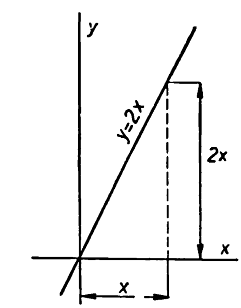
Kapitola V

SPOJITOST A LIMITA FUNKCÍ

Tato kapitola je věnována pojmu funkce a základním vlastnostem funkcí.

§ 1. Pojem funkce. Čtenáři je asi ze školy běžný pojem „funkce“: „y je funkcí x“, „y závisí na x“ a podobně. Precizování tohoto pojmu je věnován tento paragraf; napřed však uvedu několik příkladů.

Příklad 1. Napišme rovnici $y = 2x$; zvolíme-li libovolné číslo x, je touto rovnicí určeno číslo y, jež tuto rovnici splňuje, a to rovná se toto číslo dvojnásobku zvoleného čísla x. Každé hodnotě x je tedy rovnicí $y = 2x$ přiřazena zcela určitá hodnota y; místo toho říkáme, že y je funkcí x. Číslo x není zde určité číslo, např. 2 nebo -5, nýbrž je to tzv. „proměnná“; x se může měnit, může nabývat jakýchkoliv hodnot. Ovšem také y se mění, když se mění x: ale jakmile hodnota x je dána, je tím už příslušná hodnota y určena (y závisí na x); např. pro $x = 2$ je $y = 4$, pro $x = -5$ je $y = -10$ atd.; proto nazýváme též x nezávisle proměnnou, y závisle proměnnou. Ovšem y není v našem případě nic jiného, nežli jiné označení pro $2x$. Místo „y je funkcí x“ nebo „y je funkcí proměnné x“ říkáme proto také „$2x$ je funkcí x“. Vztah mezi x a y je možno graficky znázornit: v rovině opatřené dvěma pravoúhlými osami x, y sestrojíme množinu všech bodů, jejichž souřadnice splňují rovnici $y = 2x$. Jinými slovy: ke každé hodnotě x sestrojíme bod, jehož první souřadnicí neboli abscisou je právě ono číslo x a druhou souřadnicí neboli ordinátou je příslušné číslo y, tj. číslo $2x$; viz obr. 5. Říká se též úsečka místo abscisa, pořadnice místo ordináta, ale nechci užívat slova úsečka ve dvojím významu.



Obr. 5.

V následujících příkladech budu již mluvit stručněji.

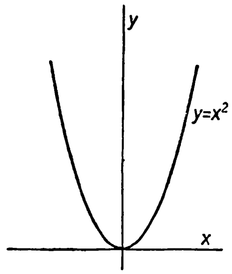
Příklad 2. Rovnice $y = x^2$ přiřazuje každé hodnotě x určitou hodnotu y. Hodnota y určená touto rovnicí je funkcí proměnné x (nebo jinak řečeno: x^2 je funkcí x). Grafické znázornění (neboli graf) této funkce je vám běžné (parabola, viz obr. 6).

Příklad 3. Rovnice $y = |x|$ rovněž definuje y jakožto funkci proměnné x. Graf této funkce dostanete okamžitě, uvážíte-li, že rovnice $y = |x|$ pro $x \geqq 0$ znamená $y = x$, kdežto pro $x \leqq 0$ znamená $y = -x$ (viz obr. 7).

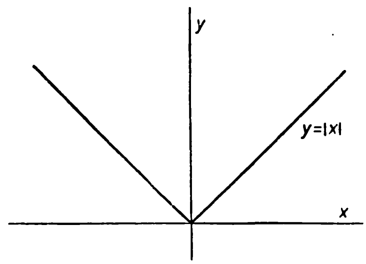
Příklad 4. Rovnice

(1) $$y = \sqrt{3 - x^2}$$

přiřazuje každé hodnotě x, pro kterou výraz $3 - x^2$ není záporný, určitou (jedinou) nezápornou hodnotu y.[1]) Je-li ovšem výraz $3 - x^2$ pro nějaké x záporný, není rovnicí (1) takové hodnotě x přiřazena žádná hodnota y (neboť imaginární čísla



Obr. 6.

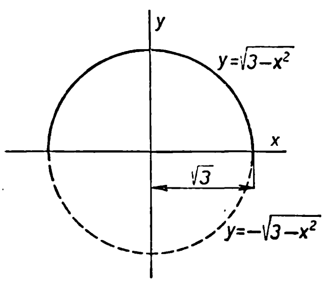


Obr. 7.

jsme dosud nezavedli). Ony hodnoty x, pro něž výraz $3 - x^2$ není záporný, jsou právě ony hodnoty x, pro něž je $x^2 \leqq 3$, tj. $|x| \leqq \sqrt{3}$, tj.

(2) $$-\sqrt{3} \leqq x \leqq \sqrt{3}.$$

Také zde říkáme, že y je funkcí proměnné x (nebo – což je totéž – že $\sqrt{3 - x^2}$ je funkcí proměnné x); ovšem nezávislé proměnná x nesmí zde nabývat všech hodnot, nýbrž pouze hodnot, vyhovujících nerovnostem (2); na ose číselné vyplňují tyto hodnoty úsečku, jejíž krajní body jsou $-\sqrt{3}, \sqrt{3}$. Graf funkce $\sqrt{3 - x^2}$ je vám znám: číslo y určené rovnicí (1) je ono nezáporné číslo y, pro něž je $y^2 = 3 - x^2$ čili $x^2 + y^2 = 3$. Grafem naší funkce je tedy plně vytažená polokružnice na obr. 8; dolní (čárkovaná) polokružnice (včetně bodů $x = \pm\sqrt{3}$, $y = 0$) je znázorněním funkce $-\sqrt{3 - x^2}$. Množina hodnot x, pro které je funkce $\sqrt{3 - x^2}$ definována, je dána „úsečkou" (2). Takové množiny se často vyskytují a proto pro ně zavádíme zvláštní označení a pojmenování takto: Buďte a, b dvě čísla, $a < b$. Množinu všech čísel x, vyhovujících nerovnostem $a \leqq x \leqq b$, značíme znakem $\langle a, b\rangle$ a nazýváme ji *uzavřeným intervalem*; množinu všech čísel x vyhovujících nerovnostem $a < x < b$ značíme znakem (a, b) a nazýváme ji *otevřeným intervalem*; podobně znak $\langle a, b)$ popř. $(a, b\rangle$ značí množinu všech čísel x vyhovujících nerovnostem $a \leqq x < b$ popř.



Obr. 8.

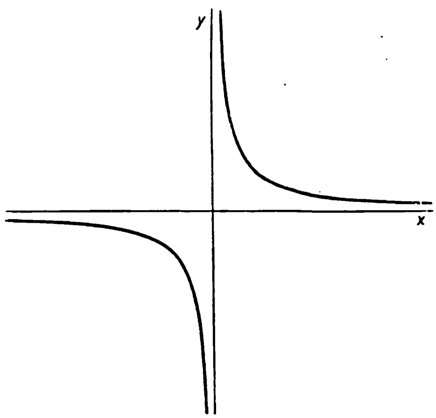
[1]) Pamatujme, že jsme (pro $a \geqq 0$) definovali $\sqrt{a}$ jako *nezáporné* číslo, jehož čtverec se rovná číslu a. Např. $\sqrt{0} = 0$, $\sqrt{4} = 2$ (a nikoliv $\sqrt{4} = -2$).

$a < x \leqq b$ (název: polouzavřené intervaly). Na ose číselné jeví se každý z těchto intervalů jako úsečka o krajních bodech a, b; rozdíl mezi jednotlivými druhy intervalů je jen v tom, že k intervalu $\langle a, b\rangle$ oba krajní body patří, k intervalu (a, b) nepatří, k intervalu $\langle a, b)$ patří z obou krajních bodů jen levý (čili „počáteční"), k intervalu $(a, b\rangle$ jen pravý (čili „koncový").

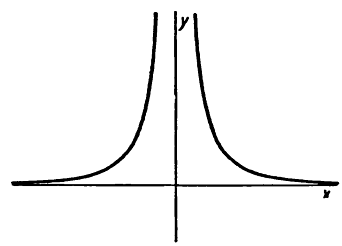
Vedle těchto intervalů, jež jsou *omezené* množiny (infimum takového intervalu je a, supremum b), zavádíme též *neomezené intervaly*[2]) takto:

$$\left.\begin{array}{l} (a, +\infty) \\ \langle a, +\infty) \\ (-\infty, b) \\ (-\infty, b\rangle \end{array}\right\} \text{značí množinu všech čísel } x \text{ splňujících nerovnost} \left\{\begin{array}{l} x > a \\ x \geqq a \\ x < b \\ x \leqq b. \end{array}\right.$$

Konečně $(-\infty, +\infty)$ bude znamenat množinu všech reálných čísel vůbec. Také intervaly $(a, +\infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, +\infty)$ nazýváme otevřenými. Označení jednotlivých druhů intervalů je tak názorné, že je jistě nemožno je zapomenout. Uveďme, že se v literatuře pro uzavřený interval $\langle a, b\rangle$ užívá častěji znaku $[a, b]$. Nezavedl jsem tento znak, protože později budu znaku $[a, b]$ užívat pro bod v rovině o souřadnicích a, b.



Obr. 9.



Obr. 10.

Příklad 5. Rovnice $y = \dfrac{1}{x}$ (čili $yx = 1$) přiřazuje každému $x \neq 0$ určitou hodnotu y, kdežto hodnotě $x = 0$ žádná hodnota y není přiřazena. Jinak řečeno: funkce $\dfrac{1}{x}$ je definována pro všechna $x \neq 0$. Graf: rovnoosá hyperbola (viz obr. 9).

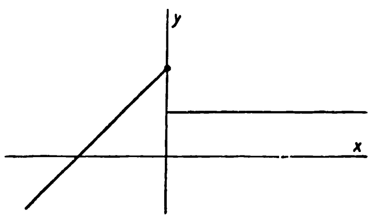
Příklad 6. Podobně je tomu u funkce $\dfrac{1}{x^2}$ (viz obr. 10).

Příklad 7. Je-li $x \leqq 0$, budiž $y = 2 + x$; je-li $x > 0$, budiž $y = 1$. Také tímto předpisem je každé hodnotě x přiřazeno jisté y; toto y je funkcí x, graf této funkce

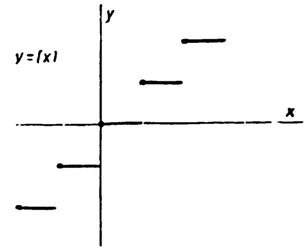
[2]) Říká se též někdy: konečné a nekonečné intervaly. Nezavádím tyto názvy, protože i „konečný" (tj. omezený) interval je nekonečná množina.

je dán na obr. 11 (bod [0, 2] je vyznačen tečkou, ježto by jinak z obrázku nebylo vidět, zda hodnotě $x = 0$ přísluší hodnota $y = 1$ či $y = 2$; podobně na obr. 12).

Příklad 8. Položme $y = [x]$ pro každé x (viz větu 46). Tím je definováno y jako funkce x pro všechna x; např. pro $x = 2$ je $y = 2$, pro $x = 2{,}1$ je $y = 2$, pro $x = -3$ je $y = -3$, pro $x = -2{,}7$ je $y = -3$ atd. (viz obr. 12).



Obr. 11.



Obr. 12.

Příklad 9. Je-li x racionální, budiž $y = 1$; je-li x iracionální, budiž $y = -1$. Tím je opět definováno y jakožto funkce proměnné x, a to pro všechna x. „Graf" této funkce dá se *slovy* popsat velmi snadno: skládá se z oněch bodů přímky $y = 1$, jež mají racionální abscisu a z oněch bodů přímky $y = -1$, jež mají iracionální abscisu. Ovšem *zrakový názor* při tomto „grafickém znázornění" selhává, ježto racionální i iracionální čísla leží hustě na ose číselné (viz větu 47). Tak např. pro $x = 5$ je $y = 1$, kdežto pro nesmírně blízkou hodnotu $x = 5 + \sqrt{2} \cdot 10^{-100}$ je $y = -1$; podobně pro $x = \sqrt{2}$ je $y = -1$, kdežto pro $x = 1{,}414$ je $y = 1$.

Po těchto příkladech můžeme již zajisté přistoupit k definici:

Definice 14. *Budiž M nějaká množina reálných čísel. Jestliže každému číslu x množiny M je přiřazeno určité číslo y, říkáme, že y je funkcí x; množinu M nazýváme oborem této funkce.*

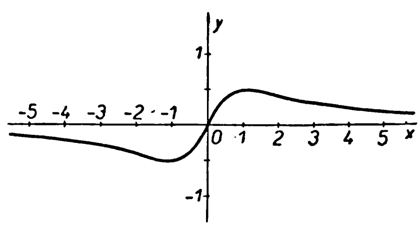
Číslo y přiřazené číslu x značíme pak často znakem $f(x)$ a mluvíme o „funkci f" nebo o „funkci $f(x)$". Pro libovolné x množiny M značí potom $f(x)$ právě onu hodnotu, která je přiřazena onomu číslu x. Např. $f(3)$ značí onu hodnotu y, která je přiřazena hodnotě 3, $f(u)$ značí onu hodnotu y, která je přiřazena hodnotě u, atd. Tak v příkl. 2 jest $f(x) = x^2$, tedy $f(1) = 1^2 = 1$, $f(3) = 3^2 = 9$, $f(t) = t^2$ atd. Nebo značí-li $f(x)$ funkci z příkladu 7, je $f(2) = f(10) = 1$, $f(0) = 2$, $f(-2) = 0$, $f(-1) = 1$.

Grafem funkce $f(x)$ (jejíž obor je množina M) rozumíme množinu všech bodů v rovině, jež mají tvar $[x, f(x)]$, kdež $x \in M$. Grafické znázornění funkce f dostanu tedy takto: ke každému $x \in M$ sestrojím bod $[x, y]$, jehož abscisa je právě ono číslo x a jehož ordináta je právě hodnota y, přiřazená oné hodnotě x (tj. hodnota $f(x)$). Ještě jinak řečeno: graf funkce f je množina všech bodů $[x, y]$, jež vyhovují rovnici $y = f(x)$.[3]) Přitom „bodem $[x, y]$ v rovině“ rozumím prostě uspořádanou dvojici čísel x, y a slovem „rovina“ rozumím množinu všech takových dvojic. Číslo x se též nazývá abscisou, číslo y ordinátou bodu $[x, y]$. Tyto pojmy neobsahují tedy žádných nejasností. Je vidět, že graf funkci f úplně určuje, a to tímto způsobem: je-li x nějaké číslo, potom buďto neexistuje v grafu žádný bod $[x, y]$ mající právě tuto abscisu x, a to znamená, že číslo x nepatří k oboru funkce f; nebo existuje v grafu právě jeden bod $[x, y]$ mající tuto abscisu x, a to znamená, že číslo x patří k oboru funkce f a ordináta y nám dává právě hodnotu $f(x)$.

„Graf“ neboli „grafické znázornění“ funkce $f(x)$ nám tuto funkci přesně popisuje. Provedeme-li toto znázornění zhruba tužkou na papíře tím, že několik bodů sestrojíme a spojíme je od ruky nebo podle křivítka, dostáváme ovšem jen přibližný[4]) popis funkce $f(x)$, který však bývá velmi užitečný pro první orientaci o průběhu funkce. Proveďme to pro funkci $f(x) = \dfrac{x}{1 + x^2}$, definovanou pro všechna x. Zde můžeme výpočty omezit na hodnoty $x \geqq 0$, neboť nahradím-li hodnotu x hodnotou $-x$, změní $f(x)$ zřejmě své znaménko (graf této funkce je tedy souměrný vzhledem k počátku souřadnic: patří-li k němu bod $[x, y]$, patří k němu i bod $[-x, -y]$). Sestrojme tabulku

x	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{4}{17}$	$\frac{5}{26}$

a nakresleme příslušné body (prosím čtenáře, aby se mnou tyto konstrukce prováděl). Pro větší zřetelnost obrázku volím měřítko na ose y dvojnásobné. Ježto z obrázku není dosud dosti jasno, jak vypadá průběh mezi hodnotami $x = 0$ a $x = 2$, sestrojme ještě $f(\frac{1}{2}) = \frac{2}{5}$, $f(\frac{3}{2}) = \frac{6}{13}$. Uvádí-li nás snad ještě příliš rychlý vzrůst funkce mezi 0 a $\frac{1}{2}$ do rozpaků, sestrojme ještě $f(\frac{1}{4}) = \frac{4}{17}$. Spojením příslušných bodů a použitím zmíněné souměrnosti dostaneme obr. 13. Můžeme očekávat, že nám tento obrázek dá aspoň hrubou orientaci o průběhu naší funkce. Čtenář učiní dobře, jestliže si — alespoň z počátku, než se s větším počtem funkcí důvěrně seznámí — u každé funkce, kterou vyšetřuje, příslušný graf aspoň zhruba načrtne.[5])



Obr. 13.

Později získáme ovšem další prostředky, které nám podstatně zdokonalí primitivní

[3]) Někdy se proto také říkává, že graf funkce $f(x)$ je „čára o rovnici $y = f(x)$“. Viděli jsme však v příkl. 9 a uvidíme ještě zřetelněji v příkl. 10, 11, že graf funkce f může být zcela odlišný od toho, co si v obecném životě pod slovem „čára“ představujeme.

[4]) Samozřejmě: každý obrázek sestrojený hmotnými prostředky (tužkou, perem, rydlem) je jen přibližnou realizací příslušných matematických vztahů, i když jeho základem jsou přesné geometrické konstrukce, jako např. na obr. 5, 7, 8, 11, 12.

[5]) U některých funkcí příliš složité povahy může ovšem tento pokus selhat; viz příkl. 9.

způsob, jak provádět přibližné grafické zobrazení, který jsme zde na jednom příkladě ukázali.

K pojmu funkce připojuji ještě tyto poznámky:

Nikde v definici funkce nestojí, že by dvěma různým hodnotám x musily být vždy přiřazeny také dvě různé hodnoty y. V příkl. 1 sice tomu tak jest, ale třeba v příkl. 2 je hodnotám x a $-x$ přiřazena táž hodnota y, totiž x^2; nebo v příkl. 7 je dokonce všem kladným hodnotám x přiřazena táž hodnota y, totiž 1. Jestliže funkce $f(x)$ má pro všechna x jistého intervalu stejnou hodnotu, říkáme, že *funkce $f(x)$ je v onom intervalu konstantní.* Tak funkce z příkl. 7 je konstantní v intervalu $(0, +\infty)$; funkce z příkl. 8 je konstantní v intervalu $\langle 0, 1)$, dále v intervalu $\langle 1, 2)$ a obecně v každém intervalu $\langle n, n+1)$, kde n je libovolné celé číslo. Je-li funkce konstantní v intervalu $(-\infty, +\infty)$ (tj. je-li definována[6]) pro všechna x a má pro všechna x stejnou hodnotu c), nazýváme ji krátce *konstantou*; její graf je zřejmě přímka $y = c$.

Závisle a nezávisle proměnnou nemusíme ovšem vždy značit písmeny y, x, nýbrž můžeme je značit libovolnými písmeny latinské, řecké nebo jiné abecedy (nebo třeba i zvláštními k tomu cíli vymyšlenými znaky). Bývá však zvykem užívat pro proměnné posledních písmen, pro konstanty prvních písmen abecedy.

Označím-li v nějaké úvaze nějakou funkci znakem $f(x)$ (třeba $f(x) = x^2 + 1$), je nutno, nemá-li vzniknout omyl, označovat v celé této úvaze znakem f stále touž funkci; vyskytuje-li se v téže úvaze několik různých funkcí, značím je různými písmeny nebo je odlišuji indexy, např. $f(x)$, $F(x)$, $g(x)$, $h(x)$, $f_1(x)$, $f_2(x)$, $\varphi(u)$, ...

Obor funkcí, vyšetřovaných v příkladech 1 až 9, byl tento: v příkl. 1, 2, 3, 7, 8, 9 interval $(-\infty, +\infty)$; v příkl. 4 interval $\langle -\sqrt{3}, \sqrt{3}\rangle$, v příkl. 5, 6 množina všech čísel různých od nuly. Budeme — aspoň v této knize — většinou vyšetřovat funkce, jejichž obor je tohoto nebo podobného rázu; ale podle definice může být obor funkce libovolná množina číselná. Uveďme aspoň dva příklady funkcí, jejichž obor je množina zcela jiného rázu než v příkl. 1 až 9.

Příklad 10. Je-li x přirozené (tj. celé kladné) číslo, budiž $T(x)$ počet kladných dělitelů čísla x; tedy např. $T(1) = 1$, $T(6) = 4$ (dělitelé: 1, 2, 3, 6). Pro ostatní x symbol $T(x)$ vůbec nedefinujme. Zde je tedy T funkce, jejímž oborem je množina všech přirozených čísel:

$$1, 2, 3, 4, \dots \tag{3}$$

Graf této funkce se skládá z osamělých bodů a vypadá tedy docela jinak než v příkl. 1 až 9; viz obr. 14.[7]) Hodnoty funkce $T(x)$ pro několik nejmenších hodnot množiny (3) jsou dány v následující tabulce; propočtěte ji kousek dále!

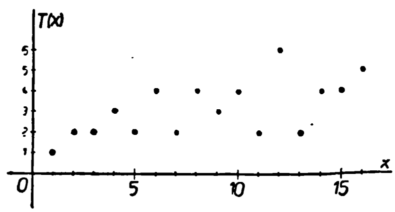
[6]) Říkáme ovšem, že funkce f je definována v bodě x, má-li symbol $f(x)$ smysl, tj. patří-li bod x do oboru funkce f. Podobně budeme říkat, že funkce f je definována v množině P, je-li definována v každém bodě množiny P, tj. je-li množina P částí oboru funkce f.

[7]) Ostatně pojem „funkce v oboru (3)“ je vlastně totožný s pojmem „posloupnost“; neboť dát funkci f v oboru (3) značí přiřadit každému přirozenému číslu n reálné číslo $f(n)$; číslo $f(n)$ můžeme pojímat buďto jako hodnotu funkce f v bodě n, nebo jako n-tý člen posloupnosti $f(1), f(2), f(3), \dots$

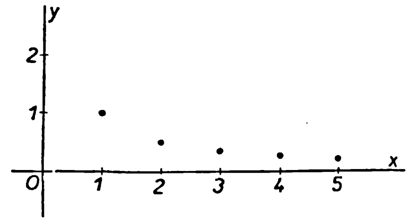
x	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
$T(x)$	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6	2	4	4	5

Dát funkci f znamená: 1) dát obor M té funkce a 2) přiřadit každému x oboru M jisté číslo $f(x)$. Dvě funkce f, g považujeme proto za stejné, mají-li týž obor M a je-li pro každé x oboru M splněna rovnost $f(x) = g(x)$. Jinak řečeno: dvě funkce považujeme za stejné, mají-li stejný graf (neboli grafické znázornění).

Příklad 11. Oborem funkce f budiž množina všech čísel různých od nuly; pro každé $x \neq 0$ položme $f(x) = \dfrac{1}{x}$. Oborem funkce g budiž množina všech kladných čísel; pro každé $x > 0$ položme $g(x) = \dfrac{1}{x}$. Oborem funkce h budiž množina všech



Obr. 14.



Obr. 15.

přirozených čísel; pro každé přirozené x položme $h(x) = \dfrac{1}{x}$. Ač jsme ve všech třech případech užili téhož výrazu $\dfrac{1}{x}$, jsou f, g, h tři různé funkce. Graf funkce f je hyperbola z obr. 9, graf funkce g je pravá větev této hyperboly, graf funkce h je dán na obr. 15.

Poznámka 1. Podotýkám hned z počátku: Komu by se tato poznámka zdála těžce srozumitelnou, může ji vynechat. Definice 14, jak jsme ji vyslovili a na příkladech objasnili, je jistě čtenáři srozumitelná; vzhledem k základnímu významu pojmu „funkce“ podám však nyní ještě jednu formu této definice. Přitom se budu opírat o pojmy „množina“ a „uspořádaná dvojice“. Budiž dána funkce v oboru M. Podotkli jsme již na str. 149, že tato funkce jest úplně popsána svým grafem. Tento graf (neboli grafické znázornění) je množina všech uspořádaných dvojic $[x, f(x)]$ pro všechna x patřící k množině M.

Můžeme tedy funkci f definovat přímo jako tuto množinu dvojic; vyslovíme proto definici funkce takto:

Definice 14a. *Funkcí f rozumíme množinu uspořádaných dvojic reálných čísel $[x, y]$, jež má tuto vlastnost: Ke každému číslu x_0 existuje nejvýše jedno* (tj. *buďto žádné nebo právě jedno*) *číslo y takové, že dvojice $[x_0, y]$ patří k množině f. Toto* *číslo y nazýváme pak hodnotou funkce f v bodě x_0 a značíme je znakem $f(x_0)$. Ona čísla x, k nimž existuje číslo y tak, že dvojice $[x, y]$ patří k množině f, tvoří jistou množinu M reálných čísel, kterou nazýváme oborem funkce f.*

Vidíte, že tato definice je v podstatě shodná s definicí 14: Každému číslu x množiny M je přiřazeno jisté číslo $f(x)$, totiž právě ono (jediné) číslo y, pro něž dvojice $[x, y]$ patří k množině f; jestliže však číslo x nepatří k množině M, není mu tímto způsobem přiřazeno žádné číslo y.

§ 2. Funkce racionální, exponenciální, logaritmická; mocnina s libovolným mocnitelem. *Celistvou racionální funkcí* proměnné x nazýváme každou funkci, kterou lze pro všechna x psát ve tvaru

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \quad \text{čili} \quad \sum_{k=0}^{n} a_kx^{n-k}\,; \tag{4}$$

přitom je n celé nezáporné číslo, čísla $a_0, a_1, \ldots, a_n$ jsou konstanty, tzv. součinitelé nebo koeficienty. Výraz tvaru (4) se nazývá *mnohočlenem* čili *polynomem*. Mezi mnohočleny vyskytuje se také tzv. mnohočlen *nulový*, jehož všichni součinitelé jsou rovni nule; jeho hodnota je ovšem rovna nule pro každé x. Není-li výraz (4) nulovým mnohočlenem, je v něm aspoň jeden součinitel různý od nuly; nejvyšší mocnina x, u níž stojí součinitel různý od nuly, udává tzv. *stupeň* mnohočlenu. Je-li tedy $a_0 \neq 0$, je výraz (4) mnohočlenem n-tého stupně; je-li např. $a_0 = a_1 = 0$, $a_2 \neq 0$, je (4) mnohočlenem stupně $n - 2$. Tak např. $x^2 + x + 3$, $x^3 + \sqrt{3}\,.\,x$, $\frac{1}{2}x - \frac{1}{3}$, x, 5, 7 jsou mnohočleny po řadě druhého, třetího, prvního, prvního, nultého, nultého stupně.[8]) Každý mnohočlen, s výjimkou mnohočlenu nulového, má tedy určitý stupeň; mnohočleny stupně nultého jsou konstanty různé od nuly. Násobíme-li mnohočlen stupně m mnohočlenem stupně n, dostáváme zřejmě mnohočlen stupně $m + n$. Racionální celistvou funkcí jsme nazvali každou funkci, kterou pro všechna x lze psát ve tvaru mnohočlenu. Tedy také např. funkce

$$f(x) = \frac{x^4 + 2x^2 + 1}{(\sqrt{x^2 + 2} - 1)(\sqrt{x^2 + 2} + 1)}$$

je racionální celistvá funkce, ačkoliv to na ní není na první pohled vidět; neboť pro všechna x jest

$$f(x) = \frac{(x^2 + 1)(x^2 + 1)}{x^2 + 2 - 1} = x^2 + 1\,.$$

Budiž nyní $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$ mnohočlen n-tého stupně, takže $a_0 \neq 0$. Tvrdím, že existuje *nejvýše n* hodnot x, pro něž $P(x) = 0$ (takové hodnoty nazýváme „kořeny rovnice $P(x) = 0$“). Důkaz provedeme úplnou indukcí.

[8]) Členy s nulovými součiniteli často vynecháváme; tak např. místo $x^3 + 0\,.\,x^2 + \sqrt{3}\,.\,x + 0$ píšeme $x^3 + \sqrt{3}\,.\,x$, čímž se hodnota výrazu nezmění.

I. Pro $n = 0$ je tvrzení správné, neboť v tomto případě je $P(x)$ konstanta od nuly různá a tedy rovnice $P(x) = 0$ není splněna pro žádné x (čili počet kořenů je nula).
II. Budiž $n - 1 \geqq 0$ a předpokládejme, že tvrzení je správné pro mnohočleny stupně $n - 1$; máme dokázat, že je správné i pro mnohočleny $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ $(a_0 \neq 0)$ stupně n. Buďto neexistuje vůbec žádná hodnota x, pro kterou $P(x) = 0$, a potom je tvrzení pro tento mnohočlen $P(x)$ správné; nebo existuje jistá hodnota α, pro kterou je $P(\alpha) = a_0\alpha^n + a_1\alpha^{n-1} + \ldots + a_n = 0$; potom je pro každé x

$$P(x) = P(x) - P(\alpha) = a_0(x^n - \alpha^n) + a_1(x^{n-1} - \alpha^{n-1}) + \ldots + a_{n-1}(x - \alpha) . \tag{5}$$

Vzpomeňme si (a přesvědčte se), že pro každé celé $k > 1$ je $x^k - \alpha^k = (x - \alpha) . (x^{k-1} + \alpha x^{k-2} + \ldots + x\alpha^{k-2} + \alpha^{k-1})$; použiji-li tohoto rozkladu v rovnici (5), dostanu (pro všechna x)

$$P(x) = (x - \alpha)(a_0x^{n-1} + d_1x^{n-2} + \ldots + d_{n-1}) , \tag{6}$$

kde $d_1, \ldots, d_{n-1}$ jsou jisté konstanty. Výraz $P(x)$ se rovná nule tehdy a jen tehdy, je-li buďto $x - \alpha = 0$ (tj. $x = \alpha$) nebo je-li

$$a_0x^{n-1} + d_1x^{n-2} + \ldots + d_{n-1} = 0 .$$

Tato rovnice (jejíž levá strana je mnohočlen stupně $n - 1$) je splněna podle předpokladu nejvýše pro $n - 1$ hodnot x. Tedy rovnice $P(x) = 0$ je skutečně splněna nejvýše pro n hodnot x, jak jsme měli dokázat.[9]

Z věty právě dokázané plyne ihned tato věta, které později často použijeme:

Věta 96. *Jsou-li $P(x)$, $Q(x)$ dva mnohočleny a platí-li rovnost $P(x) = Q(x)$ pro nekonečně mnoho x, má mnohočlen $Q(x)$ při každé mocnině x stejného součinitele jako mnohočlen $P(x)$.*[10]

Důkaz. Budiž

$P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$; $Q(x) = b_0x^n + b_1x^{n-1} + \ldots + b_n$ (číslo n si můžeme myslit u obou mnohočlenů stejné; kdyby např. bylo $P(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + \ldots + a_4$, $Q(x) = c_0x^2 + c_1x + c_2$, psali bychom prostě $Q(x) = 0 . x^4 + 0 . x^3 + c_0x^2 + c_1x + c_2$). Nechť rovnice $P(x) = Q(x)$, čili rovnice

$$(a_0 - b_0)x^n + (a_1 - b_1)x^{n-1} + \ldots + (a_{n-1} - b_{n-1})x + (a_n - b_n) = 0 \tag{7}$$

je splněna pro nekonečně mnoho hodnot x. Kdyby některé z čísel $a_k - b_k$ bylo různé od nuly, byla by levá strana rovnice (7) mnohočlenem, který má jistý stupeň

[9]) Z algebry víte možná podstatně více: připouštíme-li také imaginární čísla a počítáme-li každý kořen rovnice s jistou vhodnou „násobností", má rovnice $P(x) = 0$ *přesně n* kořenů.

[10]) Z toho speciálně plyne, že mnohočleny $P(x)$, $Q(x)$ mají buďto stejný stupeň nebo jsou oba „nulové mnohočleny".

$m \leqq n$, a tedy by podle věty právě dokázané měla rovnice (7) nejvýše m kořenů, což je proti předpokladu. Tedy je nutně $a_k - b_k = 0$ pro $k = 0, 1, \ldots, n$ čili $a_0 = b_0$, $a_1 = b_1, \ldots, a_n = b_n$, což je právě naše tvrzení.

Funkce racionální celistvé jsou, jak z předešlého patrno, ony funkce, jež lze z konstant a z proměnné x vytvořit opětovným sčítáním, odčítáním a násobením. Funkce, které lze z proměnné x a z konstant vytvořit opětovným sčítáním, odčítáním, násobením a *dělením*, nazývají se funkce *racionální*. Ježto součet, rozdíl, součin a podíl zlomků dovedete podle vzorců

$$\frac{a}{b} \pm \frac{c}{d} = \frac{ad \pm bc}{bd}, \quad \frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}, \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$$

(platných, nevyskytne-li se v žádném jmenovateli nula) vyjádřit jediným zlomkem, je patrno, že lze každou racionální funkci psát ve tvaru

$$\frac{P(x)}{Q(x)}, \tag{8}$$

kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou mnohočleny. Racionální funkce (8) je ovšem definována jen pro ta x, pro něž je $Q(x) \neq 0$. Celistvé racionální funkce jsou speciální případy funkcí racionálních; dostaneme je, stojí-li ve zlomku (8) ve jmenovateli jednička. Příklady racionálních funkcí:

$$\frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1}; \quad \frac{x - 1}{x + 1}; \quad \frac{ex^2 + 1}{x^3 - 2x}; \quad \frac{1}{x}; \quad -\frac{\sqrt{2}}{x^3}; \quad x + \frac{1}{x}\left(\text{čili } \frac{x^2 + 1}{x}\right).$$

Snadno ukážete, že žádná z těchto šesti funkcí není *celistvá* racionální funkce; ba dokonce: v žádném (sebe menším) intervalu není žádná z těchto funkcí rovna celistvé racionální funkci. Dokažme to třeba pro funkci $\frac{x^3 + x + 1}{x^2 + 1}$. Kdyby tato funkce byla pro všechna x jistého intervalu rovna nějakému mnohočlenu $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots$ $\ldots + a_n$, potom by pro všechna x tohoto intervalu — a tedy pro nekonečně mnoho x — platila rovnice

$$x^3 + x + 1 = (x^2 + 1)(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n). \tag{9}$$

Podle věty 96 by musil součin mnohočlenů vpravo v rovnici (9) být mnohočlenem 3. stupně, takže mnohočlen $a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ by musil být 1. stupně, takže rovnice (9) by byla

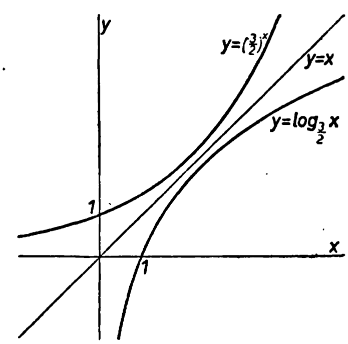
$$x^3 + x + 1 = (x^2 + 1)(a_0x + a_1).$$

Pravá strana je $a_0x^3 + a_1x^2 + a_0x + a_1$; podle věty 96 by každý součinitel tohoto mnohočlenu musil být roven „stejnolehlému“ součiniteli mnohočlenu $x^3 + x + 1$, tj. musilo by být $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$; ale zde je druhá rovnice ve sporu s čtvrtou.

K dalším důležitým funkcím vede nás mocnina a^n. Volíme-li zde n pevné, a proměnné, dostáváme funkci x^n (n-tá mocnina proměnné x). Je-li n celé, je ovšem x^n funkce racionální. Je-li n necelé kladné, je x^n definováno v intervalu $\langle 0, +\infty)$, tj. pro $x \geqq 0$ (viz definici 10 a dodatek $0^n = 0$ na str. 114); je-li n necelé záporné, je x^n definováno v intervalu $(0, +\infty)$, tj. pro $x > 0$.

Volíme-li ve výrazu a^n základ a pevný, n proměnné, dospíváme k funkci a^x, tzv. *exponenciální funkci o základu a*. Omezíme se jenom na *kladný* základ a. Potom funkce a^x je definována pro všechna x. Případ $a = 1$ je triviální (neboť $1^x = 1$ pro každé x). Případ $0 < a < 1$ se snadno převede na případ $a > 1$, užijeme-li rovnice $\left(\frac{1}{a}\right)^x = \frac{1}{a^x}$, která váže exponenciální funkci o základu a s exponenciální funkcí o základu $1 : a$. Na obr. 16 je výše ležící čára grafickým znázorněním funkce $(\frac{3}{2})^x$. Nejdůležitější exponenciální funkcí, jak seznáme, je funkce o základu e, tj. funkce e^x. Této funkci budeme říkat prostě „exponenciální funkce", bez přídavku „o základu e".

Je-li konečně $a > 0$, $a \neq 1$, je definován $\log_a x$ pro každé kladné x;[11]) při pevném a ($a > 0$, $a \neq 1$) je $\log_a x$ funkcí proměnné x, definovanou v intervalu $(0, +\infty)$ – je to tzv. logaritmická funkce o základu a. Nejdůležitější z těchto funkcí – aspoň při *obecných* úvahách – je funkce logaritmická o základu e (tzv. *přirozený logaritmus*); při ní vynecháváme označení základu a *píšeme krátce* $\lg x$ místo $\log_e x$.



Obr. 16.

Často se pro přirozený logaritmus čísla x užívá znaku $\ln x$, někdy též $\log \text{nat}\, x$ (logarithmus naturalis). Později se naučíme počítat přirozené logaritmy; z nich potom můžeme počítat logaritmy o libovolném základu podle vzorce $\log_b x = \lg x : \lg b$ (viz větu 74, bod C, kde klademe $a = e$). Podrobněji je o výpočtu dekadických logaritmů (tj. logaritmů o základu 10) pojednáno v kap. XII, § 4.

Poznámka 1. Kde se naopak užívá logaritmů k *numerickým* výpočtům, je nejdůležitější dekadický logaritmus a proto v takových případech užíváme zkráceného označení $\log x$ pro $\log_{10} x$ (tak jste tomu zvyklí ze školy).

Abychom dostali graf funkce $\log_a x$, uvažme toto: rovnice $y = \log_a x$ znamená totéž co $x = a^y$. Body $[x, y]$, vyhovující rovnici $y = \log_a x$ (čili rovnici $x = a^y$), dostanou se tedy z bodů vyhovujících rovnici $y = a^x$ tím, že vyměníme x s y. Tedy se graf funkce $y = \log_a x$ dostane tak, že sestrojíme k „čáře" $y = a^x$ čáru souměrně sdruženou vzhledem k přímce $y = x$. Viz obr. 16, kde výše ležící křivka je $y = (\frac{3}{2})^x$, níže ležící je $x = (\frac{3}{2})^y$ čili $y = \log_{\frac{3}{2}} x$.

[11]) Viz kap. III, § 2.

Cvičení

1. Dokažte, že žádná z funkcí

$$\frac{x-1}{x+1},\quad \frac{ex^2+1}{x^3-2x},\quad \frac{1}{x},\quad -\frac{\sqrt{2}}{x^3},\quad x+\frac{1}{x}$$

není v žádném (sebe menším) intervalu rovna celistvé racionální funkci (užijte věty 96).

2. Položte $f_1(x) = x + 1$; $f_2(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ pro $x \neq 1$, $f_2(1) = 2$; $f_3(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ pro $x \neq 1, f_3(1) = 1; f_4(x) = \dfrac{x^2-1}{x-1}$ pro $x \neq 1, f_4$ není definována v bodě 1. Mezi těmito funkcemi jsou tři navzájem různé, totiž f_1, f_3, f_4; kdežto f_2 je táž funkce jako f_1.

3. Graf funkce $\left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ tj. „čára" $y = \left(\dfrac{1}{a}\right)^x$ (pro $a > 0$) vzniká z čáry $y = a^x$ překlopením podle osy y.

4. „Čára" $y = \log_{1/a} x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ vzniká z čáry $y = \log_a x$ překlopením podle osy x.

§ 3. Funkce monotónní. — Definice 15. *Funkce $f(x)$ budiž definována v intervalu J* (J může být jakýkoliv interval: omezený nebo neomezený, uzavřený, otevřený nebo polouzavřený). *Jestliže pro každá dvě čísla x_1, x_2 intervalu J, splňující nerovnost $x_1 < x_2$, platí nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$, říkáme, že funkce $f(x)$ je rostoucí v intervalu J. Jestliže naopak pro každá dvě čísla x_1, x_2 intervalu J, splňující nerovnost $x_1 < x_2$, platí nerovnost $f(x_1) > f(x_2)$, říkáme, že funkce $f(x)$ je klesající v J.*

Smysl definice je tak jednoduchý a jasný, že jej nelze zapomenout: u funkce rostoucí v J se hodnota funkce zvětší, zvětším-li x (pokud x zůstává stále v intervalu J); u funkce klesající v J se hodnota funkce zmenší, zvětším-li číslo x.

Příklad 1. Funkce x^n je při $n > 0$ rostoucí v intervalu $\langle 0, +\infty)$. Důkaz: jsou-li x_1, x_2 dvě čísla intervalu $\langle 0, +\infty)$, $x_1 < x_2$, je buďto $0 < x_1 < x_2$ nebo $0 = x_1 < x_2$. V prvním případě je podle věty 70 D) $x_1^n < x_2^n$, v druhém podle věty 70 A) $x_1^n = 0 < x_2^n$, tedy rovněž $x_1^n < x_2^n$.

Příklad 2. Funkce x^n je pro $n < 0$ klesající v intervalu $(0, +\infty)$. Důkaz: je-li $0 < x_1 < x_2$, je podle dodatku 2 k větě 70 $x_2^n < x_1^n$.

Příklad 3. Funkce a^x je v intervalu $(-\infty, +\infty)$ při $a > 1$ rostoucí, při $0 < a < 1$ klesající; podobně funkce $\log_a x$ v intervalu $(0, +\infty)$. Důkaz: plyne z věty 70, z dodatku 2 k této větě, z věty 74 a z poznámky 2 k větám 74, 75.

Příklad 4. Funkce x^2 je v intervalu $(-\infty, 0\rangle$ klesající, v intervalu $\langle 0, +\infty)$ rostoucí. Důkaz: Že je rostoucí v intervalu $\langle 0, +\infty)$, víme z příkl. 1. Buďte nyní $x_1 < x_2$ dvě čísla intervalu $(-\infty, 0\rangle$, tj. $x_1 < x_2 \leqq 0$. Potom je $-x_1 > -x_2 \geqq 0$ a podle příkl. 1 je $(-x_1)^2 > (-x_2)^2$, tj. $x_1^2 > x_2^2$. Tím je důkaz proveden. Průběh funkce x^2 je tedy tento (viz obr. 6): roste-li x, potom x^2 zpočátku (pokud x je záporné) klesá, až pro $x = 0$ nabude x^2 své nejmenší hodnoty 0. Roste-li x dále, roste také x^2.

Podobně jako u monotónních posloupností (viz kap. II, § 4) zavedeme i zde dva pojmy poněkud obecnější:

Definice 16. *Jestliže v definici funkce rostoucí v intervalu J nahradíme nerovnost $f(x_1) < f(x_2)$ nerovností $f(x_1) \leqq f(x_2)$, dostáváme definici funkce neklesající v J. Jestliže obdobně v definici funkce klesající v J nahradíme nerovnost $f(x_1) > f(x_2)$ nerovností $f(x_1) \geqq f(x_2)$, dostáváme definici funkce nerostoucí v J.* (Vyslovte tyto definice podrobně!)

Funkce rostoucí, nerostoucí, klesající, neklesající v J zahrnujeme společným názvem „funkce monotónní v J". Každá funkce rostoucí v J je tím spíše neklesající v J, ale ne naopak; funkcím rostoucím a klesajícím se dává někdy společný název: funkce *ryze monotónní.* Je jasné, že funkce, jež není rostoucí v J, nemusí být ještě proto nerostoucí v J; např. funkce x^2 není v intervalu $(-1, +1)$ ani rostoucí, ani nerostoucí, ani klesající, ani neklesající.

Příklad 5. Je-li funkce rostoucí v J, je ovšem též rostoucí v každém intervalu, jenž je částí intervalu J (podobně pro funkce klesající, nerostoucí, neklesající).

Příklad 6. Je-li $f(x)$ rostoucí v J, je $c \, . \, f(x)$ též rostoucí v J, když c je kladná konstanta, kdežto $c \, . \, f(x)$ je klesající v J, když c je záporná konstanta. Důkaz: z nerovnosti $f(x_1) < f(x_2)$ plyne $cf(x_1) < cf(x_2)$ pro $c > 0$, ale $cf(x_1) > cf(x_2)$ pro $c < 0$ (podobně pro ostatní typy monotónních funkcí).

Příklad 7. Funkce $[x]$ je neklesající v intervalu $(-\infty, +\infty)$. Důkaz: Budiž $x_1 < x_2$; $[x_2]$ je *největší* celé číslo $\leqq x_2$; dále $[x_1] \leqq x_1 < x_2$, takže $[x_1]$ je nějaké celé číslo $\leqq x_2$. Tedy vskutku $[x_1] \leqq [x_2]$. Ale funkce $[x]$ není rostoucí v žádném intervalu. Důkaz: V každém intervalu J existují dvě čísla $x_1 < x_2$ tak, že v intervalu $\langle x_1, x_2 \rangle$ neleží žádné celé číslo. Potom je patrně $[x_1] = [x_2]$ (proveďte podrobně důkaz!) a tedy funkce $[x]$ není v intervalu J rostoucí: neboť existují dvě čísla $x_1 < x_2$ intervalu J, pro něž neplatí nerovnost $[x_1] < [x_2]$.

Cvičení

1. Je-li n sudé kladné, je funkce x^n klesající v intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a rostoucí v intervalu $\langle 0, +\infty)$. Je-li n liché kladné, je x^n rostoucí v $(-\infty, +\infty)$.

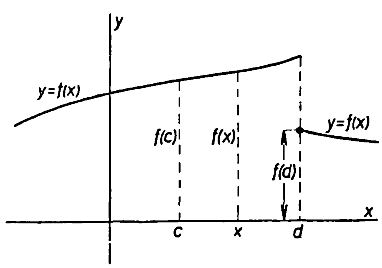
2. Je-li n sudé záporné, je x^n rostoucí v $(-\infty, 0)$ a klesající v $(0, +\infty)$; je-li n liché záporné, je x^n klesající v intervalu $(-\infty, 0)$ i v intervalu $(0, +\infty)$ (ne ovšem v intervalu $(-\infty, +\infty)$).

3. Je-li n liché kladné, je $\sqrt[n]{x}$ rostoucí v $(-\infty, +\infty)$.

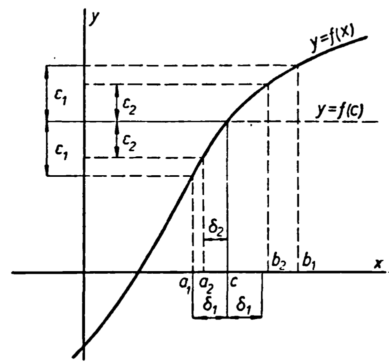
4. Je-li $a < b < c$ a je-li f rostoucí v intervalu $(a, b\rangle$ i v intervalu $\langle b, c)$, je rostoucí též v intervalu (a, c).

5. Je-li $a < b < c$ a je-li f rostoucí v intervalu $(a, b\rangle$ i v intervalu (b, c), *nemusí* být f rostoucí v intervalu (a, c) (příklad: $f(x) = x$ pro $a < x \leqq b$, $f(x) = x - 1$ pro $b < x < c$).

§ **4. Spojitost.** Čtenář jistě spojuje jistou, aspoň neurčitou představu se slovy „čára $y = f(x)$ probíhá spojitě". Např. u čáry nakreslené na obr. 17 je čtenář asi ochoten říci, že tato čára probíhá pro hodnotu $x = d$ nespojitě, pro každou jinou hodnotu x spojitě. Tuto neurčitou představu musíme ovšem nahradit přesně definovaným pojmem. Slovy, že „čára $y = f(x)$ probíhá spojitě v bodě c", budeme rozumět asi toto: jestliže, vycházejíce od hodnoty $x = c$, změníme (zmenšíme nebo zvětšíme) velmi málo hodnotu x, změní se velmi málo také ordináta bodu na čáře (tj. hodnota $f(x)$ se bude velmi málo lišit od hodnoty $f(c)$).[12]) Zde ovšem ještě musíme precizovat výrok „velmi málo" a tomu budeme rozumět takto: je-li předepsáno jakékoliv kladné číslo ε, je možno sestrojit okolo



Obr. 17.



Obr. 18.

bodu c interval $(c - \delta, c + \delta)$ $(\delta > 0)$ tak, že pro všechny hodnoty x intervalu $(c - \delta, c + \delta)$ bude se $f(x)$ od $f(c)$ lišit o méně než ε, tj. bude platit nerovnost $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$, čili nerovnosti $f(c) - \varepsilon < f(x) < f(c) + \varepsilon$. Viz obr. 18; zde je napřed zvoleno kladné číslo ε_1 a k němu nalezena čísla a_1, b_1 tak, že pro všechna x intervalu (a_1, b_1) je

$$f(c) - \varepsilon_1 < f(x) < f(c) + \varepsilon_1 . \tag{10}$$

Zvolím-li za δ_1 menší z čísel $c - a_1$, $b_1 - c$ (zde je to číslo $c - a_1$), bude nerovnost (10) platit pro všechna x intervalu $(c - \delta_1, c + \delta_1)$. Za druhé je zvoleno druhé, menší kladné číslo ε_2 a k němu sestrojena příslušná a_2, b_2, δ_2. Číslo δ obecně bude závislé na ε: čím menší je ε, tím asi menší bude nutno zvolit δ; na obr. 18 jistě dobře vidíte, jak byste musili volit δ, kdybyste za ε volili ještě další, menší a menší kladná čísla. Podstatné ovšem je, že se ke *každému* (sebe menšímu) kladnému číslu ε takové kladné δ dá nalézt. Nyní je snad již čtenář dostatečně připraven na definici spojitosti:

Definice 17. *Říkáme, že funkce $f(x)$ je spojitá v bodě c, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že nerovnost*

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon \tag{11}$$

[12]) Je vidět, že v bodě d funkce $f(x)$ tuto vlastnost nemá: volím-li x velmi blízko bodu d vlevo od d, bude se hodnota $f(x)$ značně lišit od hodnoty $f(d)$.

je splněna pro všechny hodnoty x, pro něž je

(12) $$|x - c| < \delta.$$[13]

Tato definice zřejmě vyjadřuje právě tu vlastnost funkce $f(x)$, o níž jsme předtím v tomto odstavci mluvili; pouze místo rčení „čára $y = f(x)$ probíhá spojitě v bodě c“ jsme zavedli obvyklejší rčení „funkce $f(x)$ je spojitá v bodě c“. Všechno, co jsem řekl – leckdy ne zcela přesně – v tomto § 4 před definicí 17, může čtenář zase zapomenout; sloužilo to jen k tomu, aby čtenář pochopil smysl a obsah definice 17. K této definici (jež má základní důležitost) připojím několik poznámek:

1) Je-li funkce $f(x)$ spojitá v bodě c podle definice 17, zvolme nějaké kladné ε a najděme k němu příslušné $\delta > 0$. Pro všechna x intervalu $(c - \delta, c + \delta)$ platí pak nerovnost (11); tedy musí mít symbol $f(x)$ pro všechna x intervalu $(c - \delta, c + \delta)$ smysl, neboť jinak bychom nemohli říci, že platí nerovnost (11). Tedy: *je-li funkce $f(x)$ spojitá v bodě c, je jistě definována v jistém otevřeném intervalu, obsahujícím bod c.*

2) V definici 17 požadujeme splnění nerovnosti (11) pro všechna x, splňující nerovnost (12), tj. pro všechna x intervalu $(c - \delta, c + \delta)$. Nerovnost (11) je však sama sebou splněna pro hodnotu $x = c$ (je-li ovšem $f(c)$ definováno), neboť $|f(c) - f(c)| = 0 < \varepsilon$. Místo abychom požadovali splnění nerovnosti (11) pro všechna x intervalu $(c - \delta, c + \delta)$, stačí, požadujeme-li její splnění pouze pro ona x tohoto intervalu, jež jsou *různá od c*, tj. pro všechna x, jež vyhovují nerovnostem

(13) $$0 < |x - c| < \delta\,.$$

Tedy: *smysl definice 17 se nezmění, nahradím-li v ní nerovnost* (12) *nerovnostmi* (13).

3) Spojitost funkce $f(x)$ v bodě c je tzv. *lokální* vlastnost funkce $f(x)$. To znamená, že závisí jenom na průběhu funkce $f(x)$ v nejbližším okolí bodu c. Přesně řečeno: zvolme jakýkoliv interval (a, b) obsahující bod c (tedy $a < c < b$; rozdíl $b - a$ smí být jakékoliv kladné číslo, třeba 10^{-6}, 10^{-100} nebo ještě menší). Buďte $f(x)$, $g(x)$ dvě funkce, které pro všechna x intervalu (a, b) splňují rovnost $f(x) = g(x)$ (mimo interval (a, b) mohou se funkce $f(x)$, $g(x)$ od sebe libovolně lišit). Pak tvrdím: *je-li funkce $f(x)$ spojitá v bodě c, je též funkce $g(x)$ spojitá v bodě c.* Neboť je-li funkce $f(x)$ spojitá v bodě c, lze ke každému $\varepsilon > 0$ nalézt $\delta > 0$ tak, že „nerovnost

(11) $$|f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

platí pro všechna x intervalu $(c - \delta, c + \delta)$“; tento výrok (uvedený v uvozovkách) zůstane ovšem správný, zmenším-li δ; volme tedy hned δ tak malé, aby interval $(c - \delta, c + \delta)$ byl částí intervalu (a, b). Potom pro všechna x intervalu $(c - \delta,$

---

[13]) Tyto hodnoty x jsou právě všechny hodnoty x z intervalu $(c - \delta, c + \delta)$.

$c + \delta)$ bude platit rovnost $g(x) = f(x)$, a tedy – vzhledem k (11) – nerovnost $|g(x) - g(c)| < \varepsilon$, takže funkce $g(x)$ je vskutku spojitá v bodě c.

Příklad 1. *Funkce x^2 je spojitá v každém bodě.* Důkaz: Budiž dáno libovolné číslo c. Máme dokázat toto: je-li dáno libovolné číslo $\varepsilon > 0$, existuje číslo $\delta > 0$ tak, že nerovnost $|x^2 - c^2| < \varepsilon$ platí pro všechna x intervalu $(c - \delta, c + \delta)$. Tedy budiž c, ε dáno, hledáme příslušné δ. Je-li δ *libovolné* kladné číslo, platí pro všechna x intervalu $(c - \delta, c + \delta)$ toto:

$$|x - c| < \delta ;$$

$$|x + c| = |(x - c) + 2c| \leqq 2|c| + |x - c| < 2|c| + \delta ;$$

$$|x^2 - c^2| = |x - c| \, . \, |x + c| < \delta \, . \, (2|c| + \delta) \, . \tag{14}$$

Naší snahou je nyní nalézt $\delta > 0$ tak, aby bylo

$$\delta \, . \, (2|c| + \delta) \leqq \varepsilon ; \tag{15}$$

potom totiž bude podle (14) vskutku $|x^2 - c^2| < \varepsilon$ pro všechna x intervalu $(c - \delta, c + \delta)$. Omezme se na hodnoty $\delta \leqq 1$, takže bude $2|c| + \delta \leqq 2|c| + 1$; bude-li mimoto ještě $\delta \, . \, (2|c| + 1) \leqq \varepsilon$, bude jistě nerovnost (15) splněna. Stačí tedy, zvolíme-li

$$\delta = \mathrm{Min}\left(1, \frac{\varepsilon}{2|c| + 1}\right).$$

Jak je patrno, není tento důkaz příliš jednoduchý (podal jsem jej ovšem dosti rozvláčně), ač šlo o velmi jednoduchou funkci x^2. Proto uvedeme nyní dvě jednoduché obecné věty, které nám dovolují v mnohých případech vyšetření spojitosti velmi zjednodušit.

Věta 97. *Funkce $f(x)$, $g(x)$ buďte spojité v bodě c. Potom také funkce $|f(x)|$, $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x) \, g(x)$ jsou spojité v bodě c. Je-li nadto též $g(c) \neq 0$, je též funkce $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ spojitá v bodě c.*

Důkaz věty 97 bych sice mohl provést již teď, ale raději jej na chvíli odložím; za chvíli dojdu totiž ještě k několika větám podobným, které pak odbudu všechny najednou; prozatím prosím, aby mně čtenář na chvíli věřil, že tato věta je správná. Smysl symbolů $f(x) + g(x)$ atd. je jistě jasný; např. $f(x) + g(x)$ je funkce, jež je definována právě v těch bodech, kde obě funkce $f(x)$, $g(x)$ jsou definovány; její hodnota v každém takovém bodě je rovna součtu hodnot $f(x)$, $g(x)$. U podílu ovšem ještě přistupuje podmínka $g(x) \neq 0$. Např. je-li $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$ (obor funkce: interval $\langle -1, +1 \rangle$), $g(x) = x^2$ (obor funkce: interval $(-\infty, +\infty)$), je $\dfrac{f(x)}{g(x)}$

funkce, jejíž obor je množina všech x, pro něž platí $0 < |x| \leqq 1$; ovšem je $\dfrac{f(x)}{g(x)} =$ $= \dfrac{\sqrt{1 - x^2}}{x^2}$.

Příklad 2. *Racionální funkce* $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ (kde $P(x)$, $Q(x)$ jsou mnohočleny) *je spojitá v každém bodě, v němž je jmenovatel Q různý od nuly.* Důkaz provedeme v několika krocích: I. Konstanta je funkce spojitá v každém bodě c. Neboť je-li $f(x) = a$ pro každé x, máme při libovolném c a libovolném kladném $\varepsilon > 0$ nerovnost $|f(x) - f(c)| = |a - a| = 0 < \varepsilon$ pro každé x, takže za δ mohu vzít libovolné kladné číslo. Tedy je vskutku $f(x)$ spojitá v libovolném bodě c. II. x je funkce spojitá v každém bodě. Abychom to dokázali, položme $f(x) = x$ a budiž c libovolné číslo. Máme ukázat, že ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že nerovnost $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ platí pro všechna x, pro něž je $|x - c| < \delta$. V tomto případě lze položit $\delta = \varepsilon$; neboť $f(x) - f(c) = x - c$, takže platí: je-li $|x - c| < \delta = \varepsilon$, je $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$. Tím je spojitost x v každém bodě c dokázána. III. Z těchto dvou výsledků plyne opětovným použitím věty 97: Funkce $x^2 = x \,.\, x$, $x^3 = x^2 \,.\, x, \ldots$ jsou spojité v každém bodě a tedy každý mnohočlen je spojitý v každém bodě; tedy konečně podíl dvou mnohočlenů je spojitý v každém bodě, v němž je jmenovatel různý od nuly.

Příklad 3. *Je-li $a > 0$, $a \neq 1$, je funkce $\log_a x$ spojitá v každém bodě $c > 0$.* Důkaz: V tomto i v následujícím příkladě mějte stále na paměti, že pro $a > 1$ jsou funkce a^x, $\log_a x$ rostoucí (v intervalu $(-\infty, +\infty)$, resp. v intervalu $(0, +\infty)$; viz příklad 3 v § 3).

I. Budiž především $a = e$ (takže jde o funkci $\lg x$); víme, že $e > 1$. Budiž $c > 0$, $\varepsilon > 0$. Zvolme dvě čísla v_1, v_2 tak, že

$$\lg v_1 = \lg c - \varepsilon, \quad \lg v_2 = \lg c + \varepsilon, \quad \text{tj.} \quad v_1 = ce^{-\varepsilon}, \quad v_2 = ce^{\varepsilon}. \tag{16}$$

Jest $v_1 < c < v_2$. Zvolme kladné číslo δ tak, aby interval $(c - \delta, c + \delta)$ byl částí intervalu (v_1, v_2). Pro všechna x intervalu $(c - \delta, c + \delta)$ je pak $v_1 < x < v_2$ a tedy podle (16)

$$\lg c - \varepsilon = \lg v_1 < \lg x < \lg v_2 = \lg c + \varepsilon,$$

tj.

$$|\lg x - \lg c| < \varepsilon,$$

čímž je spojitost funkce $\lg x$ v bodě c dokázána.

II. Budiž nyní a libovolné (ale ovšem $a > 0$, $a \neq 1$). Potom jest podle věty 74, bod C

$$\log_a x = \frac{\lg x}{\lg a},$$

takže spojitost funkce $\log_a x$ plyne z případu I a z věty 97 (neboť $\lg a$ je konstanta různá od nuly).

Příklad 4. *Je-li* $a > 0$, *je funkce* a^x *spojitá v každém bodě.* Důkaz: I. Pro $a = 1$ je věc samozřejmá, neboť $1^x = 1$ je konstanta. II. Buďiž $a > 1$. Buďiž c libovolné, $\varepsilon > 0$; hledáme příslušné δ. Zvolme v_2 tak, že

$$(17) \qquad a^{v_2} = a^c + \varepsilon\,, \quad \text{tj.} \quad v_2 = \log_a (a^c + \varepsilon)\,.$$

Dále volme v_1 takto: je-li $\varepsilon < a^c$, volme v_1 tak, že

$$(18) \qquad a^{v_1} = a^c - \varepsilon\,, \quad \text{tj.} \quad v_1 = \log_a (a^c - \varepsilon)\,;$$

je-li $\varepsilon \geqq a^c$, nemůžeme v_1 tak volit (neboť je vždy $a^{v_1} > 0$, kdežto $a^c - \varepsilon \leqq 0$); v tomto případě volme nějaké $v_1 < c$, třeba $v_1 = c - 1$, takže

$$(19) \qquad a^{v_1} > 0 \geqq a^c - \varepsilon\,, \quad v_1 < c\,.$$

V obou případech je podle (17), (18), (19)

$$(20) \qquad a^c - \varepsilon \leqq a^{v_1} < a^c < a^{v_2} = a^c + \varepsilon\,.$$

Tedy je $v_1 < c$ (jinak by bylo $v_1 \geqq c$, $a^{v_1} \geqq a^c$), $c < v_2$ (jinak by bylo $c \geqq v_2$, $a^c \geqq a^{v_2}$). Lze tedy volit kladné číslo δ tak, že interval $(c - \delta, c + \delta)$ je částí intervalu (v_1, v_2). Pro každé x intervalu $(c - \delta, c + \delta)$ je $v_1 < x < v_2$ a tedy podle (20) $a^c - \varepsilon \leqq a^{v_1} < a^x < a^{v_2} = a^c + \varepsilon$, tedy $|a^x - a^c| < \varepsilon$, čímž je spojitost dokázána. III. Buďiž $0 < a < 1$; položme $b = \frac{1}{a} > 1$, takže $a^x = \frac{1}{b^x}$; spojitost funkce a^x v každém bodě plyne z případu II a z věty 97.

Druhá obecná věta o spojitosti funkcí bude se týkat tzv. *funkcí složených.* Buďte f, φ dvě funkce. Každé hodnotě x (pro kterou funkce φ je definována) přiřaďme hodnotu y rovnicí $y = \varphi(x)$; této hodnotě y přiřaďme hodnotu $z = f(y)$ (pokud ovšem je $f(y)$ pro tuto hodnotu y definována). Tím jeví se nám z jakožto funkce x; každému (přípustnému) x je přiřazeno z tímto předpisem: sestrojím napřed $y = \varphi(x)$ a potom $z = f(y)$ (přípustné hodnoty x jsou ovšem ty, pro které symboly $\varphi(x)$, $f(y)$ mají smysl). Např. je-li $y = 3 - x^2$, $z = \sqrt{y}$, jeví se z jakožto funkce x, a to $z = \sqrt{3 - x^2}$; je-li $y = x^2$, $z = (y + 1)^3$, je $z = (x^2 + 1)^3$; je-li $y = 2x$, $z = e^y$, je $z = e^{2x}$. Obecně: je-li $y = \varphi(x)$, $z = f(y)$, můžeme též psát $z = f(\varphi(x))$, neboť tato rovnice znamená vskutku: z je hodnotou funkce f v bodě $\varphi(x)$, tj. z je hodnota $f(y)$, kdež y značí hodnotu $\varphi(x)$. Funkcím daným v tomto tvaru říkáme *„funkce složené“*. Podotýkám, že se tento název týká pouze *způsobu vyjádření* funkce, nikoliv její podstaty; např. buďiž $z = x^2 + 1$; chceme-li, můžeme psát z ve tvaru funkce složené: $z = y + 1$, $y = x^2$. Ale s mnohými funkcemi se nejpohodlněji pracuje, jsou-li dány ve tvaru „složené funkce“; proto se složenými funkcemi zabýváme. Vyskytují se ovšem též funkce vícenásobně složené, např. $u = f(\varphi(\psi(x)))$; to značí: je-li x dáno, je příslušné u dáno takto (mají-li všechny napsané symboly smysl): $y = \psi(x)$, $z = \varphi(y)$, $u = f(z)$. O spojitosti složených funkcí platí tato věta:

Věta 98. *Budiž $\varphi(x)$ funkce spojitá v bodě c; budiž dále $f(y)$ funkce spojitá v bodě d, kde $d = \varphi(c)$. Potom funkce $f(\varphi(x))$ je spojitá v bodě c.*

Důkaz. Budiž $\varepsilon > 0$. Máme zjistit, že existuje číslo $\delta > 0$ tak, že nerovnost

$$|f(\varphi(x)) - f(\varphi(c))| < \varepsilon \tag{21}$$

platí pro všechna x, pro něž je $|x - c| < \delta$. Podle definice čísla d lze nerovnost (21) psát ve tvaru

$$|f(\varphi(x)) - f(d)| < \varepsilon . \tag{22}$$

Ježto funkce f je spojitá v bodě d, existuje kladné číslo η tak, že nerovnost

$$|f(y) - f(d)| < \varepsilon \tag{23}$$

platí pro všechna y, pro něž je $|y - d| < \eta$. Ježto dále funkce $\varphi(x)$ je spojitá v bodě c, existuje ke kladnému číslu η, které jsme právě obdrželi, kladné číslo δ tak, že pro všechna x, splňující nerovnost $|x - c| < \delta$, platí nerovnost

$$|\varphi(x) - \varphi(c)| < \eta \quad \text{čili} \quad |\varphi(x) - d| < \eta . \tag{24}$$

Budiž nyní x libovolné číslo, pro něž platí nerovnost $|x - c| < \delta$; pro zkrácení položme $y = \varphi(x)$. Potom platí (24), tj. $|y - d| < \eta$; tedy platí (23), tj. $|f(y) - f(d)| <$ $< \varepsilon$ čili $|f(\varphi(x)) - f(d)| < \varepsilon$; tedy platí (22) a věta je tím dokázána.

Poznámka. Opětovným užitím této věty dostáváme obdobné věty pro funkce vícenásobně složené. Např. budiž $h(x)$ spojitá v bodě c_1, $g(x)$ spojitá v bodě $c_2 =$ $= h(c_1)$, $f(x)$ spojitá v bodě $c_3 = g(c_2)$; potom je funkce $f(g(h(x)))$ spojitá v bodě c_1. Důkaz: položme $\varphi(x) = g(h(x))$; podle věty 98 je funkce $\varphi(x)$ spojitá v bodě c_1; dále je $\varphi(c_1) = g(h(c_1)) = g(c_2) = c_3$ a funkce f je spojitá v bodě c_3. Podle věty 98 je funkce $f(\varphi(x)) = f(g(h(x)))$ vskutku spojitá v bodě c_1.

Příklad 5. *Funkce* $\lg(x^2 + 1)$ *je spojitá v každém bodě.* Důkaz: Položme $z = \lg y$, $y = x^2 + 1$, čili $z = \lg(x^2 + 1)$. Zde je y spojitou funkcí x v každém bodě c; příslušná hodnota $d = c^2 + 1$ je *kladná*, takže z je spojitou funkcí y v bodě d (viz příklad 3). Tedy je vskutku podle věty 98 z spojitou funkcí x v každém bodě c.

Příklad 6. *Funkce* x^x *je spojitá v každém bodě* $c > 0$. Důkaz: $x^x = (e^{\lg x})^x =$ $= e^{x \lg x}$. Položme $z = e^y$, $y = x \lg x$, takže $z = x^x$. Podle příkl. 3, 2 a podle věty 97 je funkce $x \lg x$ spojitá v každém bodě $c > 0$, funkce e^y je pak spojitá (podle příkl. 4) vůbec v každém bodě. Z toho plyne podle věty 98, že z je spojitou funkcí x v každém bodě $c > 0$.

Příklad 7. Funkce x^n je při celém n racionální funkce proměnné x a tedy je podle příkl. 2 při $n \geqq 0$ spojitá v každém bodě, při $n < 0$ v každém bodě $c \neq 0$.

Vyšetříme ještě funkci x^n při necelém n (a ovšem jen pro kladná x). Tvrdím: *funkce x^n je spojitá v každém bodě $c > 0$.* Důkaz: Položme $z = e^y$, $y = n \lg x$, takže $z = e^{n \lg x} = (e^{\lg x})^n = x^n$; důkaz se dokončí jako v příkl. 6.

Příklad 8. *Funkce* $\dfrac{e^{x^2} - 1}{2e^{x^2} - 1}$ *je spojitá v každém bodě.* Důkaz: Položme $u = \dfrac{z - 1}{2z - 1}$, $z = e^y$, $y = x^2$. Funkce x^2 je spojitá v každém bodě; příslušná hodnota y je $\geqq 0$, tedy příslušná hodnota z je $\geqq e^0 = 1$; z je spojitou funkcí y v každém bodě; konečně u je spojitou funkcí z v každém bodě, vyjma v bodě $z = \frac{1}{2}$. Ale naše „příslušná" hodnota z je jistě $\geqq 1$, takže ta výjimečná hodnota $\frac{1}{2}$ nevadí, tedy je u vskutku spojitou funkcí x v každém bodě.

Podívejme se na funkci $\sqrt{3 - x^2}$ z § 1, příkl. 4. Tato funkce je definována v intervalu $\langle -\sqrt{3}, \sqrt{3}\rangle$ a není definována v žádném bodě mimo tento interval. V každém bodě intervalu *otevřeného* $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ je tato funkce spojitá, což plyne takto: budiž $|c| < \sqrt{3}$; pišme $z = \sqrt{y}$, $y = 3 - x^2$; y je spojitou funkcí x v bodě c; příslušná hodnota y je $d = 3 - c^2 > 0$; tedy podle příkl. 7 je z spojitou funkcí y v bodě d; podle věty 98 je tedy z spojitou funkcí x v bodě c. V bodě $\sqrt{3}$ ovšem nemůžeme o spojitosti funkce $\sqrt{3 - x^2}$ mluvit, protože vpravo od bodu $\sqrt{3}$ funkce vůbec není definována. Ale z obr. 8 tušíme, že jakousi „spojitost" funkce $\sqrt{3 - x^2}$ v bodě $\sqrt{3}$ přece ještě bude mít; abychom tento případ a podobné případy mohli pohodlně vystihnout, zavádíme vedle pojmu spojitosti ještě pojem spojitosti zprava a spojitosti zleva takto:

Definice 18. *Říkáme, že funkce $f(x)$ je spojitá zprava v bodě c, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že nerovnost $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ platí pro všechna x, jež splňují nerovnosti $c \leqq x < c + \delta$. Říkáme, že funkce $f(x)$ je spojitá zleva v bodě c, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že nerovnost $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ platí pro všechna x, jež splňují nerovnosti $c - \delta < x \leqq c$.*

Vidíme, že definice spojitosti zprava se zcela podobá definici spojitosti; jediný rozdíl je v tom, že si při spojitosti zprava v bodě c vůbec nevšímáme oněch hodnot x, jež leží vlevo od c. Podobně si při spojitosti zleva v bodě c nevšímáme onech hodnot x, jež leží vpravo od c. K definici 18 lze připojit poznámky zcela podobné těm, které jsme připojili k definici 17; proto je vyslovím už zcela stručně:

1) Je-li funkce spojitá zprava (popř. zleva) v bodě c, je jistě definována v jistém intervalu $\langle c, b)$, kde b je jisté číslo větší než c (popř. v jistém intervalu $(a, c\rangle$, kde a je jisté číslo menší než c).

2) Ježto nerovnost $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ je (při kladném ε) jistě splněna pro $x = c$, lze v definici 18 nahradit nerovnosti $c \leqq x < c + \delta$ nerovnostmi $c < x < c + \delta$ a nerovnosti $c - \delta < x \leqq c$ nerovnostmi $c - \delta < x < c$.

3) Také spojitost zprava a zleva v bodě c je lokální vlastností funkce $f(x)$ (ba dokonce ještě o něco „lokálnější" než spojitost): platí-li rovnost $f(x) = g(x)$ pro všechna x intervalu $\langle c, b)$, kde b je jisté číslo větší než c a je-li funkce $f(x)$ spojitá zprava v bodě c, je též funkce $g(x)$ spojitá zprava v bodě c. Podobně pro spojitost zleva, pouze je nutno interval $\langle c, b)$ nahradit intervalem $(a, c\rangle$, kde $a < c$.

Téměř samozřejmá je věta:

Věta 99. *Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě c tehdy a jen tehdy, je-li v bodě c spojitá zprava i zleva.*

Důkaz. I. Budiž $f(x)$ spojitá v bodě c. Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje tedy $\delta > 0$ tak, že nerovnost

$$|f(x) - f(c)| < \varepsilon \tag{11}$$

platí pro všechna x intervalu $(c - \delta, c + \delta)$; nerovnost (11) platí tedy jednak pro všechna x, pro něž je $c - \delta < x \leqq c$, jednak pro všechna x, pro něž je $c \leqq x < c + \delta$; tedy je funkce $f(x)$ spojitá v bodě c zleva i zprava.

II. Budiž $f(x)$ spojitá zleva i zprava v bodě c. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existují dvě čísla $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ tak, že nerovnost (11) platí předně pro všechna x, pro něž je $c - \delta_1 < x \leqq c$, za druhé pro všechna x, pro něž je $c \leqq x < c + \delta_2$. Položíme-li tedy $\delta = \mathrm{Min}\,(\delta_1, \delta_2)$, platí nerovnost (11) pro všechna x intervalu $(c - \delta, c + \delta)$; tedy je $f(x)$ spojitá v bodě c.

Příklad 9. Dokážeme, že funkce $\sqrt{3 - x^2}$, o níž jsme mluvili před definicí 18, je spojitá zleva v bodě $\sqrt{3}$. Ježto hodnota této funkce pro $x = \sqrt{3}$ je 0, máme podle definice[14]) dokázat toto: budiž ε libovolné kladné číslo; potom existuje číslo $\delta > 0$ tak, že nerovnost $|\sqrt{3 - x^2} - 0| < \varepsilon$ čili $\sqrt{3 - x^2} < \varepsilon$ platí pro všechna x intervalu $(\sqrt{3} - \delta, \sqrt{3})$. Pro kladné $x < \sqrt{3}$ znamená nerovnost $\sqrt{3 - x^2} < \varepsilon$ totéž co $3 - x^2 < \varepsilon^2$, $x^2 > 3 - \varepsilon^2$. Je-li $\varepsilon \geqq \sqrt{3}$, je $3 - \varepsilon^2 \leqq 0$ a tedy je nerovnost $x^2 > 3 - \varepsilon^2$ splněna pro každé $x > 0$; (v tomto případě lze tedy za interval $(\sqrt{3} - \delta, \sqrt{3})$ vzít interval $(0, \sqrt{3})$, tj. lze položit $\delta = \sqrt{3}$; skutečně[15]) pro $\sqrt{3} - \sqrt{3} < x < \sqrt{3}$ je $0 < x^2 < 3$, $\sqrt{3 - x^2} < \sqrt{3} \leqq \varepsilon$). Budiž za druhé $0 < \varepsilon < \sqrt{3}$; potom je $3 - \varepsilon^2 > 0$ a nerovnost $x^2 > 3 - \varepsilon^2$ znamená pro $x > 0$ totéž co $x > \sqrt{3 - \varepsilon^2}$, takže za interval $(\sqrt{3} - \delta, \sqrt{3})$ můžeme vzít interval $(\sqrt{3 - \varepsilon^2}, \sqrt{3})$, tj. lze položit $\sqrt{3} - \delta = \sqrt{3 - \varepsilon^2}$, tj. $\delta = \sqrt{3} - \sqrt{3 - \varepsilon^2}$. Vskutku,[15]) zvolíme-li takto δ, je předně $0 < \delta < \sqrt{3}$; za druhé, je-li x v intervalu $(\sqrt{3} - \delta, \sqrt{3})$, je $0 < x < \sqrt{3}$, $x > \sqrt{3} - \delta = \sqrt{3 - \varepsilon^2}$, $x^2 > 3 - \varepsilon^2$, $3 - x^2 < \varepsilon^2$, $\sqrt{3 - x^2} < \varepsilon$. Tedy vskutku ke každému $\varepsilon > 0$ příslušné $\delta > 0$ existuje, čímž je důkaz proveden. Zároveň je vidět,

[14]) Užívám hned poznámky 2) k definici 18, podle níž smím nerovnosti $c - \delta < x \leqq c$ nahradit nerovnostmi $c - \delta < x < c$.

[15]) Tento výpočet bychom si ovšem mohli odpustit, ježto je vlastně už obsažen v předešlé úvaze.

jak lze δ volit: je-li $\varepsilon \geqq \sqrt{3}$, lze volit $\delta = \sqrt{3}$; je-li $0 < \varepsilon < \sqrt{3}$, lze volit $\delta = \sqrt{3} - \sqrt{3 - \varepsilon^2}$ (přesvědčte se číselným výpočtem, třeba pomocí logaritmických tabulek, že pro malé ε — třeba pro $\varepsilon = \frac{1}{10}$, $\varepsilon = \frac{1}{30}$, $\varepsilon = \frac{1}{100}$ — vám vyjdou též malé hodnoty δ). Podobně by se dokázala spojitost zprava v bodě $-\sqrt{3}$.

Příklad 10 (snazší). Je-li $n > 0$, definovali jsme funkci x^n v intervalu $\langle 0, +\infty)$; tato funkce je v tomto intervalu rostoucí (§ 3, příkl. 1) a v každém bodě $c > 0$ je spojitá (příklad 7). Dokažme ještě, že tato *funkce x^n je při $n > 0$ spojitá zprava v bodě nula.*[16] Ježto $0^n = 0$, $x^n > 0$ pro $x > 0$, máme dokázat toto: Je-li $\varepsilon > 0$, existuje kladné číslo δ tak, že pro všechna x intervalu $(0, \delta)$ je $|x^n - 0^n| < \varepsilon$, tj. $x^n < \varepsilon$. Tvrdím, že této podmínce vyhovuje kladné číslo $\delta = \varepsilon^{1/n}$; vskutku, je-li $0 < x < \varepsilon^{1/n}$, je $0 < x^n < (\varepsilon^{1/n})^n = \varepsilon$. Tím je důkaz proveden.

Věta 100. *Věta 97* (o spojitosti prosté hodnoty, součtu, rozdílu, součinu a podílu dvou funkcí) *zůstává správnou, nahradíme-li v ní slovo „spojitá" všude slovy „spojitá zprava" nebo všude slovy „spojitá zleva".*

Např.: součin dvou funkcí spojitých zprava v bodě c je funkce spojitá zprava v bodě c. Důkaz věty 100 provedu — podobně jako u věty 97 — až v § 5.

Naproti tomu věta 98 se stane nesprávnou, nahradíme-li v ní slovo „spojitá" všude slovy „spojitá zprava"; viz o tom cvičení 4, 5.

Cvičení

1. Funkce $f(x)$, $g(x)$ buďte spojité v bodě c, $f(c) > 0$. Potom funkce $f(x)^{g(x)}$ je spojitá v bodě c (uveďte ji na tvar $e^{g(x) \lg f(x)}$).

2. Jsou-li a, b, A, B čísla, je

$$|\mathrm{Max}\,(a, b) - \mathrm{Max}\,(A, B)| \leqq \mathrm{Max}\,(|a - A|, |b - B|).$$

(Návod: následkem symetrie stačí dokázat $\mathrm{Max}\,(a, b) - \mathrm{Max}\,(A, B) \leqq \mathrm{Max}\,(|a - A|, |b - B|)$, a to v případě $a \geqq b$; potom však $a - \mathrm{Max}\,(A, B) \leqq a - A$).

3. Jsou-li funkce $f_1, f_2, \ldots, f_n$ spojité v bodě c, jsou též funkce $\Phi(x) = \mathrm{Max}\,(f_1(x), f_2(x), \ldots \ldots, f_n(x))$, $\varphi(x) = \mathrm{Min}\,(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ spojité v bodě c (pro $n = 2$ užijte cvičení 2, dále indukcí).[17]

4. Budiž $\varphi(x) = -x^2 + 1$; $f(y) = 2$ pro $y \geqq 1$, $f(y) = 0$ pro $y < 1$; φ je spojitá v bodě 0; f je spojitá v bodě $\varphi(0) = 1$ zprava; ale $f(\varphi(x))$ není v bodě 0 spojitá zprava ani zleva (neboť $f(\varphi(0)) = 2$, $f(\varphi(x)) = 0$ pro $x \neq 0$).

5. Zato platí (dokažte!): je-li φ spojitá zprava v bodě c a funkce f spojitá (oboustranně) v bodě $d = \varphi(c)$, je $f(\varphi(x))$ spojitá zprava v bodě c.

---

[16]) Je-li n celé kladné, je ošem x^n racionální celistvá funkce a tedy je definována a spojitá v každém bodě vůbec.

[17]) Význam symbolů je jasný: pro každé x, pro něž $f_1(x), \ldots, f_n(x)$ jsou definovány, je $\Phi(x)$ rovno maximu z těchto n čísel. Např. $\Phi(x) = \mathrm{Max}\,(x, x^2)$ má tyto hodnoty: $\Phi(x) = x^2$ pro $x \leqq 0$ a pro $x \geqq 1$, $\Phi(x) = x$ pro $0 < x < 1$.

§ 5. Limita funkce. Vezměme např. funkci $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x}$. Tato funkce je zřejmě definována a spojitá v každém bodě různém od nuly. Pro $x = 0$ ovšem tato funkce není definována. Bod $x = 0$ má tedy jakési zvláštní postavení a je pochopitelno, že nás bude průběh funkce $f(x)$ právě v okolí bodu 0 zvláště zajímat. Dosazujete-li do funkce $f(x)$ za x hodnoty blízké nule (ale ovšem různé od nuly), zjistíte, že hodnota funkce $f(x)$ se málo liší od jedničky (ovšem zatím bych vám nedoporučoval, abyste toto dosazování prováděli, protože nemáme dosud prostředků k pohodlnému počítání hodnoty e^x; tyto prostředky získáme až později). Tuto okolnost vyjadřujeme slovy, že funkce $\dfrac{e^x - 1}{x}$ má v bodě 0 limitu 1. Aby tento výrok měl přesný smysl, musíme pojem limity přesně definovat, což nyní učiníme.

Definice 19. *Říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě c limitu A, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že nerovnost*

$$|f(x) - A| < \varepsilon \tag{25}$$

platí pro všechna x, pro něž je $0 < |x - c| < \delta$.

Ony hodnoty x, pro něž jsou splněny nerovnosti $0 < |x - c| < \delta$, jsou ovšem ony hodnoty x intervalu $(c - \delta, c + \delta)$, jež jsou různé od c. Smysl definice 19 je jistě jasný čtenáři, který si promyslil definici spojitosti v § 4. Přibližně řečeno, říká definice 19, že pro hodnoty x blízké hodnotě c (ale *různé* od c) je hodnota $f(x)$ velmi málo odlišná od čísla A. V definici 19 se vůbec nemluví o hodnotě $f(c)$, tj. o hodnotě funkce $f(x)$ v bodě c samotném, takže existence ani hodnota limity funkce $f(x)$ v bodě c nezávisí na hodnotě $f(c)$, ba ani na tom, zda $f(c)$ je vůbec definováno nebo ne. Podobně jako u spojitosti zavádíme též zde limitu zprava (při níž se staráme pouze o hodnoty x vpravo od c) a limitu zleva (při níž se staráme pouze o hodnoty x vlevo od c):

Definice 20. *Říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě c limitu zprava (popř. zleva) A, jestliže ke každému kladnému číslu ε existuje kladné číslo δ tak, že nerovnost* (25) *platí pro všechna x intervalu $(c, c + \delta)$ (popř. pro všechna x intervalu $(c - \delta, c)$).*

Zase se zde nemluví o hodnotě $f(c)$ (všimněte si, že jde o *otevřené* intervaly $(c, c + \delta)$, $(c - \delta, c)$, k nimž bod c nepatří). O limitách platí několik jednoduchých vět, z nichž dvě ihned uvedeme.

Věta 101. *Funkce $f(x)$ má v bodě c nejvýše jednu limitu, a rovněž nejvýše jednu limitu zprava a nejvýše jednu limitu zleva.*

Poznámka 1. Viz podobnou větu 51 o posloupnostech.

Důkaz. Předpokládejme, že dvě různá čísla A, B $(A \neq B)$ jsou současně limitami funkce $f(x)$ v bodě c; z toho máme odvodit spor. Položme $\varepsilon = \frac{1}{2}|A - B|$, takže $\varepsilon > 0$. Podle předpokladu (a podle definice 19) existují dvě kladná čísla δ_1, δ_2 s touto vlastností: je-li $0 < |x - c| < \delta_1$, je $|f(x) - A| < \varepsilon$; je-li $0 < |x - c| < \delta_2$, je $|f(x) - B| < \varepsilon$. Zvolme x tak, aby bylo $0 < |x - c| < \text{Min}(\delta_1, \delta_2)$ (to je možno, např. $x = c + \frac{1}{2}\text{Min}(\delta_1, \delta_2)$). Potom vychází $|A - B| = |A - f(x) + f(x) - B| \leqq |A - f(x)| + |f(x) - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$, tedy $|A - B| < 2\varepsilon$; ale to je nemožno, neboť $|A - B| = 2\varepsilon$.

Důkaz pro limitu zprava nebo zleva je obdobný.

Limitu funkce $f(x)$ v bodě c budeme značit (existuje-li ovšem) znakem $\lim\limits_{x \to c} f(x)$; limitu funkce $f(x)$ v bodě c zprava popř. zleva budeme značit znakem $\lim\limits_{x \to c+} f(x)$, popř. $\lim\limits_{x \to c-} f(x)$.[18]) Poznamenejme, že rovnice $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$ značí vlastně dvě tvrzení: předně, že limita funkce $f(x)$ v bodě c existuje (a je tedy ovšem podle věty 101 jednoznačně stanovena) a za druhé, že hodnota této limity je právě číslo A (podle našeho označení je $\lim\limits_{x \to c} f(x)$ určité číslo, a to právě ono číslo, jež je limitou funkce $f(x)$ v bodě c).

Věta 102. *Rovnice* $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$ *platí tehdy a jen tehdy, je-li*

$$\lim_{x \to c+} f(x) = \lim_{x \to c-} f(x) = A\,. \tag{26}$$

Slovy: Limita funkce $f(x)$ v bodě c existuje tehdy a jen tehdy, existují-li v bodě c limity zprava a zleva a jsou-li si rovny; potom se limita rovná společné hodnotě limit zprava a zleva.

Důkaz. I. Nechť $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že nerovnost

$$|f(x) - A| < \varepsilon \tag{25}$$

platí pro všechna x, pro něž je $0 < |x - c| < \delta$, tj.: pro všechna x intervalu $(c - \delta, c)$ a rovněž pro všechna x intervalu $(c, c + \delta)$. Tedy platí (26).

II. Nechť platí (26). Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existují čísla $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ tak, že nerovnost (25) platí pro všechna x intervalu $(c, c + \delta_1)$ a rovněž pro všechna x intervalu $(c - \delta_2, c)$. Položme $\delta = \text{Min}(\delta_1, \delta_2)$ (δ ovšem závisí na ε). Pro každé x různé od c, jež leží v intervalu $(c - \delta, c + \delta)$, je buďto $c - \delta_2 < x < c$ a tedy platí (25), nebo je $c < x < c + \delta_1$ a tedy rovněž platí (25). Čili: (25) platí pro všechna x intervalu $(c - \delta, c + \delta)$, jež jsou různá od c. Tedy je vskutku $\lim\limits_{x \to c} f(x) = A$.

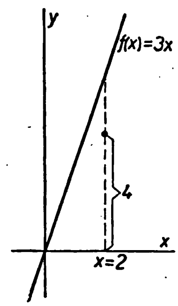
K definicím 19, 20 lze učinit podobné poznámky jako k definicím spojitosti (definice 17, 18).

[18]) Někteří autoři píší znamení = místo $\to$, dále $c + 0$ místo $c+$, $c - 0$ místo $c-$; takže např. limitu funkce $f(x)$ v bodě c zleva značí znakem $\lim\limits_{x = c - 0} f(x)$.

1. Má-li funkce $f(x)$ limitu v bodě c, je jistě definována ve všech bodech jistého intervalu $(c - \delta, c + \delta)$ $(\delta > 0)$, vyjma v bodě c (v bodě c může, ale nemusí funkce $f(x)$ být definována). Má-li funkce $f(x)$ v bodě c limitu zprava (popř. zleva), je jistě definována ve všech bodech jistého intervalu $(c, c + \delta)$ (popř. $(c - \delta, c)$) $(\delta > 0)$.

2. Limita je opět „lokální vlastnost" funkce $f(x)$. Existuje-li jistý interval (a, b) obsahující bod c tak, že ve všech bodech intervalu (a, b), vyjma nejvýše v bodě c, je $f(x) = g(x)$, potom platí: existuje-li $\lim\limits_{x \to c} f(x)$, existuje také $\lim\limits_{x \to c} g(x)$ a je $\lim\limits_{x \to c} g(x) = \lim\limits_{x \to c} f(x)$. Podobně: jestliže pro všechna x jistého intervalu (c, b) $(b > c)$ platí rovnice $f(x) = g(x)$ a existuje-li $\lim\limits_{x \to c+} f(x)$, existuje též $\lim\limits_{x \to c+} g(x)$ a je $\lim\limits_{x \to c+} g(x) = \lim\limits_{x \to c+} f(x)$. Podobně pro limitu zleva.

Nápadná podobnost definicí 17 a 19 nás vede k domněnce, že mezi spojitostí a limitou je úzký vztah; zkoumejme jej. Nahradíme-li v definici 17 nerovnost (12) nerovnostmi (13) $0 < |x - c| < \delta$ (což smíme podle poznámky 2 k definici 17), vidíme, že výrok „funkce $f(x)$ je spojitá v bodě c" znamená totéž jako výrok: „ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že nerovnost $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$ platí pro všechna x, pro něž je $0 < |x - c| < \delta$". Ale tento výrok znamená podle definice 19 totéž jako výrok „$\lim\limits_{x \to c} f(x) = f(c)$". Tím dostáváme větu:



Obr. 19.

Věta 103. *Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě c tehdy a jen tehdy, je-li*

$$\lim_{x \to c} f(x) = f(c)\,.$$

Slovy: $f(x)$ je spojitá v bodě c tehdy a jen tehdy, existuje-li limita funkce $f(x)$ v bodě c a je-li tato limita rovna hodnotě, které funkce $f(x)$ právě v bodě c nabývá. Příklad to snad ještě lépe osvětlí:

Příklad 1. Funkce $f(x) = 3x$ je spojitá v každém bodě, tedy též v bodě 2; jest $f(2) = 6$, tedy (podle věty 103) $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = 6$. Změňme funkci $f(x)$ takto: pro každé $x \neq 2$ budiž $g(x) = 3x$; dále budiž $g(2) = 4$. Ježto pro $x \neq 2$ je $g(x) = f(x)$, je $\lim\limits_{x \to 2} g(x) = \lim\limits_{x \to 2} f(x) = 6$; ale $g(2) = 4 \neq 6$, tedy funkce $g(x)$ není spojitá v bodě 2; viz obr. 19.

Srovnáním definice 18 s definicí 20 obdržíme podobně tuto „jednostrannou" větu:

Věta 104. *Funkce $f(x)$ je spojitá v bodě c zprava (popř. zleva) tehdy a jen tehdy, je-li*

$$\lim_{x \to c+} f(x) = f(c) \ \left(\textit{popř.}\ \lim_{x \to c-} f(x) = f(c)\right).$$

Příklad 2. Budiž $f(x)$ funkce z paragrafu 1, příkl. 7. Pro $x < 0$ je $f(x) = 2 + x$, tedy $\lim\limits_{x\to 0-} f(x) = \lim\limits_{x\to 0-} (2 + x) = 2 + 0 = 2$ (ježto funkce $2 + x$ je všude spojitá). Podobně pro $x > 0$ je $f(x) = 1$, tedy $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \lim\limits_{x\to 0+} 1 = 1$. Obě limity jsou různé, tedy $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ neexistuje (věta 102). Mimoto je $f(0) = 2$, takže funkce $f(x)$ (podle věty 104) je v bodě 0 spojitá zleva, ale nikoliv zprava.

Definice 19, 20 připomínají definici 6 (pro limitu posloupnosti); dá se proto očekávat, že budou pro limity funkcí platit věty, obdobné větám, jež jsme dokázali pro limity posloupností; tomu tak vskutku do značné míry jest; jednu takovou analogii jsme už poznali (srovnej větu 101 s větou 51); dvě věty tohoto rázu si nyní odvodíme.

Věta 105. *Budiž* $\lim\limits_{x\to c+} f(x) = \lim\limits_{x\to c+} h(x) = A$; *nechť existuje číslo* $b > c$ *tak, že pro všechna* x *intervalu* (c, b) *jest* $f(x) \leqq g(x) \leqq h(x)$; *potom jest* $\lim\limits_{x\to c+} g(x) = A$. (Obšírně řečeno: „potom existuje $\lim\limits_{x\to c+} g(x)$ a rovná se společné hodnotě čísel $\lim\limits_{x\to c+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to c+} h(x)$.“)

Důkaz. Budiž ε libovolné kladné číslo; podle předpokladu existují kladná čísla δ_1, δ_2 tak, že nerovnosti $A - \varepsilon < f(x) < A + \varepsilon$ platí pro všechna x intervalu $(c, c + \delta_1)$ a nerovnosti $A - \varepsilon < h(x) < A + \varepsilon$ pro všechna x intervalu $(c, c + \delta_2)$. Položme $\delta = \text{Min}(\delta_1, \delta_2, b - c)$. Je-li x číslo intervalu $(c, c + \delta)$, leží x současně v intervalu $(c, c + \delta_1)$, v intervalu $(c, c + \delta_2)$ i v intervalu (c, b), takže platí

$$A - \varepsilon < f(x) \leqq g(x) \leqq h(x) < A + \varepsilon .$$

Pro všechna x intervalu $(c, c + \delta)$ platí tedy nerovnost $|g(x) - A| < \varepsilon$, čímž je věta dokázána.

Poznámka 2. Čtenář dovede zajisté vyslovit a dokázat obdobnou větu pro limitu zleva a pro limitu (místo limita říká se leckdy „oboustranná limita“, aby se tento pojem výrazněji odlišil od „jednostranné limity“ zprava či zleva).

Příklad 3 (velmi důležitý). Na začátku tohoto paragrafu jsem vyslovil bez důkazu tvrzení, že

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1 . \tag{27}$$

Toto tvrzení nyní dokážeme. Vyšetříme napřed limitu zprava. Budiž $0 < x < \frac{1}{2}$. Určíme přirozené číslo n tak, že

$$\frac{1}{n + 1} < x \leqq \frac{1}{n} ; \tag{28}$$

tyto nerovnosti značí totéž co

$$(29)\qquad n \leqq \frac{1}{x} < n + 1\,;$$

nerovnosti (29) budou pak splněny, zvolíme-li $n = \left[\frac{1}{x}\right]$, což učiníme; ježto $\frac{1}{x} > 2$, jest $n \geqq 2$. Z nerovností (28) a z nerovností (viz příklad 2 v kap. II, § 4)

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} < e < \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^n$$

plyne

$$e^x \leqq e^{1/n} < 1 + \frac{1}{n-1}, \qquad e^x > e^{1/(n+1)} > 1 + \frac{1}{n+1}\,.$$

Podle (29) je

$$n - 1 > \frac{1}{x} - 2 = \frac{1-2x}{x}, \quad \frac{1}{n-1} < \frac{x}{1-2x}\,;$$

$$n + 1 \leqq \frac{1}{x} + 1 = \frac{1+x}{x}, \quad \frac{1}{n+1} \geqq \frac{x}{1+x}$$

a tedy

$$(30)\qquad 1 + \frac{x}{1+x} < e^x < 1 + \frac{x}{1-2x} \text{ pro } 0 < x < \tfrac{1}{2}\,.$$

Odečtu-li jedničku a dělím kladným číslem x, dostávám

$$(31)\qquad \frac{1}{1+x} < \frac{e^x - 1}{x} < \frac{1}{1-2x} \text{ pro } 0 < x < \tfrac{1}{2}\,.$$

Ze spojitosti funkcí $\frac{1}{1-2x}$, $\frac{1}{1+x}$ v bodě 0 plyne

$$\lim_{x\to 0+} \frac{1}{1-2x} = \frac{1}{1-2\,.\,0} = 1\,, \quad \lim_{x\to 0+} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1+0} = 1$$

a tedy podle (31) a podle věty 105 též

$$\lim_{x\to 0+} \frac{e^x - 1}{x} = 1\,.$$

Vyšetříme nyní limitu zleva. Budiž $-\frac{1}{2} < x < 0$ a položme $y = -x$, takže $0 < y < \frac{1}{2}$. Podle (30) bude tedy (uvedu-li vlevo a vpravo na společného jmenovatele)

$$\frac{1+2y}{1+y} < e^y < \frac{1-y}{1-2y}\,.$$

Zde píši zase $-x$ místo y a vezmu převrácené hodnoty $\left(\text{přičemž ovšem } \frac{1}{e^y} = e^x\right)$, čímž ovšem nerovnosti obrátí smysl:

$$\frac{1-x}{1-2x} > e^x > \frac{1+2x}{1+x} \quad \text{pro} \quad -\tfrac{1}{2} < x < 0 .$$

Odečtu-li jedničku a dělím pak *záporným* číslem x, dostanu po řadě

$$(32) \qquad \frac{x}{1-2x} > e^x - 1 > \frac{x}{1+x}, \quad \frac{1}{1-2x} < \frac{e^x - 1}{x} < \frac{1}{1+x}$$

pro $-\frac{1}{2} < x < 0$. Z existence limit $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{1}{1-2x} = \lim\limits_{x \to 0-} \dfrac{1}{1+x} = 1$, z (32) (druhá polovina) a z věty obdobné k větě 105 (pro limitu *zleva*) plyne

$$\lim_{x\to 0-} \frac{e^x - 1}{x} = 1 .$$

Věta 106. *Budiž* $\lim\limits_{x\to c} f(x) = A$, $\lim\limits_{x\to c} g(x) = B$. *Potom je* $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = |A|$, $\lim\limits_{x\to c} (f(x) + g(x)) = A + B$, $\lim\limits_{x\to c} (f(x) - g(x)) = A - B$, $\lim\limits_{x\to c} f(x) \, . \, g(x) = AB$. *Je-li nadto* $B \neq 0$, *je též* $\lim\limits_{x\to c} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{A}{B}$.

Důkaz je obdobný důkazu vět 55, 56; proto jej provedu dosti rychle.

I. Budiž $\varepsilon > 0$. Podle předpokladu existuje číslo $\delta > 0$ tak, že platí $|f(x) - A| < \varepsilon$, je-li $0 < |x - c| < \delta$. Tím spíše je pak $||f(x)| - |A|| < \varepsilon$;[19]) tedy $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = |A|$.

II. Budiž $\varepsilon > 0$, takže také $\frac{1}{2}\varepsilon > 0$. Podle předpokladu existují čísla $\delta_1 > 0$, $\delta_2 > 0$ tak, že platí

$$(33) \qquad \begin{aligned} |f(x) - A| &< \tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad \text{je-li} \quad 0 < |x - c| < \delta_1 ; \\ |g(x) - B| &< \tfrac{1}{2}\varepsilon, \quad \text{je-li} \quad 0 < |x - c| < \delta_2 . \end{aligned}$$

Položme $\delta = \text{Min}\,(\delta_1, \delta_2)$; je-li $0 < |x - c| < \delta$, máme podle (33)

$$|f(x) + g(x) - (A + B)| \leqq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon ,$$
$$|f(x) - g(x) - (A - B)| \leqq |f(x) - A| + |B - g(x)| < \tfrac{1}{2}\varepsilon + \tfrac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon ,$$

čímž druhé a třetí tvrzení dokázáno.

---

[19]) Neboť je obecně $||a| - |b|| \leqq |a - b|$; to plyne ze vzorců (14), (15) v kap. I, § 2:

$$|a| - |b| \leqq |a - b| , \quad |b| - |a| \leqq |a - b| ,$$

neboť $|x| = \text{Max}\,(x, -x)$ a tedy

$$||a| - |b|| = \text{Max}\,(|a| - |b|, |b| - |a|) .$$

III. Existuje číslo $\delta_1 > 0$ tak, že platí: je-li $0 < |x - c| < \delta_1$, je $|f(x) - A| < 1$ a tedy

$$(34) \qquad |f(x)| = |A + (f(x) - A)| \leqq |A| + |f(x) - A| < |A| + 1 .$$

Dále je

$$(35) \qquad f(x)\,g(x) - AB = f(x)\,(g(x) - B) + B(f(x) - A) .$$

Budiž ε kladné číslo; položme $\varepsilon_1 = \dfrac{\varepsilon}{|A| + |B| + 1}$, takže $\varepsilon_1 > 0$. Tedy existují čísla $\delta_2 > 0$, $\delta_3 > 0$ tak, že platí

$$(36) \qquad \begin{aligned} |f(x) - A| &< \varepsilon_1, \quad \text{je-li} \quad 0 < |x - c| < \delta_2 ;\\ |g(x) - B| &< \varepsilon_1, \quad \text{je-li} \quad 0 < |x - c| < \delta_3 . \end{aligned}$$

Položme $\delta = \text{Min}\,(\delta_1, \delta_2, \delta_3)$; je-li $0 < |x - c| < \delta$, je podle (35), (34), (36)

$$|f(x)\,g(x) - AB| < (|A| + 1)\,\varepsilon_1 + |B|\,\varepsilon_1 = \varepsilon ,$$

čímž je též čtvrté tvrzení dokázáno.

IV. Předpokládejme $B \neq 0$, takže $|B| > 0$. Existuje především $\delta_1 > 0$ tak, že platí: je-li $0 < |x - c| < \delta_1$, je $|g(x) - B| < \frac{1}{2}|B|$, tedy $|B| \leqq |g(x)| + |B - g(x)| < < |g(x)| + \frac{1}{2}|B|$, tedy $|g(x)| > |B| - \frac{1}{2}|B| = \frac{1}{2}|B|$, takže předně $g(x) \neq 0$ a za druhé

$$(37) \qquad \left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| = \frac{|B - g(x)|}{|g(x) \, . \, B|} \leqq \frac{|B - g(x)|}{\frac{1}{2}B^2} .$$

Budiž ε kladné číslo; zvolme $\varepsilon_1 = \frac{1}{2}B^2\varepsilon$, takže $\varepsilon_1 > 0$; existuje číslo $\delta_2 > 0$ tak, že platí

$$(38) \qquad |g(x) - B| < \varepsilon_1, \quad \text{je-li} \quad 0 < |x - c| < \delta_2 .$$

Položme $\delta = \text{Min}\,(\delta_1, \delta_2)$; je-li $0 < |x - c| < \delta$, je podle (37), (38)

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B}\right| < \frac{\varepsilon_1}{\frac{1}{2}B^2} = \varepsilon, \quad \text{takže} \quad \lim_{x \to c} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B} .$$

Podle III potom je

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to c} f(x) \, . \, \frac{1}{g(x)} = A \, . \, \frac{1}{B} = \frac{A}{B} ,$$

čímž je i poslední tvrzení dokázáno.

Věta 107. *Věta 106 zůstává v platnosti, nahradím-li v ní slovo „limita" všude slovy „limita zprava" nebo všude slovy „limita zleva".*

Důkaz je podobný jako u věty 106; pouze nerovnosti tvaru $0 < |x - c| < \delta$ je nutno nahradit nerovnostmi tvaru $c < x < c + \delta$, popř. $c - \delta < x < c$.

Nyní již mohu předvést čtenáři důkazy vět 97, 100, které jsem mu zůstal dlužen.

Důkaz věty 97. Funkce $f(x)$, $g(x)$ buďte spojité v bodě c. Podle věty 103 je tedy $\lim f(x) = f(c)$,[20] $\lim g(x) = g(c)$; podle věty 106 je tedy $\lim |f(x)| = |f(c)|$, $\lim (f(x) + g(x)) = f(c) + g(c)$, $\lim (f(x) - g(x)) = f(c) - g(c)$, $\lim f(x)\, g(x) = f(c)\, g(c)$ a v případě $g(c) \neq 0$ též

$$\lim \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(c)}{g(c)}\,.$$

Ale rovnost $\lim (f(x) + g(x)) = f(c) + g(c)$ znamená, že funkce $f(x) + g(x)$ má v bodě c limitu, jež se rovná hodnotě, které funkce $f(x) + g(x)$ nabývá právě v bodě c; tedy je funkce $f(x) + g(x)$ podle věty 103 v bodě c spojitá. Podobně u prosté hodnoty, rozdílu, součinu a podílu.

Důkaz věty 100 probíhá podobně jako důkaz věty 97; pouze místo vět 103, 106 užijeme vět 104, 107.

Čtenář možná očekává, že dokáži pro limity složených funkcí tuto větu, obdobnou větě 98 (pro spojitost složených funkcí): „Je-li $\lim_{x\to c} \varphi(x) = d$, $\lim_{x\to d} f(y) = k$, je $\lim_{x\to c} f(\varphi(x)) = k$".[21]) Ale tato věta je nesprávná, jak ukazuje tento příklad: Budiž $\varphi(x) = 1$ pro všechna x; $f(y) = 2$ pro $y = 1$, $f(y) = 3$ pro $y \neq 1$. Tedy pro libovolné c: $\lim_{x\to c} \varphi(x) = 1$ (takže $d = 1$ v našem příkladě); $\lim_{y\to 1} f(y) = 3$. Ale $f(\varphi(x)) = f(1) = 2$ pro každé x, tedy $\lim_{x\to c} f(\varphi(x)) = 2 \neq 3$.

Zároveň je vidět, v čem je vada: ze vztahu $\lim_{y\to d} f(y) = k$ neplyne nic o tom, jaká je hodnota $f(d)$; jestliže tedy $\varphi(x)$ pro nějaké x je právě rovno číslu d, nedá se o hodnotě $f(\varphi(x))$ nic říci. A současně se ukazuje cesta k nápravě: bude asi nutno předpokládat, že funkce $\varphi(x)$ pro ony hodnoty x, jež přicházejí v úvahu, není rovna číslu d. Skutečně vypadá správná věta takto:

Věta 108. *Budiž* $\lim_{x\to c} \varphi(x) = d$, $\lim_{y\to d} f(y) = k$. *Nechť existuje číslo* $\Delta > 0$ *tak, že nerovnost* $\varphi(x) \neq d$ *platí pro všechna* x, *pro něž je* $0 < |x - c| < \Delta$. *Potom je* $\lim_{x\to c} f(\varphi(x)) = k$.

Důkaz. Budiž $\varepsilon > 0$. Máme dokázat, že existuje číslo $\delta > 0$ tak, že nerovnost

$$(39) \qquad |f(\varphi(x)) - k| < \varepsilon$$

[20]) Znak $x \to c$ zde pro zkrácení vynechávám.

[21]) Podle přibližné úvahy by se zdála věta dosti přijatelnou: blíží-li se x hodnotě c, blíží se $y = \varphi(x)$ hodnotě d a tedy $f(y)$ hodnotě k. Ale ovšem tato „úvaha" není žádný důkaz, a je také nesprávná, jak ukazuje příklad následující v textu.

platí pro všechna x, pro něž je $0 < |x - c| < \delta$. Především existuje číslo $\eta > 0$ tak, že je

(40) $$|f(y) - k| < \varepsilon, \quad \text{je-li} \quad 0 < |y - d| < \eta\,.$$

K tomuto kladnému číslu η existuje kladné δ_1 tak, že je

(41) $$|\varphi(x) - d| < \eta, \quad \text{je-li} \quad 0 < |x - c| < \delta_1\,.$$

Položme $\delta = \text{Min}\,(\delta_1, \Delta)$; tvrdím, že toto číslo δ má žádanou vlastnost. Budiž totiž $0 < |x - c| < \delta$; potom je předně $\varphi(x) \neq d$, takže podle (41) je $0 < |\varphi(x) - d| < \eta$; položím-li pro zkrácení $y = \varphi(x)$, je tedy $0 < |y - d| < \eta$ a podle (40) je $|f(y) - k| < \varepsilon$, tj. platí (39). Tím je důkaz proveden.

Příklad 4. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{e^{x^2 - 1} - 1}{x^2 - 1}$. Důkaz provedeme podle věty 108. Zde volme $\varphi(x) = x^2 - 1$, $f(y) = \dfrac{e^y - 1}{y}$. Jest $\lim\limits_{x \to 1} \varphi(x) = 0$, $\lim\limits_{y \to 0} f(y) = 1$ (podle příkl. 3). Tedy bude vskutku podle věty 108 dokázáno

$$\lim_{x \to 1} f(\varphi(x)) = \lim_{x \to 1} \frac{e^{x^2 - 1} - 1}{x^2 - 1} = 1\,,$$

podaří-li se nám ještě nalézt číslo $\Delta > 0$ tak, že je $\varphi(x) \neq 0$ pro všechna x, pro něž $0 < |x - 1| < \Delta$. Ale výraz $x^2 - 1$ se rovná nule pouze pro $x = 1$ a $x = -1$. Je-li tedy $0 < |x - 1| < 2$, je jistě $x \neq 1$, $x \neq -1$ a tedy $x^2 - 1 \neq 0$. Tím je důkaz proveden (smím totiž volit $\Delta = 2$).

Připojme dvě poznámky, které jsou v praxi často užitečné.

Poznámka 3. Chci-li dokázat, že funkce f má v bodě c limitu A, mám podle definice limity dokázat toto: ke *každému* kladnému číslu ε existuje $\delta > 0$ takové, že pro všechna x vyhovující nerovnostem

(42) $$0 < |x - c| < \delta$$

je splněna nerovnost

(43) $$|f(x) - A| < \varepsilon\,.$$

Jest užitečné si uvědomit toto: jestliže k nějakému kladnému číslu ε_1 existuje číslo $\delta > 0$, vyhovující vysloveným požadavkům (označme toto číslo třeba δ_1), existuje takové δ i ke každému číslu ε, jež je větší než ε_1: stačí totiž vzít $\delta = \delta_1$; ježto pro $0 < |x - c| < \delta_1$ je splněna nerovnost $|f(x) - A| < \varepsilon_1$, je tím spíše splněna nerovnost $|f(x) - A| < \varepsilon$, jestliže ε je větší než ε_1. Krátce řečeno: při vyšetřování nerovností (42), (43) stačí, zvolíme-li napřed kladné číslo ε_1 a omezíme se potom na ony kladné hodnoty ε, jež jsou $\leqq \varepsilon_1$. Ukáži-li totiž, že ke každému kladnému číslu $\varepsilon \leqq \varepsilon_1$ existuje číslo $\delta > 0$ mající žádané vlastnosti, existuje takové δ i ke každému číslu ε, jež je větší než ε_1. Podobná poznámka platí ovšem též pro limitu zprava i zleva, jakož i pro vyšetřování spojitosti (popř. jednostranné) v bodě c (při spojitosti jde o nerovnost $|f(x) - f(c)| < \varepsilon$). Tak např. v § 4, příkl. 9 jsme vyšetřovali zvláště hodnoty $\varepsilon \geqq \sqrt{3}$ a zvláště hodnoty $\varepsilon < \sqrt{3}$; ale první případ jsme si mohli odpustit (byl to ovšem snazší z obou případů). Podobně jsme v § 4, příkl. 4 mohli vynechat případ $\varepsilon \geqq a^c$.

Poznámka 4. Často se užívá této věty: *Je-li* $\lim_{x \to c} f(x) = A$ *a je-li* $A \neq 0$, *existuje* $\delta > 0$ *tak, že pro všechna* x, *vyhovující nerovnostem* (42), *má* $f(x)$ *totéž znamení jako číslo* A (*a tedy je* $f(x) \neq 0$). Důkaz: ježto $|A| > 0$, existuje $\delta > 0$ tak, že pro všechna x, vyhovující nerovnostem (42), jest $|f(x) - A| < |A|$, tj. $A - |A| < f(x) < A + |A|$. Je-li $A > 0$, je $A - |A| = 0$, tedy $f(x) > 0$; je-li $A < 0$, je $A + |A| = 0$, tedy $f(x) < 0$. Tím je důkaz proveden. Speciálně: je-li f spojitá v bodě c, je $\lim_{x \to c} f(x) = f(c)$ a tedy platí: Je-li $f(x)$ spojitá v bodě c a je-li $f(c) \neq 0$, existuje $\delta > 0$ tak, že pro $|x - c| < \delta$ má $f(x)$ totéž znamení jako $f(c)$. Jakého tvaru nabývají tyto věty pro limitu (nebo spojitost) zprava či zleva, je čtenáři jistě beze všeho jasno.

Obě poznámky 3, 4 byly téměř samozřejmé; ale ušetří často dosti práce.

Cvičení

1. Buďte a, b, x_0 tři čísla, $a \neq 0$. Potom je $\lim_{x \to x_0} f(ax + b) = k$ tehdy a jen tehdy, je-li $\lim_{y \to ax_0 + b} f(y) = k$. Návod: z druhé rovnice plyne první podle věty 108, neboť pro $x \neq x_0$ je $ax + b \neq ax_0 + b$. Podobně přejdete od první rovnice k druhé, kladete-li $f(ax + b) = F(x)$, $ax_0 + b = y_0$, $x_0 = \frac{1}{a} y_0 - \frac{b}{a}$, takže z rovnice $\lim_{x \to (1/a)y_0 - b/a} F(x) = k$ obdržíte $\lim_{y \to y_0} F\left(\frac{1}{a} y - \frac{b}{a}\right) = k$, tj. $\lim_{y \to ax_0 + b} f(y) = k$.

2. Zvláště často se vyskytují tyto případy: $\lim_{x \to 0} f(x + b) = k$ znamená totéž co $\lim_{x \to b} f(x) = k$; $\lim_{x \to 0} f(x) = k$ znamená totéž co $\lim_{x \to 0} f(ax) = k$ (je-li $a \neq 0$).

3. Místo věty 108 lze někdy užít této věty o limitě složených funkcí: je-li $\lim_{x \to c} \varphi(x) = d$ a je-li f spojitá v bodě d, je $\lim_{x \to c} f(\varphi(x)) = f(d)$. Dokažte! Tato věta požaduje pro funkci φ méně než věta 108, pro funkci f zato více.

4. Z cvičení 3 odvoďte znova větu 98 o spojitosti složených funkcí.

5.[22]) Je-li $\lim_{x \to c} f(x) < \lim_{x \to c} g(x)$, existuje číslo $\delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - c| < \delta$ je $f(x) < g(x)$.

[22]) Cvičení 5—9 jsou analogická větám 59, 60, 57, 58 a příslušným poznámkám 3, 4 v kap. II, § 2.

6. Existují-li $\lim_{x\to c} f(x)$, $\lim_{x\to c} g(x)$ a existuje-li $\delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - c| < \delta$ je $f(x) \leqq g(x)$, je $\lim_{x\to c} f(x) \leqq \lim_{x\to c} g(x)$.

7. Vyslovte speciální případy cvičení 5, 6, je-li některá z funkcí f, g konstanta.

8. Rovnice $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ platí tehdy a jen tehdy, je-li $\lim_{x\to c} |f(x)| = 0$.

9. Je-li $\lim_{x\to c} g(x) = 0$ a existuje-li $\delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - c| < \delta$ je $|f(x)| \leqq |g(x)|$, je též $\lim_{x\to c} f(x) = 0$.

10. Existuje-li $\lim_{x\to c} f_k(x) = A_k$ pro $k = 1, \ldots, n$, existuje též $\lim_{x\to c} \operatorname{Max} (f_1(x), \ldots, f_n(x)) = \operatorname{Max} (A_1, \ldots, A_n)$. Obdobně pro Min.

11. Z cvičení 10 a z věty 105 odvoďte: nechť $\lim_{x\to c} f_k(x) = A$ pro $k = 1, \ldots, n$. Nechť existuje $\delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - c| < \delta$ je $\operatorname{Min} (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \leqq g(x) \leqq \operatorname{Max} (f_1(x), \ldots, f_n(x))$. Potom je též $\lim_{x\to c} g(x) = A$.

12. Cvičení 5 až 11 platí též pro limitu zprava nebo zleva.

§ 6. Nevlastní limita. Podobně jako u posloupností zavádíme i u funkcí pojem nevlastní limity; věc je do té míry podobná, že mohu zajisté začít ihned s definicí.

Definice 21. *Říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě c nevlastní limitu $+\infty$, jestliže ke každému reálnému číslu K existuje číslo $\delta > 0$ tak, že nerovnost $f(x) > K$ platí pro všechna x, pro něž je $0 < |x - c| < \delta$. Znak: $\lim_{x\to c} f(x) = +\infty$. Říkáme, že funkce $f(x)$ má v bodě c nevlastní limitu $-\infty$, jestliže ke každému reálnému číslu K existuje číslo $\delta > 0$ tak, že nerovnost $f(x) < K$ platí pro všechna x, pro něž je $0 < |x - c| < \delta$. Znak: $\lim_{x\to c} f(x) = -\infty$. Podobně se definují symboly $\lim_{x\to c+} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to c+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to c-} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to c-} f(x) = -\infty$; pouze nerovnosti $0 < |x - c| < \delta$ je nutno nahradit u prvních dvou symbolů nerovnostmi $c < x < c + \delta$, u druhých dvou symbolů nerovnostmi $c - \delta < x < c$.*

Symbol $\lim_{x\to c+} f(x) = +\infty$ značí podle definice asi toto (populárně řečeno): je-li x velmi blízko bodu c (ale vpravo od něho), je $f(x)$ velmi veliké; přesněji: ať si zvolím číslo K jakkoliv velké (třeba $K = 10^3$ nebo $K = 10^{100}$ apod.), je $f(x)$ větší než K pro všechna x (vpravo od c), jež jsou dostatečně blízko bodu c (tj. jež splňují nerovnosti $c < x < c + \delta$ při vhodně zvoleném $\delta > 0$). Je zřejmo, že nás zde hlavně zajímají velké hodnoty K.

Podobně: symbol $\lim_{x\to c+} f(x) = -\infty$ značí — populárně řečeno — asi toto: je-li x velmi blízko bodu c (ale vpravo od něho), je $f(x)$ záporné a má velmi velkou prostou hodnotu;[23]) přesněji: ať si zvolím číslo K jakkoliv (třeba $K = -10^3$ nebo

[23]) To značí: bod $[x, f(x)]$ leží velmi „hluboko" pod osou x.

$K = -10^{100}$ apod.), je $f(x)$ menší než K pro všechna x (vpravo od c), jež jsou dostatečně blízko bodu c (tj. jež splňují nerovnosti $c < x < c + \delta$ při vhodně zvoleném $\delta > 0$). Je zřejmo, že nás zde zajímají hlavně ony hodnoty K, jež jsou záporné a mají velikou prostou hodnotu.

Poznámka 1[23a]. Existuje-li k nějakému číslu K_1 číslo $\delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - c| < \delta$ je $f(x) > K_1$, existuje takové číslo $\delta > 0$ i ke každému menšímu číslu $K < K_1$ (a to můžeme vzít totéž δ jako při K_1, neboť z nerovnosti $f(x) > K_1$ plyne $f(x) > K$). Při vyšetřování, zda je $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$, stačí se tedy omezit na hodnoty K, jež jsou větší než jisté libovolně zvolené číslo K_1 (např. stačí se omezit na hodnoty $K > 0$ nebo $K \geqq 100\,000$ apod.). Podobně: při vyšetřování, zda je $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$, stačí se omezit na hodnoty K, jež jsou menší než jisté libovolně zvolené číslo K_1 (např. stačí se omezit na hodnoty $K < 0$ nebo na hodnoty $K < -1000$ apod.). Snad je téměř zbytečné poznamenávat toto: je-li $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$ (popř. $-\infty$), existuje $\delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - c| < \delta$ je $f(x)$ stále kladná (popř. záporná).

Na rozdíl od nevlastních limit právě zavedených nazýváme někdy limity, zavedené definicemi 19, 20, limitami vlastními. Tvrdím nyní předně: *funkce, která má v bodě c vlastní limitu, nemůže mít současně v bodě c nevlastní limitu.* Důkaz: nechť $\lim_{x \to c} f(x) = A$ (vlastní limita). Existuje tedy číslo $\delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - c| < \delta$ je $|f(x) - A| < 1$, tj. $A - 1 < f(x) < A + 1$. Kdyby funkce $f(x)$ měla v bodě c nevlastní limitu $+\infty$, existovalo by číslo $\delta_1 > 0$ tak, že pro $0 < |x - c| < \delta_1$ by bylo $f(x) > A + 1$. Zvolme x tak, že $0 < |x - c| < \text{Min}(\delta, \delta_1)$ (např. $x = c + \frac{1}{2} \text{Min}(\delta, \delta_1)$); potom by bylo $f(x) < A + 1$ a současně $f(x) > A + 1$, což je nemožno. Kdyby za druhé měla funkce $f(x)$ v bodě c nevlastní limitu $-\infty$, existovalo by číslo $\delta_1 > 0$ tak, že by pro $0 < |x - c| < \delta_1$ bylo $f(x) < A - 1$. Podobně jako dříve by např. pro $x = c + \frac{1}{2} \text{Min}(\delta, \delta_1)$ musilo být $f(x) > A - 1$ a současně $f(x) < A - 1$, což je nemožno. Za druhé: *funkce $f(x)$ nemůže mít v bodě c nevlastní limitu $+\infty$ a současně nevlastní limitu $-\infty$.* Kdyby totiž měla obě tyto limity, musila by existovat čísla $\delta > 0$, $\delta_1 > 0$ tak, že by pro $0 < |x - c| < \delta$ bylo $f(x) > 0$ a pro $0 < |x - c| < \delta_1$ by bylo $f(x) < 0$. Tedy např. pro $x = c + \frac{1}{2} \text{Min}(\delta, \delta_1)$ by bylo $f(x) > 0$ a současně $f(x) < 0$, což je nemožno. Úhrnem řečeno: pro funkci $f(x)$ jsou možné tyto případy:

1) $f(x)$ má v bodě c vlastní limitu (a to jedinou podle věty 101) a potom nemá v bodě c nevlastní limitu.

2) $f(x)$ má v bodě c limitu $+\infty$ a potom nemá v bodě c ani vlastní limitu ani limitu $-\infty$.

[23a]) Obdobná poznámkám 3, 4 v § 5.

3) $f(x)$ má v bodě c limitu $-\infty$ a potom nemá v bodě c ani vlastní limitu ani limitu $+\infty$.

4) $f(x)$ nemá v bodě c ani vlastní ani nevlastní limitu.

Podobný výsledek (s podobným důkazem) platí i pro limity zprava a zleva. Krátce řečeno, máme tuto větu:

Věta 109. *Věta 101 platí i tehdy, připouštíme-li vedle vlastních též nevlastní limity.*

Rovněž věta 102 platí též pro nevlastní limity; rozdíl v důkazu proti případu vlastních limit je jen ten, že nerovnost (25) nahradíme v případě limity $+\infty$ nerovností $f(x) > K$ a v případě limity $-\infty$ nerovností $f(x) < K$, kde K je libovolné reálné číslo.[24])

Příklad 1. *Pro* $n > 0$ *je* $\lim\limits_{x\to 0+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$. Důkaz: Máme ukázat, že ke každému K existuje kladné δ tak, že pro $0 < x < \delta$ je $\dfrac{1}{x^n} > K$; podle poznámky 1 stačí se omezit na *kladná* K. Potom však nerovnost $\dfrac{1}{x^n} > K$ znamená při kladném x totéž co $x^n < \dfrac{1}{K}$, $x < \dfrac{1}{K^{1/n}}$. Lze tedy volit $\delta = \dfrac{1}{K^{1/n}}$ (čím větší K, tím menší nám vyšlo δ, což je přirozené).

Příklad 2. Je-li n *celé*, je x^n definováno i pro $x < 0$ a můžeme se v předešlém příkladu ptát též po limitě zleva, popř. po oboustranné limitě. *Je-li* n *sudé kladné, je* $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$. Důkaz: Pro $x \neq 0$ je zde $x^n = |x|^n$. Ke každému K máme nalézt číslo $\delta > 0$ tak, aby pro $0 < |x| < \delta$ bylo $\dfrac{1}{x^n} = \dfrac{1}{|x|^n} > K$. Omezme se opět na kladná K; je-li $K > 0$, platí nerovnost $\dfrac{1}{|x|^n} > K$ tehdy a jen tehdy, je-li $0 < |x| < \dfrac{1}{K^{1/n}}$, takže lze volit opět $\delta = \dfrac{1}{K^{1/n}}$. *Je-li* n *liché kladné, je* $\lim\limits_{x\to 0-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$. Důkaz: Pro $x < 0$ je $x^n = -|x|^n$ a máme tedy ke každému K nalézt $\delta > 0$ tak, aby pro $-\delta < x < 0$ bylo $-\dfrac{1}{|x|^n} < K$. Podle poznámky 1 můžeme se zde omezit na *záporná* K. Je-li však $K < 0$, znamená nerovnost $-\dfrac{1}{|x|^n} < K$ pro $x < 0$ totéž co $\dfrac{1}{|x|^n} > |K|$, tj.

[24]) Poznamenejme též, že poznámky 1, 2 na str. 169 platí i pro limity nevlastní, jak je ihned patrno z definice 21.

totéž co $-x = |x| < \frac{1}{|K|^{1/n}}$, tj. totéž co $-\frac{1}{|K|^{1/n}} < x < 0$. Lze tedy zvolit $\delta = \frac{1}{|K|^{1/n}}$. (Přirozeně: je-li K záporné a má velkou prostou hodnotu, vyjde δ malé.)

Příklad 3. Pro $n > 0$ je $\lim\limits_{x \to c+} \frac{1}{(x-c)^n} = +\infty$; pro sudé kladné n je $\lim\limits_{x \to c-} \frac{1}{(x-c)^n} = +\infty$, pro liché kladné n je $\lim\limits_{x \to c-} \frac{1}{(x-c)^n} = -\infty$. Důkaz jako v příkl. 1, 2.

Příklad 4. $\lim\limits_{x \to 0+} \lg x = -\infty$. Důkaz: budiž K libovolné číslo; máme najít $\delta > 0$ tak, aby pro $0 < x < \delta$ bylo $\lg x < K$. K tomu cíli volme δ tak, aby $\lg \delta = K$ (tj. $\delta = e^K$). Potom pro $0 < x < \delta$ bude (ježto $\lg x$ je rostoucí v intervalu $(0, +\infty)$) vskutku $\lg x < \lg \delta = K$. (Zase vidíte: je-li K záporné a má velkou prostou hodnotu, vyjde δ malé; např. pro $K = -1000$ vyjde $\delta = e^{-1000}$.)

Příklad 5. Budiž $f(x) = 1$ pro racionální x, $f(x) = -1$ pro iracionální x (viz § 1, příkl. 9). Tvrdím: *funkce $f(x)$ nemá v žádném bodě limitu (ani zprava ani zleva, ani vlastní ani nevlastní)*. Důkaz: o limitě $+\infty$ (ani o limitě $-\infty$) nemůže být řeči, ježto funkce nikde není větší než 1 (a nikde není menší než -1). Předpokládejme, že v nějakém bodě c má $f(x)$ vlastní limitu A *zprava*; z toho máme odvodit spor. Podle předpokladu existuje číslo $\delta > 0$ tak, že pro všechna x intervalu $(c, c + \delta)$ je $|f(x) - A| < 1$. Zvolme v intervalu $(c, c + \delta)$ racionální číslo x_1 a iracionální číslo x_2; to je možno podle věty 47. Potom je

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f(x_1) - A + A - f(x_2)| \leqq$$
$$\leqq |f(x_1) - A| + |A - f(x_2)| < 1 + 1 = 2\,.$$

Ale to není možno, neboť podle definice funkce $f(x)$ je $f(x_1) = 1$, $f(x_2) = -1$, $|f(x_1) - f(x_2)| = 2$. Podobně se dokáže, že $f(x)$ nemá nikde vlastní limitu *zleva*. Z dokázaného výsledku plyne speciálně, že funkce $f(x)$ není spojitá v žádném bodě, ani zprava ani zleva.

Příklad 6. *Budiž* $\lim\limits_{x \to c+} f(x) = +\infty$; *potom je* $\lim\limits_{x \to c+} (-f(x)) = -\infty$, $\lim\limits_{x \to c+} \frac{1}{f(x)} = 0$. Důkaz: Budiž dáno K; potom existuje $\delta > 0$ tak, že pro $c < x < c + \delta$ je $f(x) > -K$, tedy $-f(x) < K$; tedy $\lim\limits_{x \to c+} (-f(x)) = -\infty$. Budiž za druhé $\varepsilon > 0$; existuje $\delta > 0$ tak, že pro $c < x < c + \delta$ je $f(x) > \frac{1}{\varepsilon}$, tedy $0 < \frac{1}{f(x)} < \varepsilon$;

tedy $\lim\limits_{x\to c+}\dfrac{1}{f(x)} = 0$. Podobně dokáže čtenář: je-li $\lim\limits_{x\to c+} f(x) = -\infty$, je $\lim\limits_{x\to c+}(-f(x)) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to c+}\dfrac{1}{f(x)} = 0$. Podobně pro limitu zleva a oboustrannou limitu.

Cvičení

Pro nevlastní limity funkcí platí věty obdobné těm, které jsme uvedli ve cvičení 3 až 14, kap. II, § 3. Uveďme některé jako ukázku.

1. Je-li $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$ a existuje-li $\delta > 0$ tak, že pro $0 < |x - c| < \delta$ je $g(x) \geqq f(x)$, je též $\lim\limits_{x\to c} g(x) = +\infty$.

2. Je-li $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$ a existují-li čísla k, δ ($\delta > 0$) tak, že pro $0 < |x - c| < \delta$ je $g(x) \geqq k$, je $\lim\limits_{x\to c}(f(x) + g(x)) = +\infty$.

3. Je-li $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$ a existují-li dvě *kladná* čísla k, δ tak, že pro $0 < |x - c| < \delta$ je $g(x) \geqq k$, je $\lim\limits_{x\to c} f(x)\, g(x) = +\infty$.

4. Je-li $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$ nebo $= -\infty$, je $\lim\limits_{x\to c} |f(x)| = +\infty$.

5. Obdobně pro limitu zprava a zleva.

6. Je-li $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$ a existuje-li vlastní nebo nevlastní $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq -\infty$, je $\lim\limits_{x\to c}(f(x) + g(x)) = +\infty$. Je-li $\lim\limits_{x\to c} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to c} g(x) \neq 0$ (vlastní nebo nevlastní), je $\lim\limits_{x\to c} f(x)\, g(x) = \pm\infty$; horní znamení platí pro $\lim g(x) > 0$ (nebo $= +\infty$), dolní pro $\lim g(x) < 0$ (nebo $= -\infty$). Obdobně pro $\lim f(x) = -\infty$.

§ 7. Limity „v bodech $+\infty$, $-\infty$." Limita funkce $f(x)$ v bodě c popisuje do jisté míry průběh funkce $f(x)$ v blízkosti bodu c. Pro poznání průběhu funkce je však důležité zjistit, co se s funkcí $f(x)$ děje, když buďto x nebo $-x$ vzrůstá nade všechny meze (tj. když se x na ose číselné vzdaluje od počátku buď směrem doprava nebo směrem doleva). K tomu cíli zavádíme ještě dva nové pojmy, totiž $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, způsobem, jejž nyní vylíčíme. Položme $y = \dfrac{1}{x}$; roste-li x nade všechny meze, blíží se y kladnými hodnotami k nule (např. pro $x = 10, 10^2, 10^3, \ldots$ je $y = 10^{-1}, 10^{-2}, 10^{-3}, \ldots$); roste-li $-x$ nade všechny meze, blíží se y zápornými hodnotami k nule (např. pro $x = -10, -10^2, -10^3, \ldots$ je $y = -10^{-1}, -10^{-2}, -10^{-3}, \ldots$). Jeví se tudíž účelnou tato definice:

Definice 22. *Budeme říkat, že* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, *je-li* $\lim\limits_{y\to0+} f\left(\dfrac{1}{y}\right) = A$. *Budeme říkat, že* $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = A$, *je-li* $\lim\limits_{y\to0-} f\left(\dfrac{1}{y}\right) = A$.

Poznámka 1. V definici 22 může být A buďto reálné číslo (tzv. vlastní limita) nebo symbol $+\infty$ nebo $-\infty$ (tzv. nevlastní limita). Místo $\lim\limits_{y\to 0+} f\left(\frac{1}{y}\right)$ můžeme psát ovšem též $\lim\limits_{x\to 0+} f\left(\frac{1}{x}\right)$ apod., neboť nezáleží na tom, kterým písmenem označujeme proměnnou.

Poznámka 2. Ježto se limity $\lim\limits_{x\to+\infty}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}$ převádějí v definici 22 na limity zprava a zleva v bodě 0, přenášejí se na naše nové limity snadno mnohé věty z § 5, 6. Tak z věty 106 a z definice 22 čtenář ihned zjistí, že věta 106 platí též pro (vlastní) limity $\lim\limits_{x\to+\infty}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}$.

Poznámka 3. Použijeme-li definice symbolů $\lim\limits_{x\to 0+}$, $\lim\limits_{x\to 0-}$, můžeme přepsat definici do tvarů obšírnějších, jež však vystihují přímo smysl symbolů $\lim\limits_{x\to+\infty}$, $\lim\limits_{x\to-\infty}$ bez odkazu k symbolům $\lim\limits_{x\to 0+}$, $\lim\limits_{x\to 0-}$. Tak např. platí věta:

Věta 110. *Rovnice* $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ *(kde A není $+\infty$ ani $-\infty$, takže jde o vlastní limitu) platí tehdy a jen tehdy, je-li správný tento výrok: „Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo x_0 tak, že pro všechna $x > x_0$ platí nerovnost*

$$|f(x) - A| < \varepsilon.\text{“} \tag{44}$$

Důkaz. I. Nechť $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$, tj. $\lim\limits_{y\to 0+} f\left(\frac{1}{y}\right) = A$. Potom ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo $\delta > 0$ tak, že pro $0 < y < \delta$ je $\left|f\left(\frac{1}{y}\right) - A\right| < \varepsilon$. Položme $x_0 = \frac{1}{\delta}$; je-li $x > x_0$, položme $y = \frac{1}{x}$, takže $0 < y < \delta$; tedy je $\left|f\left(\frac{1}{y}\right) - A\right| < \varepsilon$ a tedy platí (44). Výrok v uvozovkách je tedy správný.

II. Nechť je správný výrok v uvozovkách. Budiž $\varepsilon > 0$; potom existuje x_0 tak, že pro všechna $x > x_0$ platí (44); tím spíše platí (44) pro všechna $x > x_1$, kde klademe $x_1 = \operatorname{Max}(x_0, 1)$.[25]) Položme $\delta = \frac{1}{x_1}$, takže $\delta > 0$. Je-li $0 < y < \delta$, je číslo $x = \frac{1}{y}$ větší než x_1; tedy platí (44), tj. $\left|f\left(\frac{1}{y}\right) - A\right| < \varepsilon$. Tedy je vskutku $\lim\limits_{y\to 0+} f\left(\frac{1}{y}\right) = A$, tj. (podle definice 22) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$.

[25]) Tedy je $x_1 > 0$ (kdežto o čísle x_0 jsme nevěděli, je-li kladné).

Podobná věta platí též pro (vlastní) limitu $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$; pouze je nutno nerovnost $x > x_0$ nahradit nerovností $x < x_0$. Čtenáři nečiní zajisté obtíží odvodit obdobné věty též pro limity *nevlastní.*

Příklad 1. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x}{x+2} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{x}{x+2} = 1$. Důkaz: Jestliže ve funkci $f(x) = \dfrac{x}{x+2}$ $(x \neq -2)$ položím $x = \dfrac{1}{y}$, dostávám $f\left(\dfrac{1}{y}\right) = \dfrac{y^{-1}}{y^{-1}+2} = \dfrac{1}{1+2y}$ (pro $y \neq 0$, $y \neq -\frac{1}{2}$); tedy vskutku $\lim\limits_{y\to0+} f\left(\dfrac{1}{y}\right) = \lim\limits_{y\to0-} f\left(\dfrac{1}{y}\right) = 1$.

Příklad 2. $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ *pro* $n > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = 0$ *pro* $n < 0$. Důkaz: Jde o $\lim\limits_{y\to0+} y^{-n}$. Pro $n > 0$ plyne pak výsledek z § 6, příkl. 1; pro $n < 0$, tj. $n = -m$, $m > 0$ je $y^{-n} = y^m$ spojitá zprava v bodě 0 a má tam hodnotu 0 (viz § 4, příkl. 10), takže $\lim\limits_{y\to0+} y^{-n} = 0$ pro $n < 0$.

Čtenář sám zjistí pro celá n toto (viz též § 6, příkl. 2): pro celé $n < 0$ je $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = 0$; pro sudé $n > 0$ je $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = +\infty$; pro liché $n > 0$ je $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n = -\infty$.

Příklad 3. $\lim\limits_{x\to+\infty} \lg x = +\infty$. Důkaz: Jde o $\lim\limits_{y\to0+} \lg\dfrac{1}{y} = \lim\limits_{y\to0+} (-\lg y)$. Výsledek plyne pak ihned z § 6, příkl. 4, 6.

Příklad 4. *Buď* $a > 1$; *potom je* $\lim\limits_{x\to+\infty} a^x = +\infty$, $\lim\limits_{x\to-\infty} a^x = 0$. Důkaz: Jde především o $\lim\limits_{y\to0+} a^{1/y}$. Máme dokázat: Ke každému K existuje $\delta > 0$ tak, že pro $0 < y < \delta$ je $a^{1/y} > K$. Přitom se smíme omezit na případ $K > 1$; volme δ tak, že $a^{1/\delta} = K$, tj $\dfrac{1}{\delta} = \log_a K > 0$, tedy $\delta > 0$. Pro $0 < y < \delta$ bude vskutku $\dfrac{1}{y} > \dfrac{1}{\delta}$, tedy $a^{1/y} > a^{1/\delta} = K$. Za druhé jde o $\lim\limits_{y\to0-} a^{1/y}$. Máme dokázat: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ tak, že pro $-\delta < y < 0$ je $|a^{1/y} - 0| < \varepsilon$, tj. $a^{1/y} < \varepsilon$. Přitom se mohu omezit na případ $0 < \varepsilon < 1$. Zvolme δ tak, že $a^{-1/\delta} = \varepsilon$, tj. $-\dfrac{1}{\delta} = \log_a \varepsilon < 0$, tedy $\delta > 0$. Pro $-\delta < y < 0$ je $\dfrac{1}{y} < -\dfrac{1}{\delta}$ (dělím kladným číslem $-\delta y$) a tedy vskutku $a^{1/y} < a^{-1/\delta} = \varepsilon$.[26])

Poznámka 4. Věta 110 nám velmi připomíná definici 6 pro limitu posloupnosti; jaký je mezi nimi rozdíl? Píší-li v definici 6 písmeno x místo n a označím-li

[26]) Pomocí vět analogických větě 110 by se důkaz dal vést trochu jednodušeji.

x-tý člen posloupnosti znakem $f(x)$, lze definici vyslovit takto: Říkáme, že posloupnost $f(1), f(2), \ldots$ má limitu A, jestliže ke každému $\varepsilon > 0$ existuje číslo x_0 tak, že pro všechna přirozená $x > x_0$ platí nerovnost (44). Rozdíl mezi definicí limity posloupnosti $f(1), f(2), \ldots$ a mezi definicí limity funkce $f(x)$ v bodě $+\infty$ je tedy jen ten, že v prvním případě má nerovnost (44) být splněna pro všechna *přirozená* čísla $x > x_0$, kdežto v druhém případě vůbec pro všechna reálná (i necelá) čísla $x > x_0$. Kdyby snad někdy mohlo dojít k nedorozumění, budu v prvním případě (posloupnost) mluvit o „limitě pro celočíselně rostoucí x", v druhém případě o „limitě pro spojitě rostoucí x". Ostatně v dalších svazcích tohoto díla zavedeme obecnější definici limity, která zahrne všechny případy, jež jsme dosud vyšetřovali.

Cvičení

1. Při vyšetřování $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ bývá výhodnější užívat věty 110 a analogických vět než definice 22. Uvědomte si znění těchto vět, pokud jsme je nevyslovili (vyslovili jsme jenom větu pro vlastní limitu při $x \to +\infty$).

2. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x}{x^2 + 1} = \lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x}{x^2 + 1} = 0.$

3. Budiž $f(x) = \dfrac{A_0 x^k + A_1 x^{k-1} + \ldots + A_k}{B_0 x^l + B_1 x^{l-1} + \ldots + B_l}$ ($A_0 \neq 0$, $B_0 \neq 0$; k, l celá nezáporná). Ukažte: Je-li $k < l$, je $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$; je-li $k = l$, je $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = \dfrac{A_0}{B_0}$. Budiž konečně $k > l$. Je-li $k - l$ sudé, je $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ nebo $-\infty$, podle toho, mají-li A_0, B_0 stejná či opačná znamení; je-li $k - l$ liché, je výsledek pro $x \to +\infty$ stejný, pro $x \to -\infty$ se znamení vymění.

4. Funkce $\dfrac{1}{1 + e^{1/x}}$ je rostoucí v intervalu $(-\infty, 0)$ i v intervalu $(0, +\infty)$. Její limita v bodě $+\infty$ i $-\infty$ je $\frac{1}{2}$; v bodě 0 je limita zleva 1, zprava 0.

§ 8. Spojitost v intervalu. Vraťme se opět k pojmu spojitosti (§ 4). Setkali jsme se opětovně s funkcemi, které jsou spojité v každém bodě jistého intervalu; tak např. funkce $\lg x$ je spojitá v každém bodě $c > 0$, tj. v každém bodě intervalu $(0, +\infty)$, funkce a^x ($a > 0$) je spojitá v každém bodě vůbec, tj. v každém bodě intervalu $(-\infty, +\infty)$; funkce $\sqrt{3 - x^2}$ je spojitá v každém bodě intervalu $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$ a mimoto ještě spojitá zprava v bodě $-\sqrt{3}$ a zleva v bodě $\sqrt{3}$. Je účelné zavést vhodné pojmenování. Budiž J libovolný interval (kteréhokoliv druhu vytčeného v § 1). *Vnitřním bodem* intervalu J nazývám každý bod intervalu J, jenž není jeho krajním bodem. Tak otevřený interval (a, b) (ať omezený nebo neomezený) se skládá jen z vnitřních bodů; interval $\langle a, b)$ (ať je b reálné číslo či symbol $+\infty$) se skládá z vnitřních bodů (jež vyplňují interval (a, b)) a z bodu a; interval $\langle a, b \rangle$ se skládá z vnitřních bodů (jež vyplňují unterval (a, b)) a mimoto ještě z krajních bodů a, b.

Budiž nyní $f(x)$ funkce, definovaná v intervalu J.

Definice 23. *Budeme říkat, že funkce $f(x)$ je spojitá v intervalu J, jestliže má tyto vlastnosti: 1. Je spojitá (tj. spojitá zprava i zleva) v každém vnitřním bodě intervalu J.*

2. Patří-li počáteční bod intervalu J k intervalu J, je funkce $f(x)$ též spojitá zprava v tomto bodě.

3. Patří-li koncový bod intervalu J k intervalu J, je funkce $f(x)$ též spojitá zleva v tomto bodě.

Příklady.[27]) Každá racionální celistvá funkce a rovněž funkce a^x $(a > 0)$ je spojitá v každém bodě, čili tyto funkce jsou spojité v intervalu $(-\infty, +\infty)$. Funkce $\log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$ je spojitá v každém bodě $c > 0$, tj. je spojitá v intervalu $(0, +\infty)$. Totéž platí o funkci x^n. Je-li $n > 0$, je funkce x^n ještě také spojitá zprava v bodě 0, tj. je spojitá v intervalu $\langle 0, +\infty)$. Funkce $\sqrt{3 - x^2}$ je spojitá v každém bodě intervalu $(-\sqrt{3}, \sqrt{3})$, mimoto je ještě spojitá zprava v bodě $-\sqrt{3}$ a zleva v bodě $\sqrt{3}$, tj. je spojitá v intervalu $\langle -\sqrt{3}, \sqrt{3}\rangle$. Funkce $f(x)$ z příkl. 7, § 1 je spojitá v intervalu $(-\infty, 0\rangle$ a rovněž v intervalu $(0, +\infty)$, ale není spojitá v intervalu $\langle 0, +\infty)$, neboť není spojitá zprava v bodě 0.

Definici 23 lze zřejmě vyslovit také takto: *funkce $f(x)$ je spojitá v intervalu J tehdy a jen tehdy, je-li předně spojitá zprava v každém bodě intervalu J, jenž není koncovým bodem intervalu J, a za druhé spojitá zleva v každém bodě intervalu J, jenž není počátečním bodem intervalu J.* Z toho je zároveň patrno: Je-li interval K částí intervalu J a je-li funkce $f(x)$ spojitá v intervalu J, je tím spíše spojitá v intervalu K. Např. funkce, která je spojitá v intervalu $\langle 0, 2)$, je spojitá také v intervalu $(0, 2)$ a rovněž v intervalu $\langle 0, 1\rangle$.

Z poznámek, které jsme připojili k definicím 17, 18 o „lokálním" charakteru spojitosti, je okamžitě vidět toto: Jsou-li $f(x)$, $g(x)$ dvě funkce, je-li $f(x) = g(x)$ pro každé x intervalu J a je-li funkce $f(x)$ spojitá v intervalu J, je též funkce $g(x)$ spojitá v intervalu J. Jinak řečeno: spojitost funkce v intervalu nezávisí vůbec na tom, zda a jak je funkce definována v bodech nepatřících k tomuto intervalu.

---

[27]) **Spojitost funkcí, o nichž v těchto příkladech mluvíme, byla probrána v § 4, příkl. 2, 3, 4, 7, 9, 10 a v § 5, příkl. 2.**