Kapitola XII. Použití zobecněné věty o přírůstku funkce: Taylorův vzorec a jeho aplikace

In: Vojtěch Jarník (author): Diferenciální počet I. (Czech). Praha: Academia, 1974. pp. 289--318.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401995

Kapitola XII

POUŽITÍ ZOBECNĚNÉ VĚTY O PŘÍRŮSTKU FUNKCE: TAYLORŮV VZOREC A JEHO APLIKACE

§ 1. Taylorův vzorec. Předpokládejme, že funkce $f(x)$ má v bodě a derivace až do n-tého řádu, kde n je jisté přirozené číslo. Funkce $f(x)$ může být značně složitá; abychom si studium funkce v blízkosti bodu a ulehčili, nahradíme funkci $f(x)$ nějakou jednodušší funkcí, a to mnohočlenem nejvýše n-tého stupně, tj. funkcí

$$(1) \qquad P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n .\,[1])$$

Součinitele $c_0, c_1, \ldots, c_n$ volíme přirozeně tak, aby se tento mnohočlen přimykal v blízkosti bodu a co nejtěsněji k funkci $f(x)$, tj. tak, aby rozdíl $f(x) - P(x)$ byl v bodě a nekonečně malý co nejvyššího řádu. Podle závěrečných úvah v kap. XI, § 3 je tedy přirozené volit $P(x)$ takto:

$$(2) \quad P(x) = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!};$$

tento mnohočlen je podle citované úvahy vskutku jediný mnohočlen tvaru (1) takový, že rozdíl $f(x) - P(x)$ je v bodě a nekonečně malý řádu vyššího než n. Tím jsme ovšem ještě nic nevykonali; zbývá nám hlavní otázka: s jakou přesností nahrazuje mnohočlen $P(x)$ v blízkosti bodu a funkci $f(x)$, tj. jak velká je asi chyba $f(x) - P(x)$, které se dopustíme, nahradíme-li funkci f mnohočlenem P? Označme tuto chybu znakem R_{n+1} nebo obšírněji $R_{n+1}(x)$ (je to funkce proměnné x), tj. položme

$$(3) \quad f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_{n+1}(x);$$

snažíme se pak *odhadnout* velikost čísla $R_{n+1}(x)$. Tento odhad se nám podaří v následující základní větě, v níž předpokládám ještě existenci derivace řádu $n + 1$; připouštíme však též hodnotu $n = 0$.

[1]) Tento výraz nazýváme vždy „mnohočlenem nejvýše n-tého stupně“, i tehdy, když všichni součinitelé $c_0, c_1, \ldots, c_n$ jsou rovni nule.

Věta 153 (tzv. věta Taylorova). *Buďte a, x dvě různá čísla, n celé, $n \geqq 0$. Budiž f funkce, jež má derivace až do řádu $n + 1$ v uzavřeném intervalu J, jehož krajní body jsou čísla a, x. Definujme $R_{n+1}(x)$ rovnicí (3). Budiž $\varphi(t)$ funkce spojitá v J, která má v každém vnitřním bodě intervalu J[2]) derivaci různou od nuly. Potom existuje uvnitř intervalu J bod ξ[3]) tak, že*

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-\xi)^n}{n!} \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{\varphi'(\xi)} f^{(n+1)}(\xi) . \tag{4}$$

Volba $\varphi(t) = (x - t)^{n+1}$ dává speciálně

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\xi) \tag{5}$$

(tzv. Lagrangeův tvar); volba $\varphi(t) = t$ dává

$$R_{n+1}(x) = \frac{(x-\xi)^n (x-a)}{n!} f^{(n+1)}(\xi) \tag{6}$$

(tzv. Cauchyův tvar).

Poznámka 1. Číslo x je od počátku dáno, vystupuje zde tedy jako konstanta; proto jsme proměnnou ve funkci φ značili t. Číslo ξ v (4) závisí na a, x, n a na tvaru funkcí f, φ; proto může např. mít – při téže funkci f a při týchž hodnotách a, x, n – číslo ξ v (5) jinou hodnotu než v (6).

Důkaz. Jest

$$R_{n+1}(x) = f(x) - f(a) - f'(a)\frac{x-a}{1!} - \ldots - f^{(n)}(a)\frac{(x-a)^n}{n!} .$$

Pišme zde místo konstanty a proměnnou t, tj. definujme funkci $F(t)$ rovnicí

$$F(t) = f(x) - f(t) - f'(t)\frac{x-t}{1!} - f''(t)\frac{(x-t)^2}{2!} - \ldots - f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!} .$$

Je zřejmě $F(x) = 0$, $F(a) = R_{n+1}(x)$. V intervalu J (i v krajních bodech) má $F(t)$ derivaci

$$F'(t) = -f'(t) - \left(-f'(t) + f''(t)\frac{x-t}{1!}\right) - \left(-f''(t)\frac{x-t}{1!} + \right.$$
$$\left. + f'''(t)\frac{(x-t)^2}{2!}\right) - \ldots$$
$$\ldots - \left(-f^{(n-1)}(t)\frac{(x-t)^{n-2}}{(n-2)!} + f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!}\right) -$$
$$- \left(-f^{(n)}(t)\frac{(x-t)^{n-1}}{(n-1)!} + f^{(n+1)}(t)\frac{(x-t)^n}{n!}\right) .$$

[2]) Tj. v každém bodě intervalu J, různém od krajních bodů a, x.

[3]) Tedy leží ξ mezi a, x; tj. buďto $a < \xi < x$ (je-li $a < x$) nebo $a > \xi > x$ (je-li $x < a$).

Zde se první člen v každé závorce zruší se členem před ním stojícím a zbude

$$F'(t) = -f^{(n+1)}(t)\,\frac{(x-t)^n}{n!}\,.$$

Ježto má $F(t)$ v J derivaci, je $F(t)$ v J spojitá; podle věty 134 existuje tedy uvnitř intervalu J číslo ξ tak, že

$$\frac{F(x)-F(a)}{\varphi(x)-\varphi(a)} = \frac{F'(\xi)}{\varphi'(\xi)},\ \text{tj.}\ -R_{n+1}(x) = -\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(\xi)}\,f^{(n+1)}(\xi)\,\frac{(x-\xi)^n}{n!}\,,\ \text{což je}$$

vzorec (4). Volba $\varphi(t) = t$, $\varphi'(t) = 1$ dává ihned vzorec (6). Volba $\varphi(t) = (x-t)^{n+1}$, $\varphi'(t) = -(n+1)(x-t)^n$ (je vskutku $\varphi'(t) \neq 0$ pro $t \neq x$) dává

$$\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{\varphi'(\xi)} = \frac{0-(x-a)^{n+1}}{-(n+1)(x-\xi)^n}$$

a z (4) plyne ihned vzorec (5).

Poznámka 2. Číslo ξ v (4), (5), (6) lze psát ve tvaru $\xi = a + \Theta(x-a)$, kde $0 < \Theta < 1$.[4]) Neboť: je-li $a < x$, je $a < \xi < x$, $0 < \xi - a < x - a$, $0 < \dfrac{\xi - a}{x - a} < 1$; je-li však $a > x$, je $a > \xi > x$, $0 < a - \xi < a - x$, $0 < \dfrac{a-\xi}{a-x} < 1$, tj. $0 < \dfrac{\xi - a}{x - a} < 1$. Položím-li tedy $\dfrac{\xi - a}{x-a} = \Theta$, je v obou případech $0 < \Theta < 1$, $\xi = a + \dfrac{\xi - a}{x - a}(x-a) = a + \Theta(x-a)$.

Poznámka 3. Ve větě 153 se nejčastěji psává $x = a + h\,(h \neq 0)$; potom je $x - a = h$, $\xi = a + \Theta h\,(0 < \Theta < 1)$, $x - \xi = (1-\Theta)\,h$. Vzorce (3), (4), (5), (6) mají potom tento tvar:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\frac{h}{1!} + f''(a)\frac{h^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{h^n}{n!} + R_{n+1}\,, \tag{7}$$

$$R_{n+1} = \frac{h^n(1-\Theta)^n}{n!}\,\frac{\varphi(a+h)-\varphi(a)}{\varphi'(a+\Theta h)}\,f^{(n+1)}(a+\Theta h)\,, \tag{8}$$

$$R_{n+1} = \frac{h^{n+1}}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(a+\Theta h), \tag{9}$$

$$R_{n+1} = \frac{h^{n+1}(1-\Theta)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(a+\Theta h) \qquad (0 < \Theta < 1)\,. \tag{10}$$

[4]) Velmi názorné: číslo ξ leží mezi a, x; tj. číslo ξ se rovná číslu a plus „kousek" rozdílu $x - a$.

Čtenář by si měl pamatovat vzorce (7), (9) (vzorce (8), (10) se v paměti snadno spletou a je snad lépe si je odvodit nebo si je nalézt v knize, když je potřebujeme). Vzorec (9) se snadno pamatuje: místo abychom ve vzorci (7) napsali za členem $f^{(n)}(a)\, h^n : n!$ člen $f^{(n+1)}(a)\, h^{n+1} : (n+1)!$, napíšeme tam derivaci $f^{(n+1)}$ nikoliv v bodě a, nýbrž v bodě $a + \Theta h$, ležícím mezi a, $a + h$.

Poznámka 4. Speciálně pro $a = 0$ vypadají vzorce (7) až (10) takto (píši x místo h):

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(0)\frac{x^n}{n!} + R_{n+1}, \tag{11}$$

$$R_{n+1} = \frac{x^n(1-\Theta)^n}{n!}\,\frac{\varphi(x)-\varphi(0)}{\varphi'(\Theta x)}\,f^{(n+1)}(\Theta x) \qquad (0 < \Theta < 1), \tag{12}$$

$$R_{n+1} = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}\,f^{(n+1)}(\Theta x), \tag{13}$$

$$R_{n+1} = \frac{x^{n+1}(1-\Theta)^n}{n!}\,f^{(n+1)}(\Theta x). \tag{14}$$

Vzorce (11) až (14) neříkají ovšem nic nového; ježto se však případ $a = 0$ často vyskytuje, dává se mu zvláštní název „Maclaurinova věta“.

Cvičení

1. Volba $\varphi(t) = |x - t|^p$ $(p > 0)$ vede v (8) k tomuto výrazu pro R_{n+1}:

$$R_{n+1} = \frac{h^{n+1}(1-\Theta)^{n-p+1}}{n!\,p}\,f^{(n+1)}(a + \Theta h).$$

Případy $p = 1$, $p = n + 1$ vedou ke vzorcům (10), (9).

2. Je-li $f(x)$ mnohočlen stupně nejvýše n-tého, je $f^{(n+1)}(x) = 0$ a věta Taylorova dává *přesné* vyjádření

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\frac{h}{1!} + \ldots + f^{(n)}(a)\frac{h^n}{n!}.$$

Tento vzorec můžete odvodit též přímo, umocníte-li $(a + h)^k$ podle binomické poučky. Ale také přibližný vzorec (se zbytkem) má důležitost i pro mnohočleny; je-li např. $f(x)$ mnohočlen stupně 100, dává vzorec

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)\frac{h}{1!} + f''(a)\frac{h^2}{2!} + f'''(a)\frac{h^3}{3!} + R_4$$

přibližné vyjádření mnohočlenu $f(x)$ mnohočlenem stupně nejvýše třetího.

3. Větu 153 bychom mohli trochu zobecnit takto: I. Existenci derivace $f^{(n+1)}$ by stačilo předpokládat ve *vnitřních* bodech intervalu J, zato bychom ovšem musili výslovně předpokládat spojitost funkce $f^{(n)}$ v intervalu J. II. V krajních bodech intervalu J by stačilo předpokládat pouze existenci jednostranných derivací $f', \ldots, f^{(n)}$ v tomto smyslu: budiž třeba $a < x$; potom pro vnitřní body intervalu J nechť znak $f'(t)$ značí derivaci jak obvykle, kdežto $f'(a)$ nechť značí derivaci zprava, $f'(x)$ derivaci zleva. Znak $f''(t)$ nechť značí derivaci této funkce f', přičemž opět $f''(a)$ nechť značí derivaci zprava, $f''(x)$ derivaci zleva atd.

§ 2. Použití Taylorova vzorce na funkce e^x, $\sin x$, $\cos x$. Uvedené funkce mají derivace všech řádů pro všechna x. Můžeme tedy užít Maclaurinova vzorce (tj. Taylorova vzorce pro $a = 0$) pro libovolné $x \neq 0$ a pro libovolné celé $n \geqq 0$. Pro zbytek R_{n+1} ve vzorci (11) užijeme vzorce (13). Klademe-li předně $f(x) = e^x$, je $f^{(k)}(x) = e^x$, $f^{(k)}(0) = e^0 = 1$, $f^{(k)}(\Theta x) = e^{\Theta x}$ pro každé celé $k \geqq 0$. Podle (11), (13) je tedy pro každé celé $n \geqq 0$ a každé x

$$(15) \qquad e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \ldots + \frac{x^n}{n!} + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\Theta x}, \quad 0 < \Theta < 1 .$$

Položme za druhé $f(x) = \sin x$; je $f^{(0)}(x) = \sin x$, $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$, $f^{(5)}(x) = \cos x, \ldots$; pro $x = 0$ dostáváme po řadě hodnoty 0; 1; 0; − 1; 0; 1; 0; − 1; 0; 1; 0; − 1; ...

Všechny derivace funkce $\sin x$ jsou buďto $\pm \sin x$ nebo $\pm \cos x$; jejich prostá hodnota je tedy nejvýše rovna 1. Podle (13) je tedy

$$|R_{n+1}| = \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} f^{(n+1)}(\Theta x) \right| \leqq \frac{|x^{n+1}|}{(n+1)!} .$$

Volíme-li speciálně v (11) n sudé, $n = 2m$, dostáváme pro každé x a každé celé $m > 0$

$$(16) \qquad \sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots + (-1)^{m-1} \frac{x^{2m-1}}{(2m-1)!} + R_{2m+1} ,$$

$$|R_{2m+1}| \leqq \frac{|x|^{2m+1}}{(2m+1)!} .$$

Obdobně dostaneme (proveďte!)

$$(17) \qquad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots + (-1)^m \frac{x^{2m}}{(2m)!} + R_{2m+2} ,$$

$$|R_{2m+2}| \leqq \frac{|x|^{2m+2}}{(2m+2)!}$$

pro každé x a každé celé $m \geqq 0$.

Příklad 1'. *Výpočet funkce e^x.* Je-li $0 < x \leqq 1$, je v (15) též $\Theta x < 1$, tedy $e^{\Theta x} < e^1$; ježto $e < 4$ (viz kap. II, § 4, příkl. 3), je

$$(18) \qquad 0 < \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} e^{\Theta x} < \frac{4x^{n+1}}{(n+1)!} \leqq \frac{4}{(n+1)!} .$$

Jinak řečeno: je-li $0 < x \leqq 1$ a nahradím-li číslo e^x číslem $1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \dots$ $\dots + \frac{x^n}{n!}$, dopustím se chyby menší než $4x^{n+1} : (n + 1)!$, tedy tím spíše chyby menší než $4 : (n + 1)!$. Ježto faktoriály velmi rychle rostou, bude chyba velmi malá, jakmile je n poněkud větší.

Pro $-1 \leqq x < 0$ bude výpočet ještě o něco příznivější; v tomto případě je totiž $\Theta x < 0$, $e^{\Theta x} < e^0 = 1$ a tedy

$$0 < \left| \frac{x^{n+1}}{(n + 1)!} e^{\Theta x} \right| < \frac{|x|^{n+1}}{(n + 1)!} \leqq \frac{1}{(n + 1)!}. \tag{19}$$

Viz cvičení 1.

Příklad 2. *Výpočet funkcí* $\cos x$, $\sin x$. Je zřejmé, že stačí vypočíst tyto funkce pro $0 < x < \frac{1}{2}\pi$. Dokonce stačí vypočíst je pro $0 < x \leqq \frac{1}{4}\pi$. Neboť je-li $\frac{1}{4}\pi < x < \frac{1}{2}\pi$, užijeme pro výpočet čísel $\cos x$, $\sin x$ rovnic $\cos x = \sin\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$, $\sin x = \cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right)$, a zde je $0 < \frac{1}{2}\pi - x < \frac{1}{4}\pi$. Ježto $\frac{1}{4}\pi < 1$,[5]) je pro $0 < x \leqq \frac{1}{4}\pi$ ve vzorci (16) $|R_{2m+1}| < 1 : (2m + 1)!$ a ve vzorci (17) $|R_{2m+2}| < 1 : (2m + 2)!$. Vzorce (16), (17) umožňují tedy snadný výpočet funkcí $\cos x$, $\sin x$. Viz cvičení 2.

Příklad 3. *Je-li m libovolné číslo, je*

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^m} = +\infty, \quad \lim_{x \to +\infty} x^m e^{-x} = 0. \tag{20}$$

Důležitý příklad; jeho obsah se snad nejlépe pamatuje pod heslem: funkce e^x vzrůstá pro $x \to +\infty$ rychleji než kterákoliv mocnina x. Důkaz: Zvolme přirozené číslo $n > m$; na pravé straně rovnice (15) stojí pro $x > 0$ vesměs kladná čísla, jedno z nich je $x^n : n!$. Pro $x > 0$ je tedy

$$e^x > \frac{x^n}{n!}, \quad \frac{e^x}{x^m} > \frac{x^{n-m}}{n!}; \quad \text{ale} \quad \lim_{x \to +\infty} x^{n-m} = +\infty,$$

tedy tím spíše $\lim_{x \to +\infty} \frac{e^x}{x^m} = +\infty$; druhá rovnice (20) plyne odtud přechodem k převrácené hodnotě. Jinou metodou jsme tento výsledek odvodili v kap. XI, § 1, příkl. 9.

Příklad 4. *Je-li $m > 0$, je* $\lim_{x \to 0+} x^m \lg x = 0$, $\lim_{x \to +\infty} \frac{\lg x}{x^m} = 0$. Heslo: pro $x \to +\infty$ roste $\lg x$ pomaleji než jakákoliv mocnina x^m s kladným mocnitelem; pro $x \to 0+$ roste $|\lg x|$[6]) pomaleji než jakákoliv mocnina x se záporným mocnitelem

[5]) Dosud jsme nedokázali, že je $\pi < 4$, ale dokážeme to v § 5.

[6]) Pro $0 < x < 1$ je ovšem $\lg x < 0$; proto píši prostou hodnotu.

(místo $x^m \lg x$ lze psát $\lg x : x^{-m}$). Důkaz: Definujme y jako funkci x rovnicí $x^m = e^y$, tj. $y = \lg x^m = m \lg x$; tedy $\frac{\lg x}{x^m} = \frac{1}{m}\frac{y}{e^y}$, $\lim\limits_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y} = 0$ podle (20).

Pro $x \to +\infty$ je též $y = m \lg x \to +\infty$; tedy je $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{\lg x}{x^m} = \frac{1}{m} \lim\limits_{y \to +\infty} \frac{y}{e^y} = 0$.[7]) Rovnice $\lim\limits_{x \to +\infty} \lg x \,.\, x^{-m} = 0$, kterou jsme právě dokázali, znamená totéž co $\lim\limits_{y \to 0+} \lg \frac{1}{y} \,.\, \left(\frac{1}{y}\right)^{-m} = 0$, tj. $-\lim\limits_{y \to 0+} y^m \lg y = 0$, čímž i první rovnice tohoto příkladu je dokázána. Jiný důkaz viz v kap. XI, § 2, příkl. 1.

Příklad 5. *Pro libovolné celé číslo m je* $\lim\limits_{y \to 0} \frac{1}{y^m} e^{-1/y^2} = 0$. Důkaz: Zvolme přirozené číslo n tak, že $2n > m$. Pro $y \neq 0$ dosaďme do rovnice (15) $x = \frac{1}{y^2} > 0$; dostaneme $e^{1/y^2} > \frac{1}{n!\, y^{2n}}$, $0 < e^{-1/y^2} < n!\, y^{2n}$, $\left|\frac{1}{y^m} e^{-1/y^2}\right| < n! |y|^{2n-m}$; zde má pravá a tedy i levá strana pro $y \to 0$ limitu 0.

Příklad 6. *Číslo e je iracionální.* Důkaz: Předpokládejme, že e je racionální; tedy je též $e^{-1} = 1 : e$ racionální, $e^{-1} = \frac{p}{q}$ (p, q celá, $q > 0$). Je jistě $q > 1$, neboť $0 < e^{-1} < 1$. Vzorec (15) pro $x = -1$ a pro $n = q - 1$ dává

$$(21) \quad (-1)^q \frac{e^{-\Theta}}{q!} = e^{-1} - 1 - \frac{-1}{1!} - \frac{(-1)^2}{2!} - \ldots - \frac{(-1)^{q-1}}{(q-1)!}, \quad 0 < \Theta < 1 .$$

Ježto $e^{-1} = p : q$, lze pravou stranu rovnice (21) psát jako zlomek $c : q!$, kde c je celé číslo. Prostá hodnota pravé strany je tedy některé z čísel $0, \frac{1}{q!}, \frac{2}{q!}, \frac{3}{q!}, \ldots$ Ale prostá hodnota levé strany rovnice (21) je číslo kladné a menší než $1 : q!$ (neboť $0 < e^{-\Theta} < 1$); to však je spor.

Cvičení

1. Vypočtěte čísla $e, e^{-1}, e^{1/5}, e^{-1/3}$ s chybou menší než 10^{-6} (přesvědčte se napřed ze vzorců (15), (18) pro $n = 3$, že $e < 3$; potom ve vzorci (18) můžete místo čtyřky psát trojku; potom uvidíte, že pro první dvě čísla stačí užít vzorce (15) pro $n = 9$, pro třetí číslo stačí volit $n = 5$, pro čtvrté $n = 6$).[8])

[7]) Podrobně: budiž $\varepsilon > 0$; existuje y_0 tak, že pro $y > y_0$ je $|y : e^y| < m\varepsilon$. Definuji-li x_0 rovnicí $y_0 = m \lg x_0$, platí pro $x > x_0$ rovnice $y = m \lg x > y_0$ a tedy

$$|\lg x : x^m| = \frac{1}{m} |y : e^y| < \frac{1}{m} \,.\, m\varepsilon = \varepsilon .$$

[8]) Pro $|x| > 1$ lze potom e^x počítat např. takto: $e^{12/5} = e \,.\, e \,.\, e^{2/5}$; $e^{-7/3} = e^{-1} \,.\, e^{-1} \,.\, e^{-1/3}$ apod.

2. Vypočtěte kosinus a sinus pěti stupňů s chybou menší než 10^{-6}. (V obloukové míře je tento úhel $\frac{1}{36}\pi < \frac{1}{10}$; snadno najdete ze (17), (18) pro $x = \frac{1}{36}\pi$, že hledaná čísla se liší od čísel

$$1 - \tfrac{1}{2}(\tfrac{1}{36}\pi)^2 + \tfrac{1}{24}(\tfrac{1}{36}\pi)^4\,, \quad \tfrac{1}{36}\pi - \tfrac{1}{6}(\tfrac{1}{36}\pi)^3$$

o méně než 10^{-6}; jak lze počítat číslo π, dovíte se v § 5.)

3. Je-li $a > 0$, $b > 0$, je $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{ax^b}}{x^c} = +\infty$.

4. Je-li $m > 0$, je $\lim\limits_{x\to0+} x^m\,|\lg x|^c = 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^{-m}(\lg x)^c = 0$.

5. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^{-20}e^{2x} - 10x^{20}e^x) = +\infty$,

$$\lim_{x\to+\infty} (x^{-3}e^{x^2-5x} - 5x^6e^{7x} - 10x^3e^{\frac{1}{2}x^2}) = +\infty,$$

$$\lim_{x\to0+} (x^8e^{1/x} + x^9e^{-1/x}) = +\infty, \quad \lim_{x\to0-} (x^8e^{1/x} + x^9e^{-1/x}) = -\infty,$$

$$\lim_{x\to0+}\left(e^{2/x} + e^{1/x}\sin\frac{1}{x}\right) = +\infty, \quad \lim_{x\to0-}\left(e^{2/x} + e^{1/x}\sin\frac{1}{x}\right) = 0\,.$$

(Návod: z každé závorky vytkněte „převládající" člen.)

6. $\lim\limits_{x\to+\infty} (x^2\lg^{-10}x - 7x^2\lg^{-11}x - 5x\lg^{20}x) = +\infty$,

$$\lim_{x\to0+}\left(x^{-1/2}\lg^{-3}\frac{1}{x} - 2x^{-1/3}\lg^4\frac{1}{x}\right) = +\infty.$$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{x^2} - x^7e^{3x}}{e^{x^2} + x^4e^{x^2/2+2x}} = 1\,,\quad \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^{2x} + x^3e^x}{x^3e^x + x^5e^{x/2}} = +\infty\,,$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^5e^x - x^6e^{2x}}{x^{-2}e^{3x} + x^{-3}e^{3x}\sin\dfrac{1}{x}} = 0\,, \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^3e^{2x} + x^3e^{2x}\sin x}{x^2e^{2x} - x^5e^x}$$

neexistuje,

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^2\lg^{-6}x - x\lg^2 x}{x\lg^5 x + \lg^{10}x} = +\infty\,.$$

§ 3. Taylorova a Maclaurinova řada. Funkce e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\lg(1+x)$, $(1+x)^m$.

Věta 154. *Buďte a, x dvě čísla, $x \neq a$; funkce f nechť má derivace všech řádů v uzavřeném intervalu, jehož krajní body jsou a, x. Potom platí rovnice*

$$f(x) = f(a) + f'(a)\frac{x-a}{1!} + f''(a)\frac{(x-a)^2}{2!} + \dots \tag{22}$$

tehdy a jen tehdy, je-li ve vzorci (3)

$$\lim_{n\to\infty} R_{n+1}(x) = 0\,.^{9)} \tag{23}$$

[9]) Jde ovšem o limitu posloupnosti $R_1(x)$, $R_2(x)$, $R_3(x)$, $R_4(x)$, ...

Důkaz. Označím-li znakem $s_{n+1}(x)$ součet prvních $n + 1$ členů řady stojící v rovnici (22) vpravo, znamená rovnice (22) – podle definice součtu nekonečné řady – totéž co rovnice $f(x) = \lim_{n\to\infty} s_{n+1}(x)$ neboli

$$\lim_{n\to\infty} (f(x) - s_{n+1}(x)) = 0 . \tag{24}$$

Ale podle (3) je $f(x) - s_{n+1}(x) = R_{n+1}(x)$, takže rovnice (24) (a tedy též (22)) znamená totéž co (23).

Poznámka 1. Věta sama o sobě je vlastně úplně bezcenná; není to nic jiného než definice součtu nekonečné řady aplikovaná na řadu (22). Teprve věta 153 jí dodává ceny: vzorce (4), (5), (6) nám totiž leckdy dovolují rozhodnout, zda rovnice (23) je splněna.

Poznámka 2. Platí-li rovnice (22), nazýváme pravou stranu rovnice (22) *Taylorovou řadou* pro funkci f. Ve speciálním případě $a = 0$ mluvíme o Maclaurinově řadě

$$f(x) = f(0) + f'(0)\frac{x}{1!} + f''(0)\frac{x^2}{2!} + \dots \tag{25}$$

Poznámka 3. Pro $x = a$ je rovnice (22) zřejmě splněna, jakmile symboly $f(a), f'(a), f''(a), \dots$ mají význam (pravá i levá strana rovnice je potom $f(a)$). Čtenáři proto zajisté nebude vadit, jestliže v následujících příkladech případ $x = a$ prostě přeskočím.

K rozhodnutím, zda platí rovnice (23), je často užitečná tato jednoduchá

Věta 155.[10]) *Budiž $a_1, a_2, a_3, \dots$ posloupnost kladných čísel. Nechť* $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < 1$; *potom je* $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Důkaz. Zvolme číslo q tak, že $\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} < q < 1$. Potom existuje přirozené číslo r tak, že pro $n \geqq r$ je $\frac{a_{n+1}}{a_n} < q$. Pro $n > r$ je tedy

$$0 < a_n = a_r \frac{a_{r+1}}{a_r} \cdot \frac{a_{r+2}}{a_{r+1}} \dots \frac{a_n}{a_{n-1}} < a_r q^{n-r} . \tag{26}$$

Je však $\lim_{n\to\infty} a_r q^{n-r} = a_r q^{-r} \lim_{n\to\infty} q^n = 0$, tedy podle (26) též $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

[10]) Čtenář, který probral cvičení 8 v kap. II, § 2, zná již tuto větu.

Vezměme několik důležitých příkladů. Položím-li $f(x) = \sin x$ nebo $f(x) = \cos x$ a kladu-li $a = 0$ (tj. užiji-li věty Maclaurinovy), je podle § 2 $|R_{n+1}(x)| \leqq |x|^{n+1} : (n+1)!$ pro každé $x \neq 0$. Tvrdím, že

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!} = 0\,. \tag{27}$$

Abychom to dokázali, položme $a_n = |x|^{n+1} : (n+1)!$. Potom je $a_n > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{n+2}}{(n+2)!} \cdot \frac{(n+1)!}{|x|^{n+1}} = |x| \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+2} = 0 < 1\text{[11]}\,,$$

takže podle věty 155 je vskutku $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Tedy platí (27) a podle věty 154 a podle (16), (17) platí

Věta 156. *Pro každé x* (zřejmě též pro $x = 0$) *je*

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots\,;$$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\,.$$

Položím-li $f(x) = e^x$ a užiji věty Maclaurinovy, mám podle (15) $R_{n+1}(x) = x^{n+1}e^{\Theta x} : (n+1)!$ pro každé $x \neq 0$, přičemž $0 < \Theta < 1$. Pro $x < 0$ je $\Theta x < 0$, $e^{\Theta x} < 1$, tedy $|R_{n+1}(x)| < |x^{n+1}| : (n+1)!$; podle (27) je tedy $\lim R_{n+1}(x) = 0$. Pro $x > 0$ je $\Theta x < x$, $e^{\Theta x} < e^x$, tedy $0 < R_{n+1}(x) < e^x \,.\, x^{n+1} : (n+1)!$, tedy (podle (27)) opět $\lim R_{n+1}(x) = 0$. Máme tedy větu:

Věta 157. *Pro každé x je* $e^x = 1 + \dfrac{x}{1!} + \dfrac{x^2}{2!} + \dfrac{x^3}{3!} + \ldots$

Vezměme nyní funkci $f(x) = \lg x$. Zde nemůžeme přímo užít Maclaurinova vzorce, ježto pro $x = 0$ není funkce definována. Vezmeme tedy např. $a = 1$ a sestrojíme Taylorův vzorec pro $\lg(1 + h)$; místo h budeme psát x a můžeme to tedy říci též takto: vezmeme funkci $f(x) = \lg(1 + x)$ a zkoumáme vzorec Maclaurinův. Je (pro $1 + x > 0$, tj. pro $x > -1$)

$$f(x) = \lg(1+x)\,, \quad f'(x) = \frac{1}{1+x}\,, \qquad f''(x) = -\frac{1!}{(1+x)^2}\,,$$

$$f'''(x) = \frac{2!}{(1+x)^3}\,, \ldots, f^{(n)}(x) = (-1)^{n-1}\frac{(n-1)!}{(1+x)^n}\,;$$

$$f(0) = \lg 1 = 0\,, \quad f'(0) = 1\,, \quad f''(0) = -1!\,, \quad f'''(0) = 2!, \ldots,$$
$$f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)!\,,$$

[11]) x je pevně zvolené číslo!

takže pro $x > -1$ a pro libovolné přirozené n je

$$\lg(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \ldots + (-1)^{n-1}\frac{x^n}{n} + R_{n+1},$$

kde pro R_{n+1} lze užít vzorců (12), (13), (14).[12] Budiž napřed $x > 0$; užijeme vzorce (13); ježto $f^{(n+1)}(\Theta x) = (-1)^n \cdot n!(1+\Theta x)^{-n-1}$, vychází

$$(28)\qquad |R_{n+1}| = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(1+\Theta x)^{n+1}} < \frac{x^{n+1}}{n+1}\ (\text{neboť } 1 + \Theta x > 1)\,.$$

Pro $0 < x \leqq 1$ je tedy $|R_{n+1}| < 1 : (n+1)$, tedy $\lim R_{n+1} = 0$; podle věty 154 je tedy

$$(29)\qquad \lg(1+x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots$$

Pro $|x| > 1$ je řada v (29) divergentní podle věty 93 (d'Alembertovo kritérium), neboť

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+1} : \frac{x^n}{n}\right| = |x| \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1} = |x| > 1\,.$$

Také pro $x = -1$ je řada v (29) divergentní, neboť má tvar $-\frac{1}{1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \ldots$ (až na znamení harmonická řada). Vzorec (29) tedy neplatí pro $x \leqq -1$,[13] platí pro $0 \leqq x \leqq 1$, neplatí pro $x > 1$. Zbývá vyšetřit interval $-1 < x < 0$. Pro tato x se vzorec (28) nehodí, ježto $1 + \Theta x < 1$. Zkusme tedy užít vzorce (14), jenž dává

$$(30)\qquad |R_{n+1}| = \frac{|x|^{n+1}(1-\Theta)^n \cdot n!}{n!(1+\Theta x)^{n+1}} = \frac{|x|^{n+1}}{1+\Theta x} \cdot \left(\frac{1-\Theta}{1+\Theta x}\right)^n.$$

Budiž x dáno, $-1 < x < 0$. Položme $x = -y$, takže $0 < y < 1$, a tedy předně $1 + \Theta x = 1 - \Theta y > 1 - y > 0$, za druhé $1 + \Theta x = 1 - \Theta y > 1 - \Theta > 0$, takže $0 < \dfrac{1-\Theta}{1+\Theta x} < 1$. Podle (30) je tedy $|R_{n+1}| \leqq \dfrac{y^{n+1}}{1-y}$ a tedy $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1} = 0$; podle věty 154 platí tedy (29) též pro $-1 < x < 0$. Tedy celkem:

Věta 158. *Rovnice* (29) *platí tehdy a jen tehdy, je-li* $-1 < x \leqq 1$.

Vezměme konečně mocninu x^m. Není-li m celé nezáporné, tj. není-li m některé z čísel

$$(31)\qquad 0, 1, 2, 3, \ldots,$$

vznikají v bodě $x = 0$ podobné obtíže jako při logaritmu; proto vezmeme podobně jako při logaritmu funkci $f(x) = (1+x)^m$. Je-li m některé z čísel (31), připouštíme

[12]) Pro $x = 0$ je vše triviální.

[13]) Což je vidět též z toho, že levá strana rovnice (29) nemá pro $x \leqq -1$ smysl.

všechny hodnoty x; není-li m žádné z čísel (31), omezíme se na ty hodnoty x, pro něž je $1 + x > 0$, tj. na hodnoty $x > -1$. Je

$$f(x) = (1 + x)^m, \quad f'(x) = m(1 + x)^{m-1}, \ldots,$$
$$f^{(k)}(x) = m(m - 1)\ldots(m - k + 1)(1 + x)^{m-k}$$

Tedy je

$$(1 + x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \ldots + \binom{m}{n} x^n + R_{n+1}, \tag{32}$$

kde pro *libovolné* m a pro *celé kladné* k definujeme

$$\binom{m}{k} = \frac{m(m - 1)(m - 2)\ldots(m - k + 1)}{1.2.3\ldots k},$$

např.

$$\binom{\frac{1}{2}}{3} = \frac{\frac{1}{2}.(-\frac{1}{2}).(-\frac{3}{2})}{1.2.3} = \frac{1}{16}.$$

Mimoto klademe $\binom{m}{0} = 1$, takže první člen v (32) vpravo lze psát $\binom{m}{0} x^0$.

Jde nyní o to, zda $\lim_{n \to \infty} R_{n+1} = 0$. Ježto nám při logaritmu pro $x < 0$ tvar (13) selhal, užijeme hned tvaru (14). Je-li m celé nezáporné, je $(1 + x)^m$ mnohočlen stupně m; derivace všech řádů existují pro všechna x a derivace $(m + 1)$-ní je rovna nule. Můžeme tedy vzorce (14) užít pro každé x. Položíme-li v (14) $n = m$, vyjde $R_{m+1} = 0$, platí tedy pro všechna x rovnice

$$(1 + x)^m = \binom{m}{0} x^0 + \binom{m}{1} x^1 + \binom{m}{2} x^2 + \ldots + \binom{m}{m} x^m$$

$(m = 0, 1, 2, 3, \ldots)$, což je známá binomická formule.

Tento jednoduchý případ vyloučíme, takže budeme v dalším výkladu předpokládat, že m není žádné z čísel (31). V tomto případě žádný „binomický součinitel"

$$\binom{m}{k} = \frac{m.(m - 1).(m - 2)\ldots(m - k + 1)}{1.2.3\ldots k}$$

není roven nule, neboť číslo m není rovno žádnému z čísel $0, 1, 2, \ldots, k - 1$.

Podle (14) máme, omezíme-li se na hodnoty $x > -1$,

$$R_{n+1} = \frac{x^{n+1}(1 - \Theta)^n}{n!} m(m - 1)\ldots(m - n)(1 + \Theta x)^{m-n-1},$$

$$|R_{n+1}| = |x|^{n+1}(1 + \Theta x)^{m-1} \left(\frac{1 - \Theta}{1 + \Theta x}\right)^n \left|\frac{m(m - 1)\ldots(m - n)}{1.2\ldots n}\right|. \tag{33}$$

Zde leží Θx mezi 0 a x, tedy $(1 + \Theta x)$ mezi 1 a $1 + x$, tedy $(1 + \Theta x)^{m-1}$ mezi 1^{m-1} a $(1 + x)^{m-1}$ (neboť funkce z^{m-1} je monotónní – a to rostoucí pro $m > 1$, klesající pro $m < 1$ – v intervalu $(0, +\infty)$). Za druhé je $x > -1$, tedy $\Theta x > -\Theta$, $1 + \Theta x > 1 - \Theta > 0$, $0 < \dfrac{1-\Theta}{1+\Theta x} < 1$. Z (33) plyne tedy

$$(34) \qquad |R_{n+1}| < \operatorname{Max}\left(1, (1+x)^{m-1}\right) . |x|^{n+1} . \left|\frac{m(m-1)\dots(m-n)}{1.2\dots n}\right| .$$

Pravou stranu v nerovnosti (34) označme a_n; potom je $a_n > 0$,

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = |x| . \left|\frac{m(m-1)\dots(m-n)(m-n-1)}{1.2\dots n.(n+1)} . \frac{1.2\dots n}{m(m-1)\dots(m-n)}\right| =$$

$$= |x| . \left|\frac{m-n-1}{n+1}\right| ,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = |x| . \lim_{n\to\infty}\left|\frac{n+1-m}{n+1}\right| = |x| .$$

Pro $|x| < 1$ je tedy podle věty 155 $\lim a_n = 0$, tedy podle (34) též $\lim R_{n+1} = 0$; podle věty 154 platí tedy rovnice

$$(35) \qquad (1+x)^m = 1 + \binom{m}{1} x + \binom{m}{2} x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{m}{n} x^n .$$

Pro $|x| > 1$ je řada v (35) divergentní, což seznáme takto: každý binomický součinitel v (35) je různý od nuly; prostá hodnota podílu dvou po sobě následujících členů v řadě (35) je

$$\left| x^{n+1} . \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)(m-n)}{1.2\dots n(n+1)} . x^{-n} . \frac{1.2\dots n}{m(m-1)\dots(m-n+1)}\right| =$$

$$= |x| . \left|\frac{m-n}{n+1}\right| = |x| . \left|\frac{n+1-m-1}{n+1}\right| = |x| . \left|1 - \frac{m+1}{n+1}\right|$$

a limita tohoto výrazu pro $n \to \infty$ je číslo $|x| > 1$, takže řada (35) podle d'Alembertova kritéria (věta 93) diverguje. Tedy máme tuto větu:

Věta 159. *Rovnice* (35) *platí pro* $|x| < 1$, *neplatí pro* $|x| > 1$.

Zbývající případy $x = 1$ a $x = -1$ by vyžadovaly zvláštního vyšetření. Řadě (35) se říká binomická řada.

Poznámka 4. Rovnice (22) platí, existují-li v uzavřeném intervalu o krajních bodech a, x všechny derivace funkce f a je-li $\lim R_{n+1}(x) = 0$. Ukážeme nyní, že k platnosti rovnice (22) *nestačí*, je-li řada vpravo konvergentní. Sestrojíme totiž funkci f, která má derivace všech řádů pro každé x, pro kterou řada v rovnici (22) konverguje pro každé x a pro kterou rovnice (22) přes to neplatí pro žádné $x \neq a$ (pro $x = a$ ovšem rovnice (22) platí).[14]) Provedeme to pro $a = 0$, tj. pro řadu Maclaurinovu. Funkci f definujme takto: budiž $f(x) = e^{-1/x^2}$ pro $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Pro $x \neq 0$ je $f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}$, pro $x = 0$ je

$$f'(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{1}{x} e^{-1/x^2} = 0$$

(podle § 2, příkl. 5). Tvrdím nyní toto: pro každé celé $n > 0$ platí

(A) $$f^{(n)}(x) = P_n\left(\frac{1}{x}\right) . e^{-1/x^2} \text{ pro } x \neq 0 ;$$

kde $P_n(y)$ je mnohočlen,[15])

(B) $$f^{(n)}(0) = 0 .$$

Důkaz provedu úplnou indukcí.

Tato tvrzení jsou správná, jak jsme právě zjistili, pro $n = 1$ $(P_1(y) = 2y^3)$. Předpokládejme, že (A) i (B) platí pro jisté $n > 0$; z toho odvodíme, že platí též pro hodnotu $n + 1$. Podle (A) je totiž pro $x \neq 0$

$$f^{(n+1)}(x) = \left(-\frac{1}{x^2} P_n'\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{2}{x^3} P_n\left(\frac{1}{x}\right)\right) e^{-1/x^2} = P_{n+1}\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} ,$$

kde P_{n+1} je opět jistý mnohočlen. Podle (A), (B) je pro $x \neq 0$

$$\frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = \frac{1}{x} P_n\left(\frac{1}{x}\right) e^{-1/x^2} ;$$

tento výraz je součtem několika členů tvaru $Cx^{-m} e^{-1/x^2}$ (C konstanta, m celé kladné) a tedy má podle příkl. 5, § 2 limitu 0 pro $x \to 0$. Tedy je

$$f^{(n+1)}(0) = \lim_{x \to 0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(0)}{x} = 0 .$$

Řada $f(0) + f'(0) \frac{x}{1!} + f''(0) \frac{x^2}{2!} + \ldots$ je tedy konvergentní pro každé x a má součet rovný nule, tedy součet *různý* od čísla $f(x) = e^{-1/x^2}$, je-li $x \neq 0$.

---

[14]) Podle rovnice (3) není potom ovšem $\lim_{n \to \infty} R_{n+1}(x) = 0$, nýbrž $\lim_{n \to \infty} R_{n+1}(x) = f(x) - f(a) - \frac{f'(a)}{1!}(x - a) - \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 - \ldots$

[15]) Tedy $P_n(y) = c_0 + c_1 y + \ldots + c_m y^m$; $P_n\left(\frac{1}{x}\right) = c_0 + c_1 \frac{1}{x} + \ldots + c_m \frac{1}{x^m}$, kde ovšem číslo m i součinitelé $c_0, c_1, \ldots, c_m$ závisí na n.

Cvičení

1. Vím-li, že pro nějakou funkci f a pro jistou dvojici hodnot a, x platí rovnice (22), mohu vyjádřit R_{n+1} nekonečnou řadou

$$R_{n+1}(x) = f^{(n+1)}(a)\,\frac{(x-a)^{n+1}}{(n+1)!} + f^{(n+2)}(a)\,\frac{(x-a)^{n+2}}{(n+2)!} + \ldots;$$

odtud plynou často užitečné odhady pro $R_{n+1}(x)$. Např. pro řadu $e^x = 1 + x : 1! + x^2 : 2! + {}$ $+ \ldots$ vyjde

$$R_{n+1}(x) = x^{n+1} : (n+1)! + x^{n+2} : (n+2)! + \ldots$$

Pro $x = 1$ a pro $x = -1$ dostáváme odhady

$$\frac{1}{(n+1)!} < R_{n+1}(1) < \frac{1}{(n+1)!}\left(1 + \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)^2} + \ldots\right) = \frac{1}{n!\,n};$$

$$\frac{1}{(n+1)!}\cdot\frac{n+1}{n+2} < (-1)^{n+1} R_{n+1}(-1) < \frac{1}{(n+1)!}$$

(řada se střídavými znaménky).

Nebo: je-li $0 < |m| < 1$, dostaneme pro zbytek v binomické řadě

$$(1+x)^m = 1 + \binom{m}{1}x + \ldots + \binom{m}{n}x^n + R_{n+1}(x) \quad \text{odhad}$$

$$|R_{n+1}(x)| \leqq |m|\,\frac{|x|^{n+1}}{1-|x|} \quad \text{pro } |x| < 1\,.$$

2. Binomické řady můžeme často výhodně užít k počítání odmocnin. Mám-li např. počítat $\sqrt{2}$, uvážím napřed, že 2 se přibližně rovná $\frac{49}{25} = (\frac{7}{5})^2$; tedy $\sqrt{2} = \frac{7}{5}\cdot\sqrt{\frac{50}{49}}$. Zde se již $(1 + \frac{1}{49})^{\frac{1}{2}}$ snadno počítá. Ale mocniny čísla 49 ve jmenovateli by byly nepohodlné; proto raději pišme $(\frac{50}{49})^{\frac{1}{2}} = (\frac{49}{50})^{-\frac{1}{2}} = (1 - \frac{1}{50})^{-\frac{1}{2}}$. Podobně vypočteme $\sqrt[3]{7}$; přibližná hodnota je $\frac{19}{10}$ a obdržíme $\sqrt[3]{7} = \frac{19}{10}\cdot\sqrt[3]{\frac{7000}{6859}}$; zde je $(\frac{6859}{7000})^{-\frac{1}{3}} = (1 - \frac{141}{7000})^{-\frac{1}{3}} = (1 - \frac{140}{7000})^{-\frac{1}{3}}(\frac{6859}{6860})^{-\frac{1}{3}} = {}$ $= (1 - \frac{2}{100})^{-\frac{1}{3}}\cdot(1 - \frac{1}{6860})^{-\frac{1}{3}}$; první činitel se snadno počítá, v druhém stačí jen několik málo členů k dosažení velké přesnosti. Vypočtěte takto $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{7}$ s chybou menší než 10^{-10}; k odhadu zbytku v binomické řadě užijte třeba cvičení 1.

3. Pro funkci $f(x) = (1+x)^{-1}$ a pro $0 < |x| < 1$ pišme Maclaurinův vzorec se zbytkem (13):

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + \frac{(-1)^{n+1}\,x^{n+1}}{(1+\Theta x)^{n+2}};$$

současně platí ovšem nekonečná řada

$$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - \ldots + (-1)^n x^n + (-1)^{n+1} x^{n+1} + {}$$
$$+ (-1)^{n+2} x^{n+2} + \ldots;$$

srovnáním obou vzorců dostaneme $\Theta = \dfrac{1}{x}\left((1+x)^{1/(n+2)} - 1\right)$. Vidíte zřetelně, jak Θ závisí na x, n; při pevném x je $\lim\limits_{n\to\infty} \Theta = 0$.

4. Budiž $f(x) = \sqrt[3]{x^{20}}$ pro každé x; pro $x \neq 0$ existují derivace všech řádů; pro $x = 0$ je $f(0) = f'(0) = \ldots = f^{(6)}(0) = 0$, kdežto $f^{(7)}(0)$ neexistuje. Lze tedy užít Maclaurinova vzorce pro $n = 0, 1, \ldots, 6$ (všimněte si cvičení 3, § 1), nikoliv však pro $n \geqq 7$. Např. pro $n = 6$ dává Maclaurinova věta se vzorcem (13) $\sqrt[3]{x^{20}} = \dfrac{20 . 17 . 14 . 11 . 8 . 5 . 2x^7}{3^7 . 7! \sqrt[3]{\Theta x}}$ pro $x \neq 0$, což je ovšem vzorec nemající žádné praktické důležitosti. Zde je Θ nezávislé na x:

$$\Theta = \left(\frac{20 . 17 . 14 . 11 . 8 . 5 . 2}{3^7 . 7!}\right)^3 .$$

§ 4. Počítání logaritmů. Rovnice

$$\lg(1 + x) = \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \ldots \tag{36}$$

platí podle věty 158 pro $-1 < x \leqq 1$. Píšeme-li zde $-x$ místo x, dostáváme rovnici

$$\lg(1 - x) = -\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} - \ldots, \tag{37}$$

platnou pro $-1 \leqq x < 1$. Pro $|x| < 1$ platí tedy rovnice (36) i (37); jejich odečtením obdržíme rovnici

$$\lg\frac{1 + x}{1 - x} = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \frac{x^7}{7} + \ldots\right) \text{pro} \quad |x| < 1 . \tag{38}$$

Rovnice (36), (37), (38) mohou sloužit k počítání logaritmů. Chci-li např. vypočíst lg 2, dosadím do (36) $x = 1$ a obdržím velmi pěkný vzorec $\lg 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \ldots$, který se však k numerickému počítání nehodí. Vezmu-li totiž prvních n členů řady, bude prostá hodnota chyby

$$\Delta_n = \frac{1}{n + 1} - \frac{1}{n + 2} + \frac{1}{n + 3} - \frac{1}{n + 4} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{(n + 1)(n + 2)} + \frac{1}{(n + 3)(n + 4)} + \frac{1}{(n + 5)(n + 6)} + \ldots ;$$

toto číslo je menší než

$$\frac{1}{n(n + 2)} + \frac{1}{(n + 2)(n + 4)} + \frac{1}{(n + 4)(n + 6)} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n + 2}\right) + \left(\frac{1}{n + 2} - \frac{1}{n + 4}\right) + \left(\frac{1}{n + 4} - \frac{1}{n + 6}\right) + \ldots\right) = \frac{1}{2n}$$

a je větší než

$$\frac{1}{(n+1)(n+3)} + \frac{1}{(n+3)(n+5)} + \ldots =$$

$$= \frac{1}{2}\left(\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+3}\right) + \left(\frac{1}{n+3} - \frac{1}{n+5}\right) + \ldots\right) = \frac{1}{2(n+1)}.$$

Tedy celkem $\frac{1}{2n} > \Delta_n > \frac{1}{2(n+1)}$. Vezmeme-li třeba $n = 1000$, bude Δ_n asi $\frac{1}{2000}$, což je chyba značně veliká. Obratem vyloženým v kap. IV, § 6, cvičení 2 bychom mohli sice chybu snížit asi na $\frac{1}{4000000}$, ale i to je ještě chyba značně veliká vzhledem k námaze, kterou vyžaduje výpočet tisíce členů.

Zkusme tedy vzorec (37), kam dosadíme $x = \frac{1}{2}$ (totéž bychom dostali z (36) dosazením $x = -\frac{1}{2}$); obdržíme $\lg \frac{1}{2}$ a změnou znamení dostaneme $\lg 2 = (\frac{1}{2})^1 + \frac{1}{2}\cdot(\frac{1}{2})^2 + \frac{1}{3}\cdot(\frac{1}{2})^3 + \frac{1}{4}\cdot(\frac{1}{2})^4 + \ldots$, což je řada, konvergující o něco málo rychleji než geometrická řada o kvocientu $\frac{1}{2}$. Zbytek po n-tém členu je větší než člen $(n+1)$-ní, tj. než $\frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ a menší než součet řady

$$\frac{1}{n+1}\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} + \left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} + \ldots\right) = \frac{1}{n+1}\left(\frac{1}{2}\right)^n,$$

což je už výsledek mnohem lepší než předešlý. Např. pro $n = 7$ leží zbytek mezi $\frac{1}{1024}$ a $\frac{1}{2048}$.

Ale ještě lepší výsledek dává vzorec (38); stanovme x tak, aby bylo $\frac{1+x}{1-x} = 2$, tj. $x = \frac{1}{3}$. Rovnice (38) dává pak

$$\lg 2 = 2\left(\left(\tfrac{1}{3}\right)^1 + \tfrac{1}{3}\left(\tfrac{1}{3}\right)^3 + \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{3}\right)^5 + \tfrac{1}{7}\left(\tfrac{1}{3}\right)^7 + \ldots\right); \tag{39}$$

řada konverguje o něco rychleji než geometrická řada o kvocientu $\frac{1}{9}$. To je už dobrá konvergence; budeme proto užívat k praktickému výpočtu řady (38), a to budeme počítat logaritmy čísel větších než 1 (logaritmy čísel kladných menších než 1 dostaneme potom z rovnice $\lg \frac{1}{z} = -\lg z$). Chci-li počítat z (38) $\lg z$, kde $z > 1$, stanovím x tak, aby bylo $\frac{1+x}{1-x} = z$, tj.

$$x = \frac{z-1}{z+1}, \tag{40}$$

takže $0 < x < 1$ (např. $x = \frac{1}{3}$ pro $z = 2$, jak jsme již zjistili). Odhadněme ještě pro $0 < x < 1$ zbytek r_n řady (38) po n-tém členu $\left(\text{tento } n\text{-tý člen je } 2\frac{x^{2n-1}}{2n-1}\right)$.

Zřejmě je $r_n > 2\dfrac{x^{2n+1}}{2n+1}$ a za druhé $r_n < \dfrac{2}{2n+1}(x^{2n+1} + x^{2n+3} + x^{2n+5} + \ldots)$ takže

$$(41) \qquad 2\frac{x^{2n+1}}{2n+1} < r_n < 2\frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{1}{1-x^2} \quad \text{pro} \quad 0 < x < 1\,.$$

Např. v řadě (39) je $x = \frac{1}{3}$ a zbytek po sedmém členu vyhovuje nerovnostem $\dfrac{2}{15}\,.$ $\cdot\,\dfrac{1}{3^{15}} < r_7 < \dfrac{2}{15}\cdot\dfrac{1}{3^{15}}\cdot\dfrac{9}{8}$, tedy $0 < r_7 < 1{,}05\,.\,10^{-8}$. Vypočtěme nyní $\lg 3$; je $3 = 2\,.\,\frac{3}{2}$; $\lg 3 = \lg 2 + \lg \frac{3}{2}$; ježto $\lg 2$ známe, stačí vypočíst $\lg \frac{3}{2}$. Pro $z = \frac{3}{2}$ nám z (40) vyjde $x = \frac{1}{5}$, a řada (38) konverguje již velmi dobře, totiž rychleji než geometrická řada o kvocientu $\frac{1}{25}$. Dále máme $\lg 4 = 2 \lg 2$; $\lg 5$ vypočteme z rovnice $\lg 5 = \lg 4 + \lg \frac{5}{4}$; pro $z = \frac{5}{4}$ nám z (40) vyjde $x = \frac{1}{9}$ a řada (38) konverguje již rychleji než řada geometrická o kvocientu $\frac{1}{81}$. Obecně: znám-li již logaritmus přirozeného čísla $k - 1 > 0$, dostanu $\lg k$ z rovnice $\lg k = \lg(k-1) + \lg \dfrac{k}{k-1}$. Přitom vypočteme $\lg \dfrac{k}{k-1}$ z rovnice (38), kde podle (40) klademe $x = \dfrac{z-1}{z+1}\left(z = \dfrac{k}{k-1}\right)$, tj. $x = \dfrac{1}{2k-1}$. Řada (38) konverguje o něco rychleji než geometrická řada o kvocientu $\dfrac{1}{(2k-1)^2}$, tedy velmi rychle, je-li k jen trochu veliké.

Jako příklad si položíme úkol sestrojit dekadické (Briggsovy) logaritmy celých čísel od 1000 do 11009 s chybou menší než $\frac{1}{2}\,.\,10^{-5}$, tj. vypočíst čísla $\log_{10} k = \dfrac{\lg k}{\lg 10}$ pro všechna celá k od 1000 do 11009 s chybou menší než $\frac{1}{2}\,.\,10^{-5}$;[16]) v podstatě tedy jde o sestrojení str. 4-23 ve Valouchových logaritmických tabulkách (vydání z r. 1958). Ze známé nám přibližné hodnoty čísla e nebo z věty 157 ihned zjistíte, že $e^2 < 10 < e^3$, takže $2 < \lg 10 < 3$. Dále je pro naše čísla $k < 2\,.\,10^4 < e^{13}$, takže $\lg k < 13$. Napřed rozřešme otázku: s jakou přesností musíme vypočíst $\lg k$, $\lg 10$, abychom měli $\log_{10} k$ s chybou menší než $\frac{1}{2}\,.\,10^{-5}$? Představme si, že najdeme čísla a, b tak, že $a - \delta < \lg 10 < a + \delta$, $b - \Delta < \lg k < b + \Delta$, přičemž δ, Δ jsou kladná čísla;[17]) předpokládejme, že je $\delta < \frac{1}{2}$, $\Delta < 1$; tedy (ježto $2 < \lg 10 < 3$) $a > \lg 10 -$

[16]) Jde mně ovšem o vyjádření logaritmů konečnými desetinnými zlomky; ke každému uvedenému k máme tedy nalézt konečný desetinný zlomek, jenž se od čísla $\log_{10} k$ liší o méně než $\frac{1}{2}\,.\,10^{-5}$.

[17]) a, b jsou tedy jakési „přibližné hodnoty“ pro $\lg 10$, $\lg k$; příslušné chyby jsou menší než δ, Δ.

$-\delta > \frac{3}{2}, a - \delta > 1,\ b < \lg k + \Delta < 14$. Potom je (počítám zatím jen zcela zhruba)

$$\frac{\lg k}{\lg 10} - \frac{b}{a} < \frac{b + \Delta}{a - \delta} - \frac{b}{a} = \frac{a\Delta + b\delta}{a(a - \delta)} < \Delta + 14\delta\,,$$

$$\frac{b}{a} - \frac{\lg k}{\lg 10} < \frac{b}{a} - \frac{b - \Delta}{a + \delta} = \frac{a\Delta + b\delta}{a(a + \delta)} < \Delta + 14\delta\,;$$

nahradím-li tedy číslo $\frac{\lg k}{\lg 10}$ číslem $\frac{b}{a}$, dopustím se chyby menší než $\Delta + 14\delta$. Bude-li např. $\Delta < \frac{1}{8} \cdot 10^{-5}$, $\delta < \frac{1}{2} \cdot 10^{-7}$, bude $\Delta + 14\delta < \frac{1}{4} \cdot 10^{-5}$, takže číslo $b : a$ bude se lišit od $\log_{10} k$ o méně než $\frac{1}{4} \cdot 10^{-5}$; provedu-li pak ještě dělení $b : a$ s chybou menší než $\frac{1}{4} \cdot 10^{-5}$, dostanu $\log_{10} k$ vyjádřen konečným desetinným zlomkem s chybou menší než $\frac{1}{2} \cdot 10^{-5}$.

Máme tedy tyto dva úkoly:

Předně máme vyjádřit $\lg 10 = 3 \lg 2 + \lg \frac{5}{4}$ s chybou menší než $\frac{1}{2} \cdot 10^{-7}$, což je snadné. Za druhé máme vyjádřit $\lg k$ pro $k = 1000, 1001, 1002, \ldots, 11009$ s chybou menší než $\frac{1}{8} \cdot 10^{-5}$. K tomu cílu stanovím napřed $\lg 1000 = 3 \lg 10$ s chybou menší než $\frac{3}{2} \cdot 10^{-7}$, což dovedu již učinit. Potom vypočtu postupně $\lg \frac{1001}{1000}$, $\lg \frac{1002}{1000} = \lg \frac{1001}{1000} + \lg \frac{1002}{1001}$, $\lg \frac{1003}{1000} = \lg \frac{1002}{1000} + \lg \frac{1003}{1002}$ atd. Ježto vykonám celkem 10009 kroků a ježto se chyby sčítají, vypočtu každé číslo $\lg \frac{k}{k - 1}$ s chybou menší než 10^{-10}; potom bude $\lg \frac{k}{1000}$ vypočten s chybou menší než $10^{-10} \cdot 10009$ a tedy číslo $\lg k = \lg 1000 + \lg \frac{k}{1000}$ bude vypočteno s chybou menší než $\frac{3}{2} \cdot 10^{-7} + 11 \cdot 10^{-7} = 125 \cdot 10^{-8} = \frac{1}{8} \cdot 10^{-5}$. K počítání čísel $\lg \frac{k}{k - 1}$ užijeme, jak jsme již řekli, vzorce (38), kde klademe $x = \frac{1}{2k - 1}$. Ježto $2k - 1 > 2000$ (neboť $k \geqq 1001$), je podle (41)

$$0 < r_1 < \frac{2}{3} \frac{1}{8 \times 10^9} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{4} \cdot 10^{-6}} < \frac{0{,}7}{8} \cdot 10^{-9} < 0{,}9 \times 10^{-10}.^{18})$$

Počítám-li tedy $\lg \frac{k}{k - 1}$ podle přibližného vzorce

$$\lg \frac{k}{k - 1} = \frac{2}{2k - 1}\,,$$

[18]) Je tedy vždy $r_1 > 0$. Tato chyba se ovšem ještě skládá s chybou vznikající při přibližném dělení $2 : (2k - 1)$ (viz počátek následující stránky).

dopustím se chyby menší než $0{,}9 \,.\, 10^{-10}$; provedu-li ještě dělení $2 : (2k - 1)$ s chybou menší než $0{,}1 \,.\, 10^{-10}$, dostanu konečný desetinný zlomek, jenž se od $\lg \dfrac{k}{k-1}$ liší o méně než 10^{-10}.

Poznámka 1. Postupem právě naznačeným bychom dostali o něco méně než je ve Valouchových tabulkách. Kdybychom např. zjistili, že číslo 3,485726 vyjadřuje dekadický logaritmus jistého čísla k s chybou menší než $\frac{1}{2} \,.\, 10^{-5}$ a kdybychom chtěli zaokrouhlit na pět desetinných míst, nevěděli bychom, zda máme vzít 3,48572 či 3,48573. Vzali bychom ovšem raději 3,48573, načež by chyba byla jistě menší než 10^{-5}. Krátce řečeno: po zaokrouhlení na pět desetinných míst by se naše výsledky mohly lišit od Valouchových tabulek (v nichž je zaokrouhlení na základě přesnějších výpočtů správně provedeno) nejvýše o 10^{-5}.

Poznámka 2. Při skutečném sestrojování logaritmických tabulek se ovšem postupuje trochu jinak: jde o více než 10 000 výpočtů a proto je vítán každý obrat umožňující sebemenší úsporu času při jednotlivých krocích; za druhé jsou nutné ještě kontrolní výpočty, aby se zjistilo, zda se někde neudělala chyba. Nepouštím se do těchto věcí; šlo mně jen o to, abych ukázal užitečnost řady (38) pro číselný výpočet logaritmů. Zároveň chápe čtenář význam přirozeného logaritmu: řady (36), (37), (38) dávají *přirozené* logaritmy; logaritmy o jiném základu a se počítají teprve z přirozených logaritmů podle rovnice $\log_a x = \dfrac{\lg x}{\lg a}$.

Cvičení

1. Vypočtěte lg 2 s chybou menší než 10^{-6} jednak z řady (37) pro $x = \frac{1}{2}$, jednak z řady (38) pro $x = \frac{1}{3}$; srovnejte námahu v obou případech vynaloženou.

2. Způsobem v textu vyloženým vypočtěte dekadické logaritmy čísel 1001, 1002, ..., 1005 s chybou menší než $\frac{1}{2} \,.\, 10^{-5}$ a srovnejte s Valouchovými tabulkami (ježto provádíte jen 5 kroků a ne 10009, stačí při jednotlivých krocích menší přesnost).

3. Zjistili jsme již, že pro $k > 1$ je

$$\lg \frac{k}{k-1} = 2(z + \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5 + \ldots), \quad \text{kde} \quad z = \frac{1}{2k-1}.$$

Píšeme-li zde k^2 místo k, obdržíme

$$\lg \frac{k^2}{k^2-1} = 2(z + \tfrac{1}{3}z^3 + \tfrac{1}{5}z^5 + \ldots), \quad \text{kde} \quad z = \frac{1}{2k^2-1};$$

řada vpravo konverguje nesmírně rychle, je-li k jen trochu velké; poslední vzorec dovoluje počítat $\lg(k+1)$, znáte-li $\lg(k-1)$, $\lg k$.

§ 5. Řada pro arctg x; výpočet čísla π. Jsou-li $\alpha, A_0, A_1, A_2, \ldots$ daná čísla, x proměnná, nazýváme řadu $A_0 + A_1(x - \alpha) + A_2(x - \alpha)^2 + A_3(x - \alpha)^3 + \ldots$ *mocninnou řadou o středu* α. Tak řada Taylorova v (22) je mocninnou řadou o středu a. V § 3 se nám podařilo vyjádřit funkce e^x, $\sin x$, $\cos x$, $\lg(1 + x)$, $(1 + x)^m$ mocninnými řadami o středu 0; postupovali jsme tak, že jsme pro příslušnou funkci napsali Maclaurinův vzorec (11) a dokázali, že $\lim\limits_{n\to\infty} R_{n+1} = 0$ (u posledních dvou funkcí bylo x vázáno jistými podmínkami). Kdybychom se o podobný postup pokusili u funkce $\operatorname{arctg} x$, narazili bychom na obtíže při počítání jejích postupných derivací (již třetí derivace vyjde dosti složitá). Tuto obtíž lze obejít několika způsoby; jeden z nich zvolíme.

Funkce $\operatorname{arctg} x$ má derivaci $\dfrac{1}{1 + x^2}$; pro $|x| < 1$ je

(42) $$\frac{1}{1 + x^2} = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \ldots$$

(geometrická řada o kvocientu $- x^2$). Součet $s_n(x)$ prvních n členů řady (42) je pro *každé x*

$$s_n(x) = 1 - x^2 + x^4 - \ldots + (-1)^{n-1} x^{2n-2} = \frac{1 + (-1)^{n-1} x^{2n}}{1 + x^2}$$

(jak víte a jak se ostatně ihned přesvědčíte, násobíte-li obě strany číslem $1 + x^2$). Položíme-li tedy

(43) $$\frac{1}{1 + x^2} = s_n(x) + r_n(x),$$

je pro každé x

(44) $$r_n(x) = \frac{(-1)^n x^{2n}}{1 + x^2}.$$

Sestrojme nyní funkci, jež má derivaci $s_n(x)$; takovou funkcí je, jak se derivováním ihned přesvědčíte,

(45) $$\sigma_n(x) = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \ldots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n - 1}.$$

Položíme-li tedy

(46) $$\operatorname{arctg} x = \sigma_n(x) + \varrho_n(x),$$

bude pro každé x podle (43)

(47) $$\varrho_n'(x) = \frac{1}{1 + x^2} - s_n(x) = r_n(x).$$

Funkce $\sigma_n(x)$ je n-tý částečný součet řady $\dfrac{x}{1} - \dfrac{x^3}{3} + \dfrac{x^5}{5} - \dfrac{x^7}{7} + \ldots$; podaří-li se nám pro nějaké x dokázat, že $\lim_{n\to\infty} \varrho_n(x) = 0$, bude podle (46) $\operatorname{arctg} x = \lim_{n\to\infty} \sigma_n(x)$, tj. bude pro onu hodnotu x platit rovnice

$$\operatorname{arctg} x = \frac{x}{1} - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \dots \tag{48}$$

Pro $x = 0$ tato rovnice zřejmě platí; pro $|x| > 1$ neplatí, ježto řada vpravo je divergentní (neboť

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{2n-1}{x^{2n-1}} \right| = x^2 \lim_{n\to\infty} \frac{2n-1}{2n+1} = x^2 > 1).$$

Dále stačí, omezíme-li se na kladná x (změní-li totiž x znamení, změní každý člen v (48) vlevo i vpravo znamení). Budiž tedy $0 < x \leqq 1$. Ježto funkce ϱ_n má podle (47) derivaci v intervalu $(-\infty, +\infty)$, je v tomto intervalu funkce ϱ_n spojitá; věta o přírůstku funkce dává tedy (ježto podle (46) je $\varrho_n(0) = 0$)

$$\varrho_n(x) = \varrho_n(x) - \varrho_n(0) = x\,\varrho_n'(\Theta x) = x\,r_n(\Theta x)$$

(viz (47)); podle (44) je tedy

$$\varrho_n(x) = \frac{(-1)^n x(\Theta x)^{2n}}{1 + \Theta^2 x^2}, \quad 0 < \Theta < 1. \tag{49}$$

Je-li $0 < x < 1$, je $|\varrho_n(x)| < x^{2n+1}$, tedy $\lim_{n\to\infty} \varrho_n(x) = 0$, takže (48) platí.

Zbývá případ $x = 1$. Zde je nutné varovat před tímto omylem: z (49) plyne $|\varrho_n(1)| = \dfrac{\Theta^{2n}}{1+\Theta^2}$, kde $0 < \Theta < 1$. Kdyby Θ nezáviselo na n, bylo by $\lim_{n\to\infty} \Theta^{2n} = 0$ a tedy též $\lim_{n\to\infty} \varrho_n(1) = 0$. Ale Θ může záviset na n, neboť pro každé n aplikujeme větu o přírůstku funkce na *jinou* funkci ϱ_n (kdyby např. bylo $\Theta = e^{-1/n}$, bylo by $\lim_{n\to\infty} \Theta^{2n} = \lim_{n\to\infty} e^{-2} = e^{-2}$; my ovšem zatím vůbec nevíme, jak Θ závisí na n). Musíme tedy volit trochu jinou cestu.

Budiž ε libovolné kladné číslo menší než 1. Užijeme-li dvakráte věty o přírůstku funkce, obdržíme pro každé n rovnici

$$\begin{aligned} \varrho_n(1) &= (\varrho_n(1) - \varrho_n(1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon)) + (\varrho_n(1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon) - \varrho_n(0)) = \\ &= \tfrac{1}{2}\varepsilon\, r_n(\xi_1) + (1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon)\, r_n(\xi_2), \quad \text{kde} \quad 0 < \xi_2 < 1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon < \xi_1 < 1. \end{aligned} \tag{50}$$

Podle (44) je $|r_n(\xi_2)| < \xi_2^{2n} < (1 - \frac{1}{2}\varepsilon)^{2n}$, $|r_n(\xi_1)| < \xi_1^{2n} < 1$. Podle (50) je tedy

$$|\varrho_n(1)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + (1 - \tfrac{1}{2}\varepsilon)^{2n+1} \tag{51}$$

pro každé n. Ježto $\lim_{n\to\infty} (1 - \frac{1}{2}\varepsilon)^{2n+1} = 0$, existuje n_0 tak, že pro $n > n_0$ je $(1 -$

$-\frac{1}{2}\varepsilon)^{2n+1} < \frac{1}{2}\varepsilon$. Pro $n > n_0$ je tedy podle (51) $|\varrho_n(1)| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$. Tedy je $\lim_{n\to\infty} \varrho_n(1) = 0$ a rovnice (48) platí i pro $x = 1$ (a tedy též pro $x = -1$). Tedy celkem:

Věta 160. *Rovnice* (48) *platí pro* $|x| \leqq 1$; *pro* $|x| > 1$ *je řada v* (48) *divergentní.*
Pro $x = 1$ dostáváme z (48) toto pěkné vyjádření čísla π:

$$\tag{52} \tfrac{1}{4}\pi = 1 - \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{5} - \tfrac{1}{7} + \tfrac{1}{9} - \tfrac{1}{11} + \dots,$$

jež se však k numerickému počítání nehodí. Trochu lepší konvergenci (o něco rychlejší než u geometrické řady s kvocientem $\frac{1}{3}$) dostáváme pro $x = \frac{1}{3}\sqrt{3}$:

$$\operatorname{arctg} \tfrac{1}{3}\sqrt{3} = \tfrac{1}{6}\pi = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \tfrac{1}{3}\cdot\left(\tfrac{1}{3}\right)^1 + \tfrac{1}{5}\left(\tfrac{1}{3}\right)^2 - \tfrac{1}{7}\left(\tfrac{1}{3}\right)^3 + \dots\right).$$

Ale daleko výhodnější řadu dostaneme tímto obratem: Položme $\operatorname{arctg} \frac{1}{5} = \alpha$, takže $\operatorname{tg}\alpha = \frac{1}{5}$, $0 < \alpha < \frac{1}{4}\pi$; $\operatorname{tg} 2\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg}\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2\alpha} = \frac{10}{24} = \frac{5}{12}$, takže opět $0 < 2\alpha < \frac{1}{4}\pi$; $\operatorname{tg} 4\alpha = \dfrac{2\operatorname{tg} 2\alpha}{1 - \operatorname{tg}^2 2\alpha} = \frac{120}{119} > 1$, tedy $\frac{1}{4}\pi < 4\alpha < \frac{1}{2}\pi$. Ježto se $\operatorname{tg} 4\alpha$ málo liší od 1, bude se 4α asi málo lišit od $\frac{1}{4}\pi$; položme proto $\beta = 4\alpha - \frac{1}{4}\pi$, takže $0 < \beta < \frac{1}{4}\pi$,

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{\operatorname{tg} 4\alpha - \operatorname{tg}\frac{1}{4}\pi}{1 + \operatorname{tg} 4\alpha \operatorname{tg}\frac{1}{4}\pi} = \frac{1}{239}, \quad \beta = \operatorname{arctg}\frac{1}{239}.$$

Tedy $\frac{1}{4}\pi = 4\alpha - \beta = 4 \operatorname{arctg}\frac{1}{5} - \operatorname{arctg}\frac{1}{239}$ a řada (48) pro $x = \frac{1}{5}$, $x = \frac{1}{239}$ velmi rychle konverguje (rychleji než geometrická řada o kvocientu $1 : 25$, popř. $1 : 239^2$).

Cvičení

1. Vypočtěte π s chybou menší než 10^{-10}.

§ 6. Řada pro arcsin *x*. Užijeme podobného postupu jako pro $\operatorname{arctg} x$, takže mohu zajisté postupovat trochu rychleji. V intervalu $\langle -1, +1\rangle$ je $\arcsin x$ spojitá a má ve vnitřních bodech tohoto intervalu derivaci $(1 - x^2)^{-\frac{1}{2}}$. Binomická řada (35) dává pro $|t| < 1$

$$\tag{53} (1 + t)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{\infty} t^k \binom{-\frac{1}{2}}{k} = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_k t^k,$$

kde

$$a_0 = 1, \quad a_k = \frac{1.3.5\dots(2k-1)}{2.4.6\dots 2k} \text{ pro } k > 0.$$

Klademe-li v (53) $t = -x^2$, máme pro $|x| < 1$

$$\tag{54} (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} = s_n(x) + r_n(x),$$

kde

(55) $$s_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^{2k}, \quad r_n(x) = \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k x^{2k}.$$

Položme

(55a) $$\sigma_n(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{x^{2k+1}}{2k+1},$$

takže $\sigma_n'(x) = s_n(x)$ pro každé x, a definujme funkci $\varrho_n(x)$ pro $|x| \leqq 1$ rovnicí

(56) $$\arcsin x = \sigma_n(x) + \varrho_n(x) \quad (\text{tedy } \varrho_n(0) = 0).$$

Funkce $\varrho_n(x)$ je tedy spojitá v intervalu $\langle -1, +1\rangle$ a má v každém vnitřním bodě tohoto intervalu derivaci

$$\varrho_n'(x) = (\arcsin x)' - (\sigma_n(x))' = (1 - x^2)^{-\frac{1}{2}} - s_n(x) = r_n(x)$$

(viz (54)). Věta o přírůstku funkce (věta 133) dává tedy pro $0 < |x| < 1$

(57) $$\varrho_n(x) = \varrho_n(x) - \varrho_n(0) = x\, r_n(\Theta x), \quad 0 < \Theta < 1.$$

Ježto zřejmě $0 < a_k \leqq 1$, je podle (57), (55)

$$|\varrho_n(x)| = |x \sum_{k=n+1}^{\infty} a_k(\Theta x)^{2k}| < \sum_{k=n+1}^{\infty} |x|^{2k+1} = \frac{|x|^{2n+3}}{1 - |x|^2}$$

pro $0 < |x| < 1$. Pro $|x| < 1$ je tedy $\lim\limits_{n\to\infty} \varrho_n(x) = 0$ (pro $x = 0$ je to podle (56) samozřejmé), tedy (viz (56)) $\arcsin x = \lim\limits_{n\to\infty} \sigma_n(x)$, tj.

(58) $$\arcsin x = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} =$$
$$= \frac{x}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x^3}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{x^5}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{x^7}{7} + \ldots$$

pro $|x| < 1$. Pro $|x| > 1$ je řada v (58) podle d'Alembertova kritéria divergentní, neboť

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)(2n-1)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n-2)\, 2n} \cdot \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \cdot \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \ldots (2n-2)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \ldots (2n-3)} \cdot \frac{2n-1}{x^{2n-1}} \right| =$$
$$= \lim_{n\to\infty} \frac{(2n-1)^2}{2n(2n+1)} x^2 = x^2 > 1.$$

Zbývají hodnoty $x = 1$, $x = -1$. Ježto jsme definovali $\sigma_n(x)$ pro *každé* x rovnicí (55a),[19]) je $\sigma_n(x)$ mnohočlen a tedy, pro každou hodnotu n,

(59) $$\lim_{x\to 1-} \sigma_n(x) = \sigma_n(1).$$

[19]) $\sigma_n(x)$ je součet prvních $n + 1$ členů řady (58).

Ježto členové řady (58) jsou pro $x > 0$ kladná čísla, je

$$\sigma_1(x) < \sigma_2(x) < \sigma_3(x) < \ldots \text{ pro } x > 0 .$$

Pro $0 < x < 1$ se součet celé řady (58) rovná $\arcsin x < \frac{1}{2}\pi$, tedy tím spíše $\sigma_n(x) < \frac{1}{2}\pi$ pro každé n a každé x intervalu $(0, 1)$. Podle (59) je tedy též $\sigma_n(1) \leqq \frac{1}{2}\pi$ pro každé n. Posloupnost $\sigma_1(1), \sigma_2(1), \sigma_3(1), \ldots$ je tedy rostoucí a shora omezená a má tedy vlastní limitu $\lim_{n\to\infty} \sigma_n(1) = \lambda$.[20]) Ježto $\sigma_n(1) \leqq \frac{1}{2}\pi$ pro každé n, je (viz kap. II, § 2, poznámka 4) též $\lambda \leqq \frac{1}{2}\pi$. Budiž $\varepsilon > 0$; potom existuje $x(0 < x < 1)$ tak, že $\arcsin x > \frac{1}{2}\pi - \varepsilon$. Pro tuto hodnotu x je tedy součet řady (58) větší než $\frac{1}{2}\pi - \varepsilon$. Nahradím-li v řadě (58) toto číslo x číslem 1, zvětší se každý člen a tedy i součet této řady, takže $\lambda > \frac{1}{2}\pi - \varepsilon$. Číslo λ má tedy tu vlastnost, že pro každé $\varepsilon > 0$ je $\frac{1}{2}\pi - \varepsilon < \lambda \leqq \frac{1}{2}\pi$; tedy je nutně $\lambda = \frac{1}{2}\pi$; řada v (58) je tedy konvergentní i pro $x = 1$ a má potom součet $\frac{1}{2}\pi = \arcsin 1$, takže rovnice (58) platí i pro $x = 1$. Změnou znamení zjistíme, že (58) platí i pro $x = -1$. Tedy celkem:

Věta 161. *Rovnice* (58) *platí pro* $|x| \leqq 1$. *Pro* $|x| > 1$ *je řada vpravo divergentní.*

Pro $x = 1$ dostáváme z (58) pěkný, ale pro numerické počítání nevhodný vzorec

$$\frac{\pi}{2} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{1}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{7} + \ldots$$

Cvičení

1. Z rovnice (58) pro $x = \frac{1}{2}$ vypočtěte π s chybou menší než 10^{-4}.

§ 7. Doplnění teorie funkcí goniometrických[21]). V kapitole VI jsme zavedli funkce $\sin x$, $\cos x$ takto: bez důkazu jsme přijali za správné „čtyři základní vlastnosti" těchto funkcí; z těchto základních vlastností jsme pak — způsobem již bezvadným — dokázali řadu dalších vět týkajících se přímo nebo nepřímo funkcí $\sin x$, $\cos x$. Tím jsme tedy vlastně dokázali toto: jestliže dvě funkce — jež nazvu $\sin x$, $\cos x$ — mají čtyři základní vlastnosti z kapitoly VI, jsou správné veškeré věty, které jsme dosud odvodili; speciálně také věta 156, podle níž je pro všechna x

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots, \quad \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \ldots \tag{60}$$

Tedy: vyhovují-li nějaké dvě funkce čtyřem základním vlastnostem z kap. VI, jsou tyto funkce nutně pro všechna x dány řadami (60). Ukážeme nyní naopak, že rovnice (60) definují pro všechna x dvě funkce $\sin x$, $\cos x$, jež skutečně mají ony čtyři základní vlastnosti. Tím bude tedy dokázána věta:

[20]) λ je tedy součet řady (58) pro $x = 1$.

[21]) Doporučuji čtenáři, aby si znovu přečetl § 1 v kap. VI.

Věta 162. *Existuje jedna a jen jedna dvojice funkcí — označme ji* $\sin x$, $\cos x$ — *jež má čtyři základní vlastnosti z kap. VI,* § 1. *Tato dvojice funkcí je pro všechna* x *definována rovnicemi* (60).

Až tuto větu dokážeme, ocitneme se zase na pevné půdě: tím budou také přesně dokázány všechny dosud odvozené věty, v nichž se vyskytuje $\sin x$, $\cos x$, číslo π (zavedené ve 3. základní vlastnosti) a funkce z nich odvozené, tj. $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{cotg} x$, $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arccotg} x$.

Důkaz (věty 162). Řady (60) jsou konvergentní nejenom pro $x = 0$ (což je zřejmé), nýbrž pro každé x (podle d'Alembertova kritéria); neboť pro $x \neq 0$ je

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{x^{2n-1}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{2n(2n+1)} = 0 < 1\,,$$

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{x^{2n}}{(2n)!} \cdot \frac{(2n-2)!}{x^{2n-2}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{x^2}{(2n-1)\,2n} = 0 < 1\,.$$

Funkce $\sin x$, $\cos x$, definované rovnicemi (60), jsou tedy definovány pro všechna x a *mají tedy 1. základní vlastnost.*

Dokážeme nyní, že pro všechna x je

(61)
$$(\sin x)' = \cos x\,, \quad (\cos x)' = -\sin x$$

(znaky $\sin x$, $\cos x$ znamenají nyní ovšem stále součet první a druhé řady v (60)). Pro libovolné x a pro $h \neq 0$ je podle (60)

(62)
$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} - \cos x = \left(\frac{(x+h) - x}{h} - 1\right) - \left(\frac{(x+h)^3 - x^3}{3!\,h} - \frac{x^2}{2!}\right) + \left(\frac{(x+h)^5 - x^5}{5!\,h} - \frac{x^4}{4!}\right) - \dots;$$

(63)
$$\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} + \sin x = \frac{1-1}{h} - \left(\frac{(x+h)^2 - x^2}{2!\,h} - \frac{x}{1!}\right) + \left(\frac{(x+h)^4 - x^4}{4!\,h} - \frac{x^3}{3!}\right) - \left(\frac{(x+h)^6 - x^6}{6!\,h} - \frac{x^5}{5!}\right) + \dots$$

První člen v (62), (63) vpravo je nula; ostatní členy mají až na znamení tvar

(64)
$$\frac{(x+h)^n - x^n}{n!\,h} - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\,, \quad n \text{ celé}, \quad n > 1.\text{[22]}$$

Podle věty o přírůstku funkce lze výraz (64) psát ve tvaru

(65)
$$\frac{\xi^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} \ (\xi \text{ leží mezi } x,\ x+h)\,.$$

[22]) V rovnici (62) scházejí členy se sudým n, v rovnici (63) členy s lichým n.

Ještě jedno použití věty o přírůstku funkce dává výrazu (65) tvar $(\xi - x) . \eta^{n-2} . : (n-2)!$,[23]) kde η leží mezi x, ξ, tedy mezi $x, x+h$; lze tedy psát $\eta = x + \Theta h$, $0 < \Theta < 1$. Pro $0 < |h| < 1$ je tedy $|\eta| \leqq |x| + |\Theta h| < |x| + 1$. Dále je $|\xi - x| < |h|$, takže pro celé $n > 1$ a pro $0 < |h| < 1$ je

$$\left|\frac{(x+h)^n - x^n}{n!\,h} - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!}\right| = \frac{|\xi - x|}{(n-2)!}\,|\eta|^{n-2} < |h| \,.\, \frac{(|x|+1)^{n-2}}{(n-2)!}\,.$$

Prostá hodnota pravé strany rovnice (62), (63) je tedy pro $0 < |h| < 1$ menší než[24])

$$|h| \,.\, \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(|x|+1)^{n-2}}{(n-2)!} = |h| \,.\, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(|x|+1)^k}{k!} = |h| e^{|x|+1}$$

(podle věty 157). Tento výraz má však (při daném x) v bodě $h = 0$ limitu rovnou nule, takže podle (62), (63) je pro každé x

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} - \cos x\right) = 0\,,$$

$$\lim_{h \to 0} \left(\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} + \sin x\right) = 0\,,$$

čímž je (61) dokázáno. Ježto podle (60) je $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, plyne z (61)

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{\sin x - \sin 0}{x} = \left(\frac{\mathrm{d} \sin x}{\mathrm{d}x}\right)_{x=0} = \cos 0 = 1\,;$$

tím je dokázána též čtvrtá základní vlastnost.

Z (61) plyne

$$(\sin^2 x + \cos^2 x)' = 2 \sin x \,.\, \cos x + 2 \cos x \,.\, (-\sin x) = 0$$

pro každé x; tedy je funkce $\sin^2 x + \cos^2 x$ konstantní v intervalu $(-\infty, +\infty)$, ježto tato funkce má pro $x = 0$ hodnotu 1, má tuto hodnotu stále, tj.

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \quad \text{pro všechna } x\,. \tag{66}$$

Budiž a libovolné číslo a sestrojme tuto funkci:

$$\varphi(x) = (\sin(x+a) - \sin x \cos a - \sin a \cos x)^2 +$$
$$+ (\cos(x+a) - \cos x \cos a + \sin x \sin a)^2\,.$$

Podle (61) a podle obecných vět o počítání derivace je pro každé x

$$\varphi'(x) = 2(\sin(x+a) - \sin x \cos a - \sin a \cos x)(\cos(x+a) -$$
$$- \cos x \cos a + \sin a \sin x) +$$
$$+ 2(\cos(x+a) - \cos x \cos a + \sin x \sin a)(-\sin(x+a) +$$
$$+ \sin x \cos a + \cos x \sin a)\,,$$

[23]) 0! znamená ovšem jedničku.

[24]) V druhém součtu píši k místo $n - 2$.

takže $\varphi'(x) = 0$ (neboť druhá závorka se rovná třetí, první se až na znamení rovná čtvrté). Tedy je $\varphi(x)$ konstantní v intervalu $(-\infty, +\infty)$. Ježto $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$, je $\varphi(0) = (\sin a - \sin a)^2 + (\cos a - \cos a)^2 = 0$, tedy $\varphi(x) = 0$ pro všechna x. Ale $\varphi(x)$ je součet dvou čtverců: $\varphi(x) = A^2 + B^2 = 0$, a tedy $A = 0$, $B = 0$ (jinak by bylo $\varphi(x) > 0$). Pro každé x a každé a je tedy

$$\sin(x + a) - \sin x \cos a - \sin a \cos x = 0,$$

$$\cos(x + a) - \cos x \cos a + \sin x \sin a = 0;$$

mimoto plyne z (60) ihned $\sin(-x) = -\sin x$, $\cos(-x) = \cos x$ pro každé x; *tím je dokázána i druhá základní vlastnost.*

Pišme

$$\sin x = \frac{x}{1!}\left(1 - \frac{x^2}{2.3}\right) + \frac{x^5}{5!}\left(1 - \frac{x^2}{6.7}\right) + \frac{x^9}{9!}\left(1 - \frac{x^2}{10.11}\right) + \ldots;$$

je-li $0 < x < 2$, je $x^2 < 4$ a tedy jsou všechny závorky kladné, takže $\sin x > 0$ pro $0 < x < 2$. Ježto funkce $\sin x$, $\cos x$ jsou spojité v intervalu $(-\infty, +\infty)$,[25]) vidíme: funkce $\cos x$ je spojitá v intervalu $\langle 0, 2\rangle$ a má zápornou derivaci $-\sin x$ v každém vnitřním bodě tohoto intervalu; podle věty 135 *je tedy* $\cos x$ *funkce klesající v intervalu* $\langle 0, 2\rangle$. Pišme

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!}\left(1 - \frac{x^2}{3.4}\right) - \frac{x^6}{6!}\left(1 - \frac{x^2}{7.8}\right) - \frac{x^{10}}{10!}\left(1 - \frac{x^2}{11.12}\right) - \ldots;$$

pro $x = 2$ jsou všechny závorky kladné, tedy je

$$\cos 2 < 1 - \frac{4}{2!}\left(1 - \frac{4}{3.4}\right) = -\frac{1}{3}.$$

Ježto $\cos 0 = 1 > 0$, $\cos 2 < 0$, existuje v intervalu $(0, 2)$ podle věty 129 číslo α tak, že $\cos \alpha = 0$ $(0 < \alpha < 2)$:[26]) Ježto $\cos 0 = 1$, $\cos \alpha = 0$ a ježto $\cos x$ je klesající v intervalu $\langle 0, \alpha\rangle$, je

$$(\sin x)' = \cos x > 0 \quad \text{pro} \quad 0 < x < \alpha. \tag{67}$$

Podle věty 135 je tedy funkce $\sin x$ rostoucí v intervalu $\langle 0, \alpha\rangle$; ježto $\sin 0 = 0$, je $\sin \alpha > 0$; ježto $\cos \alpha = 0$, je podle (66) $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = \sin^2 \alpha = 1$, tedy $\sin \alpha = 1$ (nikoliv $\sin \alpha = -1$). Existuje tedy vskutku číslo $\alpha > 0$ takové, že $\sin x$ je rostoucí v intervalu $\langle 0, \alpha\rangle$ a že $\sin \alpha = 1$; mimoto je $\sin 0 = 0$. *Tím je dokázána i třetí základní vlastnost* (číslo $\frac{1}{2}\pi$ je právě toto číslo α, takže π je definováno rovnicí $\pi = 2\alpha$).[27])

[25]) Neboť mají podle (61) derivaci pro každé x.

[26]) Ježto je $\cos x$ klesající v $\langle 0, 2\rangle$, existuje v tomto intervalu *pouze* jedno takové číslo α; ale to nás nezajímá.

[27]) Poznamenejme, že číslo π je třetí základní vlastností úplně určeno: funkce $\sin x$ je rostoucí v intervalu $\langle 0, \frac{1}{2}\pi\rangle$ a dosáhne hodnoty 1 pro $x = \frac{1}{2}\pi$. Číslo $\frac{1}{2}\pi$ je tedy nejmenší ze všech kladných čísel x, pro něž je $\sin x = 1$.

Poznámka 1. Větou 162 je teorie goniometrických a cyklometrických funkcí postavena na pevný základ. Čtenáři by ovšem bylo asi milé, kdybychom zjistili, že číslo π a funkce $\sin x$, $\cos x$ (definované rovnicemi (60)) mají význam běžný z geometrie. Ježto však tento význam je založen na pojmu „délka oblouku", musíme s tím posečkat tak dlouho, až pojem délky oblouku zavedeme.

Poznámka 2. Čtyři základní vlastnosti úplně charakterizují funkce $\sin x$, $\cos x$: každá dvojice funkcí mající tyto vlastnosti je nutně totožná s dvojicí definovanou rovnicemi (60). Vybral jsem tyto „základní vlastnosti" tak, aby se z nich další vlastnosti funkcí $\sin x$, $\cos x$ daly snadno odvozovat (viz kap. VI, § 2). Je však možné volit ještě jednodušší soustavy „základních vlastností", jež stačí k úplné charakterizaci funkcí $\sin x$, $\cos x$. Viz o tom cvičení 1; ještě jednodušší systém základních vlastností viz v knize K. Petra, Počet differenciální, str. 120, nebo v mé knize Diferenciální počet II (vydání z r. 1956), str. 592—601.

Cvičení

1. Označme číslicí 5 tuto vlastnost: $\sin 0 = 0$, $\cos 0 = 1$. Tvrdím: mají-li dvě funkce, jež označím $\sin x$, $\cos x$, vlastnosti 1, 2, 4, 5, jsou tyto funkce dány rovnicemi (60) (vlastnost 5 má podstatně jednodušší charakter než vlastnost 3, kterou nahrazuje). Návod k důkazu: jako v kap. VI, § 2 odvodíme z 2, 5 rovnici $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ a rovnice pro $\cos\alpha - \cos\beta$, $\sin\alpha - \sin\beta$. Tedy $|\sin x| \leqq 1$, $|\cos x| \leqq 1$, načež snadno (s užitím vlastnosti 4) dokážeme spojitost a vzorce $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$; odtud postupně plyne existence derivací všech řádů a jejich hodnoty; užijeme potom Maclaurinova vzorce se zbytkem (13) pro $f(x) = \sin x$ a pro $f(x) = \cos x$. Ježto $|f^{(n+1)}(\Theta x)| \leqq 1$, má zbytek limitu 0 a odtud plynou rovnice (60).

Následující dvě cvičení obsahují dvě drobnosti, které se často vyskytují.

2. Je-li $a^2 + b^2 = 1$, existuje číslo α tak, že $\cos\alpha = a$, $\sin\alpha = b$. Všechna taková α jsou dána vzorcem $\alpha = \arccos a + 2k\pi$ (k celé), je-li $b \geqq 0$, a vzorcem $\alpha = -\arccos a + 2k\pi$ (k celé), je-li $b \leqq 0$ (pro $b = 0$ tedy oba vzorce dávají tytéž hodnoty α — proč?). Hodnota α je tedy jednoznačně určena až na násobek čísla 2π.

3. Budiž $a^2 + b^2 > 0$. Potom existuje kladné číslo A a číslo α tak, že pro všechna x je $a\cos x + b\sin x = A\cos(x - \alpha)$. Číslo A je čísly a, b jednoznačně určeno (je to největší hodnota funkce $a\cos x + b\sin x$), číslo α je určeno až na násobek čísla 2π (je to jedna z oněch hodnot x, pro něž uvedená funkce nabývá své největší hodnoty).

4. K funkcím $\cos x$, $\sin x$ jsme dospěli z jejich „základních vlastností"; lze však k nim dospět ještě jinak. Hledejme, které funkce $f(x)$ splňují rovnici

$$f''(x) = -f(x) \text{ pro všechna } x. \tag{68}$$

Splňuje-li $f(x)$ rovnici (68), je $f^{(2k)}(x) = (-1)^k f(x)$, $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k f'(x)$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ Položíte-li $f(0) = a$, $f'(0) = b$, obdržíte snadno, že je (Maclaurinova řada!)

$$f(x) = a\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \ldots\right) + b\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \ldots\right). \tag{69}$$

(Že je $\lim R_{n+1} = 0$, snadno zjistíte na základě této poznámky: je-li zvoleno číslo $x \neq 0$, existuje číslo K (závislé na x) tak, že pro všechna t mezi $0, x$ je $|f(t)| < K$, $|f'(t)| < K$, tedy též $|f^{(n+1)}(t)| < K$.) Že funkce f daná rovnicí (69) skutečně splňuje rovnici (68), poznáte, vypočtete-li derivace řad v ní se vyskytujících, což jsme provedli v § 7. Speciálně: ona funkce $f(x)$, jež vyhovuje rovnici (68) a podmínkám $f(0) = 1$, $f'(0) = 0$, je dána řadou $1 - x^2 : 2! + x^4 : 4! - \ldots$; podobně vedou podmínky $f(0) = 0, f'(0) = 1$ k řadě $x : 1! - x^3 : 3! + \ldots$ Vyšetřování rovnice (68) vede zcela přirozeně k zavedení těchto funkcí, jimž, jak víme, říkáme $\cos x$, $\sin x$. Všimněte si však, že jsme v tomto cvičení vůbec neužili svých vědomostí o funkcích $\cos x$, $\sin x$.

5. Obdobně zjistěte (bez použití vlastností funkce e^x) toto: všechny funkce $f(x)$, jež pro všechna x splňují rovnici $f'(x) = f(x)$, jsou dány rovnicí $f(x) = c(1 + x : 1! + x^2 : 2! + x^3 : 3! + + \ldots)$.

Poznámka. Rovnice, které udávají vztahy mezi proměnnou x, její funkcí y a derivacemi y', y'', y''', ..., se nazývají diferenciální rovnice; např. $xy''' - (1 + xyy') \cdot (y'')^3 = 0$ je taková diferenciální rovnice. Nauka o diferenciálních rovnicích je velmi rozsáhlá a rozvětvená a zcela se vymyká programu této knihy. Dvě jednoduché diferenciální rovnice, totiž $y'' = -y$, $y' = y$ jsme právě rozřešili (tj. našli jsme všechny funkce $f(x)$, jež těmto rovnicím vyhovují).