m(h)\,, \quad \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \varphi(h)\,;$$

funkce $\varphi_m(h)$, $\varphi(h)$ jsou definovány pro $h \in (-\Delta, 0)$ i pro $h \in (0, \Delta)$; leží-li h v některém z těchto intervalů, je $x_0 + h \in (a, b)$ a jest $\lim\limits_{m\to\infty} \varphi_m(h) = \varphi(h)$. Je-li $0 < h < \Delta$ nebo $-\Delta < h < 0$, jest

$$\varphi_m(h) - \varphi_n(h) = \frac{1}{h}\,((f_m(x_0 + h) - f_n(x_0 + h)) - (f_m(x_0) - f_n(x_0))) =$$
$$\text{(26)} \qquad = f'_m(\xi) - f'_n(\xi)\,,$$

kde ξ leží mezi x_0, $x_0 + h$, tedy $\xi \in (a, b)$. Je-li $\varepsilon > 0$, existuje $n_0 \in \boldsymbol{N}$ tak, že pro $p \in \boldsymbol{N}$, $\xi \in (a, b)$ je $|f'_{n_0+p}(\xi) - f'_{n_0}(\xi)| < \varepsilon$ (věta 51); podle (26) tedy platí: je-li $p \in \boldsymbol{N}$, je pro všechna $h \in (0, \Delta)$ i pro všechna $h \in (-\Delta, 0)$

$$|\varphi_{n_0+p}(h) - \varphi_{n_0}(h)| < \varepsilon\,.$$

Posloupnost $\varphi_1(h), \varphi_2(h), \ldots$ je tedy podle věty 51 stejnoměrně konvergentní v intervalu $(-\Delta, 0)$ i v intervalu $(0, \Delta)$; mimo to jest (viz (25)) $\lim\limits_{h\to0+} \varphi_n(h) = \lim\limits_{h\to0-} \varphi_n(h) = f'_n(x_0)$. Jsou tedy splněny předpoklady věty 59 (a to pro limitu zprava i zleva), klademe-li Δ, $\varphi_n(h)$, $\varphi(h)$, $f'_n(x_0)$, 0 místo δ, $f_n(x)$, $f(x)$, b_n, c. Podle věty 59 existují tedy vlastní limity

$$\lim_{h\to0+} \varphi(h) = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} f'_n(x_0)\,,$$
$$\lim_{h\to0-} \varphi(h) = \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} f'_n(x_0)\,;$$

to však vzhledem k definici funkce φ (viz (25)) znamená, že existuje vlastní limita

$$\lim_{n\to\infty} f'_n(x_0) = \lim_{h\to0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0)\,.$$

Věty 56, 57, 58 lze ovšem vysloviti též pro nekonečné řady:

Věta 60. *Funkce*

$$u_1(x), u_2(x), \ldots \tag{27}$$

buďte spojité v intervalu J. Řada

$$u_1(x) + u_2(x) + \ldots \tag{28}$$

budiž stejnoměrně konvergentní v J.

Potom je součet řady (28) *funkce spojitá v J.*

Věta 61. *Funkce* (27) *nechť mají v omezeném intervalu (a, b) derivace $u_1'(x), u_2'(x), \ldots$ Řada* (28) *budiž konvergentní aspoň v jednom bodě intervalu (a, b), řada $u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots$ budiž stejnoměrně konvergentní v (a, b). Potom je též řada* (28) *stejnoměrně konvergentní v (a, b) a její součet $s(x)$ má v (a, b) vlastní derivaci $s'(x) = u_1'(x) + u_2'(x) + \ldots$*

Věta 62. *Funkce* (27) *nechť mají v omezeném intervalu (a, b) primitivní funkce $U_1(x), U_2(x), \ldots$, jež zvolme tak, aby řada*

$$U_1(x) + U_2(x) + \ldots \tag{29}$$

byla konvergentní aspoň v jednom bodě intervalu (a, b). Řada (28) *budiž stejnoměrně konvergentní v (a, b). Potom je též řada* (29) *stejnoměrně konvergentní v (a, b) a její součet je v intervalu (a, b) primitivní funkcí k součtu řady* (28).

Důkaz těchto vět mohu zajisté přenechati čtenáři; dostaneme jej okamžitě, užijeme-li vět 56, 57, 58 na posloupnost $f_1(x), f_2(x), \ldots$, kde $f_n(x) = u_1(x) + \ldots + u_n(x)$.

Příklad 1. Hledejme rozvoj funkce arctg x v mocninnou řadu. Jest

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}(\operatorname{arctg} x) = \frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots \tag{30}$$

pro $|x| < 1$ (geometrická řada). Zvolím-li libovolné q tak, že $0 < q < 1$, je řada $1 + q^2 + q^4 + q^6 + \ldots$ konvergentní a pro $|x| < q$ jest $|\pm x^{2n}| \leq q^{2n}$. Podle věty 54 je tedy řada v (30) stejnoměrně konvergentní v intervalu $(-q, q)$. Podle věty 62 je tedy řada

$$\frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \ldots \text{[12]}$$

[12]) K funkci x^n je v $(-\infty, +\infty)$ primitivní funkce $x^{n+1} : (n + 1)$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

stejnoměrně konvergentní v $(-q, q)$ a její součet je v tomto intervalu primitivní funkcí k $\frac{1}{1+x^2}$, je to tedy funkce $\operatorname{arctg} x + c$. Dosazením $x = 0$ zjistíme, že $c = 0$. Pro $|x| < q$ je tedy

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \dots \tag{31}$$

Platnost této rovnice lze však rozšířit jednoduchým a často užívaným obratem na celý interval $(-1, 1)$: Budiž totiž $|x_0| < 1$; potom existuje q tak, že $|x_0| < q < 1$, takže rovnice (31) platí pro $x = x_0$, t. j. pro libovolné číslo intervalu $(-1, 1)$. Jiným, ale v podstatě příbuzným způsobem jsme rovnici (31) odvodili v **DI**, věta 160; tam jsme ovšem dokázali ještě více: ukázali jsme, že (31) platí i pro $x = \pm 1$ (viz však cvič. 4).

Poznámka 2. Jádrem tohoto paragrafu byla věta 59, pojednávající (viz rovnici (21)) o záměnnosti limitních úkonů $x \to c+$, $n \to \infty$; přitom byla x „spojitě proměnná“, kdežto n „celočíselná proměnná“. Dá se očekávati, že obdobné věty budou platiti i v jiných případech, na př. když x, n jsou obě „spojitě proměnné“ nebo obě „celočíselné proměnné“. Vskutku odvodíme v kap. VI, § 21 obecnější větu, která všechny tyto případy zahrnuje. Mohl jsem ostatně ušetřiti trochu místa, kdybych byl všechny úvahy o stejnoměrné konvergenci odsunul až do kap. VI; chtěl jsem však, aby se čtenář seznámil s tímto důležitým pojmem již nyní, a to v případě poněkud specialisovaném, a proto pro začátek lépe srozumitelném.

Cvičení

1. Podobně jako v příkl. 1 odvoďte z binomické řady pro $(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$ řadu pro $\arcsin x$.

2. Funkce $f(x) = \frac{\sin x}{1^3} + \frac{\sin 2x}{2^3} + \frac{\sin 3x}{3^3} + \dots$ má v intervalu $(-\infty, +\infty)$ derivaci $f'(x) = \frac{\cos x}{1^2} + \frac{\cos 2x}{2^2} + \frac{\cos 3x}{3^2} + \dots$ a primitivní funkci

$$-\frac{\cos x}{1^4} - \frac{\cos 2x}{2^4} - \frac{\cos 3x}{3^4} - \dots$$

3. Z věty 55 odvoďte: platí-li (13) a je-li $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n(x) = 0$ stejnoměrně v M, je řada $\varepsilon_1(x) - \varepsilon_2(x) + \ldots$ stejnoměrně konvergentní v M.

4. Z cvič. 3, příkl. 1 a z věty 60 odvoďte: řada v (31) konverguje stejnoměrně v $\langle -1, +1 \rangle$, její součet je tam tedy spojitý a proto platí (31) i pro $x = \pm 1$.

5. Budiž $f_n(x) = 0$ pro $x \leqq 0$ a pro $x \geqq \frac{2}{n}$; pro $0 \leqq x \leqq \frac{1}{n}$ budiž $f_n(x) = nx$, pro $\frac{1}{n} \leqq x \leqq \frac{2}{n}$ budiž $f_n(x) = 2 - nx$ (kreslete si náčrtek). Posloupnost

$$f_1(x), f_2(x), \ldots \tag{32}$$

je konvergentní posloupnost spojitých funkcí, mající spojitou limitu $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ (vše v intervalu $(-\infty + \infty)$). Posloupnost (32) není však stejnoměrně konvergentní v $(-\infty, +\infty)$.[13]) Přesněji: je-li δ libovolné kladné číslo, je (32) stejnoměrně konvergentní v intervalu $(-\infty, 0\rangle$ i v intervalu $\langle \delta, +\infty)$, nikoliv však v intervalu $(0, \delta)$.

6. Buďte $f_1(x), f_2(x), \ldots; g_1(x), g_2(x), \ldots$ dvě posloupnosti stejnoměrně konvergentní v množině M;[14]) budiž $a \in \mathbf{E}_1$; pišme $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, $\lim\limits_{n\to\infty} g_n(x) = g(x)$. Potom jsou v M stejnoměrně konvergentní též tyto posloupnosti: $af_1(x), af_2(x), \ldots; |f_1(x)|, |f_2(x)|, \ldots; f_1(x) + g_1(x), f_2(x) + g_2(x), \ldots$ Jsou-li funkce f, g omezené v M (t. j. existuje-li $K \in \mathbf{E}_1$ tak, že $|f(x)| < K$, $|g(x)| < K$ pro všechna $x \in M$), je též posloupnost $f_1(x)\,g_1(x), f_2(x)\,g_2(x), \ldots$ stejnoměrně konvergentní v M. Je-li $g(x) \neq 0$ pro všechna $x \in M$ a jsou-li funkce $f(x)$, $\frac{1}{g(x)}$ omezené v M, je též posloupnost $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}, \frac{f_2(x)}{g_2(x)}, \ldots$ (z níž je však po případě nutno vynechati konečný počet členů) stejnoměrně konvergentní v M.

§ 4. Stejnoměrná spojitost.

Také v tomto paragrafu znamená slovo „funkce" konečnou reálnou funkci jedné reálné proměnné. Co znamená, řeknu-li, že funkce f je spojitá v intervalu I? To značí toto: Je-li $x \in I$, potom je funkce f spojitá v bodě x (pro $x = a$ míním spojitost zprava, pro $x = b$ zleva).[15]) To tedy značí: Je-li $x \in I$ a je-li $\varepsilon > 0$, potom existuje $\delta > 0$ tak, že platí[16])

[13]) Stejnoměrná konvergence ve větě 56 je tedy „postačující", ale není „nutnou" podmínkou pro spojitost funkce $\lim f_n(x)$.

[14]) Zde může M býti zase libovolná množina (nemusí býti $M \subset \mathbf{E}_1$).

[15]) Viz **DI**, definice 17, 18; a, b značí počáteční a koncový bod I.

[16]) Podmínka $y \in I$ je zde přidána proto, aby bylo vyjádřeno, že pro $x = a$ (resp. $x = b$) jde o spojitost zprava (zleva). a, b značí počáteční a koncový bod I.

$$(y \in I,\ |x - y| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon .$$

Zde ovšem δ závisí jednak na ε, jednak na bodu x (v němž vyšetřuji spojitost). Lze-li voliti δ nezávisle na x, říkáme, že f je **stejnoměrně spojitá** v intervalu I. To tedy znamená: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že

$$(x \in I,\ y \in I,\ |x - y| < \delta) \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon . \tag{33}$$

Věta 63. *Budiž f spojitá v omezeném uzavřeném intervalu $I = \langle a, b\rangle$ $(-\infty < a < b < +\infty)$. Potom f je stejnoměrně spojitá v I.*

Důkaz. Nechť f je spojitá v I, ale nikoliv stejnoměrně. Z toho máme odvoditi spor.

Není tedy pravda, že by každému $\varepsilon > 0$ existovalo příslušné $\delta > 0$. To znamená: Existuje jisté $\varepsilon > 0$ (toto ε v dalším podržíme), k němuž neexistuje příslušné $\delta > 0$. T. j. ať si zvolíme $\delta > 0$ jakkoliv, neplatí implikace (33), t. j. existují vždy čísla x, y, pro něž je splněna premisa, ale není splněn závěr implikace. Speciálně: ke každé hodnotě $\delta = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ existují čísla x_n, y_n, pro něž sice platí

$$x_n \in I ,\ y_n \in I ,\ |x_n - y_n| < \frac{1}{n} , \tag{34}$$

ale současně jest

$$|f(x_n) - f(y_n)| \geqq \varepsilon . \tag{35}$$

Posloupnost $x_1, x_2, \ldots$ je omezená, má tedy vlastní hromadnou hodnotu α, a tedy existuje vybraná posloupnost $x_{k_1}, x_{k_2}, \ldots$ $(k_1 < k_2 < \ldots)$ tak, že

$$\lim_{n \to \infty} x_{k_n} = \alpha , \tag{36}$$

načež podle (34) je též

$$\lim_{n \to \infty} y_{k_n} = \alpha . \tag{37}$$

Ježto $a \leqq x_n \leqq b$, je též $a \leqq \alpha \leqq b$. Tedy je f spojitá v bodě α (zprava, je-li $\alpha = a$, zleva, je-li $\alpha = b$). K našemu číslu $\varepsilon > 0$ existuje tedy $\eta > 0$ tak, že

$$(x \in I,\ |x - \alpha| < \eta) \Rightarrow |f(x) - f(\alpha)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon . \tag{38}$$

Ale z (36), (37) plyne, že existuje $m \in N$ tak, že $|x_{k_m} - \alpha| < \eta$, $|y_{k_m} - \alpha| < \eta$; z (38) tedy plyne

$$|f(x_{k_m}) - f(y_{k_m})| \leqq |f(x_{k_m}) - f(\alpha)| + |f(\alpha) - f(y_{k_m})| < \varepsilon\,,$$

což je ve sporu s (35) pro $n = k_m$. Tím je věta dokázána.

Poznámka 1. Rozdíl mezi spojitostí a stejnoměrnou spojitostí funkce v I se dá opět velmi výrazně vyjádřit logickými symboly. Výrok „f je spojitá v I" se dá vypsat takto:

$$\prod_{\varepsilon>0} \prod_{x \in I} \sum_{\delta>0} \prod_{y \in I} (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

(přečtěte slovy!). Výrok „f je stejnoměrně spojitá v I" se dá vypsat takto:

$$\prod_{\varepsilon>0} \sum_{\delta>0} \prod_{x \in I} \prod_{y \in I} (|x - y| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| < \varepsilon)$$

(přečtěte slovy!).

Poznámka 2. Mluvil jsem v této kapitole jen o reálných funkcích. Ale definice 9 i definice stejnoměrné spojitosti podržují smysl, jsou-li f, f_n, u_n (členové řady (3)) konečné komplexní funkce.[17] Ježto pro funkce $f(x) = g(x) + ih(x)$, $f_n(x) = g_n(x) + ih_n(x)$ jest

$$\begin{aligned}\operatorname{Max}\,(|g(x) - g_n(x)|\,,\ |h(x) - h_n(x)|) &\leqq |f(x) - f_n(x)| \leqq \\ &\leqq 2 \operatorname{Max}\,(|g(x) - g_n(x)|,\ |h(x) - h_n(x)|)\,,\end{aligned}$$

je patrno toto: Vztah

$$\lim f_n(x) = f(x) \quad \text{stejnoměrně v } M$$

platí tehdy a jen tehdy, je-li

$$\lim g_n(x) = g(x)\,, \quad \lim h_n(x) = h(x) \quad \text{stejnoměrně v } M$$

(podobně pro řady). Dále: f je stejnoměrně spojitá v M tehdy a jen tehdy, jsou-li g, h stejnoměrně spojité v M. Odtud plyne, že věty 51—63 platí i pro konečné komplexní funkce: stačí, aplikujeme-li je zvlášť na reálnou a imaginární část. Ovšem funkce ε_n (věta 55) a v_n (věta 53) jsou reálné (nezáporné) podle své definice. K stejnoměrné konvergenci a stejnoměrné spojitosti se vrátíme na obecnějším podkladě v kap. VI, § 19 (stejnoměrná spojitost) a § 21, 24 (stejnoměrná

[17]) V § 3, 4 jde ovšem o komplexní funkce jedné reálné proměnné.

konvergence). Zobecněné věty 57 na derivace vyšších řádů podáme v kap. VI, § 25, cvič. 2, zobecnění věty 57 na funkce několika proměnných podáme v kap. VII, § 14. Další rozbor pojmu stejnoměrné konvergence a jeho zobecnění je podáno v Dodatku, § 3.

Cvičení

Jestliže I je interval, který buďto není omezený nebo není uzavřený, a f je spojitá v I, nemusí být f stejnoměrně spojitá v I. Viz k tomu následující cvičení.

1. Funkce $f(x) = \frac{1}{x}$ není v $(0, 1)$ stejnoměrně spojitá. Návod: Je-li $x > 0$ „velmi malé“, $y = \frac{1}{2}x$, je $|x - y|$ „malé“, $|f(x) - f(y)| = \frac{1}{x}$ „velké“.

2. Funkce $f(x) = x^2$ není $\langle 0, +\infty)$ stejnoměrně spojitá. Návod: Rozdíl $(x + h)^2 - x^2$ můžete udělat velmi velkým i při velmi malém h, zvolíte-li x dosti velké.

3. Funkce $\cos x$, $\sin x$ jsou v $(-\infty, +\infty)$ stejnoměrně spojité. Návod: $|\cos (x + h) - \cos x| \leqq |h|$ podle věty o přírůstku funkce.

4. Funkce[18]) $f(x) = \cos x^2$ není stejnoměrně spojitá v $(0, +\infty)$. Návod: pro celé kladné k je $f(\sqrt{2k\pi}) - f(\sqrt{(2k - 1)\pi}) = 2$, ač pro velká k je rozdíl $\sqrt{2k\pi} - \sqrt{(2k - 1)\pi} = \frac{\pi}{\sqrt{2k\pi} + \sqrt{(2k - 1)\pi}}$ velmi malý. Podobně pro funkci $\sin x^2$.

5. Budiž f spojitá v intervalu I. Při daném $\delta > 0$ budiž $\mu(\delta)$ (obšírněji $\mu(\delta, f, I)$) supremum čísel $|f(x) - f(y)|$ pro $x \in I$, $y \in I$, $|x - y| \leqq \delta$. Dokažte: f je stejnoměrně spojitá v I tehdy a jen tehdy, jestliže $\lim_{\delta \to 0+} \mu(\delta) = 0$.

6. Pro funkci $\frac{1}{x}$ v intervalu $(0,1)$ a rovněž pro funkci x^2 v intervalu $(0, +\infty)$ je $\mu(\delta) = +\infty$ pro každé $\delta > 0$.

7. Pro funkce $\cos x^2$, $\sin x^2$ v intervalu $(0, +\infty)$ je $\mu(\delta) = 2$ pro každé $\delta > 0$.

8. Pro funkci $\cos x$ v intervalu $(-\infty, +\infty)$ je $\mu(\delta) = 2$ pro $\delta \geqq \pi$, $\mu(\delta) = 2 \sin \frac{1}{2}\delta$ pro $0 < \delta \leqq \pi$. (Návod: $\cos (x + h) - \cos x = -2 \sin (x + \frac{1}{2}h) \,.\, \sin \frac{1}{2}h$). Totéž platí pro $\sin x$.

9. Jestliže funkce f má v intervalu I omezenou derivací: $|f'(x)| \leqq K$ (event. zprava v počátečním, zleva v koncovém bodě), je $|\mu(\delta, f, I)| \leqq K\delta$ a tedy je f stejnoměrně spojitá v I.

---

[18]) Rozuměj ovšem $\cos (x^2)$.

10. Nechť f má v $\langle a, b\rangle = I$ rostoucí vlastní nezápornou derivaci. Potom $\mu(\delta, f, I) = f(b) - f(a)$ pro $\delta \geqq b - a$ (zřejmé); $\mu(\delta, f, I) = f(b) - f(b - \delta)$ pro $0 < \delta \leqq b - a$. (Návod: Ježto f je neklesající, je (pro $0 < \delta < b - a$) $\mu(\delta, f, I) = \max\limits_{a+\delta \leqq x \leqq b} (f(x) - f(x - \delta))$; ale $f(x) - f(x - \delta)$ má nezápornou derivaci a tedy maximum na konci, t. j. pro $x = b$.) Příklad: $f(x) = x^2$, $I = \langle a, b\rangle$, $0 \leqq a < b < +\infty$. Jest $\mu(\delta) = b^2 - a^2$ pro $\delta \geqq b - a$, $\mu(\delta) = b^2 - (b - \delta)^2 = 2b\delta - \delta^2$ pro $0 < \delta \leqq b - a$.

Funkce $\mu(\delta) = \mu(\delta, f, I)$ se často nazývá *modulem spojitosti* funkce f v intervalu I.

11. Jestliže $\lim\limits_{\delta \to 0+} \dfrac{\mu(\delta, f, I)}{\delta} = 0$, je f konstantní v I. Návod: budiž $c \in I$, $d \in I$, $c < d$. Budiž $\varepsilon > 0$. Volme $n \in \boldsymbol{N}$ tak velké, že $\mu\left(\dfrac{d - c}{n}\right) < \varepsilon \dfrac{d - c}{n}$. Potom snadno zjistíme, že

$$|f(d) - f(c)| \leqq n\mu\left(\frac{d - c}{n}\right) < \varepsilon(d - c)\,.$$

To platí pro každé $\varepsilon > 0$, tedy $f(d) = f(c)$.

Zajímavé je srovnání s cvič. 9: u „rozumných“ funkcí (s omezenou derivací) je $\dfrac{\mu(\delta)}{\delta}$ omezená; jakmile však tento podíl konverguje k nule, je f konstantní v I a tedy $\mu(\delta) = 0$ pro každé $\delta > 0$.

12. Nechť f má v $I = \langle a, b\rangle$ spojitou derivaci (v bodě a míním derivaci zprava, v bodě b zleva), takže (viz **D I**, věta 128) existuje $\max\limits_{a \leqq x \leqq b} |f'(x)| = K$. Dokažte,[19]) že potom

$$\lim_{\delta \to 0+} \frac{\mu(\delta, f, I)}{\delta} = K\,.$$

---

[19]) Srovnej s cvič. 9.