Kapitola XI. Použití zobecněné věty o přírůstku funkce k vyšetřování limity (tzv. "neurčité výrazy")

In: Vojtěch Jarník (author): Diferenciální počet I. (Czech). Praha: Academia, 1974. pp. 269--287.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401994

Kapitola XI

POUŽITÍ ZOBECNĚNÉ VĚTY O PŘÍRŮSTKU FUNKCE K VYŠETŘOVÁNÍ LIMIT (TZV. „NEURČITÉ VÝRAZY")

§ 1. Limita podílu: typy $\frac{0}{0}, \frac{\infty}{\infty}$. Věta 106 praví toto: existují-li vlastní limity $\lim_{x\to c} f(x) = a$, $\lim_{x\to c} g(x) = b$, existují též vlastní limity $\lim_{x\to c} (f(x) \pm g(x)) = a \pm b$, $\lim_{x\to c} f(x)\, g(x) = ab$ a v případě $b \neq 0$ též $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a}{b}$; zcela obdobné věty platí též pro $x \to c+$, $x \to c-$, $x \to +\infty$, $x \to -\infty$. Nerozřešen zůstává dosud případ $b = 0$ pro podíl. Případ $b = 0$, $a \neq 0$ lze ještě snadno diskutovat: budiž $\lim_{x\to c} f(x) = a \neq 0$, $\lim_{x\to c} g(x) = 0$. Jestliže ke každému $\delta > 0$ existuje v intervalu $(c - \delta, c + \delta)$ číslo $x \neq c$ tak, že $g(x) = 0$, nemá pro takové x podíl $\frac{f(x)}{g(x)}$ vůbec smyslu, takže $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ (vlastní ani nevlastní) vůbec neexistuje. Jestliže však existuje číslo $\Delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - c| < \Delta$ je $g(x) \neq 0$, je pro x velmi blízká hodnotě c jmenovatel zlomku $\frac{f(x)}{g(x)}$ velmi blízký nule (ale různý od nuly), čitatel velmi blízký číslu $a \neq 0$, takže zlomek $\frac{f(x)}{g(x)}$ má velmi velkou prostou hodnotu, takže $\lim_{x\to c} \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$.[1]) Vyšetřováním znaménka podílu $f(x) : g(x)$ mohu leckdy rozhodnout, zda je $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)} = +\infty$ či $-\infty$ či zda tato nevlastní limita vůbec neexistuje.

Zbývá tedy nerozřešen ještě případ $a = b = 0$, jímž se nyní budeme zabývat. Jde tedy o limitu $\lim_{x\to c} \frac{f(x)}{g(x)}$ v případě, že $\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = 0$.

---

[1]) Podrobně: budiž dáno K. Ježto $\lim |f(x)| = |a| > \frac{1}{2}|a|$, existuje $\delta_1 > 0$ tak, že $|f(x)| > \frac{1}{2}|a|$ pro $0 < |x - c| < \delta_1$. Dále existuje $\delta_2 > 0$ tak, že $|g(x)| < \frac{1}{2}|a| : (|K| + 1)$ pro $0 < |x - c| < \delta_2$. Položme $\delta = \text{Min}\,(\Delta, \delta_1, \delta_2)$. Pro $0 < |x - c| < \delta$ je potom zřejmě $|f(x) : g(x)| > |K| + 1 > K$, tedy vskutku $\lim |f(x) : g(x)| = +\infty$. Podobné jednoduché úvahy v dalším výkladu často přenechávám čtenáři.

Speciálním případem takové limity jsme se zabývali v kap. VIII: je-li f spojitá v bodě x_0, je $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) - f(x_0)) = \lim\limits_{x\to x_0}(x - x_0) = 0$; limitu $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$, existuje-li, nazýváme derivací $f'(x_0)$. Dá se tedy naopak očekávat, že věty o derivaci nám budou užitečné pro vyšetřování našeho problému; uvidíme, že tomu tak vskutku je.

Věta 146. *Budiž* $\lim\limits_{x\to c+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to c+} g(x) = 0$. *Nechť existuje* $\lim\limits_{x\to c+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ *(vlastní nebo nevlastní). Potom existuje též* $\lim\limits_{x\to c+}\dfrac{f(x)}{g(x)}$ *a je* $\lim\limits_{x\to c+}\dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to c+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. *Obdobná věta platí též pro* $\lim\limits_{x\to c-}$ *a pro* $\lim\limits_{x\to c}$.

Důkaz. Doplňme, popř. pozměňme definici funkcí f, g v bodě c tak, že položíme $f(c) = g(c) = 0$ (tím se nezmění nic na předpokladech ani na tvrzení věty, ježto limity, o nichž mluvíme, nezávisí na hodnotách funkcí f, g v bodě c). Vzhledem k předpokladům jsou především funkce f, g spojité zprava v bodě c (neboť např. $\lim\limits_{x\to c+} f(x) = 0 = f(c)$). Dále existuje $\Delta > 0$ tak, že pro $c < x < c + \Delta$ má zlomek $\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ smysl; v intervalu $(c, c + \Delta)$ existují tedy vlastní derivace $f'(x)$, $g'(x)$ a je $g'(x) \neq 0$. Je-li x libovolné číslo intervalu $(c, c + \Delta)$, jsou funkce f, g spojité v intervalu $\langle c, x\rangle$[2]) a mají vlastní derivaci v každém bodě intervalu (c, x), přičemž derivace funkce g je různá od nuly. Podle věty 134 existuje tedy číslo ξ tak, že

$$(1) \qquad \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(c)}{g(x) - g(c)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad c < \xi < x .$$

Pro $x \to c+$ má pravá strana limitu $\lim\limits_{x\to c+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)}$, touž limitu má tedy i levá strana.[3])

Důkaz pro limitu zleva je obdobný; důkaz pro limitu („oboustrannou“) se dostane spojením vět pro limitu zprava a limitu zleva, užijeme-li věty 102.

Příklad 1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = 2$. Důkaz: limity čitatele i jmenovatele jsou $e^0 -$

[2]) Spojitost zprava v bodě c jsme před chvílí zdůraznili; spojitost v ostatních bodech plyne z existence derivace.

[3]) Podrobně: položme $\lim\limits_{x\to c+}\dfrac{f'(x)}{g'(x)} = k$ (může být ovšem též $k = +\infty$ nebo $-\infty$). Budiž předně k vlastní limita; dále budiž $\varepsilon > 0$. Existuje tedy $\delta > 0$ tak, že pro $c < y < c + \delta$ je $|f'(y) : g'(y) - k| < \varepsilon$. Je-li $c < x < c + \delta$, je v (1) též $c < \xi < c + \delta$, tedy $|f'(\xi) : g'(\xi) - k| < \varepsilon$, tedy též $|f(x) : g(x) - k| < \varepsilon$; tedy $\lim\limits_{x\to c+}(f(x) : g(x)) = k$. Podobně pro $k = +\infty$ nebo $k = -\infty$.

$-e^{-0} = 0$, $\sin 0 = 0$. Tedy $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(e^x - e^{-x})'}{(\sin x)'} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x + e^{-x}}{\cos x}$, existuje-li limita vpravo; ale tato limita existuje, a je rovna $\dfrac{e^0 + e^{-0}}{\cos 0} = 2$.

Příklad 2. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = 1$. Důkaz: $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x}{1}$, existuje-li limita vpravo; ale ta existuje a rovná se 1. Čtenář si snad řekne: nebyl snad namáhavý výpočet limity $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{e^x - 1}{x}$ v kap. V, § 5, příkl. 3 zbytečný, když jsme nyní tuto limitu tak jednoduše vypočetli? Nikoliv, neboť abychom mohli vypočíst tuto limitu podle věty 146, musili jsme již napřed vědět, že je $(e^x)' = e^x$, neboli že $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = e^x$, tj. že $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$. Nedává tedy tento příklad vlastně nic nového.

Příklad 3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\arcsin x} = \lim\limits_{x\to 0} \cos x \,.\, \sqrt{1 - x^2} = 1$.

Příklad 4. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\cos^2 x}{x - \frac{1}{2}\pi} = \lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{-2\cos x \sin x}{1} = 0$.

Příklad 5. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\cos x}{(x - \frac{1}{2}\pi)^2} = \lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{-\sin x}{2(x - \frac{1}{2}\pi)}$, existuje-li ovšem limita vpravo (třeba nevlastní); totéž platí pro limity zprava a zleva. Je-li x blízko hodnoty $\frac{1}{2}\pi$, je čitatel $-\sin x$ blízko čísla -1, jmenovatel $2(x - \frac{1}{2}\pi)$ je pak velmi blízko nule, a to kladný pro $x > \frac{1}{2}\pi$, záporný pro $x < \frac{1}{2}\pi$. Tedy

$$\lim_{x\to \pi/2-} \frac{-\sin x}{2(x - \frac{1}{2}\pi)} = +\infty, \quad \lim_{x\to \pi/2+} \frac{-\sin x}{2(x - \frac{1}{2}\pi)} = -\infty\,;$$

podle věty 146 je tedy též

$$\lim_{x\to \pi/2-} \frac{\cos x}{(x - \frac{1}{2}\pi)^2} = +\infty, \quad \lim_{x\to \pi/2+} \frac{\cos x}{(x - \frac{1}{2}\pi)^2} = -\infty\,;$$

oboustranné limity, napsané na počátku tohoto příkladu, tedy neexistují (vlastní ani nevlastní).

Poznámka 1. Hledám-li $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ (za předpokladu, že $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$; vynechávám znak $x \to c$) podle věty 146, může se stát, že také $\lim f'(x) = \lim g'(x) = 0$; potom pro hledání limity podílu $f'(x) : g'(x)$ užiji opět věty 146 a dostanu, že je $\lim (f'(x) : g'(x)) = \lim (f''(x) : g''(x))$, jestliže ovšem limita vpravo existuje. Jestliže je též $\lim f''(x) = \lim g''(x) = 0$, dostáváme dále, že $\lim (f''(x) : g''(x)) = \lim (f'''(x) : g'''(x))$, existuje-li limita vpravo. Obecně obdržíme tento výsledek: budiž $\lim f^{(k)}(x) = \lim g^{(k)}(x) = 0$ pro $0 \leqq k \leqq n - 1$;[4]) potom je

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)} = \ldots = \lim \frac{f^{(n-1)}(x)}{g^{(n-1)}(x)} = \lim \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}, \tag{2}$$

existuje-li poslední limita (jestliže ovšem poslední limita neexistuje, je aspoň poslední rovnice v (2) nesprávná a mohou být nesprávné všechny).

Příklad 6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x} - 2x}{x^3} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x} - 2}{3x^2} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - e^{-x}}{6x} =$
$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x + e^{-x}}{6}$, existuje-li poslední limita;[5]) ale ta zřejmě existuje a má hodnotu $\frac{1}{3}$.

Příklad 7. Při postupném výpočtu nemusíme postupovat podle schématu (2), nýbrž můžeme při jednotlivých krocích provádět úpravy sloužící k zjednodušení výrazu. Příklad:

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x - x}{\arcsin x - x} = \lim \frac{(\cos x - 1)\sqrt{1 - x^2}}{1 - \sqrt{1 - x^2}} = {}^{6})$$

$$= \lim \sqrt{1 - x^2} \,.\, \lim \frac{\cos x - 1}{1 - \sqrt{1 - x^2}} = 1 \,.\, \lim \frac{-\sin x \,.\, \sqrt{1 - x^2}}{x} =$$

$$= -\lim \sqrt{1 - x^2} \,.\, \lim \frac{\sin x}{x} = -1 \,.\, \lim \frac{\cos x}{1} = -1 \,.$$

Každá z rovnic, které jsme zde napsali, má ovšem tento význam: existuje-li pravá strana, existuje i levá strana a rovná se pravé straně. Ježto poslední výraz -1 má smysl, existují i všechny předešlé výrazy a rovnají se -1.

Symbolu

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{3}$$

dává se v případě $\lim\limits_{x \to c} f(x) = \lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$ někdy poněkud zastaralý a ne zcela vhodný název „neurčitý výraz $\dfrac{0}{0}$“. Nic neurčitého na výrazu (3) ovšem není; limita (3) buďto existuje a potom má zcela určitou hodnotu, nebo vůbec neexistuje. Název pochází patrně od toho, že kdybychom psali bez rozmýšlení $\lim (f(x) : g(x)) =$

[4]) $f^{(0)}(x)$ značí ovšem $f(x)$.

[5]) Kdybychom nedovedli zjistit, zda existuje, nebo kdybychom dokonce zjistili, že neexistuje, musili bychom celý dosavadní výpočet škrtnout, ježto by mohl být nesprávný.

[6]) Čitatele i jmenovatele jsem násobil číslem $\sqrt{1 - x^2}$; znak $x \to 0$ vynechávám.

$= \lim f(x) : \lim g(x)$ (což by bylo dovoleno, kdyby bylo $\lim g(x) \neq 0$), dostali bychom znak $\frac{0}{0}$, který ovšem nemá smyslu.

Zabývali jsme se dosud limitou (3) v případě, že existují vlastní limity $\lim f(x) = a$, $\lim g(x) = b$ (znak $x \to c$ pro zkrácení vynechávám); nejobtížnější případ $a = b = 0$ jsme právě probrali.

V případě nevlastních limit jsou možné tyto případy:

1) $\lim f(x) = a$ (vlastní), $\lim |g(x)| = +\infty$.

2) $\lim |f(x)| = +\infty$, $\lim g(x) = b$ (vlastní).

3) $\lim |f(x)| = +\infty$, $\lim |g(x)| = +\infty$.

V prvním případě je zřejmě $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = 0$; v druhém je $\lim \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| = +\infty$, vyloučíme-li případ, že v každém intervalu $(c - \delta, c + \delta)$ existuje bod $x \neq c$ takový, že $g(x) = 0$ (což může nastat jen tehdy, je-li $b = 0$).[7]

Zbývá tedy třetí případ, kterému se někdy říká „neurčitý výraz typu $\frac{\infty}{\infty}$." Tímto případem se budeme zabývat, ale dokonce vezmeme ještě případ obecnější: budeme předpokládat pouze, že $\lim |g(x)| = +\infty$; o $\lim f(x)$ nepředpokládáme nic, ani existenci této limity:

Věta 147. *Budiž* $\lim_{x \to c+} |g(x)| = +\infty$. *Nechť existuje* $\lim_{x \to c+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$ *(vlastní nebo nevlastní, takže může být též* $k = +\infty$ *nebo* $k = -\infty$*). Potom existuje též* $\lim_{x \to c+} \frac{f(x)}{g(x)}$ *a je* $\lim_{x \to c+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$. *Obdobná věta platí* pro $x \to c-$ *a pro* $x \to c$.

Důkaz stačí provést pro limitu zprava (podobně jako u věty 146). Z existence limit $\lim_{x \to c+} \frac{f'(x)}{g'(x)} = k$, $\lim_{x \to c+} |g(x)| = +\infty$ plyne existence kladného čísla Δ tak, že v intervalu $(c, c + \Delta)$ existují derivace $f'(x)$, $g'(x)$ a že v tomto intervalu je $g'(x) \neq 0$, $g(x) \neq 0$. Z věty 134 pak plyne: jsou-li x, x_1 dvě čísla taková, že $c < x < x_1 < c + \Delta$, existuje číslo ξ tak, že

$$f(x) - f(x_1) = (g(x) - g(x_1)) \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}, \quad x < \xi < x_1 . \tag{4}$$

[7]) Podrobné důkazy si sestrojí čtenář sám podle vzoru poznámky [1]) pod čarou.

Ale já se chci zabývat výrazem $f(x) : g(x)$; dělím-li rovnici (4) číslem $g(x) \neq 0$, obdržím

$$(5) \qquad \frac{f(x)}{g(x)} = \left(1 - \frac{g(x_1)}{g(x)}\right)\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} + \frac{f(x_1)}{g(x)}, \quad x < \xi < x_1 .$$

Tedy ještě jednou: jsou-li x, x_1 dvě čísla taková, že je $c < x < x_1 < c + \Delta$, existuje číslo ξ tak, že platí (5).

Chci nyní dokázat, že levá strana rovnice (5) má v bodě c limitu zprava, rovnou číslu k.[8]) Rozeznávejme tři případy:

Případ I. $k = 0$. Budiž $\varepsilon > 0$. Potom existuje $\delta_1 > 0$ tak, že pro $c < \xi < c + \delta_1$ je $|f'(\xi) : g'(\xi)| < \frac{1}{2}\varepsilon$. Zvolme číslo δ_1 menší než Δ. Zvolme dále $x_1 = c + \delta_1$; potom bude $c < x_1 < c + \Delta$ a pro každé x intervalu $(c, c + \delta_1) = (c, x_1)$ bude číslo ξ z rovnice (5) ležet v intervalu $(c, c + \delta_1)$, takže rovnice (5) dává

$$(6) \qquad \left|\frac{f(x)}{g(x)}\right| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{|g(x)|}\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon|g(x_1)| + |f(x_1)|\right) \quad \text{pro} \quad c < x < c + \delta_1 .$$

Čísla ε, $x_1 = c + \delta_1$ a tedy i $f(x_1)$, $g(x_1)$ jsou teď již dána. Ježto $\lim\limits_{x \to c+} |g(x)| = + \infty$, existuje $\delta_2 > 0$ tak, že je

$$(7) \qquad |g(x)| > \frac{2}{\varepsilon}\left(\tfrac{1}{2}\varepsilon|g(x_1)| + |f(x_1)|\right) \quad \text{pro} \quad c < x < c + \delta_2 .$$

Položme $\delta = \mathrm{Min}\,(\delta_1, \delta_2)$. Pro $c < x < c + \delta$ je podle (6), (7) $|f(x) : g(x)| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon$; tedy vskutku $\lim\limits_{x \to c+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

Případ II. $k \neq 0$, ale není $k = +\infty$ ani $k = -\infty$. Vezměme místo funkce $f(x)$ funkci $F(x) = f(x) - k\,g(x)$. Je

$$\lim_{x \to c+} \frac{F'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to c+} \left(\frac{f'(x)}{g'(x)} - k\right) = 0,$$

tedy podle případu I

$$\lim_{x \to c+} \frac{F(x)}{g(x)} = 0, \quad \lim_{x \to c+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c+} \left(\frac{F(x)}{g(x)} + k\right) = k .$$

Případ III. $k = +\infty$ nebo $-\infty$. Stačí vyšetřit případ $k = +\infty$; případ $k = -\infty$ se převede na případ $k = +\infty$, vyšetřuji-li podíl $\dfrac{-f(x)}{g(x)}$ místo $\dfrac{f(x)}{g(x)}$.

[8]) Postup bude zhruba asi tento: zvolím x_1 blízko c; potom bude též ξ blízko c a zlomek $f'(\xi) : g'(\xi)$ bude blízko k. Zvolím-li pak x ještě mnohem blíže číslu c, bude $|g(x)|$ velmi velké, takže $f(x_1) : g(x)$ bude blízko nule, rozdíl $1 - g(x_1) : g(x)$ pak bude blízko jedničce. Co jsem právě naznačil, podrobně provedeme. Připomínám, že písmeno ksi v (5) a znak ξ značí totéž.

Budiž tedy $k = +\infty$. Budiž dáno libovolné číslo K; potom existuje $\delta_1 > 0$ tak, že je

$$(8) \qquad \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} > 2|K| + 2 \quad \text{pro} \quad c < \xi < c + \delta_1 .$$

Zvolme δ_1 menší než Δ a zvolme $x_1 = c + \delta_1$, takže čísla K, δ_1, x_1, $f(x_1)$, $g(x_1)$ jsou teď již dána, Dále existuje $\delta_2 > 0$ tak, že je

$$(9) \qquad |g(x)| > 2|g(x_1)| , \quad |g(x)| > |f(x_1)| \quad \text{pro} \quad c < x < c + \delta_2 .$$

Položme $\delta = \text{Min}\,(\delta_1, \delta_2)$. Pro $c < x < c + \delta$ je podle (9) $|f(x_1) : g(x)| < 1$, $|g(x_1) : g(x)| < \frac{1}{2}$, tedy $1 - g(x_1) : g(x) > \frac{1}{2}$; z (5) a (8) tedy plyne

$$\frac{f(x)}{g(x)} > \tfrac{1}{2} \, . \, (2|K| + 2) - \left|\frac{f(x_1)}{g(x)}\right| > K$$

pro $c < x < c + \delta$; tedy vskutku $\lim\limits_{x \to c+} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$.

Poznámka 2. Věta 147 ukazuje, že v případě $\lim |g(x)| = +\infty$ lze užít přesně téhož postupu jako v případě $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$; proto nebudu již opakovat četné poznámky, jež jsem připojil k větě 146.

Příklad 8. $\lim\limits_{x \to 0+} \dfrac{\lg x}{\sqrt{1 + x^2} \operatorname{cotg} x} = 0$.

Důkaz: $$\lim \frac{\lg x}{\sqrt{1 + x^2} \operatorname{cotg} x} = \lim \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}} \lim \frac{\lg x}{\operatorname{cotg} x} =$$
$$= 1 \, . \lim \left(\frac{1}{x} : - \frac{1}{\sin^2 x} \right) = - \lim \frac{\sin^2 x}{x} ;$$

tento výraz je typu $\dfrac{0}{0}$, tedy $\lim \dfrac{\sin^2 x}{x} = \lim \dfrac{2 \sin x \cos x}{1} = 0$.

Zbývají ještě limity pro $x \to +\infty$, $x \to -\infty$; pro ty platí zcela obdobné pravidlo:

Věta 148. *Budiž buďto* $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$ *nebo* $\lim\limits_{x \to +\infty} |g(x)| = +\infty$ *a nechť existuje vlastní nebo nevlastní* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$; *potom existuje též* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ *a je* $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$. *Obdobně pro* $x \to -\infty$.

Důkaz stačí zajisté provést pro $x \to +\infty$. Vzpomeňme (definice 22), že $\lim\limits_{x \to +\infty} \varphi(x)$ značí totéž co $\lim\limits_{y \to 0+} \varphi\left(\dfrac{1}{y}\right)$. Položme tedy $F(y) = f\left(\dfrac{1}{y}\right)$, $G(y) = g\left(\dfrac{1}{y}\right)$.

Podle předpokladu je buďto $\lim_{y\to 0+} F(y) = \lim_{y\to 0+} f\left(\frac{1}{y}\right) = 0$, $\lim_{y\to 0+} G(y) = 0$, nebo $\lim_{y\to 0+} |G(y)| = +\infty$ a dále $\lim_{y\to 0+} \left(f'\left(\frac{1}{y}\right) : g'\left(\frac{1}{y}\right)\right) = k$, kde může být též $k = +\infty$ nebo $-\infty$ $\left(\text{přitom ovšem } f'\left(\frac{1}{y}\right) \text{ je derivace } f'(x)\text{, do níž za } x \text{ je dosazeno } \frac{1}{y}\text{; podobně } g'\left(\frac{1}{y}\right)\right)$. Pro dosti velká x (třeba pro $x > A$, kde $A > 0$) existují $f'(x)$, $g'(x)$ a je $g'(x) \neq 0$.[9] Pro $\frac{1}{y} > A$, tj. pro $0 < y < A^{-1}$ je tedy $F'(y) = -\frac{1}{y^2} f'\left(\frac{1}{y}\right)$, $G'(y) = -\frac{1}{y^2} g'\left(\frac{1}{y}\right)$, tedy $\lim_{y\to 0+} \frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{y\to 0+} \left(f'\left(\frac{1}{y}\right) : g'\left(\frac{1}{y}\right)\right) = k$; podle věty 146 nebo 147 je tedy vskutku

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\to 0+} \left(f\left(\frac{1}{y}\right) : g\left(\frac{1}{y}\right)\right) = \lim_{y\to 0+} \frac{F(y)}{G(y)} = k\,.$$

Předpis pro hledání limity je ve všech třech větách stejný; proto můžeme tyto věty zapomenout a pamatovat si místo nich tuto větu, jež je všechny shrnuje:

Věta 149. *Budiž buďto* $\lim f(x) = \lim g(x) = 0$ *nebo* $\lim |g(x)| = +\infty$. *Potom platí: existuje-li* $\lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$ *(vlastní nebo nevlastní), existuje i* $\lim \frac{f(x)}{g(x)}$ *a je* $\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \lim \frac{f'(x)}{g'(x)}$. *Přitom může mít symbol* lim *kterýkoliv z těchto pěti významů:* $\lim_{x\to c}$, $\lim_{x\to c+}$, $\lim_{x\to c-}$, $\lim_{x\to+\infty}$, $\lim_{x\to-\infty}$.

Příklad 9. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$ pro jakékoliv n. Důkaz: zvolme přirozené číslo $m > n$. Ježto

$$\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty\,, \quad \text{je} \quad \lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{e^x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{nx^{n-1}}{e^x} =$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{n\,.\,(n-1)\,x^{n-2}}{e^x} = \ldots = \lim_{x\to+\infty} \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)\,x^{n-m}}{e^x} = 0$$

(neboť např. pro $x > 0$ je $0 < e^{-x}\,.\,x^{n-m} < x^{n-m}$, $\lim_{x\to+\infty} x^{n-m} = 0$).

[9]) To plyne z existence $\lim_{x\to+\infty} (f'(x) : g'(x))$.

Odvodíme si ještě jednu větu.

Věta 150. *Budiž n přirozené číslo; nechť existují derivace (vlastní) $f^{(k)}(c)$ $g^{(k)}(c)$ pro $0 \leqq k \leqq n$; nechť $f^{(k)}(c) = g^{(k)}(c) = 0$ pro $0 \leqq k \leqq n - 1$, ale $g^{(n)}(c) \neq 0$. Potom je* $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}$.

Poznámka 3. Z existence derivací plyne spojitost funkcí f, g v bodě c; tedy $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c) = f^{(0)}(c) = 0$ a podobně $\lim\limits_{x \to c} g(x) = 0$; takže jde o typ $\frac{0}{0}$. Mohli bychom jej řešit podle věty 146; místo ní lze leckdy užít věty 150.

Důkaz provedeme úplnou indukcí.

I. Budiž $n = 1$. Ježto $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x)}{x - c} = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{f(x) - f(c)}{x - c} = f'(c)$, $\lim\limits_{x \to c} \dfrac{g(x)}{x - c} = \lim\limits_{x \to c} \dfrac{g(x) - g(c)}{x - c} = g'(c) \neq 0$, a ježto pro $x \neq c$ je $\dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{f(x) : (x - c)}{g(x) : (x - c)}$, je podle věty o limitě podílu (kap. V, věta 106)

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f(x) : (x - c)}{g(x) : (x - c)} = \frac{\lim\limits_{x \to c} f(x) : (x - c)}{\lim\limits_{x \to c} g(x) : (x - c)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}.$$

II. Budiž $n > 1$ a předpokládejme, že věta je již dokázána, píšeme-li v ní $n - 1$ místo n. Funkce $F(x) = f'(x)$, $G(x) = g'(x)$ vyhovují podmínkám $F^{(k)}(c) = G^{(k)}(c) = 0$ pro $0 \leqq k \leqq n - 2$, $F^{(n-1)}(c)$ existuje, $G^{(n-1)}(c) \neq 0$. Podle věty 150 (s hodnotou $n - 1$ místo n) je tedy

$$\lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to c} \frac{F(x)}{G(x)} = \frac{F^{(n-1)}(c)}{G^{(n-1)}(c)} = \frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}.$$

Je však $\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c) = 0$, $\lim\limits_{x \to c} g(x) = g(c) = 0$, takže věta 146 dává hledaný výsledek:

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{f^{(n)}(c)}{g^{(n)}(c)}.$$

Příklad 10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(\cos x - 1)^2}{\sin^3 x} = 0$. Důkaz: Klademe-li $f(x) = (\cos x - 1)^2$, $g(x) = \sin^3 x$, je $g'(x) = 3 \sin^2 x \cos x$, $g''(x) = 6 \sin x \cos^2 x - 3 \sin^3 x$, $g'''(x) = 6 \cos^3 x + \sin x(\ldots)$ (co je v závorce, mne nezajímá). Tedy $g(0) = g'(0) = g''(0) = 0$, $g'''(0) = 6 \neq 0$. Budu tedy počítat derivace funkce f až do třetího řádu. Je $f'(x) = -2 \cos x \sin x + 2 \sin x = -\sin 2x + 2 \sin x$, $f''(x) = -2 \cos 2x + 2 \cos x$, $f'''(x) = 4 \sin 2x - 2 \sin x$. Je $f(0) = f'(0) = f''(0) = f'''(0) = 0$, takže lze užít věty 150 (pro $n = 3$); hledaná limita je tedy $f'''(0) : g'''(0) = \frac{0}{6} = 0$.

Cvičení

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x}{\arcsin x} = 1.$

2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^3 - 3x^2 + x + 1}{\cos \frac{1}{2}\pi x} = \dfrac{4}{\pi}.$

3. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{a^x - b^x}{x} = \lg \dfrac{a}{b} \quad (a > 0,\ b > 0).$

4. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\lg x}{\cos \frac{1}{2}\pi x} = -\dfrac{2}{\pi}.$

5. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{\sqrt{x^2 + 16} - 5}{x^3 - 2x^2 - x - 6} = \dfrac{3}{70}.$

6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1 - x^2} + \frac{1}{2}x^2 - 1}{\cos x - 1 + \frac{1}{2}x^2} = -3.$

7. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin x - x}{\cos x - 1} = 0.$

8. Z cvičení 7 odvoďte $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\cos x - 1}{\sin x - x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{\cos x - 1}{\sin x - x} = -\infty.$

9. $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{\lg x}{\operatorname{cotg} x} = 0.$

10. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{arctg} x - \arcsin x}{\operatorname{tg} x - \sin x} = -1.$

11. $\lim\limits_{x\to \pi/2} \dfrac{\operatorname{cotg} x + x - \frac{1}{2}\pi}{(x - \frac{1}{2}\pi)^3} = -\frac{1}{3}.$

12. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^2 + 2x - 1}{x \operatorname{cotg} \dfrac{1}{x}} = 1.$

13. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\lg (a + bx)^m}{\lg (c + dx)^n} = \dfrac{m}{n}$ pro $n \neq 0,\ b > 0,\ d > 0.$

14. Může se stát, že $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ existuje, ale $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f'(x)}{g'(x)}$ neexistuje, ač pro $x \neq c$ derivace $f'(x)$, $g'(x)$ existují a $g'(x) \neq 0$. Příklad: $c = 0$, $f(x) = x + x^2 \sin \dfrac{1}{x}$, $g(x) = 2x + \sin x.$

§ 2. Limity (čili „neurčité výrazy") typu $0 . \infty$, $\infty - \infty$, 0^0, 1^∞, ∞^0. Existují-li vlastní limity $\lim\limits_{x\to c} f(x)$, $\lim\limits_{x\to c} g(x)$ (symbol $x \to c$ budu zatím vynechávat), existuje též vlastní limita součtu, rozdílu a součinu. Zde mohou tedy působit obtíže pouze limity *nevlastní.* U součinu zjistíte snadno:[10]) je-li $\lim f(x) \neq 0$ (vlastní nebo nevlastní) a je-li $\lim |g(x)| = +\infty$, je $\lim |f(x)\,g(x)| = +\infty$. Jediný obtížný případ je tedy $\lim f(x) = 0$, $\lim |g(x)| = +\infty$, tzv. typ $0\,.\,\infty$; ale potom je $\lim \dfrac{1}{g(x)} = 0$ a píšete-li $f(x)\,.\,g(x) = f(x) : \dfrac{1}{g(x)}$, je tím typ $0\,.\,\infty$ převeden na typ $\dfrac{0}{0}$.[11])

Příklad 1. Pro $\alpha > 0$ je $\lim\limits_{x\to 0+} x^\alpha \lg x = 0$. Důkaz: $\lim x^\alpha \lg x = \lim \dfrac{\lg x}{x^{-\alpha}} =$

$$= \lim \frac{x^{-1}}{-\alpha x^{-\alpha-1}} = -\frac{1}{\alpha}\lim x^\alpha = 0.$$

U součtu (na nějž se rozdíl převede změnou znamení) zjistíte snadno:[12]) je-li $\lim f(x) = +\infty$ a současně $\lim g(x)$ vlastní nebo $+\infty$, je $\lim (f(x) + g(x)) = +\infty$; je-li $\lim f(x) = -\infty$ a současně $\lim g(x)$ vlastní nebo $-\infty$, je $\lim (f(x) + g(x)) = -\infty$. Zbývá případ $\lim f(x) = +\infty$, $\lim g(x) = -\infty$. Pišme $-g$ místo g; jde tedy o $\lim (f(x) - g(x))$, kde $\lim f(x) = \lim g(x) = +\infty$, což je tzv. typ $\infty - \infty$. V tomto případě pišme třeba $f(x) = \dfrac{1}{\varphi(x)}$, $g(x) = \dfrac{1}{\psi(x)}$, takže je $\lim \varphi(x) = \lim \psi(x) = 0$ a jde o limitu $\lim (f(x) - g(x)) = \lim \dfrac{\psi(x) - \varphi(x)}{\varphi(x)\,\psi(x)}$, což je typ $\dfrac{0}{0}$ (leckdy je pohodlnější jiná úprava).

Příklad 2.
$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}\right) = \lim \frac{\sin^2 x - x^2}{x^2 \sin^2 x} =$$
$$= \lim \frac{2\sin x\cos x - 2x}{2x\sin^2 x + 2x^2 \sin x\cos x} =$$
$$= \lim \frac{\cos^2 x - \sin^2 x - 1}{\sin^2 x + 4x\sin x\cos x + x^2(\cos^2 x - \sin^2 x)} =$$
$$= \lim \frac{\cos 2x - 1}{\sin^2 x + 2x\sin 2x + x^2\cos 2x} =$$
$$= \lim \frac{-2\sin 2x}{3\sin 2x + 6x\cos 2x - 2x^2\sin 2x} =$$
$$= \lim \frac{-4\cos 2x}{12\cos 2x - 16x\sin 2x - 4x^2\cos 2x} = -\tfrac{1}{3}.$$

[10]) Viz ostatně cvičení 6 v kap. V, § 6.

[11]) Leckdy je výhodnější psát $g(x) : \dfrac{1}{f(x)}$, což je typ $\dfrac{\infty}{\infty}$; nejde to ovšem, je-li $f(x) = 0$ v bodech libovolně blízkých bodu c.

[12]) Viz ostatně cvičení 6 v kap. V, § 6.

Trochu rychlejší je tento výpočet:[13])

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{\sin^2 x}\right)=\lim\frac{x^{-2}\sin^2 x-1}{\sin^2 x}=$$

$$=\lim\frac{2\sin x\cos x\,.\,x^{-2}-2\sin^2 x\,.\,x^{-3}}{2\sin x\cos x}=$$

$$=\lim\frac{1}{\cos x}\,.\,\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=\lim\frac{1}{\cos x}\,.\,\lim\frac{x\cos x-\sin x}{x^3}=$$

$$=1\,.\,\lim\frac{-x\sin x}{3x^2}=-\tfrac{1}{3}\lim\frac{\sin x}{x}=-\tfrac{1}{3}\,.$$

K jiným typům nás vede $\lim\limits_{x\to c} f(x)^{\varphi(x)}$, kde ovšem předpokládám $f(x) > 0$. Tato limita se převede na $\lim e^{\varphi(x)\lg f(x)}$, takže jde v podstatě o limitu $\lim \varphi(x) \lg f(x)$,[14]) tj. o limitu součinu. Předpokládám-li existenci vlastních nebo nevlastních limit $\lim \varphi(x)$, $\lim f(x)$, je jediný obtížný případ „typ $0\,.\,\infty$“, jenž nastává v těchto případech:

$\lim \varphi(x) = 0$, $\lim f(x) = +\infty$ (tj. $\lim \lg f(x) = +\infty$);
$\lim \varphi(x) = 0$, $\lim f(x) = 0$ (tj. $\lim \lg f(x) = -\infty$);
$\lim \varphi(x) = +\infty$, $\lim f(x) = 1$ (tj. $\lim \lg f(x) = 0$);
$\lim \varphi(x) = -\infty$, $\lim f(x) = 1$ (tj. $\lim \lg f(x) = 0$).

To vede k typům „∞^0, 0^0, 1^∞“.

Příklad 3. $\lim\limits_{x\to 0+} x^x = \lim\limits_{x\to 0+} e^{x\lg x}$. Podle příkl. 1 (pro $\alpha = 1$) je $\lim x \lg x = 0$, takže hledaná limita je $e^0 = 1$.

Příklad 4. $\lim\limits_{x\to 1} x^{1/(x-1)} = \lim\limits_{x\to 1} e^{\lg x/(x-1)}$; $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\lg x}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^{-1}}{1} = 1$; hledaná limita je $e^1 = e$.

Tento paragraf je psán úmyslně stručně a zběžně; šlo mně jen o to, abych poradil čtenáři, jak asi lze v jednotlivých případech postupovat.

Cvičení

1. $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{\lg(1+x)}\right) = -\tfrac{1}{2}$.

---

[13]) Pamatujme při něm, že $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$.

[14]) Snadno zjistíte: je-li $\lim\limits_{x\to c} g(x) = a$ (vlastní), je $\lim e^{g(x)} = e^a$; je-li $\lim g(x) = +\infty$, je $\lim e^{g(x)} = +\infty$; je-li $\lim g(x) = -\infty$, je $\lim e^{g(x)} = 0$. Tedy: znáte-li $\lim g(x)$, znáte i $\lim e^{g(x)}$.

2. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\arcsin x} - \frac{1}{\sin x} \right) = 0.$

3. $\lim_{x \to 0} (e^x - 1) \operatorname{cotg} x = 1.$

4. $\lim_{x \to 0} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{e^x - 1} \right) = \frac{1}{2}.$

5. $\lim_{x \to \pi/2} \left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{x - \frac{1}{2}\pi} \right) = 0.$

6. $\lim_{x \to \pi/2} \left(\operatorname{tg} x + \frac{1}{x - \frac{1}{2}\pi} \right) \cdot \frac{1}{x - \frac{1}{2}\pi} = \frac{1}{3}.$

7. $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + a} - \sqrt{x^2 + b}) = \lim_{x \to +\infty} \frac{a - b}{\sqrt{x^2 + a} + \sqrt{x^2 + b}} = 0.$

8. $\lim_{x \to +\infty} (\sqrt{x^2 + a} - \sqrt{x^2 + b})\, x = \frac{1}{2}(a - b).$

9. $\lim_{x \to 0+} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x = 1$ pro $a > 0$ (pro $a < 0$ je nutné vzít $x \to 0\,-$).

10. $\lim_{x \to +\infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x = \lim_{x \to -\infty} \left(1 + \frac{a}{x} \right)^x = e^a.$

11. $\lim_{x \to +\infty} x^{1/x} = 1.$

12. $\lim_{x \to 1-} (\cos \frac{1}{2}\pi x)^{\lg x} = 1.$

13. Dokažte tvrzení z poznámky [14]) pod čarou.

§ 3. Nekonečně malé. — Oskulační kružnice. Slov „nekonečně malá“ se často užívá v popularizujících knihách i v aplikacích. Definujme přesně smysl těchto slov: Budeme říkat, že funkce f je nekonečně malá v bodě x_0, jestliže $\lim_{x \to x_0} f(x) = 0$. Poznamenejme, že podle této definice se tento pojem týká *funkcí*, nikoliv *čísel*. Jednou z nejjednodušších funkcí, která je nekonečně malá v bodě x_0, je funkce $x - x_0$. Pro mnohé účely se jeví vhodným zavést pojem nekonečně malých různých řádů, a to tak, že srovnáváme funkci $f(x)$ s různými mocninami funkce $x - x_0$. Zaveďme tuto definici:

Definice 30. *Budiž x_0 reálné číslo, n přirozené číslo. Jestliže existuje vlastní limita*

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^n} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h)}{h^n} = A\,, \tag{10}$$

potom říkáme, že funkce $f(x)$ je v bodě x_0 nekonečně malá řádu právě n-tého, jestliže $A \neq 0$; je-li však $A = 0$, říkáme, že funkce $f(x)$ je v bodě x_0 nekonečně malá řádu vyššího než n-tého.

Význam definice je jasný: Jestliže $A \neq 0$, je podíl $f(x) : (x - x_0)^n$ pro x velmi blízká hodnotě x_0 přibližně roven číslu A, tj. $f(x)$ je „asi tak velké" jako $A(x - x_0)^n$. Je-li však $A = 0$, potom pro x velmi blízká bodu x_0 je číslo $|f(x)|$ „mnohokráte menší" než $|x - x_0|^n$.

Příklad 1. Funkce $-3x^2 + x^3$ je v bodě 0 nekonečně malá řádu vyššího než 1, neboť $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-3x^2 + x^3}{x} = 0$; táž funkce je v bodě 0 nekonečně malá řádu právě 2, neboť $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-3x^2 + x^3}{x^2} = -3 \neq 0$.

Poznámka 1. Rozeberme trochu definici 30. Není možné, aby funkce f byla v bodě x_0 řádu[15]) právě n a současně řádu vyššího než n, neboť není možné, aby limita v (10) byla různá od nuly a současně rovna nule. Dále: Je-li $m < n$ (m, n přirozená čísla) a je-li $f(x)$ v bodě x_0 řádu právě n nebo vyššího než n, potom je funkce $f(x)$ v bodě x_0 řádu vyššího než m. Neboť existuje-li vlastní limita v (10) (ať rovná nule nebo různá od nuly), je

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^m} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^n} (x - x_0)^{n-m} = A \,.\, 0 = 0 \,. \tag{11}$$

O řádu funkce nás často poučí tato věta:

Věta 151. *Budiž n přirozené číslo; nechť existuje $f^{(n)}(x_0)$. Potom platí:*

1. *Funkce $f(x)$ je v bodě x_0 nekonečně malá řádu právě n tehdy a jen tehdy, je-li*

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{pro} \quad 0 \leqq k \leqq n - 1, \quad f^{(n)}(x_0) \neq 0 \,. \tag{12}$$

2. *Funkce $f(x)$ je v bodě x_0 nekonečně malá řádu vyššího než n tehdy a jen tehdy, je-li*

$$f^{(k)}(x_0) = 0 \quad \text{pro} \quad 0 \leqq k \leqq n \,. \tag{13}$$

Důkaz. A) Nechť platí buďto (12) nebo (13). Ježto funkce $g(x) = (x - x_0)^n$ zřejmě vyhovuje podmínkám $g^{(k)}(x_0) = 0$ pro $0 \leqq k \leqq n - 1$, $g^{(n)}(x_0) = n! \neq 0$, plyne z věty 150

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^n} = \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \,,$$

takže (podle definice 30) je funkce $f(x)$ v bodě x_0 vskutku řádu právě n nebo vyššího než n podle toho, zda $f^{(n)}(x_0)$ je různé od nuly či rovno nule.

[15]) V tomto paragrafu říkám pro zkrácení často „řádu právě n" apod. místo „nekonečně malá řádu právě n" apod.

B) Nechť neplatí ani (12) ani (13); to značí, že existuje celé číslo m ($0 \leqq m < n$) takové, že $f^{(m)}(x_0) \neq 0$. Vezměme za m *nejmenší* takové číslo, takže $f^{(k)}(x_0) = 0$ pro $0 \leqq k \leqq m - 1$. Pro $m > 0$ dostáváme stejně jako v případě A) (pouze místo n máme m)

$$(14) \qquad \lim \frac{f(x)}{(x - x_0)^m} = \frac{f^{(m)}(x_0)}{m!} \neq 0\,,$$

a (14) platí i pro $m = 0$.[16]) Tedy nemůže existovat vlastní limita v (10), neboť z existence této limity by plynulo (11). V případě B) není tedy $f(x)$ v bodě x_0 ani právě řádu n ani řádu vyššího než n.

Použijeme věty 151 na tři důležité speciální případy.

I. Předpokládejme, že funkce $f(x)$ má v bodě x_0 derivaci $f'(x_0)$. Sestrojme bodem $P = [x_0, f(x_0)]$ přímku o libovolné (konečné) směrnici k; rovnice této přímky je tedy

$$(15) \qquad y = g(x)\,, \quad \text{kde} \quad g(x) = f(x_0) + k(x - x_0)\,.$$

Hledejme, jak těsně se tato přímka přimyká v okolí bodu P ke křivce $y = f(x)$, tj. vyšetřujme rozdíl $f(x) - g(x)$. Zde je $g'(x) = k$, $g''(x) = g'''(x) = \ldots = 0$. Z věty 151, použité na rozdíl $f(x) - g(x)$, plyne ihned: *Existuje-li $f'(x_0)$ a je-li $k \neq f'(x_0)$* (tj. není-li přímka (15) tečnou ke křivce $y = f(x)$ v bodě P), *je funkce $f(x) - g(x)$ v bodě x_0 nekonečně malá řádu právě 1; je-li však přímka* (15) *tečnou v bodě P, tj. je-li $k = f'(x_0)$, je $f(x) - g(x)$ v bodě x_0 nekonečně malá řádu vyššího než 1.* Předpokládáme-li ještě existenci druhé derivace $f''(x_0)$, dostáváme z věty 151 ihned: *Existuje-li $f''(x_0)$, a je-li přímka* (15) *tečnou* (tj. je-li $k = f'(x_0)$), *potom rozdíl $f(x) - g(x)$ je v bodě x_0 řádu právě 2, je-li $f''(x_0) \neq 0$; je-li však $f''(x_0) = 0$, je $f(x) - g(x)$ v bodě x_0 řádu vyššího než 2.* (Podobně dále: Je-li $f''(x_0) = 0$ a existuje-li $f'''(x_0)$, je $f(x) - g(x)$ v bodě x_0 řádu právě 3 nebo vyššího než 3 podle toho, zda je $f'''(x_0) \neq 0$ či $f'''(x_0) = 0$ atd.)

Poznámka 2. Abych se mohl snáze vyjadřovat, zavedu na chvíli tuto definici (nečísluji ji, ježto v tomto tvaru není dostatečně obecná — viz dále poznámku 4; ale umožňuje nám přehledné a názorné vyjadřování):

Buďte $f(x)$, $g(x)$ dvě funkce nabývající v určitém bodě x_0 téže hodnoty $f(x_0) = g(x_0)$; jinak řečeno, křivky

$$(16) \qquad y = f(x)\,, \quad y = g(x)$$

procházejí obě týmž bodem $P = [x_0, f(x_0)]$.

Předpokládejme, že existují (vlastní) derivace $f'(x_0)$, $g'(x_0)$. Budiž n přirozené číslo. Jestliže funkce $f(x) - g(x)$ je v bodě x_0 nekonečně malá řádu právě n (popř.

[16]) Neboť podle předpokladu existuje $f^{(n)}(x_0)$ ($n > 0$), takže $f(x)$ je spojitá v bodě x_0. V případě $m = 0$ je $f(x_0) \neq 0$, tedy

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{(x - x_0)^0} = \lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) = \frac{f(x_0)}{0!} \neq 0\,.$$

vyššího než n), budeme říkat, že křivky (16) mají v bodě P styk řádu právě $n - 1$ (popř. řádu vyššího než $n - 1$).

Proč mluvíme o styku řádu $n - 1$ a ne o styku řádu n, uvidíme za okamžik.

Výsledky obsažené v I lze pak vyslovit také takto: Existuje-li $f'(x_0)$, potom každá přímka (15), různá od tečny T (o rovnici $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$), má s křivkou C (o rovnici $y = f(x)$) v bodě P styk řádu právě 0, kdežto tečna T má s C v bodě P styk řádu vyššího než 0. Existuje-li $f''(x_0)$ a je-li $f''(x_0) \neq 0$, má T s C v bodě P styk řádu právě 1,[17]) je-li však $f''(x_0) = 0$, je tento styk řádu vyššího než 1.

II. Postupme nyní od přímky o krok dále a hledejme *kružnici*, jež má s křivkou $y = f(x)$ v bodě $P = [x_0, f(x_0)]$ styk vyššího než prvního řádu (vlastně bychom měli mluvit o horní nebo dolní polokružnici, ježto *celou* kružnici nelze vyjádřit *jedinou* rovnicí $y = g(x)$). Předpokládejme, že existuje $f''(x_0)$. Kružnice o středu $[a, b]$ a o poloměru $r > 0$ je množina všech bodů $[x, y]$, jež splňují rovnici $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$; odtud $y = g(x) = b \pm \sqrt{r^2 - (a - x)^2}$ (horní resp. dolní znamení odpovídá horní resp. dolní polokružnici). V bodě P nastane podle věty 151 styk řádu vyššího než prvního tehdy a jen tehdy, je-li $g(x_0) = f(x_0)$, $g'(x_0) = f'(x_0)$, $g''(x_0) = f''(x_0)$,[18]) tj. (po snadném počtu)

$$b \pm \sqrt{r^2 - (a - x_0)^2} = f(x_0), \tag{17}$$

$$\pm \frac{a - x_0}{\sqrt{r^2 - (a - x_0)^2}} = f'(x_0), \tag{18}$$

$$\mp \frac{r^2}{(r^2 - (a - x_0)^2)^{\frac{3}{2}}} = f''(x_0), \tag{19}$$

kteréžto rovnice mají smysl tehdy a jen tehdy, je-li $|a - x_0| < r$; mimoto má být $r > 0$. Naším cílem tedy je nalézt čísla a, b, r tak, aby bylo $r > 0$, $|a - x_0| < r$ a aby platily rovnice (17), (18), (19) buďto všechny s horním nebo všechny s dolním znamením. Za těchto podmínek je levá strana rovnice (19) různá od nuly, tj. musí být $f''(x_0) \neq 0$; *je-li* $f''(x_0) = 0$, *neexistuje kružnice žádaných vlastností.* Budiž tedy nadále $f''(x_0) \neq 0$; z (19) plyne, že je nutno volit horní znamení, jestliže $f''(x_0) < 0$ a dolní, je-li $f''(x_0) > 0$; učiňme tak a pišme pro zkrácení $y_0 = f(x_0)$. Z (17) plyne

$$b - y_0 = \mp \sqrt{r^2 - (a - x_0)^2} \neq 0 \text{ (pokud } |a - x_0| < r), \tag{20}$$

takže $b - y_0$ má totéž znamení jako $f''(x_0)$. Umocněním plyne

$$r^2 = (a - x_0)^2 + (b - y_0)^2 ;$$

[17]) Řád styku jsme svrchu definovali číslem $n - 1$ a ne číslem n právě proto, aby v nejčastějším případě (totiž tam, kde je $f''(x_0) \neq 0$) měla tečna s křivkou styk řádu právě 1.

[18]) Jde totiž o to, aby funkce $f(x) - g(x)$ byla v bodě x_0 nekonečně malá řádu vyššího než 2.

z (18), (20) plyne

$$(21)\qquad a - x_0 = \pm f'(x_0)\sqrt{r^2 - (a - x_0)^2} = -(b - y_0) f'(x_0),$$

načež (19) dává $(a - x_0)^2 + (b - y_0)^2 = \mp f''(x_0)\,|b - y_0|^3$, neboli (podle (21)) $(b - y_0)^2 (1 + (f'(x_0))^2) = \mp f''(x_0)|b - y_0|^3$; dělím-li hodnotou $(b - y_0)^2 \neq 0$ a uvědomím-li si, že $b - y_0$ má totéž znamení jako $f''(x_0)$, obdržím

$$(22)\qquad b - f(x_0) = \frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)}, \qquad a - x_0 = -\frac{1 + (f'(x_0))^2}{f''(x_0)} f'(x_0)$$

(druhá rovnice plyne z první a z (21)) a konečně

$$(23)\qquad r = \sqrt{(a - x_0)^2 + (b - f(x_0))^2} = \frac{(1 + (f'(x_0))^2)^{\frac{3}{2}}}{|f''(x_0)|}.$$

Jediná tři čísla a, b, r, jež mohou vyhovovat rovnicím (17), (18), (19) a podmínkám $r > 0$, $|a - x_0| < r$, jsou dána rovnicemi (22), (23). Že tato čísla skutečně těmto podmínkám vyhovují (a to s horním, resp. dolním znamením v (17), (18), (19) pro $f''(x_0) < 0$ resp. pro $f''(x_0) > 0$), přesvědčíte se dosazením (že $r > |a - x_0|$ – a tedy $r > 0$ – plyne z (22), (23), ježto $\sqrt{1 + (f'(x_0))^2} > \sqrt{(f'(x_0))^2} = |f'(x_0)|$). Máme tedy celkem tuto větu:

Věta 152. *Nechť existuje $f''(x_0)$. Je-li $f''(x_0) = 0$, neexistuje kružnice, jež by měla s křivkou $y = f(x)$ v bodě $P = [x_0, f(x_0)]$ styk vyššího než prvního řádu. Je-li však $f''(x_0) \neq 0$, existuje jedna jediná taková kružnice K; její střed $[a, b]$ a poloměr r jsou dány vzorci* (22), (23).

Poznámka 3. Užijeme-li vědomostí z analytické geometrie, stačí, pamatujeme-li si vzorec pro r; kružnice K prochází totiž bodem P a vzorce (22) ukazují, že její střed leží na tzv. *normále* ke křivce $y = f(x)$ sestrojené v bodě P (tj. na přímce, jež je kolmá k tečně $y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ a prochází bodem P); bod $[a, b]$ leží pak – podle první rovnice (22) – „nad" nebo „pod" bodem P podle toho, zda je $f''(x_0) > 0$ či $f''(x_0) < 0$. Kružnice K se nazývá *oskulační kružnicí* a její poloměr *poloměrem křivosti* křivky $y = f(x)$ v bodě P.

Příklad 2. Poloměr křivosti křivky $y = e^x$ v bodě $[x, y]$ ($y = e^x$) je $r = y^{-1} . (1 + y^2)^{\frac{3}{2}}$, neboť $y = y' = y'' = e^x$.

Příklad 3. Poloměr křivosti elipsy $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ ($a > 0$, $b > 0$) v bodě $[x, y]$ této elipsy dostanu takto:

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}; \quad y' = \mp\frac{b}{a}\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} = -\frac{b^2x}{a^2y};$$

$$y'' = \mp\frac{ab}{(a^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{b^4}{a^2y^3}; \quad r = \frac{(a^4y^2 + b^4x^2)^{\frac{3}{2}}}{a^4b^4}. \text{ [19]}$$

[19]) Musím ovšem zase vzít horní nebo dolní poloelipsu a vyloučit body $x = \pm a$, $y = 0$; tyto body by se daly vyšetřit tím, že by se vyměnily osy x, y; ježto vzorec pro r se nezmění, vyměním-li a s b, x s y, platil by i potom.

Poznámka 4. Dosavadní úvahy tohoto paragrafu by se daly zobecnit. Např. není zajisté přirozené, že nám v příkl. 3 při vyšetřování elipsy dělaly obtíže body $x = \pm a$, $y = 0$. Ke vzorcům, jež nemají těchto vad, bychom dospěli zavedením tzv. parametrického vyjádření křivek. Nebudu to zde provádět, ježto tyto úvahy – jakož i většina úvah tohoto paragrafu – patří spíše do diferenciální geometrie než do diferenciálního počtu.

Několik poznámek o parametrickém vyjádření křivek viz v cvičeních na konci kap. XIV.

III. Budiž n přirozené číslo; budiž dána funkce f a číslo x_0; nechť existuje $f^{(n)}(x_0)$. Hledejme mnohočlen

(24) $$P(x) = c_0 + c_1x + c_2x^2 + \ldots + c_nx^n$$

takový, aby rozdíl $f(x) - P(x)$ byl v bodě x_0 nekonečně malý řádu vyššího než n. To nastane podle věty 151 tehdy a jen tehdy, je-li

(25) $$P(x_0) = f(x_0), \quad P'(x_0) = f'(x_0), \ldots, P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

Abychom mohli tyto podmínky snadno diskutovat, pišme mnohočlen (24) ve tvaru

(26) $$P(x) = A_0 + A_1(x - x_0) + A_2(x - x_0)^2 + \ldots + A_n(x - x_0)^n.$$ [20]

Potom je $P(x_0) = A_0$ a dále

$$P'(x) = 1 . A_1 + 2 . A_2(x - x_0) + \ldots + nA_n(x - x_0)^{n-1};$$
$$P'(x_0) = 1!\, A_1.$$
$$P''(x) = 2 . 1 . A_2 + 3 . 2 . A_3(x - x_0) + \ldots + n . (n - 1)\, A_n(x - x_0)^{n-2};$$
$$P''(x_0) = 2!\, A_2.$$
....
$$P^{(n-1)}(x) = (n - 1) . (n - 2) \ldots 2 . 1 . A_{n-1} +$$
$$+ n . (n - 1) \ldots 3 . 2 . A_n(x - x_0); \quad P^{(n-1)}(x_0) = (n - 1)!\, A_{n-1}.$$
$$P^{(n)}(x) = n!\, A_n; \quad P^{(n)}(x_0) = n!\, A_n.$$

Rovnice (25) jsou tedy splněny tehdy a jen tehdy, je-li $A_0 = f(x_0)$, $1!\, A_1 = f'(x_0)$, $2!\, A_2 = f''(x_0), \ldots, n!\, A_n = f^{(n)}(x_0)$. Tedy: je-li n přirozené číslo a existuje-li $f^{(n)}(x_0)$,

[20] Každý mnohočlen tvaru (26) lze psát ve tvaru (24), neboť $A_k(x - x_0)^k = A_k\left(x^k - \binom{k}{1} . x^{k-1}x_0 + \ldots + (-1)^k \binom{k}{k} x_0^k\right)$. Naopak, napíšete-li každý člen c_kx^k ve tvaru $c_kx^k = c_k(x_0 + (x - x_0))^k = c_k\left(x_0^k + \binom{k}{1} x_0^{k-1}(x - x_0) + \binom{k}{2} x_0^{k-2}(x - x_0)^2 + \ldots + \binom{k}{k} . (x - x_0)^k\right)$, vidíte, že každý mnohočlen tvaru (24) lze psát ve tvaru (26)

existuje mezi všemi mnohočleny tvaru (24) jeden a jen jeden takový, že rozdíl $f(x) - P(x)$ je v bodě x_0 nekonečně malý řádu vyššího než n; je to mnohočlen

$$P(x) = f(x_0) + f'(x_0)\frac{x - x_0}{1!} + f''(x_0)\frac{(x - x_0)^2}{2!} + \ldots + f^{(n)}(x_0)\frac{(x - x_0)^n}{n!}.$$

Cvičení

1. Oskulační kružnice ke křivce $y = \sin x$ v bodě $[x_0, \sin x_0]$ má rovnici

$$(\sin x_0 \cdot (x - x_0) - \cos x_0 - \cos^3 x_0)^2 + (\sin x_0 \cdot (y - y_0) + 1 + \cos^2 x_0)^2 = (1 + \cos^2 x_0)^3;$$

vzorce platí, není-li $x_0 : \pi$ celé číslo.

2. Oskulační kružnice k parabole $y = x^2$ v bodě $[x_0, x_0^2]$ má rovnici

$$(2x + 8x_0^3)^2 + (2y - 1 - 6x_0^2)^2 = (1 + 4x_0^2)^3.$$

3. Budiž T tečna v bodě $P = [x_0, f(x_0)]$ ke křivce $y = f(x)$. Budiž $n > 1$ celé a nechť existuje $f^{(n)}(x_0)$. Je-li $f^{(k)}(x_0) = 0$ pro $1 < k \leqq n$, má tečna T s křivkou v bodě P styk řádu vyššího než $n - 1$; je-li $f^{(k)}(x_0) = 0$ pro $1 < k < n$, $f^{(n)}(x_0) \neq 0$, je tento styk právě řádu $n - 1$.

4. Budiž K oskulační kružnice v bodě $P = [x_0, f(x_0)]$ ke křivce $y = f(x)$; předpokládám, že $f''(x_0) \neq 0$ a že $f'''(x_0)$ existuje. Potom má kružnice K v bodě P s křivkou styk řádu právě druhého, není-li $y_0'''(1 + (y_0')^2) = 3(y_0'')^2 y_0'$ (píšeme $y_0' = f'(x_0)$ atd.); platí-li však tato rovnice, je styk řádu vyššího než druhého.