Kapitola III

OBECNÁ MOCNINA A LOGARITMUS

§ 1. Obecná mocnina. Mocninu x^z jsme dosud definovali pouze pro celistvý mocnitel z. Rozšíříme nyní definici symbolu x^z na *libovolný* „mocnitel" z, ale omezíme se přitom hlavně na *kladný* „základ" x. Začněme s racionálním z. Každé racionální číslo z se dá psát ve tvaru zlomku $z = \frac{p}{q}$, kde p, q jsou celá čísla, $q > 0$. Podle zkušeností ze školy očekáváte asi, že budeme definovat x^z pro racionální $z = \frac{p}{q}$ výrazem

$$\sqrt[q]{x^p} \tag{1}$$

(ve větě 43 jsme definovali q-tou odmocninu kladného čísla pro každé celé kladné q). To skutečně učiníme, ale napřed se musíme zbavit dvou pochybností:

A) Každé racionální číslo z lze vyjádřit nekonečně mnoha způsoby ve tvaru zlomku

$$\frac{p}{q}\left(\text{např. } \frac{1}{2} = \frac{2}{4} = \frac{3}{6} = \ldots, 5 = \frac{5}{1} = \frac{10}{2} = \frac{15}{3} = \ldots,\right.$$
$$\left.\frac{-2}{3} = \frac{-4}{6} = \frac{-6}{9} = \ldots\right);$$

musíme dokázat, že výraz (1) má vždy touž hodnotu, ať si číslo z vyjádříme jakýmkoliv způsobem ve tvaru $\frac{p}{q}$ $(q > 0)$, tj. máme dokázat: je-li $x > 0$, a jsou-li $\frac{p}{q}$, $\frac{r}{s}$ dvě různá vyjádření čísla z, tj. je-li $z = \frac{p}{q} = \frac{r}{s}$ $(p, q, r, s$ celá, $q > 0$, $s > 0)$, je

$$\sqrt[q]{x^p} = \sqrt[s]{x^r}. \tag{2}$$

Dokažme to. Položme $\sqrt[q]{x^p} = u$, $\sqrt[s]{x^r} = v$, tedy $x^p = u^q$, $x^r = v^s$, $x^{ps} = (x^p)^s = (u^q)^s = u^{qs}$, $x^{rq} = (x^r)^q = (v^s)^q = v^{sq}$. Ale $ps = qr$, takže

$$u^{sq} = v^{sq} = x^{ps}; \tag{3}$$

mimoto ovšem $u > 0$, $v > 0$. Ježto $sq > 0$, můžeme užít věty 43 a dostáváme vskutku podle (3) $u = v = \sqrt[sq]{x^{ps}}$, čímž je rovnice (2) dokázána.

B) Je-li z celé, byla mocnina x^z definována již dříve; je nutno proto ukázat, že nová definice je v případě celého z ve shodě se starou. Ale to je zřejmé; neboť je-li z celé, je $z = \frac{z}{1}$ (volím $p = z$, $q = 1$) a je vskutku

$$\sqrt[1]{x^z} = x^z .$$

Výsledek shrneme v tuto větu:

Věta 67. *Budiž $x > 0$, z racionální, $z = \frac{p}{q}$ $(p, q$ celá, $q > 0)$. Potom číslo* (1) *závisí pouze na x, z* $\left(\text{tj. nezávisí na tom, } \textit{jakým} \text{ způsobem vyjádříme číslo } z \text{ ve tvaru zlomku } \frac{p}{q}\right)$. *Je-li speciálně z celé číslo, je výraz* (1) *roven x^z.*

Tato věta nás nyní opravňuje k definici:

Definice 9. *Budiž $x > 0$, z racionální; potom x^z definujeme rovnicí*

$$x^z = \sqrt[q]{x^p}, \tag{4}$$

kde p, q jsou celá čísla taková, že $q > 0$, $z = \frac{p}{q}$. Poznamenejme: je-li speciálně $z = \frac{1}{q}$ (q celé kladné), je $x^{1/q} = \sqrt[q]{x^1} = \sqrt[q]{x}$. Odvodíme si základní vlastnosti mocniny x^z:

Věta 68. *Buďte x, y kladná, m, n racionální čísla. Potom je*

A) $1^n = 1$, $x^n > 0$.

B) $x^n y^n = (xy)^n$; $\left(\frac{y}{x}\right)^n = \frac{y^n}{x^n}$; $\left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n}$.

C) $x^m x^n = x^{m+n}$; $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$; $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$.

D) *Je-li $x < y$, $n > 0$, je $x^n < y^n$.*

E) *Je-li $x > 1$, $m > n$, je $x^m > x^n$.*

Důkaz. Víme, že věta je správná pro *celá m, n* (viz vzorce (33) v kap. I a věty 41, 42). Buďte nyní m, n racionální a pišme je ve tvaru zlomků, jež uvedeme na společného jmenovatele:

$$m = \frac{r}{q}, \quad n = \frac{p}{q} \qquad (p, q, r \text{ celá, } q > 0).$$

K bodu A): Jest $1^n = \sqrt[q]{1^p} = \sqrt[q]{1} = 1$, $x^n = \sqrt[q]{x^p} > 0$ (viz větu 43).

K bodu B): $x^n y^n = \sqrt[q]{x^p}\sqrt[q]{y^p} = \sqrt[q]{x^p y^p}$ (podle věty 44); $\sqrt[q]{x^p y^p} = \sqrt[q]{(xy)^p} = (xy)^n$. Tím je první rovnice B) dokázána; z ní plyne druhá, neboť $x^n . \left(\frac{y}{x}\right)^n = \left(x . \frac{y}{x}\right)^n = y^n$; dosadíme-li sem $y = 1$, dostaneme třetí rovnici B) (neboť $1^n = 1$ podle A).

K bodu C): $x^m x^n = \sqrt[q]{x^r}\sqrt[q]{x^p} = \sqrt[q]{x^r . x^p} = \sqrt[q]{x^{r+p}} = x^{(r+p)/q} = x^{m+n}$; druhá rovnice C) plyne odtud takto: $x^n . x^{m-n} = x^{n+m-n} = x^m$ a odtud plyne třetí rovnice, volím-li $m = 0$ $(x^0 = 1)$.

K bodu D): Je-li $0 < x < y$, $n > 0$, je $p > 0$ a podle věty 45 je $x^p < y^p$; věta 45 dává pak $\sqrt[q]{x^p} < \sqrt[q]{y^p}$, čímž je D) dokázáno.

K bodu E): Je-li $x > 1$, $m > n$, je podle D): $x^{m-n} > 1^{m-n} = 1$, a tedy podle C): $\frac{x^m}{x^n} > 1$, $x^m > x^n$ (neboť $x^n > 0$).

Symbol x^z jsme nyní – při kladném x – definovali pro všechna racionální z; zbývá ještě úloha definovat x^z pro všechna reálná (tedy též iracionální) z. Přirozeně se naskýtá tato myšlenka: zvolme posloupnost racionálních čísel $z_1, z_2, \ldots$ konvergující k z: $\lim z_n = z$ (podle věty 66 víme, že taková posloupnost – a to dokonce neklesající – existuje); limitu posloupnosti $x^{z_1}, x^{z_2}, \ldots$ označme pak x^z. Ovšem, abychom k tomu byli oprávněni, musíme napřed ukázat, že ta limita $\lim\limits_{n\to\infty} x^{z_n}$ existuje, dále, že nezávisí na tom, *kterou* posloupnost $z_1, z_2, \ldots$ racionálních čísel, konvergující k z, jsme zvolili a konečně, že v případě racionálního čísla z je tato limita rovna číslu x^z, definovanému v definici 9. To všechno obsahuje následující věta:

Věta 69. *Budiž z libovolné číslo, x libovolné číslo kladné. Potom platí:*

A) *Je-li $z_1, z_2, \ldots$ libovolná posloupnost racionálních čísel, pro kterou je $\lim\limits_{n\to\infty} z_n = z$, potom existuje limita*

$$\lim_{n\to\infty} x^{z_n} = \alpha\,;$$

toto číslo α je kladné a závisí pouze na x, z (tj. nezávisí na tom, *kterou* posloupnost racionálních čísel, konvergující k z, jsme si vybrali).

B) *Je-li z racionální, je $\alpha = x^z$.*

Až tuto větu dokážeme, budeme oprávněni k této definici:

Definice 10. *Číslo α z věty 69 označujeme znakem x^z.*

Důkaz věty 69. 1) Budiž především $x > 1$. Podle věty 66 existuje neklesající posloupnost racionálních čísel

(5) $$y_1 \leqq y_2 \leqq y_3 \leqq \dots$$

tak, že $\lim_{n\to\infty} y_n = z$; podle dodatku k větě 63 je tedy $y_n \leqq z$ pro všechna n.

Podle věty 15 existuje racionální (dokonce přirozené) číslo t, jež je větší než z; tedy $y_n < t$ pro všechna n. Podle věty 68 A), E) a podle (5) je tedy

$$x^{y_n} < x^t \text{ pro každé } n,\ 0 < x^{y_1} \leqq x^{y_2} \leqq x^{y_3} \leqq \dots;$$

posloupnost

(6) $$x^{y_1}, x^{y_2}, x^{y_3}, \dots$$

je tedy neklesající a shora omezená a tedy má podle věty 63 jistou vlastní limitu α; podle dodatku k větě 63 je $\alpha \geqq x^{y_n}$ pro každé n, tedy např. $\alpha \geqq x^{y_1} > 0$. Tedy

(7) $$\lim_{n\to\infty} x^{y_n} = \alpha > 0\,.$$

Abychom dokázali tvrzení A) pro $x > 1$, stačí, dokážeme-li ještě toto: je-li

(8) $$z_1, z_2, \dots$$

libovolná posloupnost racionálních čísel (obecně jiná než (5)) mající limitu z, je rovněž

(9) $$\lim_{n\to\infty} x^{z_n} = \alpha\,.$$

Budiž tedy (8) posloupnost racionálních čísel, pro kterou $\lim_{n\to\infty} z_n = z$. Podle věty 68 je

(10) $$x^{z_n} = x^{y_n} x^{z_n - y_n};$$

podaří-li se nám dokázat, že

(11) $$\lim_{n\to\infty} x^{z_n - y_n} = 1\,,$$

bude podle (11), (10), (7)

$$\lim x^{z_n} = \lim x^{y_n} . \lim x^{z_n - y_n} = \alpha . 1 = \alpha\,,$$

čímž bude (9) dokázáno.

Zbývá tedy dokázat rovnici (11). Jest $\lim_{n\to\infty} (z_n - y_n) = z - z = 0$. Víme dále (viz příkl. 4 v § 2, kap. II), že

$$\lim_{m\to\infty} x^{1/m} = \lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{x} = 1 \text{ a tedy též } \lim_{m\to\infty} x^{-1/m} = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{x^{1/m}} = 1\,.$$

Je-li tedy dáno libovolné kladné číslo ε, existuje k němu přirozené číslo m tak, že

(12) $$1 - \varepsilon < x^{-1/m} < x^{1/m} < 1 + \varepsilon;^{1})$$

zvolme takové m. Ježto $\lim_{n\to\infty} (z_n - y_n) = 0$, existuje číslo n_0 tak, že pro všechna $n > n_0$ je

$$|z_n - y_n| < \frac{1}{m}, \text{ tj. } -\frac{1}{m} < z_n - y_n < \frac{1}{m}.$$

Potom však podle věty 68 E) je

$$x^{-1/m} < x^{z_n - y_n} < x^{1/m}$$

a tedy podle (12) tím spíše

(13) $$1 - \varepsilon < x^{z_n - y_n} < 1 + \varepsilon, \text{ tj. } |x^{z_n - y_n} - 1| < \varepsilon.$$

Tedy: ke každému kladnému číslu ε existuje číslo n_0 tak, že pro každé $n > n_0$ platí (13). Tím je však dokázána rovnice (11) a tedy i tvrzení A) v případě $x > 1$.

2) Pro $x = 1$ je tvrzení A) samozřejmé; neboť podle věty 68 A) je vždy $1^{z_n} = 1$, tedy i $\lim_{n\to\infty} 1^{z_n} = 1$, takže $\alpha = 1$.

3) Budiž za třetí $0 < x < 1$; položme $y = \frac{1}{x}$, takže $y > 1$. Je-li (8) libovolná posloupnost racionálních čísel, mající limitu z, existuje podle případu 1) limita

(14) $$\lim_{n\to\infty} y^{z_n} = \beta > 0,$$

nezávislá na volbě posloupnosti (8). Ježto podle věty 68 B) je $x^{z_n} = \left(\frac{1}{y}\right)^{z_n} = \frac{1}{y^{z_n}}$, je podle (14)

$$\lim_{n\to\infty} x^{z_n} = \frac{1}{\beta} > 0,$$

nezávisle na volbě posloupnosti (8).

4) Zbývá ještě dokázat tvrzení B) věty 69. Budiž tedy z číslo *racionální*. Potom lze za posloupnost $z_1, z_2, \ldots$ vzít posloupnost $z, z, z, \ldots$, takže vskutku $\alpha = \lim_{n\to\infty} x^z = x^z$. Tím je věta 69 úplně dokázána.

---

[1]) Obšírně: existují čísla m_1, m_2 tak, že pro každé $m > m_1$ je $|x^{1/m} - 1| < \varepsilon$ a pro každé $m > m_2$ je $|x^{-1/m} - 1| < \varepsilon$; mimoto podle věty 68, E : $x^{-1/m} < x^{1/m}$; z toho plyne (12), zvolím-li přirozené číslo m větší než Max (m_1, m_2).

Tedy ještě jednou: je-li x kladné, z libovolné, zvolme libovolnou posloupnost racionálních čísel $z_1, z_2, \ldots$, mající limitu z (takové posloupnosti existují). Potom existuje kladná vlastní limita

$$\lim_{n\to\infty} x^{z_n}$$

(nezávislá na volbě posloupnosti $z_1, z_2, \ldots$); tuto limitu označme x^z. Tím je x^z při $x > 0$ definováno pro všechna reálná z a pro racionální z je tato definice podle věty 69 B) shodná se starší definicí 9.

Dokažme nyní tyto vlastnosti symbolu x^z:

Věta 70. *Buďte x, y kladná, m, n reálná čísla. Potom je*

A) $1^n = 1, \quad x^n > 0$.

B) $x^n y^n = (xy)^n\,; \quad \left(\dfrac{y}{x}\right)^n = \dfrac{y^n}{x^n}\,; \quad \left(\dfrac{1}{x}\right)^n = \dfrac{1}{x^n}$.

C) $x^m x^n = x^{m+n}\,; \quad \dfrac{x^m}{x^n} = x^{m-n}\,; \quad x^{-n} = \dfrac{1}{x^n}$.

D) *Je-li* $x < y, \quad n > 0, \quad$ *je* $\quad x^n < y^n$.

E) *Je-li* $x > 1, \quad m > n, \quad$ *je* $\quad x^m > x^n$.

Důkaz. Podle věty 68 víme, že věta je správná pro *racionální* m, n; toho budeme v důkazu neustále užívat. Buďte nyní m, n dvě libovolná reálná čísla a buďte $m_1, m_2, \ldots; n_1, n_2, \ldots$ dvě posloupnosti racionálních čísel takové, že $\lim\limits_{k\to\infty} m_k = m$, $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = n$ (takové posloupnosti existují podle věty 66).

K bodu A): Podle definice 10 je $1^n = \lim\limits_{k\to\infty} 1^{n_k} = \lim 1 = 1$;[2]) že $x^n > 0$, bylo dokázáno ve větě 69.

K bodu B): $x^n y^n = \lim x^{n_k} \,.\, \lim y^{n_k} = \lim x^{n_k} y^{n_k} = \lim (xy)^{n_k} = (xy)^n$ (zde užívám po řadě: definice 10, vzorců (31) z kap. II, věty 68 B, a opět definice 10). Tím je dokázán první vzorec B), druhý plyne z prvního takto:

$$x^n \left(\frac{y}{x}\right)^n = \left(x \,.\, \frac{y}{x}\right)^n = y^n$$

a odtud dostaneme třetí vzorec B), položíme-li $y = 1$ (takže též $y^n = 1$ podle A).

K bodu C): Jest $\lim\limits_{k\to\infty} (m_k + n_k) = m + n$, tedy

$$x^{m+n} = \lim x^{m_k+n_k} = \lim x^{m_k} \,.\, x^{n_k} = \lim x^{m_k} \lim x^{n_k} = x^m \,.\, x^n;$$

odtud plyne druhá rovnice C): $x^n \,.\, x^{m-n} = x^{n+m-n} = x^m$ a odtud zase třetí rovnice C), položím-li $m = 0$.

[2]) Neboť $1^{n_k} = 1$ podle věty 68, A.

K bodu D): Budiž $0 < x < y$, $n > 0$. Zvolme racionální číslo r tak, že $0 < r < n$ (takové číslo existuje podle věty 47). Ježto $\lim\limits_{k \to \infty} n_k = n > r$, existuje podle poznámky 3 v kap. II, § 2 číslo k_0 tak, že pro každé $k > k_0$ je $n_k > r$. Ježto $\dfrac{y}{x} > 1$, je podle věty 68 E)

$$1 = \left(\frac{y}{x}\right)^0 < \left(\frac{y}{x}\right)^r < \left(\frac{y}{x}\right)^{n_k}$$

pro všechna $k > k_0$. Tedy je podle poznámky 4 v kap. II, § 2

$$\left(\frac{y}{x}\right)^n = \lim_{k \to \infty} \left(\frac{y}{x}\right)^{n_k} \geqq \left(\frac{y}{x}\right)^r$$

a tedy tím spíše

$$\left(\frac{y}{x}\right)^n > 1\,, \quad \frac{y^n}{x^n} > 1\,, \quad y^n > x^n\,,$$

čímž je D) dokázáno.

K bodu E): Je-li $x > 1$, $m > n$, je $m - n > 0$ a tedy podle D) $x^{m-n} > 1^{m-n} = 1$, $\dfrac{x^m}{x^n} > 1$, $x^m > x^n$, čímž je E) dokázáno.

Dodatek 1. První rovnice B) a první rovnice C) se dají zobecnit takto:

$$x_1^n x_2^n \dots x_k^n = (x_1 x_2 \dots x_k)^n\,; \quad x^{m_1} x^{m_2} \dots x^{m_k} = x^{m_1 + m_2 + \dots + m_k}\,. \tag{15}$$

Důkaz se vede ovšem úplnou indukcí; proveďme jej pro druhý vzorec (u prvního je důkaz obdobný). Tento vzorec je správný pro $k = 2$ podle věty 70 C); je-li tento vzorec správný pro jistou hodnotu $k = l$ $(l \geqq 2)$, je

$$x^{m_1} x^{m_2} \dots x^{m_l} x^{m_{l+1}} = (x^{m_1} x^{m_2} \dots x^{m_l})\, x^{m_{l+1}} =$$
$$= x^{m_1 + m_2 + \dots + m_l} \,.\, x^{m_{l+1}} = x^{(m_1 + m_2 + \dots + m_l) + m_{l+1}}\,,$$

takže je vzorec správný i pro $k = l + 1$. Tím je úplnou indukcí dokázán obecně. Všimněme si jednoho zvláštního případu: Položíme-li $m_1 = m_2 = \dots = m_k = m$, dostáváme pro celé $k > 1$

$$(x^m)^k = \underbrace{x^m \,.\, x^m \dots x^m}_{k \text{ činitelů}} = x^{\overbrace{}^{}\underbrace{m + m + \dots + m}_{k \text{ sčítanců}}} = x^{mk}\,.$$

Vzorec

$$(x^m)^k = x^{mk} \tag{16}$$

platí tedy pro každé celé $k > 1$. Ale pro $k = 0$ a $k = 1$ platí také, neboť $(x^m)^0 = 1 = x^0 = x^{m \cdot 0}$, $(x^m)^1 = x^m = x^{m \cdot 1}$. Dále platí vzorec (16) i pro celé záporné k, neboť potom je $-k > 0$ a tedy podle (16) $(x^m)^{-k} = x^{m.(-k)} = x^{-mk}$ a přechodem k převráceným hodnotám (podle věty 70 C), 3. vzorec)

$$(x^m)^k = \frac{1}{(x^m)^{-k}} = \frac{1}{x^{-mk}} = x^{mk}.$$

Vzorec (16) jsme tedy dokázali při $x > 0$ pro každé m a každé *celé* k. Později (věta 72) dokážeme jej pro zcela libovolné k.

Dodatek 2. Je-li $0 < x < y$, $n < 0$, je $-n > 0$ a tedy podle věty 70 D) $x^{-n} < y^{-n}$, tj. $\frac{1}{x^n} < \frac{1}{y^n}$, $x^n > y^n$, právě naopak než ve větě 70 D). Podobně: je-li $0 < x < 1$, $m > n$, je $\frac{1}{x} > 1$ a tedy podle věty 70 E): $\left(\frac{1}{x}\right)^m > \left(\frac{1}{x}\right)^n$; $\frac{1}{x^m} > \frac{1}{x^n}$, $x^m < x^n$, právě naopak než ve větě 70 E).

Dokažme nyní tuto větu:

Věta 71. *Budiž* $x > 0$, $\lim_{n\to\infty} z_n = z$; *potom je* $\lim_{n\to\infty} x^{z_n} = x^z$.

Poznámka. Jsou-li z_n *racionální* čísla, je tvrzení věty 71 správné podle věty 69 a definice 10; ve větě 71 však není vysloven předpoklad, že z_n jsou racionální; musíme tedy dokázat tvrzení pro libovolná z_n (racionální nebo iracionální).

Důkaz. 1. Pro $x = 1$ je věta správná, neboť

$$\lim_{n\to\infty} 1^{z_n} = \lim_{n\to\infty} 1 = 1 = 1^z.$$

2. Budiž $x > 1$. Zvolme, pro každé přirozené n, racionální číslo y_n tak, že

$$z_n - \frac{1}{n} < y_n \leqq z_n \tag{17}$$

(to lze podle věty 47). Potom $\lim_{n\to\infty}\left(z_n - \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} z_n = z$; podle věty 61 je tedy též $\lim_{n\to\infty} y_n = z$. Ježto čísla y_n jsou racionální, je podle věty 69 a definice 10

$$\lim_{n\to\infty} x^{y_n} = x^z. \tag{18}$$

Jest $x^{z_n} = x^{y_n} . x^{z_n - y_n}$; stačí tedy dokázat, že

$$\lim_{n\to\infty} x^{z_n - y_n} = 1; \tag{19}$$

neboť potom bude podle (18), (19)

$$\lim_{n\to\infty} x^{z_n} = \lim x^{y_n} . \lim x^{z_n - y_n} = x^z . 1 = x^z.$$

Vzorec (19) dokážeme však takto: podle (17) je

$$0 \leqq z_n - y_n < \frac{1}{n}$$

a tedy (podle věty 70 E)

$$x^0 \leqq x^{z_n - y_n} < x^{1/n};$$

ale

$$\lim_{n\to\infty} x^0 = \lim_{n\to\infty} 1 = 1\,, \quad \lim_{n\to\infty} x^{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{x} = 1$$

(podle příkl. 4 v kap. II, § 2); podle věty 61 platí tedy též (19).

3. Budiž $0 < x < 1$; položme $y = \frac{1}{x}$, takže $y > 1$. Podle případu 2 je $\lim\limits_{n\to\infty} y^{z_n} = y^z$ a tedy vskutku

$$\lim_{n\to\infty} x^{z_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{y}\right)^{z_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{y^{z_n}} = \frac{1}{y^z} = \left(\frac{1}{y}\right)^z = x^z\,.$$

Věta 72. *Je-li $x > 0$, je*

$$(x^m)^n = x^{mn}\,. \tag{20}$$

Důkaz. 1) Budiž především n celé; potom vzorec (20) platí podle dodatku 1 k větě 70 (viz vzorec (16)).

2) Budiž n racionální, tedy $n = \frac{p}{q}$ (p, q celá, $q > 0$). Položme pro větší zřetelnost $x^m = y$, $y^n = z$, takže $z = (x^m)^n$. Jest

$$z = y^n = y^{p/q} = \sqrt[q]{y^p} = \sqrt[q]{(x^m)^p} = \sqrt[q]{x^{mp}}\,, \tag{21}$$

podle případu 1). Položme dále $u = x^{mn}$; podle případu 1) (ježto q je celé) jest $u^q = (x^{mn})^q = x^{mnq} = x^{mp}$ (neboť $nq = p$); zároveň $u > 0$, a tedy $u = \sqrt[q]{x^{mp}}$. Tedy je (podle (21)) $u = z$, tj. $x^{mn} = (x^m)^n$, jak jsme měli dokázat.

3) Budiž konečně n libovolné číslo; existuje posloupnost racionálních čísel $n_1, n_2, n_3, \ldots$ tak, že $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = n$. Podle případu 2) (ježto n_k je racionální) je $(x^m)^{n_k} = x^{mn_k}$. Je také $\lim\limits_{k\to\infty} mn_k = mn$, a tedy podle věty 71

$$(x^m)^n = \lim_{k\to\infty} (x^m)^{n_k} = \lim_{k\to\infty} x^{mn_k} = x^{mn}\,.$$

Tím je věta 72 úplně dokázána.

V definicích 9, 10 jsme definovali x^z pro libovolná z při *kladném* x. Při *záporném* x a *necelém* z nebudeme x^z zde vůbec definovat (k účelné definici bychom potřebovali prostředky, které nemáme dosud k dispozici). Je však účelné definovat x^z pro $x = 0$ a pro kladná z, a to touto definicí:

$$0^z = 0 \quad \text{pro} \quad z > 0 . \tag{22}$$

To smíme, neboť pro *celá* kladná z je skutečně $0^z = 0 . 0 \ldots 0 = 0$ a pro *necelá* kladná z nebylo 0^z dosud definováno, takže je můžeme definovat jak chceme.[3]) Pro $z = 0$ jsme definovali již dříve $0^0 = 1$; pro $z < 0$ nebudeme 0^z vůbec definovat; nebylo by to účelné.

Co si musí čtenář bezpodmínečně zapamatovat z toho, co jsme dosud v kap. III řekli? Především pro $x > 0$ definici x^z pro racionální z (definice 9, opřená o větu 67) a definici x^z pro libovolná z (definice 10, opřená o větu 69); k tomu definici symbolu 0^z. Dále větu 71, jakož i věty o počítání s mocninami, tj. větu 70, vzorce (15), 2. dodatek k větě 70 a větu 72. S těmito větami musí čtenář hbitě a bez obtíží zacházet; věta 72 a tvrzení A), B), C) z věty 70 jsou ostatně běžné ze školy; tvrzení D), E) si snad nejsnáze zapamatuje pod hesly: mocnina s *kladným* mocnitelem se zvětší, zvětší-li se základ (při záporném mocniteli je tomu naopak); mocnina se základem ***větším než*** 1 se zvětší, zvětší-li se mocnitel (při kladném základu menším než 1 je tomu naopak).[4])

Cvičení

1. Je-li $\alpha > 0$, je $\lim n^\alpha = +\infty$; je-li $\alpha < 0$, je $\lim n^\alpha = 0$. Návod pro $\alpha > 0$: zvolme celé $k > 0$ tak, že $\frac{1}{k} < \alpha$. Potom je (cvičení 7, kap. II, § 4) $\lim n^{1/k} = +\infty$, $n^\alpha > n^{1/k}$. Pro $\alpha < 0$ přejděte k převráceným hodnotám.

2. Je-li $\lim z_n = +\infty$, $\lim \alpha_n = \alpha$, je $\lim z_n^{\alpha_n} = +\infty$ pro $\alpha > 0$, $\lim z_n^{\alpha_n} = 0$ pro $\alpha < 0$. Návod: je-li $\alpha > 0$, je $\alpha_n > \frac{1}{2}\alpha$ pro velká n; užijte cvičení 1.

3. Je-li $z_n > 0$, $\lim z_n = 0$, $\lim \alpha_n = \alpha$, je $\lim z_n^{\alpha_n} = 0$ pro $\alpha > 0$, $\lim z_n^{\alpha_n} = +\infty$ pro $\alpha < 0$. Návod: $\lim \frac{1}{z_n} = +\infty$; užijte cvičení 2.

4. Je-li $\lim \alpha_n = +\infty$, je $\lim x^{\alpha_n} = +\infty$ pro $x > 1$, $\lim x^{\alpha_n} = 0$ pro $0 < x < 1$ (užijte známé hodnoty $\lim\limits_{k \to +\infty} x^k$, kap. II, § 3, příkl. 8).

5. Je-li $\lim \alpha_n = -\infty$, je $\lim x^{\alpha_n} = 0$ pro $x > 1$, $\lim x^{\alpha_n} = +\infty$ pro $0 < x < 1$.

[3]) Ostatně bychom k naší definici (22) mohli přijít také tak, že bychom definice 9, 10 rozšířili také na $x = 0$ (při kladném z). Neboť je-li $z = \frac{p}{q} > 0$ (p, q celá, $q > 0$ a tedy též $p > 0$), je $0^p = 0$ a podle poznámky 1 k větě 43 je tedy $\sqrt[q]{0^p} = \sqrt[q]{0} = 0$; položím-li tedy $0^{p/q} = \sqrt[q]{0^p}$, vyjde vskutku $0^z = 0$ pro racionální $z > 0$. Pro libovolné $z > 0$ definujme $0^z = \lim\limits_{n \to \infty} 0^{z_n}$, kde z_n jsou racionální, $\lim z_n = z$. Ježto $z > 0$, je od jistého n počínaje též $z_n > 0$, tedv $0^{z_n} = 0$ a tedy $0^z = \lim 0 = 0$, čímž jsme přivedeni k definici (22).

[4]) Užívám názvosloví běžného ze školy: v „mocnině“ x^z je x „základ“, z „mocnitel“ čili „exponent“.

§ 2. Logaritmus. Naše teorie mocniny vede nás snadno k pojmu logaritmu, se kterým jste se už setkali ve škole. Tam jste postupovali takto: vezmeme kladné číslo x a hledáme číslo y tak, aby bylo $10^y = x$; číslo y pak nazýváme logaritmem (Briggsovým nebo dekadickým) čísla x. Tento pojem logaritmu postavíme nyní na solidní základ. Především musíme dokázat, že ke každému $x > 0$ skutečně existuje jedno a jen jedno číslo y tak, že $10^y = x$; za druhé je výskyt čísla 10 v rovnici $10^y = x$ jen náhodný (souvisí s desetinnou soustavou) a proto se budeme obecněji zabývat rovnicí $a^y = x$, kde a je libovolné kladné číslo, různé od 1 (proč vylučujeme hodnotu $a = 1$, řekneme si za chvíli). Všechno, co jsem teď slíbil, je obsaženo v této větě:

Věta 73. *Budiž $x > 0$; budiž $a > 0$, $a \neq 1$. Potom existuje jedno a jen jedno číslo y, pro něž platí rovnost*

$$a^y = x\,. \tag{23}$$

Definice 11. *Toto číslo y označujeme* $\log_a x$ *a nazýváme je „logaritmus čísla x při základu a".*

Důkaz. Budiž $x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$. Napřed dokážeme, že existuje aspoň jedno číslo y tak, že platí (23).

1) Budiž předně $a > 1$. Podle příkladu 8 v kap. II, § 3 je $\lim\limits_{n\to\infty} a^n = +\infty$, a tedy existuje jistě přirozené číslo n_1 tak, že $a^{n_1} > x$. Za druhé je $0 < \frac{1}{a} < 1$, tedy je podle téhož příkladu $\lim\limits_{n\to\infty} a^{-n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{a^n} = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^n = 0$, a tedy existuje přirozené číslo n_2 tak, že $a^{-n_2} < x$. Označme znakem M množinu oněch čísel z, pro něž je

$$a^z < x\,. \tag{24}$$

Množina M *není prázdná*, neboť číslo $-n_2$ patří do M. Za druhé je množina M *shora omezená*, a to z tohoto důvodu: je-li $z > n_1$, je $a^z > a^{n_1} > x$, takže číslo z nepatří do M; všechna čísla množiny M jsou tedy $\leqq n_1$. Označme znakem y supremum množiny M. *Je-li $z > y$, je $a^z \geqq x$*: neboť je-li $z > y$, nepatří z do M a tedy neplatí (24). Budiž za druhé $z < y$; podle 2. vlastnosti suprema (z věty 39) existuje potom v M číslo u, jež je větší než z; ježto $u \in M$, je $a^u < x$; ježto $z < u$, je $a^z < a^u < x$. Tedy: *Je-li $z < y$, je $a^z < x$.* Sestrojme tyto dvě posloupnosti: $t_n = y - \frac{1}{n}$, $v_n = y + \frac{1}{n}$; jest $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \lim\limits_{n\to\infty} v_n = y$, a tedy podle věty 71

$$\lim_{n\to\infty} a^{t_n} = \lim_{n\to\infty} a^{v_n} = a^y\,. \tag{25}$$

Dále je $t_n < y$, $v_n > y$ a tedy, jak jsme právě dokázali,

$$a^{t_n} < x\,, \quad a^{v_n} \geqq x$$

pro všechna n. Podle poznámky 4 k větě 60 (kap. II, § 2) je tedy

$$\lim_{n \to \infty} a^{t_n} \leqq x, \quad \lim_{n \to \infty} a^{v_n} \geqq x. \tag{26}$$

Podle (25) je tedy $a^y \leqq x$ a současně $a^y \geqq x$, tedy $a^y = x$. Tedy existuje vskutku číslo y, pro něž platí (23).

2) Budiž za druhé $0 < a < 1$ a položme $b = \frac{1}{a}$, takže $b > 1$. Podle případu 1) existuje číslo y tak, že $b^y = \frac{1}{x}$; potom je však

$$a^y = \left(\frac{1}{b}\right)^y = \frac{1}{b^y} = x,$$

takže vskutku platí rovnice (23).

3) Kdyby pro některou dvojici čísel a, x ($x > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$) existovalo více než jedno číslo y, splňující rovnici (23), existovala by dvě čísla y_1, y_2 ($y_1 < y_2$) tak, že by bylo $a^{y_1} = a^{y_2} = x$. Ale to je nemožno; neboť z nerovnosti $y_1 < y_2$ plyne (podle věty 70 a dodatku 2 k této větě) pro $a > 1$ nerovnost $a^{y_1} < a^{y_2}$, pro $0 < a < 1$ pak nerovnost $a^{y_1} > a^{y_2}$, takže v žádném případě nemůže být $a^{y_1} = a^{y_2}$.

Poznámka 1. Hodnotu $a = 1$ jsme z věty 73 vyloučili. To bylo nutno, neboť pro $a = 1$ by věta 73 byla nesprávná, a to z tohoto důvodu: jest vždy $1^y = 1$, takže rovnice $1^y = x$ není pro $x \neq 1$ splněna pro *žádné* y, kdežto pro $x = 1$ je splněna nejen pro jedno y, nýbrž vůbec pro *každé* y.

Dokážeme nyní základní vlastnosti logaritmů:

Věta 74. *Budiž n libovolné, $x > 0$, $y > 0$; $a > 0$, $a \neq 1$; $b > 0$, $b \neq 1$. Potom platí:*

A) $\log_a a = 1$, $\log_a 1 = 0$.

B) $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$; $\log_a \frac{y}{x} = \log_a y - \log_a x$;

$\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x$; $\log_a x^n = n \log_a x$.

C) $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$; $\log_{1/a} x = -\log_a x$.

D) *Je-li $a > 1$, $x < y$, je $\log_a x < \log_a y$.*

Důkaz. Podle věty 73 a definice 11 znamená rovnice $\xi = \log_a x$ totéž co $a^\xi = x$.

K bodu A): $a^1 = a$, tedy $\log_a a = 1$; $a^0 = 1$, tedy $\log_a 1 = 0$.

K bodu B) a D): pro zkrácení položme $\xi = \log_a x$, $\eta = \log_a y$, takže $a^\xi = x$, $a^\eta = y$. Jest (viz větu 70, 72) $xy = a^{\xi+\eta}$, $\frac{y}{x} = a^{\eta-\xi}$, $\frac{1}{x} = a^{-\xi}$, $x^n = (a^\xi)^n = a^{n\xi}$ a tedy $\log_a xy = \xi + \eta$ $(= \log_a x + \log_a y)$, $\log_a \frac{y}{x} = \eta - \xi$, $\log_a \frac{1}{x} = -\xi$, $\log_a x^n = = n\xi$, čímž B) je dokázáno.

Budiž nyní $a > 1$, $x < y$. Kdyby bylo $\xi = \eta$, bylo by $a^\xi = a^\eta$, tj. $x = y$. Kdyby bylo $\xi > \eta$, bylo by (věta 70 E) $a^\xi > a^\eta$, tj. $x > y$. Tedy není ani $\xi = \eta$ ani $\xi > \eta$, tedy je $\xi < \eta$, tj. $\log_a x < \log_a y$, čímž je D) dokázáno.

K bodu C): Položme pro zkrácení $\log_b x = \varphi$, takže $b^\varphi = x$. Podle B) je tedy

$$\log_a x = \log_a b^\varphi = \varphi \log_a b = \log_b x \log_a b\,;$$

dělím-li číslem $\log_a b$, dostanu první rovnici C) (číslem $\log_a b$ smím dělit: kdyby bylo $\log_a b = 0$, bylo by $a^0 = b$, tj. $b = 1$, což není pravda, tedy je $\log_a b \neq 0$). Druhou rovnici C) dostanu z první, kladu-li v ní $b = \frac{1}{a}$ (načež podle B), A) je

$$\log_a b = \log_a a^{-1} = -1 \,.\, \log_a a = -1)\,.$$

Z věty 74 plyne okamžitě

Věta 75. *Budiž* $a > 1$. *Potom je* $\log_a x > 0$ *pro* $x > 1$, $\log_a x < 0$ *pro* $0 < x < 1$.

Důkaz. Pro $x > 1$ je podle věty 74 D), A) $\log_a x > \log_a 1 = 0$ a pro $0 < x < 1$ obdobně $\log_a x < \log_a 1 = 0$.

Poznámka 2 (k větám 74, 75). Z B) plyne speciálně (pro libovolné reálné n) $\log_a a^n = n$, což je ostatně okamžitě patrno z definice. Z C) je vidět: znám-li logaritmy při základu a, dovedu počítat logaritmy pro libovolný jiný základ b; např. z běžných logaritmických tabulek (pro základ 10) můžeme s příslušnou přesností vypočíst $\log_{12} 257$ apod. Druhý vzorec C) ukazuje: logaritmy o základu $\frac{1}{a}$ dostanu z logaritmů o základu a prostě změnou znamení. Proto se v dalším můžeme omezit na logaritmy o základu větším než 1. Druhá rovnice C) ukazuje rovněž, že by se v případě $0 < a < 1$ musil obrátit smysl příslušných nerovností ve větě 74 D) a ve větě 75.

Cvičení

Zvláštní důležitost bude mít pro nás logaritmus o základu e, tedy $\log_e x$. V kap. II, § 4, příkl. 4 jsme dokázali, že pro každé $x > 0$ existuje vlastní limita $\lim\limits_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1)$; dokážeme, že je

$$\lim_{n\to\infty} n(\sqrt[n]{x} - 1) = \log_e x \quad \text{pro} \quad x > 0\,. \tag{27}$$

Budiž $x > 0$; položme $z = \log_e x$, takže $x = e^z$. Abychom dokázali rovnici (27), stačí dokázat pro každé reálné z rovnici

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{e^z} - 1\right) = z. \tag{28}$$

To učiníme v řadě cvičení.

1. (28) platí pro $z = 0$ a pro $z = 1$ (viz kap. II, § 4, cvičení 10).

2. Pro libovolná čísla y, z je

$$\lim n\left(\sqrt[n]{e^{y+z}} - 1\right) = \lim n\left(\sqrt[n]{e^y} - 1\right) + \lim n\left(\sqrt[n]{e^z} - 1\right).$$

(Návod: $n\left(\sqrt[n]{e^{y+z}} - 1\right) = \sqrt[n]{e^y} \, . \, n\left(\sqrt[n]{e^z} - 1\right) + n\left(\sqrt[n]{e^y} - 1\right)$; jest $\lim \sqrt[n]{e^y} = 1$.)

3. Z 2 plyne $\lim n\left(\sqrt[n]{e^{qz}} - 1\right) = q \lim n\left(\sqrt[n]{e^z} - 1\right)$ pro celé kladné q; z toho plyne, že (28) platí pro každé celé kladné z (užijme výsledku cvičení 1).

4. Pro racionální kladné $z = \frac{p}{q}$ (p, q přirozená) platí (28). Návod: podle cvičení 3 je

$$\lim n\left(\sqrt[n]{e^{p/q}} - 1\right) = \frac{1}{q} \lim n\left(\sqrt[n]{e^p} - 1\right) = \frac{p}{q}.$$

5. Jest $\lim n\left(\sqrt[n]{e^{-z}} - 1\right) = -\lim n\left(\sqrt[n]{e^z} - 1\right)$; z toho plyne (28) pro každé racionální $z \gtreqless 0$ (v cvičení 2 položte $y = -z$).

6. Budiž z libovolné; podle věty 66 existují racionální čísla $u_1 \leqq u_2 \leqq u_3 \leqq \ldots$ tak, že $\lim u_n = z$. Užijete-li této věty na číslo $-z$, vidíte, že existují racionální čísla $v_1 \geqq v_2 \geqq v_3 \geqq \ldots$ tak, že $\lim v_n = z$. Jest $n\left(\sqrt[n]{e^{u_k}} - 1\right) \leqq n\left(\sqrt[n]{e^z} - 1\right) \leqq n\left(\sqrt[n]{e^{v_k}} - 1\right)$ a z toho podle cvičení 5: $u_k \leqq \lim n\left(\sqrt[n]{e^z} - 1\right) \leqq v_k$ pro každé přirozené k, odkud rovnice (28) pro libovolné z.