Diferenciální počet I

Kapitola I. Reálná čísla

In: Vojtěch Jarník (author): Diferenciální počet I. (Czech). Praha: Academia, 1974. pp. 15--72.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401984

Kapitola I

REÁLNÁ ČÍSLA

Přečtěte si předmluvu, najdete v ní návod ke studiu této knihy.

§ 1. Úvod. Předpokládám, že znáte tzv. „čísla přirozená" nebo též „celá kladná" (tj. čísla 1, 2, 3, ...), dále „nulu" 0 a čísla „celá záporná" (tj. čísla -1, -2, -3, ...); těmto číslům se dohromady říká „čísla celá". Dále předpokládám, že znáte tzv. „racionální čísla", tj. čísla, jež se dají psát ve tvaru $\frac{p}{q}$, kde p, q jsou libovolná celá čísla až na to, že *q nesmí být nula* $\left(\text{znak } \frac{p}{0}, \text{ např. } \frac{3}{0}, \frac{-2}{0}, \frac{1}{0}, \frac{0}{0} \text{ tedy vůbec nezavádíme}\right)$. Předpokládám dále, že víte, kdy je $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ (tj. kdy dva zlomky vyjadřují totéž racionální číslo; to nastává tehdy a jen tehdy, je-li $ad = bc$). Dále předpokládám, že znáte čtyři základní výkony početní (sčítání, odčítání, násobení a dělení) pro racionální čísla a uspořádání těchto čísel podle velikosti (jsou-li a, b dvě různá racionální čísla, je vždy jedno z nich menší než druhé); dále že víte, že čísla racionální dělíme ve tři skupiny: čísla kladná, číslo nulu a čísla záporná.[1])

Víte, že součet $a + b$, rozdíl $a - b$, součin ab a podíl $\frac{a}{b}$ dvou racionálních čísel a, b je opět racionální číslo (při podílu musíme ovšem předpokládat, že $b \neq 0$;[2]) dělení nulou vůbec nezavádíme; proč tak činíme, víte vlastně ze školy, ale později si o tom ještě promluvíme). Že tomu tak jest, nahlédnete, vyjádříte-li racionální čísla a, b zlomky $a = \frac{p}{q}$, $b = \frac{r}{s}$ (p, q, r, s čísla celá) a počítáte s nimi podle pravidel o počítání se zlomky; tak dostanete $a + b$, $a - b$, ab, $\frac{a}{b}$ opět ve tvaru zlomku, např. $a + b = \dfrac{ps + qr}{qs}$ atd.

---

[1]) Zlomek $\frac{p}{q}$ (kde p, q jsou celá čísla a q není nula) je kladný, jsou-li čísla p, q obě kladná nebo obě záporná; zlomek je záporný, je-li jedno z obou čísel p, q kladné, druhé záporné; zlomek je roven nule, je-li $p = 0$.

[2]) Znak $a \neq b$ znamená, že číslo a je různé od čísla b, tj. že není $a = b$.

Pro úsporu místa píši často místo zlomkové čáry dělítko. Přitom jest ovšem nutno často přidávat závorky; např.

$$a:b=\frac{a}{b},\quad a:b+c=\frac{a}{b}+c,\quad a:(b+c)=\frac{a}{b+c},$$

$$a+b:c=a+\frac{b}{c},\quad (a+b):c=\frac{a+b}{c}$$

atd. Neradím čtenáři, aby si na tento způsob zvykal; užívám ho pouze pro úsporu místa.

Kdyby se matematika omezovala na čtyři základní výkony početní, vystačili by matematikové úplně s racionálními čísly; ale matematika zná též vyšší výkony, při nichž by omezení na racionální čísla vedlo k nepříjemnostem. Takovým výkonem je např. odmocňování: ptejme se např. po odmocnině ze 2, tj. po čísle x, jehož čtverec neboli druhá mocnina se rovná dvěma: $x^2 = 2$. Tvrdím, že neexistuje žádné racionální číslo, jehož čtverec se rovná dvěma. Kdyby totiž takové racionální číslo x existovalo, dalo by se, jak víte, psát v tzv. základním tvaru, tj. ve tvaru zlomku $\frac{p}{q}$, kde p, q jsou nesoudělná celá čísla. Přitom by bylo $\frac{p^2}{q^2} = 2$, $p^2 = 2q^2$, takže by p^2 bylo sudé a tedy také p by bylo sudé.[3] Tedy by bylo $p = 2m$, kde m je celé číslo, takže by bylo $4m^2 = 2q^2$, tedy $2m^2 = q^2$, takže by q^2 a tedy též q bylo sudé. Čísla p, q by tedy byla obě sudá, tj. dělitelná dvěma, což není možno, neboť současně mají být nesoudělná. Předpoklad, že existuje racionální číslo x, pro které je $x^2 = 2$, vede tedy ke sporu.[4] Kdybychom se tedy omezili jen na racionální čísla, setkali bychom se již při nejjednodušších úlohách, přesahujících čtyři základní výkony početní, s podstatnými obtížemi (např. by neexistovalo číslo x, jehož čtverec se rovná dvěma; k tomuto číslu vede však velmi jednoduchá geometrická úloha, totiž úloha, nalézt délku úhlopříčky ve čtverci). Z tohoto důvodu zavádíme v matematice ještě další čísla, tzv. reálná iracionální čísla; číslům racionálním a reálným iracionálním říkáme dohromady „reálná čísla“ a na pojmu reálného čísla budou spočívat úvahy této knihy.[5] S reálnými iracionálními čísly jste se setkali také již ve škole; ale jednak

---

[3]) „Čísla sudá“ jsou čísla tvaru $2m$, kde m je libovolné číslo celé, tj. čísla 0, 2, -2, 4, -4, 6, $-6, \ldots$; „čísla lichá“ jsou čísla tvaru $2m + 1$, kde m je libovolné celé číslo, tj. čísla 1, -1, 3, -3, 5, $-5, \ldots$ Je zřejmé, že čtverec lichého čísla je liché číslo, a že čtverec sudého čísla je sudé číslo.

[4]) Důkaz, který jsme zde provedli, je typem tzv. „nepřímého důkazu“: abych dokázal nějakou větu (zde větu: *neexistuje* racionální číslo, jehož čtverec se rovná dvěma), předpokládám, že tato věta je nesprávná (v našem případě předpokládám, že *existuje* racionální číslo, jehož čtverec se rovná dvěma) a ukáži, že tento předpoklad vede ke sporu.

[5]) O tzv. číslech komplexních, obsahujících tzv. „imaginární jednotku“ i, promluvím až v poslední kapitole této knihy.

jste se přitom musili spokojit několika náznaky, jednak má teorie reálných iracionálních čísel pro úkoly této knihy zásadní důležitost; z těchto dvou důvodů nebudu předpokládat, že tuto teorii znáte, nýbrž ji v této kapitole proberu. Tedy ještě jednou: nauka o *racionálních* číslech, tj. věty o jejich sčítání, odčítání, násobení a dělení a o jejich uspořádání podle velikosti, bude pro nás základem, o němž předpokládám, že je vám znám, a na němž budeme stavět.

K tomu však učiním jednu zásadní poznámku. Spolehlivost matematických vět je především důsledkem metody, kterou se matematické věty dokazují; matematika vychází z několika málo jednoduchých a velmi přijatelných (nematematik by se snadno dal svést k tomu, aby řekl „samozřejmých") vět, které bez důkazu přijímá; takovým větám říkáme axiomy. Z těchto vět potom ryze deduktivním usuzováním (bez jakýchkoliv odkazů ke smyslovým zkušenostem) odvozuje věty další; tímto způsobem budeme také v další výstavbě v této knize postupovat. Ovšem bylo by celkem málo platné, kdybychom stavěli solidně první, druhé a další poschodí a nestarali se o základy. Těmito základy pro nás jest, jak jsem právě zdůraznil, nauka o racionálních číslech. Je nyní otázka, zda jste si tuto nauku osvojili způsobem, který by snesl přísné, vědecké měřítko. A tu jistě sami uznáte, že nikoliv; s některými částmi této nauky, např. s přirozenými čísly, jste se setkali již v útlém věku; později, na střední škole, jste se zabývali naukou o racionálních číslech sice vědečtější metodou, ale jistě by vaše poznatky potřebovaly revize. Vlastně bych tedy měl nyní, na počátku, probrat teorii racionálních čísel; neučiním to však, a to z několika důvodů. Především je tato teorie, ač dosti jednoduchá, značně abstraktní a činí proto začátečníkovi jisté obtíže; za druhé jsou to věci vám známé a tak vžité, že jistě není třeba se obávat, že byste se v nich dopouštěli nesprávností. Za třetí začátečník nepochopí obyčejně dosti význam okolnosti, že se mu věci známé odvodí přesnějším způsobem; teprve až se při získávání jiných, nových poznatků seznámí se stupněm přesnosti matematických metod, zatouží po tom, upevnit si podobným způsobem též vědomosti, získané ve škole. Z těchto důvodů nebudu zde teorii racionálních čísel odvozovat, nýbrž budu předpokládat, že ji znáte a budu na ní bez rozpaků dále budovat.

Doporučuji vám však, abyste si později své vědomosti doplnili studiem teorie racionálních čísel. Jde při tom *předně* o teorii čísel *celých* (tj. napřed o teorii čísel přirozených 1, 2, 3, ... a potom o rozšíření této teorie i na čísla 0, -1, -2, -3, ...); *za druhé* jde o přechod od čísel celých k obecným číslům *racionálním* („lomeným"). Odkazy na příslušnou literaturu najde čtenář ke konci § 6.

Než však přistoupím k soustavnému vybudování teorie reálných čísel, objasním význam některých názvů a rčení, jichž se v matematice často užívá. Je-li A nějaký výrok, značím symbolem non A logický zápor tohoto výroku. Je-li např. A výrok „kočka je savec", je non A výrok „kočka není savec". Je-li A výrok „kočka není savec", je non A výrok „kočka je savec". Nebo: je-li A výrok „číslo 2 je záporné", je non A výrok „číslo 2 není záporné". Každý výrok toho druhu, jaké jsme uvedli a jakými se budeme zabývat, je buďto pravdivý nebo nepravdivý. Je-li výrok A pravdivý, je výrok non A nepravdivý; je-li výrok A nepravdivý, je výrok non A pravdivý. Čtenář jistě vidí, které z uvedených výroků jsou pravdivé a které nepravdivé.

Jsou-li předloženy dva výroky A, B, jsou možné tyto případy:[6]) I. A platí, B platí. II. A platí, B neplatí. III. A neplatí, B platí. IV. A neplatí, B neplatí. Řeknu-li, že „platí buďto A nebo B", rozumím tím, že platí *aspoň* jeden z těchto dvou výroků A, B, netvrdím tím však, že by se výroky A, B navzájem vylučovaly. Jinak řečeno: řeknu-li, že platí buďto A nebo B, tvrdím tím, že z uvedených čtyř případů nenastává případ IV. Např. je správná tato věta: „Každé celé číslo je buďto sudé nebo nedělitelné čtyřmi", neboť každé celé číslo, jež není sudé, je liché a tedy nedělitelné čtyřmi. Ovšem se obě možnosti navzájem nevylučují, neboť čísla $2, -2, 6, -6, 10, -10, \ldots$ jsou současně sudá a nedělitelná čtyřmi. Podobně při větším počtu výroků; řeknu-li „platí buďto A nebo B nebo C", znamená to, že platí *aspoň* jeden z výroků A, B, C. Např.: Každé racionální číslo je buďto větší než 5 nebo záporné nebo leží mezi čísly $-1, 7$ (to znamená ovšem, že je větší než -1 a menší než 7). Nebo: Každé racionální číslo je buďto kladné nebo záporné nebo nula. V posledním příkladě se ovšem tyto tři případy navzájem vylučují: číslo kladné není ani záporné ani nula, číslo záporné není ani kladné ani nula, číslo nula není ani kladné ani záporné. Chceme-li tuto okolnost zvláště vyznačit, řekneme: „Každé racionální číslo je buďto kladné nebo záporné nebo nula a tyto tři případy se navzájem vylučují" nebo řekneme: „Je-li dáno libovolné racionální číslo, nastává jeden a jen jeden z těchto případů: buďto je toto číslo kladné nebo je záporné nebo je nula". Obecně: řeknu-li „Platí buďto A nebo B nebo C a tyto tři případy se navzájem vylučují" nebo řeknu-li „Platí jeden a jen jeden z výroků A, B, C", rozumím tím, že nastává jeden z těchto tří případů (jež se ovšem navzájem vylučují): α) A platí, B neplatí, C neplatí. β) A neplatí, B platí, C neplatí. γ) A neplatí, B neplatí, C platí.[6a])

Další často užívané rčení jest „Platí-li A, platí B"; to znamená, že ze čtyř možností I až IV nenastává případ II (A platí, B neplatí). Místo „platí-li A, platí B" říkáme též „z A plyne B" nebo „A implikuje B".

Poznamenávám, že výrok

(α) „Platí-li A, platí B"

znamená totéž jako výrok

(β) „Buďto neplatí A, nebo platí B".

---

[6]) Říkám kratčeji „platí — neplatí" místo „je pravdivý — je nepravdivý".

[6a]) V obecném jazyce se slov „buďto-nebo" užívá v dvojím smyslu. Řeknu-li „dnes večer půjdu buďto do divadla nebo do biografu", myslím přitom zpravidla také na to, že se tyto dvě možnosti navzájem vylučují. Řeknu-li však „ten student nic neuměl — je buďto lenoch nebo je neschopný", nechci tím rozhodně říci, že by se lenost a neschopnost navzájem vylučovaly. Je důležité, abychom se přesně smluvili, v kterém smyslu budeme v matematice rčení „platí buďto A nebo B" užívat. V matematice se častěji vyskytuje ten případ, že nám nezáleží na tom, zda se A, B navzájem vylučují. Proto budeme tohoto rčení užívat ve smyslu uvedeném v textu: platí *aspoň* jeden z výroků A, B.

Důkaz. Výrok (α) znamená podle definice, že ze čtyř možností I až IV nenastává případ II. Naproti tomu výrok (β) znamená, že platí aspoň jeden z výroků

(γ) „A neplatí", „B platí".

Prohlédnete-li si případy I až IV, vidíte ihned: V případech I, III, IV platí aspoň jeden z výroků (γ), kdežto v případě II neplatí žádný z nich. Výrok (β) tedy znamená, že nenastává případ II, tj. výrok (β) znamená totéž jako (α).

Věta

(*) „Platí-li A, platí B"

znamená totéž jako věta „Platí-li non B, platí non A", tj. totéž jako věta

(**) „Neplatí-li B, neplatí A".

Neboť je-li správná věta (*) a neplatí-li B, nemůže platit A; neboť kdyby platilo A, platilo by B podle věty (*). Ze správnosti věty (*) plyne tedy správnost věty (**) a obdobně sezná čtenář sám, že ze správnosti věty (**) plyne správnost věty (*). Příklad: budiž Δ trojúhelník o stranách a, b, c, přičemž je c nejdelší strana.[7] Budiž A výrok „trojúhelník Δ je pravoúhlý", B budiž výrok „$c^2 = a^2 + b^2$". Potom víte, že platí implikace „Platí-li A, platí B"; tj. slovy: je-li trojúhelník Δ pravoúhlý, je $c^2 = a^2 + b^2$; to je Pythagorova věta. Tato věta znamená totéž jako věta: „Není-li $c^2 = a^2 + b^2$, není trojúhelník Δ pravoúhlý".

Zdůrazňuji, že věta „platí-li A, platí B" a věta „platí-li B, platí A" jsou dvě věty podstatně různé. Příklad: budiž A výrok „trojúhelník Δ je rovnostranný" (tj. všechny tři jeho strany jsou stejné); budiž B výrok „trojúhelník Δ je rovnoramenný" (tj. aspoň dvě – ale možná že i všechny tři – jeho strany jsou stejné). Potom věta „Platí-li A, platí B" (tj. každý rovnostranný trojúhelník je rovnoramenný) je správná, kdežto věta „Platí-li B, platí A" (tj. každý rovnoramenný trojúhelník je rovnostranný) je nesprávná. Jestliže však pro dva výroky A, B platí současně, že z A plyne B a že z B plyne A, říkáme stručněji „A platí tehdy a jen tehdy, platí-li B" nebo „A platí, když a jen když platí B". Je-li např. A výrok „trojúhelník Δ je rovnostranný" a je-li B výrok „trojúhelník Δ je rovnoúhlý" (tj. všechny jeho úhly jsou stejné), potom je, jak víte, správná věta „A platí tehdy a jen tehdy, platí-li B" (tj. trojúhelník je rovnostranný tehdy a jen tehdy, je-li rovnoúhlý). Máme-li dokázat větu „A platí tehdy a jen tehdy, platí-li B", musíme dokázat tyto dvě věty:

(***) Platí-li A, platí B; platí-li B, platí A .

Místo první věty stačí ovšem dokázat též větu „neplatí-li B, neplatí A" a místo druhé stačí dokázat větu „neplatí-li A, neplatí B". Těchto možností se vskutku často užívá: tak např. místo vět (***) se často dokazují tyto věty:

(****) Platí-li A, platí B; neplatí-li A, neplatí B .

[7]) To nechť znamená, že žádná ze stran a, b není delší než c; může ovšem popř. jedna (nebo i obě) ze stran a, b být rovna c.

Věta „A platí tehdy a jen tehdy, platí-li B“ značí, jak je patrné, že ze čtyř případů uvedených na str. 18 nenastává případ II ani III, tj. že výroky A, B jsou buďto oba pravdivé nebo oba nepravdivé. Je zřejmé, že věta „A platí tehdy a jen tehdy, platí-li B“ znamená totéž jako „B platí tehdy a jen tehdy, platí-li A“.

Poznámka 1. Místo věty „platí-li A, platí B“ říká se někdy též „A je postačující podmínka pro B“ (to znamená tedy: pravdivost výroku A stačí k tomu, aby pravdivost výroku B byla zaručena) nebo též „B je nutná podmínka pro A“ (má-li A být pravdivé, musí být nutně B pravdivé — neboť kdyby B nebylo pravdivé, nemohlo by A být pravdivé; ovšem pravdivost výroku B nezaručuje ještě pravdivost výroku A). Věta „A je nutná a postačující podmínka pro B“ znamená pak, že z B plyne A a současně z A plyne B; tj. tato věta znamená prostě: „A platí tehdy a jen tehdy, platí-li B“. Např. rovnostrannost trojúhelníka je postačující podmínkou pro rovnoramennost, rovnoramennost je nutnou podmínkou pro rovnostrannost, rovnostrannost je nutnou a postačující podmínkou pro rovnoúhlost. My však budeme užívat názvů, uvedených v této poznámce, pouze příležitostně.

Poznámka 2. Místo „platí-li A, platí B“ říkáme často pro větší zřetelnost (hlavně jsou-li výroky A, B složité): „Předpokládejme, že platí A; potom platí B“; nebo: „Nechť platí A; potom platí B“; nebo: „Budiž splněno A; potom platí B“ a podobně.

V matematice se často užívá slova *množina*. Množinou nazýváme souhrn nějakých věcí; jednotlivé věci, z nichž se množina skládá, nazýváme prvky čili elementy té množiny. Nebudu se pouštět do podrobné diskuse pojmu množiny; objasním jej pouze na několika příkladech, jež čtenáři jistě postačí:

1) Množina M_1 všech přirozených čísel; prvky této množiny jsou jednotlivá přirozená čísla 1, 2, 3, ..., takže např. číslo 5 jest a číslo $\frac{1}{3}$ není prvkem množiny M_1.

2) Množina M_2, jejíž prvky jsou čísla 3, 5, 18; tato množina se skládá ze tří prvků.

3) Množina M_3 všech kružnic v rovině; prvky jsou jednotlivé kružnice v rovině. Např. kružnice o rovnici $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 16$ je prvkem, kdežto elipsa o rovnici $x^2 + 2y^2 = 1$ není prvkem množiny M_3.[8])

4) Množina M_4 všech prvočísel větších než 6 a menších než 27; prvky jsou čísla 7, 11, 13, 17, 19, 23 — tedy celkem šest prvků.

5) Množina M_5 všech racionálních čísel, jež jsou kladná a současně menší než 1. Např. čísla -5, -1, 0 nejsou prvky množiny M_5, ježto nejsou kladná; čísla 10, $\frac{3}{2}$, 1 nejsou prvky množiny M_5, ježto nejsou menší než 1; zato čísla $\frac{1}{8}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{99}{100}$ jsou prvky množiny M_5.

[8]) Tímto příkladem vlastně předbíhám; dosud nepředpokládám nic jiného než znalost racionálních čísel, a k tomu, abychom mohli mluvit o kružnicích a elipsách v tom smyslu, jenž vám je běžný ze školy, musili bychom mít k dispozici také iracionální čísla. Mně však při tomto příkladě šlo jen o to, ukázat na příkladě, že prvky množiny mohou být nejen čísla, nýbrž i docela jiné věci.

6) Je účelné zavést pojem *prázdné množiny*, tj. množiny, jež neobsahuje žádný prvek. Definujme např. M_6 jakožto množinu všech prvočísel, jež jsou větší než 7 a současně menší než 11; neexistuje žádné takové prvočíslo, takže množina M_6 je prázdná. Množinu, jež obsahuje aspoň jeden prvek, tj. jež není prázdná, nazýváme *neprázdnou*. Zavedení pojmu prázdné množiny je účelné v soustavné teorii množin; pro úkoly této elementární knihy nemá však tento pojem mnoho důležitosti.

7) Budiž M_7 množina všech čísel racionálních, jež nejsou ani kladná ani záporná. Tato množina obsahuje jediný prvek, totiž číslo 0.

Okolnost, že věc a je prvkem množiny M, značíme znakem $a \in M$; abychom vyznačili, že a není prvkem množiny M, píšeme někdy a non $\in M$. Např.: $2 \in M_1$, $5 \in M_2$, 19 non $\in M_2$, -5 non $\in M_1$. Množinu považujeme za danou, jsou-li dány její prvky; dvě množiny M, N považujeme za stejné, skládají-li se z týchž prvků, a píšeme, abychom tuto okolnost vyznačili, $M = N$. To tedy znamená: každý prvek množiny M patří k množině N a každý prvek množiny N patří k množině M. Znakem $M \neq N$ vyznačujeme okolnost, že není $M = N$; to znamená tedy: buďto existuje prvek množiny M, jenž nepatří k N, nebo existuje prvek množiny N, jenž nepatří k M. Množinu M nazýváme *částí* množiny N, jestliže každý prvek množiny M patří k množině N, tj. jestliže platí implikace: je-li $a \in M$, je $a \in N$, tj. jestliže neexistuje žádný prvek množiny M, který by nepatřil k N. Okolnost, že množina M je částí množiny N, vyjadřujeme znakem $M \subset N$. Tedy např. prázdná množina je částí každé množiny; nebo (viz hořejší příklady): $M_2 \subset M_1$, $M_4 \subset M_1$; není však $M_1 \subset M_5$ ani $M_5 \subset M_1$. Každá množina M je podle definice částí sebe samotné: $M \subset M$. Rovnost $M = N$ znamená patrně, že je současně $M \subset N$, $N \subset M$ (tj. každý prvek z M patří k N a každý prvek z N patří k M; tímto způsobem se nejčastěji rovnost dvou množin dokazuje). Množinu M nazýváme *pravou částí* množiny N, je-li $M \subset N$ a současně $M \neq N$; např. množina všech sudých kladných čísel 2, 4, 6, ... je pravou částí množiny všech čísel přirozených; prázdná množina je pravou částí každé neprázdné množiny atd.[9])

Množinu nazýváme *konečnou*, má-li konečný počet prvků; také prázdnou množinu počítáme mezi konečné množiny a říkáme, že počet jejích prvků je roven nule. Je vám známo, že pravá část konečné množiny M je opět konečná množina a má menší počet prvků než množina M.[10]) Tak v příkladech na str. 20 až 21 jsou množiny M_2, M_4, M_6, M_7 konečné a mají po řadě tento počet prvků: 3, 6, 0, 1. Množinu, jež není podle naší definice konečná, nazýváme *nekonečnou*. Že množina M je nekonečná, poznáme často podle těchto vět:

---

[9]) Někteří autoři píší $M \subseteq N$, je-li M částí N, a píší $M \subset N$ jen tehdy, je-li M pravou částí N. Místo non $\in$ se často píše $\bar{\in}$ nebo $\notin$.

[10]) Význam rčení: „Množina M se skládá z n prvků“ (např. „množina, jejíž prvky jsou jedno jablko, ještě jedno jablko, jedna hruška a jedna jahoda, se skládá ze čtyř prvků“) je vám běžný od dětských let. Při vědeckém vybudování matematiky potřebuje ovšem tento pojem revize; některé literární údaje viz ke konci § 6.

A) *Má-li M nekonečnou část N, je množina M sama nekonečná.* Důkaz: kdyby množina M byla konečná, byla by i každá její část, tedy i množina N, konečná.

B) *Nechť má množina M tuto vlastnost: je-li n libovolné přirozené číslo, existuje množina $N \subset M$, jež je konečná a má právě n prvků; potom je množina M nekonečná.* Důkaz (nepřímý): Předpokládejme, že množina M je konečná a budiž m počet jejích prvků. Zvolme $n = m + 1$; podle předpokladu existuje množina $N \subset M$, jež má $m + 1$ prvků. Ale to není možné, ježto každá část množiny M má nejvýše m prvků. Z věty B) dostáváme např. ihned, že množina M_1 (viz str. 20) je nekonečná; zvolím-li totiž libovolné číslo přirozené n, je množina přirozených čísel od 1 až do n částí množiny M_1 a má n prvků. Podobně: množina, jejíž prvky jsou kružnice o rovnicích

$$x^2 + y^2 = 1^2, \quad x^2 + y^2 = 2^2, \dots, x^2 + y^2 = n^2,$$

je částí množiny M_3 a má n prvků (přičemž za n mohu volit libovolné přirozené číslo); tedy množina M_3 je nekonečná. Dále: množina, jejíž prvky jsou čísla $\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n+1}$, má n prvků a je částí množiny M_5; tedy množina M_5 je nekonečná. Příklad na užití věty A): množina M_8 všech racionálních čísel je nekonečná; neboť nekonečná množina M_5 je částí množiny M_8.

§ 2. Aritmetika racionálních čísel. V § 1 jsem řekl, že nauku o racionálních číslech budu považovat za známou. V tomto § 2 sestavím některé základní věty z nauky o racionálních číslech, přičemž však nebudu většinou provádět důkazy, neboť předpokládám, že tyto věci již známe. Ježto se stavíme na stanovisko, že dosud žádná jiná než racionální čísla neznáme, budu v tomto paragrafu říkat pro zkrácení prostě „číslo“ a budu tím rozumět „racionální číslo“.

I. SČÍTÁNÍ (A ODČÍTÁNÍ)

Uspořádanou dvojicí čísel $[a, b]$ rozumím toto: je dáno jisté číslo a jakožto první člen a jisté číslo b jakožto druhý člen té dvojice; dvě dvojice považuji za stejné tehdy a jen tehdy, mají-li stejný první člen a stejný druhý člen; např. je-li $a \neq b$, je $[b, a]$ jiná dvojice než $[a, b]$. Oba členové dvojice smějí si být rovni; $[a, a]$ je také uspořádaná dvojice, její první člen je a, její druhý člen je totéž číslo a.

Každé uspořádané dvojici čísel $[a,b]$ přiřazujeme jistým způsobem (který znáte ze školy) určité číslo, které nazýváme *součtem* čísla a a čísla b a značíme je znakem $a + b$. Znáte jistě názvy: sčítání, sčítanec. Pro tento výkon „sčítání“ platí pak tyto věty:

Věta 1. $a + b = b + a$ (tzv. zákon komutativní; dvojici $[b, a]$ je přiřazeno totéž číslo jako dvojici $[a, b]$, čili: hodnota součtu nezávisí na pořadí sčítanců).

Věta 2. $(a + b) + c = a + (b + c)$ (tzv. zákon asociativní; doufám, že ze školy je vám běžný význam závorek. Levá strana značí: utvořím součet těch čísel v závorce a k němu přičtu číslo c; položím-li tedy $a + b = d$, je levá strana rovnice $d + c$. Podobně pravá strana je součet čísla a a čísla $f = b + c$. Věta 2 pak praví, že $d + c = a + f$).

Věta 3. $a + 0 = a$ (číslo se nemění, přičteme-li k němu nulu).

Věta 4. *Jsou-li a, b dvě libovolná čísla, potom existuje jedno a jen jedno*[11]) *číslo x, pro něž platí rovnost $b + x = a$; toto číslo značíme znakem $a - b$* (znáte názvy: odčítání, rozdíl (x), menšenec (a), menšitel (b)).

Poznámka 1. Každé uspořádané dvojici čísel $[a, b]$ je přiřazeno jisté číslo $a - b$, podobně jako tomu bylo u sčítání. Ale pro odčítání neplatí zákon „komutativní", neboť jen ve výjimečných případech platí rovnost $a - b = b - a$ (kdy to platí?) a rovněž neplatí zákon „asociativní", neboť jen ve výjimečných případech platí rovnost $(a - b) - c = a - (b - c)$ (kdy to platí?). Tento příklad snad poučí čtenáře, aby se na věty 1, 2 nedíval jako na zbytečné samozřejmosti: sčítání je „komutativní" a „asociativní", ale existují jiné důležité výkony, které tyto vlastnosti nemají.

Poznámka 2. Položíme-li ve větě 4 speciálně $a = 0$, dostáváme, že při daném b existuje jedno a jen jedno číslo x, pro něž $b + x = 0$; je to číslo $0 - b$, místo něhož pro zkrácení píšeme obyčejně $-b$; je tedy $b + (-b) = 0$ a podle věty 1 též

(1) $$(-b) + b = 0.$$

Rovnici $(-b) + x = 0$ vyhovuje však podle definice *jediné* číslo $x = -(-b)$,[12]) podle rovnice (1) jí však vyhovuje číslo b; obě tato čísla jsou tedy stejná, tj. $-(-b) = b$. Snad nemusím podotýkat, že číslo $-b$ nemusí být záporné; např. pro $b = -2$ je $-b = 2$. Podle věty 3 (pro $a = 0$) je $0 + 0 = 0$; rovnice $0 + x = 0$ má tedy řešení $x = 0$. Současně však víme, že rovnice $0 + x = 0$ má *jediné* řešení $x = -0$. Tedy obě řešení jsou stejná, tj. $-0 = 0$.

II. NÁSOBENÍ (A DĚLENÍ)

Každé uspořádané dvojici čísel $[a, b]$ přiřazujeme jistým způsobem (který znáte ze školy) určité číslo, které nazýváme *součinem* čísla a a čísla b a označujeme je znakem ab (nebo též $a \,.\, b$, $a \times b$). Znáte názvy: násobení, činitel. Platí pak tyto věty:

Věta 5. $ab = ba$ (zákon komutativní).

Věta 6. $(ab)\,c = a(bc)$ (zákon asociativní; podrobně: položím-li $ab = d$, $bc = f$, je $dc = af$).

[11]) „Jen jedno" znamená ovšem, že neexistují dvě různá taková čísla.

[12]) Obšírně: položme $-b = a$; rovnici $(-b) + x = 0$, tj. rovnici $a + x = 0$ vyhovuje jedno a jen jedno číslo, totiž $x = -a = -(-b)$.

Věta 7. $(a + b)\,c = ac + bc$ (tzv. zákon distributivní, spojující sčítání s násobením).

Věta 8. $a\,.\,1 = a$ (všimněte si podobné vlastnosti nuly u sčítání, věta 3).

Věta 9. *Součin ab je tehdy a jen tehdy roven nule, je-li alespoň jedno z čísel a, b rovno nule.* Tedy obšírně: je-li $a = 0$, je $ab = 0$; je-li $b = 0$, je také $ab = 0$; je-li však $a \neq 0$ a současně $b \neq 0$, je $ab \neq 0$. Uvědomte si dobře tuto důležitou větu, kterou ze školy znáte, které jste však asi příliš často neužívali!

Věta 10. *Jsou-li a, b dvě čísla, přičemž* $b \neq 0$, *potom existuje jedno a jen jedno číslo x, pro něž platí rovnost* $bx = a$; *toto číslo x značíme znakem* $\frac{a}{b}$ (pro úsporu místa píšeme někdy též a/b nebo $a : b$). Znáte názvy: dělení, podíl (x), dělenec (a), dělitel (b).

Poznámka 3. Ve větě 10, která obsahuje též definici podílu $\frac{a}{b}$, jsme předpokládali $b \neq 0$; nezavádíme tedy vůbec znaky $\frac{a}{0}$ – proč? Podíl $\frac{a}{b}$ byl pro $b \neq 0$ definován jako číslo x, vyhovující rovnici $bx = a$. Všimněme si nyní této rovnice pro $b = 0$. Potom má rovnice tvar $0\,.\,x = a$ a levá strana této rovnice se rovná podle věty 9 nule pro každé x. Je-li tedy $a = 0$, je rovnice $0\,.\,x = a$ splněna pro *každé* x, je-li $a \neq 0$, není rovnice $0\,.\,x = a$ splněna pro *žádné* x; v žádném z obou případů nemáme tedy nejmenšího vodítka, které číslo x bychom měli definovat jako „podíl“ $\frac{a}{0}$ a proto raději tento podíl – aspoň v této elementární knize – vůbec nedefinujeme; mohli bychom jej sice definovat jak chceme (a v některých speciálních partiích matematiky se to někdy jeví účelným), ale nemohli bychom očekávat, že by podíl $\frac{a}{0}$ – ať bychom jej definovali jakkoliv – měl ony rozumné vlastnosti, které od podílu očekáváme. Ještě jednou tedy zdůrazňuji: dělení nulou není v této knize vůbec definováno a je tedy vyloučeno z našich úvah.

Poznámka 4. Věty 1 až 10 tvoří základ, z něhož je možno odvodit věty o čtyřech základních výkonech početních, jak je znáte ze školy z algebry (např. věty o vytýkání před závorku, věty o odstraňování závorek, o úpravě zlomků atd.), pokud se v nich nevyskytují pojmy kladný, záporný, větší, menší.[13]) Nebudu tyto věci soustavně odvozovat (ježto je považuji za známé); některé však přikládám jako cvičení.

Cvičení

1. Tato kniha není učebnicí algebry; proto se nesnažím uvést základní věty tohoto paragrafu na nejmenší počet. Zjistěte např., že věta 9 je důsledkem ostatních uvedených vět! Návod:

[13]) O těchto pojmech si promluvíme za chvíli.

I. Jest $a + 0 = a$, tedy $a \,.\, a = a(a + 0) = a \,.\, a + a \,.\, 0$. Ale rovnice $a \,.\, a + x = a \,.\, a$ má řešení $x = 0$ (věta 3) a toto řešení je jediné (věta 4). Tedy $a \,.\, 0 = 0$. II. Je-li $a \neq 0$, $ab = 0$, existuje c tak, že $ca = 1$ (věta 10); tedy $(ca)\, b = c(ab) = c \,.\, 0 = 0$, $1 \,.\, b = 0$, $b = 0$ (věta 8). Tím je věta 9 dokázána (je-li jeden činitel 0, je součin nula; je-li součin nula a jeden činitel různý od nuly, je druhý činitel nula).

2. Jest $(-a) \,.\, c = -(ac)$, $a \,.\, (-c) = -(ac)$, $(-a) \,.\, (-c) = ac$. Návod: $ac + (-a) \,.\, c = (a + (-a))\, c = 0 \,.\, c = 0$; ale rovnice $ac + x = 0$ má jediné řešení $x = -(ac)$. Druhý vzorec plyne pak z komutativního zákona, třetí takto: $(-a) \,.\, (-c) = -((-a) \,.\, c) = -(-(ac)) = ac$ (neboť $-(-b) = b$).

3. $a - b = a + (-b)$. Návod: stačí dokázat, že $b + (a + (-b)) = a$. Obdobně dokažte: $\frac{a}{b} = a \,.\, \frac{1}{b}$ (je-li $b \neq 0$).

4. Rovnice $\frac{a}{b} = 0$ platí tehdy a jen tehdy, je-li $a = 0$ (násobte obě strany b; předpokládám ovšem $b \neq 0$).

III. USPOŘÁDÁNÍ ČÍSEL PODLE VELIKOSTI

Je vám znám vztah mezi čísly, který vyznačujeme znakem $>$ a čteme slovy „větší než" O tomto vztahu platí tyto věty:

Věta 11. *Jsou-li a, b čísla, potom platí vždy jeden a jen jeden z těchto tří vztahů: buďto je $a = b$ nebo $a > b$* (čti „a větší než b") *nebo $b > a$*

Věta 12. *Je-li $a > b$, $b > c$, je $a > c$.*

Věta 13. *Je-li $a > b$,* je $a + c > b + c$.

Věta 14. *Je-li $a > b$, $c > 0$, je $ac > bc$.*

Věta 15. *Ke každému číslu a existuje přirozené číslo n, jež je větší než a.*

Pro pohodlí zavádíme vedle znaku $>$ ještě znak $<$; místo $a > b$ („a je větší než b") píšeme také $b < a$ a čteme „b je menší než a". Čísla, jež jsou větší než 0, nazýváme *kladnými*, čísla, jež jsou menší než nula, nazýváme *zápornými*.

Věty 11 až 15 znáte ze školy zrovna tak jako věty 1 až 10. Ale snad jste s nerovnostmi tak často nepočítali jako s rovnostmi, a proto se u nich chvíli zdržíme. Vzpomeňte si, jak jste si ve škole znázorňovali čísla na ose číselné: zvolili jste si počátek (čili „bod 0") a jednotku délky. Číslo 2 např. bylo znázorněno „bodem 2", tj. bodem vpravo od „bodu 0" ve vzdálenosti dvou jednotek; číslo -2 bylo znázorněno „bodem -2", tj. bodem *vlevo* od „bodu 0" ve vzdálenosti dvou jednotek. Jestliže „bod a" (tj. bod, znázorňující číslo a) leží vlevo od „bodu b", říkáme, že číslo a je menší než b nebo také že b je větší než a[14]). Přirozeně toto znázornění, pokud spo-

[14]) Čísla kladná (tj. větší než nula) se tedy zobrazují vpravo, čísla záporná (tj. menší než nula) vlevo od „bodu nula".

čívá na hrubém zrakovém názoru, tj. pokud se na přímku dívám jako na čáru, nakreslenou např. podle pravítka tužkou na papíře, nemůže sloužit za podklad matematických důkazů; taková čára je nesmírně složitý útvar, složený ze zlomků tuhy a pokaždé v podrobnostech jiný;[15]) ale já zde nechci provádět důkazy vět 11 až 15, nýbrž chci pouze je vybavit z částečného zapomenutí, do kterého tyto věty u vás možná upadly proto, že se jich ve škole příliš často neužívá. Soustavné poučení o těchto věcech najdete např. v knize akad. Vl. Kořínka „Základy algebry" (1953, 2. vyd. 1956). Vezměme několik příkladů: je $3 > 2$, $2 > 0$, $3 > -4$, $0 > -1$, $-3 > -5$. Věty 11 a 12 jsou vám jistě jasné; rovněž tak věta 15, která říká toto: mám-li libovolné racionální číslo $\frac{p}{q}$ (p, q celá čísla, $q \neq 0$), existuje celé kladné číslo n, jež je větší než $\frac{p}{q}$ (takže „bod n" leží vpravo od „bodu $\frac{p}{q}$"). Věta 13 říká toto: je-li $a > b$ a přičtu-li k oběma číslům a, b totéž číslo (jakékoliv: kladné, záporné nebo nulu), zůstane nerovnost zachována. Např. $3 > 1$ a tedy $3 + 2 > 1 + 2$, $3 + (-7) > 1 + (-7)$; $-2 > -5$ a tedy $(-2) + 6 > (-5) + 6$, $(-2) + (-3) > (-5) + (-3)$ atd. Věta 14 říká: je-li $a > b$ a násobíme-li obě čísla a, b týmž *kladným* číslem c, zůstane nerovnost zachována. Např. jest $4 > 3$ a tedy $4 . 2 > 3 . 2$; jest $2 > -3$ a tedy $2 . 5 > -3 . 5$; jest $-2 > -4$ a tedy $(-2) . 3 > (-4) . 3$ atd. Po těchto poznámkách jste se jistě již spřátelili s větami 11 až 15 a zároveň jste si uvědomili, že je skutečně znáte ze školy.

Věta 14 říká, že nerovnost mezi dvěma čísly zůstává zachována, násobíme-li obě čísla týmž *kladným* číslem. Jak je tomu, když násobíme *záporným* číslem? O tom nás poučuje

Věta 16. *Je-li $a > b$, $c < 0$, je $ac < bc$.* Tedy: násobíme-li obě strany nerovnosti týmž *záporným* číslem, musíme obrátit smysl nerovnosti. Např. je $3 < 5$ a tedy $3 . (-2) > 5 . (-2)$; je $2 > -1$ a tedy $2 . (-3) < (-1) . (-3)$; je $-2 > -3$ a tedy $(-2) . (-5) < (-3) . (-5)$. Dříve než dokáži větu 16, dokáži tuto pomocnou větu:

Věta 17. *Je-li $a > b$, je $-a < -b$.*

Důkaz. Z nerovnosti $a > b$ podle věty 13 plyne $a + (-a) > b + (-a)$, tj. $0 > b + (-a)$. Odtud podle věty 13 opět $(-b) + 0 > (-b) + (b + (-a))$, což dává $-b > 0 + (-a)$, tj. $-b > -a$.[16])

Speciální případ věty 17: *Je-li $a > 0$, je $-a < 0$ (vyjde vlastně $-a < -0$, ale $-0 = 0$* podle pozn. 2); *je-li $b < 0$, je $-b > 0$.*

Důkaz věty 16. Budiž $a > b$, $c < 0$; podle věty 17 je $-c > -0$, ale $-0 = 0$; tedy $-c > 0$. Podle věty 14 je tedy $a . (-c) > b . (-c)$, tj. (viz

[15]) O významu zrakového názoru v matematice si povíme později více.

[16]) Myšlenka důkazu je tato: snažím se v nerovnosti $a > b$ „převést" a na pravou stranu a b na levou; k tomu cíli přičtu napřed $-a$, potom $-b$.

cvičení 2) $-(ac) > -(bc)$, tedy (věta 17) $-(-(ac)) < -(-(bc))$, tj. (viz pozn. 2) $ac < bc$.

Poznámka 5. Násobíte-li obě strany nějaké nerovnosti nulou, přejde ovšem nerovnost v rovnost: je-li $a < b$, je $a \,.\, 0 = b \,.\, 0 = 0$.

Cvičení

5. Součin dvou kladných nebo dvou záporných čísel je kladný, součin kladného a záporného je záporný (nerovnost $a > 0$ nebo $0 > a$ násobíte číslem $b > 0$ nebo $b < 0$).

6. Součet dvou čísel kladných je kladný (je-li $a > 0$, $b > 0$, je $a + b > 0 + b = b > 0$);[17]) součet dvou záporných je záporný.

7. Číslo 1 je kladné (podle věty 15 existuje číslo $n > 0$; tedy $n \,.\, 1 = n \neq 0$, kdežto $n \,.\, 0 = 0$, tedy $1 \neq 0$; 1 je tedy kladná nebo záporná (věta 11). Kdyby bylo $1 < 0$, bylo by $n \,.\, 1 < 0$, tj. $n < 0$ — spor.)

8. Je-li $c > 0$, je $\frac{1}{c} > 0$; je-li $c < 0$, je $\frac{1}{c} < 0$ $\left(\text{je } c \,.\, \frac{1}{c} = 1\text{; užijte cvičení 5, 7 a věty 9}\right)$.

9. Jsou-li čísla a, b obě kladná nebo obě záporná, je $\frac{a}{b}$ kladné; je-li jedno z čísel a, b kladné a jedno záporné, je $\frac{a}{b}$ záporné.

Z vět 1 až 15 dá se odvodit ryze deduktivním způsobem — bez odkazů k jiným vlastnostem racionálních čísel — řada dalších vět; souhrn vět, jež lze takto odvodit z vět 1 až 15, nazvu krátce „aritmetikou racionálních čísel". Je to prostě souhrn vět o sčítání, odčítání, násobení a dělení racionálních čísel a o nerovnostech mezi nimi, tak jak jej znáte ze školy. Tuto aritmetiku zde nebudu soustavně probírat (některé drobnosti jsme však odvodili ve větách 16, 17 a ve cvičeních 1 až 9), nýbrž budu předpokládat, že ji znáte. Soustavný výklad této aritmetiky je podán v knize Vl. Kořínka Základy algebry.

Ale o některých důsledcích vět 1 až 15 si ještě promluvíme, hlavně o těch, které vám jsou méně běžné ze školy. Vedle znaků $a = b$, $a > b$, $a < b$ zavádíme ještě znak $a \geqq b$, který znamená „je buďto $a > b$ nebo $a = b$" neboli, což podle věty 11 znamená totéž, „a není menší než b". Podobně bude znak $a \leqq b$ znamenat „je buďto $a < b$ nebo $a = b$" neboli „není $a > b$". Např. je $3 \geqq 2$, $-2 \geqq -3$, $-2 \leqq 4$, $3 \geqq 3$ a současně $3 \leqq 3$. Současná platnost obou nerovností $a \geqq b$, $a \leqq b$ znamená, že a není ani menší ani větší než b, tj. že je $a = b$. Často se rovnost dvou čísel a, b dokazuje právě tím, že se napřed dokáže $a \geqq b$ a potom $a \leqq b$.

Poznámka 6. Věty 12, 13, 14 lze ovšem vyslovit též se znamením $<$ místo $>$ (neboť $a < b$ značí totéž jako $b > a$). Tedy: je-li $a < b$, $b < c$, je $a < c$; je-li $a < b$,

[17]) Tato řada vztahů značí ovšem $a + b > 0 + b$; $0 + b = b$; $b > 0$. Tohoto způsobu psaní budeme často užívat.

je $a + c < b + c$; je-li $a < b$, $c > 0$, je $ac < bc$. Ale věty 12, 13, 14 lze rozšířit i na ten případ, že některá znamení $>$ nahradím znamením $\geqq$. Např.: Je-li $a > b$, $b \geqq c$, je $a > c$; neboť, je-li $b > c$, je to věta 12; je-li však $b = c$, znamená nerovnost $a > b$ totéž co $a > c$. Podobně se dokáže: je-li $a \geqq b$, $b > c$, je $a > c$. A konečně: je-li $a \geqq b$, $b \geqq c$, je $a \geqq c$. Tuto větu jsme totiž právě dokázali ve všech možných případech, s výjimkou případu $a = b$, $b = c$; ale v tomto případě je $a = c$, tedy vskutku $a \geqq c$. Takže vcelku lze naše zobecnění věty 12 vyslovit takto: je-li $a \geqq b$, $b \geqq c$, je $a \geqq c$; přitom ve třetí nerovnosti platí znamení $=$ tehdy a jen tehdy, je-li $a = b$, $b = c$.

Podobně si čtenář sám najde, jak nutno změnit věty 13, 14, nahradím-li v předpokladech znamení $>$ znamením $\geqq$. V dalším budu většinou mluvit jen o větách se znamením $>$ nebo $<$; příslušné změny pro znamení $\geqq$ nebo $\leqq$ si čtenář jistě sám provede.

Poznámka 7. Z věty 13 plyne ihned toto: nerovnost

$$a + b > c \tag{2}$$

platí tehdy a jen tehdy, platí-li nerovnost

$$a > c - b \tag{3}$$

Neboť z nerovnosti (2) plyne (3) podle věty 13 (přičtu k oběma stranám nerovnosti (2) číslo $-b$) a z nerovnosti (3) plyne podobně (2) (přičtu k oběma stranám nerovnosti číslo b). Podobná věta ovšem platí se znamením $<$ místo $>$. Tento výsledek vám říká, že v nerovnosti smíte převádět členy „z jedné strany na druhou" zrovna tak jako jste zvyklí to činit v rovnicích.

Z věty 14 plyne obdobně: Je-li $c > 0$, potom nerovnost

$$ac > b \tag{4}$$

platí tehdy a jen tehdy, platí-li nerovnost

$$a > \frac{b}{c}. \tag{5}$$

Je-li totiž $c > 0$, je též $\frac{1}{c} > 0$ (viz cvičení 8) a nerovnost (5) plyne (podle věty 14) ze (4), násobíme-li číslem $\frac{1}{c}$, a podobně (4) plyne z (5), násobíme-li číslem c. Je-li však $c < 0$, je též $\frac{1}{c} < 0$ (viz cvičení 8) a věta 16 nám dává tento výsledek: Je-li $c < 0$, potom nerovnost

$$ac > b$$

platí tehdy a jen tehdy, platí-li nerovnost

$$a < \frac{b}{c}$$

(smysl nerovnosti se obrátí). Podobně jako u rovnosti můžeme tedy také obě strany nerovnosti násobit nebo dělit libovolným číslem c *různým od nuly.* Ale pozor: je-li $c > 0$, zůstane nerovnost zachována, je-li $c < 0$, *obrátí se smysl nerovnosti.*

Tato poznámka 7 dovoluje vám např. řešit „nerovnosti (nebo soustavy nerovností) 1. stupně o jedné neznámé" podobně jako jste řešili rovnice 1. stupně o jedné neznámé. Stačí vám zajisté několik příkladů.

Příklad 1. Najděte, pro které hodnoty x je splněna nerovnost

$$2x - 3 < 4x + 7\,. \tag{6}$$

Tato nerovnost znamená totéž jako každá ze tří následujících nerovností:

$$- 2x - 3 < 7 \text{ („převedu" } 4x \text{ vlevo)}$$
$$- 2x < 10 \text{ („převedu" } - 3 \text{ vpravo)}$$
$$x > - 5 \text{ (násobím záporným číslem } - \tfrac{1}{2}\text{)}\,.$$

Nerovnost (6) je splněna tedy tehdy a jen tehdy, je-li $x > - 5$.

Příklad 2. Najděte, pro které hodnoty x platí soustava nerovností

$$3x + 2 < 2x - 2 \leqq 3x + 5\,. \tag{7}$$

To jsou dvě nerovnosti (viz pozn.[17]):

$$3x + 2 < 2x - 2\,, \quad 2x - 2 \leqq 3x + 5\,.$$

První nerovnost je splněna (postupuji již rychleji) tehdy a jen tehdy, je-li $x < - 4$, druhá tehdy a jen tehdy, je-li $x \geqq - 7$; tedy soustava nerovností (7) platí tehdy a jen tehdy, je-li $- 7 \leqq x < - 4$ (znázorněte si tyto hodnoty x na ose číselné).

Příklad 3. Najděte, pro které hodnoty x platí nerovnost

$$2x - 3 < 2x + 1\,. \tag{8}$$

Tato nerovnost platí tehdy a jen tehdy, je-li x takové, že $0 < 4$; ale tato nerovnost platí, ať je x jakékoliv. Tedy nerovnost (8) platí pro každé x (to vidíte ostatně přímo: pravá strana nerovnosti je o 4 větší než levá).

Příklad 4. Najděte, pro které hodnoty x platí nerovnost

$$2x - 3 > 2x + 1\,. \tag{9}$$

Tato nerovnost platí tehdy a jen tehdy, je-li x takové, že $0 > 4$; ale tato nerovnost neplatí pro žádné x. Tedy ani nerovnost (9) neplatí pro žádné x.

Příklad 5. Najděte, pro které hodnoty x platí soustava nerovností

$$(10)\qquad \begin{aligned} 2x - 3 &\leqq x + 1 \leqq 2x + 2\,, \\ 3x - 1 &< x - 2 < 2x + 1\,. \end{aligned}$$

To jsou čtyři nerovnosti, které jsou splněny tehdy a jen tehdy, je-li současně

$$(11)\qquad x \leqq 4\,, \quad x < -\tfrac{1}{2}\,,$$

$$(12)\qquad x \geqq -1\,, \quad x > -3\,.$$

Nerovnosti (11) platí tehdy a jen tehdy, je-li $x < -\frac{1}{2}$ (neboť potom je tím spíše $x < 4$ a tedy $x \leqq 4$); nerovnosti (12) platí obdobně tehdy a jen tehdy, je-li $x \geqq -1$ (neboť potom je tím spíše $x > -3$). Tedy soustava nerovností (10) platí tehdy a jen tehdy, je-li $-1 \leqq x < -\frac{1}{2}$.

Příklad 6. Najděte, pro která x platí soustava nerovností

$$(13)\qquad \begin{aligned} 2x - 3 &\leqq x + 1 \leqq 2x + 2\,, \\ 3x - 1 &< x - 2 < 2x - 2 \end{aligned}$$

Tyto nerovnosti platí tehdy a jen tehdy, je-li současně $x \leqq 4$, $x \geqq -1$, $x < -\frac{1}{2}$, $x > 0$, tj. tehdy a jen tehdy, je-li $0 < x < -\frac{1}{2}$. Ale žádné takové x neexistuje; neboť kdyby pro nějaké x bylo $x > 0$, $-\frac{1}{2} > x$, bylo by podle věty 12: $-\frac{1}{2} > 0$, což není pravda. Soustava nerovností (13) neplatí tedy pro žádnou hodnotu x.

Dokázali jsme, že nerovnost $a + b > c$ platí tehdy a jen tehdy, je-li $a > c - b$. Položíme-li zde $a = 0$, dostáváme: nerovnost $b > c$, tj. $c < b$ platí tehdy a jen tehdy, je-li $c - b < 0$, tj. (viz větu 17) je-li $-(c - b) = b - c > 0$. Čili: *je-li $a - b > 0$, je $a > b$; je-li $a - b < 0$, je $a < b$; je-li $a - b = 0$, je ovšem $a = b$.* Který ze vztahů $a > b$, $a < b$, $a = b$ platí, můžeme tedy rozhodnout podle znamení rozdílu $a - b$. Dokažme ještě některé věty:

Věta 18. *Je-li $a < b$, $c < d$, je $a + c < b + d$* („sčítání" nerovností).[18])

Důkaz. Podle věty 13 je $a + c < b + c$, $b + c < b + d$; podle věty 12 je tedy $a + c < b + d$.

Věta 19. *Je-li $a < b$, $c > d$* (pozor! opačný smysl nerovností!), *je $a - c < b - d$* („odčítání" nerovností).

Důkaz. Je $a < b$, $-c < -d$ (věta 17); tedy (věta 18) $a + (-c) < b + (-d)$, tj. $a - c < b - d$.

Věta 20. *Budiž $0 \leqq a < b$, $0 \leqq c < d$; potom jest $ac < bd$.* („Násobení" nerovností. Jest ovšem $ac \geqq 0$ podle cvičení 5 a věty 9.)

[18]) Úmyslně užívám na chvíli zase znamení $<$ místo $>$, aby si čtenář na to zvykl.

Důkaz. Čísla b, d jsou kladná. Je-li $c > 0$, je podle věty 14 $ac < bc$, $bc < bd$, tedy podle věty 12 $ac < bd$. Je-li však $c = 0$, je $ac = 0$, ale $d > 0$, takže podle věty 14 je $bd > b0 = 0$, tedy $ac < bd$.

Poznámka 8. Je-li některé z čísel a, b, c, d záporné, jsou poměry složitější; viz již rozdíl mezi větou 14 a 16; srovnej dále cvičení 12.

Věta 21. *Buďte a, b kladná čísla, $a < b$. Potom $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$.*

Důkaz. Je $b - a > 0$; $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} = \frac{b - a}{ab} > 0$, neboť čitatel $b - a$ i jmenovatel ab jsou kladná čísla; tedy $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$.

Věta 22. *Buďte a, b, c, d kladná čísla; je-li $a < b$, $c > d$* (pozor na opačný smysl nerovností!), *je $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$* („dělení nerovností“).

Důkaz. Podle věty 21 je $\frac{1}{c} < \frac{1}{d}$; podle cvičení 8 je $\frac{1}{c} > 0$, tedy podle věty 20 $a \cdot \frac{1}{c} < b \cdot \frac{1}{d}$, tj. $\frac{a}{c} < \frac{b}{d}$.

Cvičení

10. Je-li $a \leqq b$, $c \leqq d$, je $a + c \leqq b + d$. Znamení rovnosti v posledním vztahu platí tehdy a jen tehdy, je-li $a = b$, $c = d$.

11. Je-li $0 \leqq a \leqq b$, $0 \leqq c \leqq d$, je $ac \leqq bd$. Rovnost $ac = bd$ platí tehdy a jen tehdy, nastává-li jeden z těchto případů: 1) $0 = a = b$; 2) $0 = c = d$; 3) $a = b$, $c = d$.

12. Budiž $a < b$, $c < d$. Jsou-li všechna čtyři čísla a, b, c, d záporná, je $ac > bd$. Je-li $a < 0 < b$, $c > 0$, je $ac < bd$; podobně, je-li $c < 0 < d$, $a > 0$. Je-li $b < 0$, $c < 0 < d$ nebo $d < 0$, $a < 0 < b$, je $ac > bd$. Je-li $a < 0 < b$, $c < 0 < d$, mohou nastat všechny případy (pro $a = -2$, $b = 1$, $c = -1$, $d = 1$ je $ac > bd$; pro $a = -1$, $b = 2$, $c = -1$, $d = 1$ je $ac < bd$; pro $a = -1$, $b = 1$, $c = -1$, $d = 1$ je $ac = bd$). Podobně je tomu v případě $a < b < 0 < c < d$ a v případě $c < d < 0 < a < b$ (sestrojte příklady). Nevyšetřili jsme ještě případy, kdy některé z čísel a, b, c, d je rovno nule; tyto případy jsou snadné.

13. Budiž $a < b$. Jsou-li obě čísla a, b kladná nebo obě záporná, je $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$; je-li však $a < 0 < b$, je $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$.

Zavedeme nyní pojem *prosté* čili *absolutní hodnoty* čísla a. Prostou hodnotu čísla a značíme znakem $|a|$ a definujeme ji takto: je-li $a > 0$, klademe $|a| = a$; je-li $a < 0$, klademe $|a| = -a$; konečně klademe $|0| = 0$. Ježto $0 = -0$, platí rovnost $|a| = a$ též pro $a = 0$, tedy celkem pro všechna $a \geqq 0$ a rovnost $|a| = -a$ platí rovněž pro $a = 0$, tedy celkem pro všechna $a \leqq 0$. Je-li $a > 0$, je ovšem $|a| > 0$; je-li $a < 0$, je $-a > 0$ a tedy opět $|a| > 0$. Prostá hodnota každého čísla různého od nuly je tedy *kladná*, prostá hodnota nuly je ovšem nula. Dále je $a \leqq |a|$ pro každé a; neboť pro $a \geqq 0$ je $a = |a|$, tedy též $a \leqq |a|$; pro $a < 0$ je pak $a < 0 < |a|$, tedy $a < |a|$, tedy rovněž $a \leqq |a|$. Příklady: $|1| = 1$, $|\frac{7}{2}| = \frac{7}{2}$, $|-2| = 2$, $|-\frac{3}{4}| = \frac{3}{4}$.

Věta 23. $|a| = |-a|$.

Důkaz. Pro $a \geqq 0$ je $-a \leqq 0$, tedy $|a| = a$ a rovněž $|-a| = -(-a) = a$; pro $a < 0$ je $-a > 0$, tedy $|a| = -a$ a rovněž $|-a| = -a$.

Věta 24. $|ab| = |a| \,.\, |b|$. (Slovy: prostá hodnota součinu se rovná součinu prostých hodnot obou činitelů.)

Důkaz. Jsou možné tyto tři případy: 1. buďto je $a \geqq 0$, $b \geqq 0$; 2. nebo je $a \leqq 0$, $b \leqq 0$; 3. nebo nenastává ani první případ (tj. aspoň jedno z čísel a, b je záporné) ani druhý případ (tj. aspoň jedno z čísel a, b je kladné). V prvním případě je $ab \geqq 0$; tedy $|ab| = ab = |a| \,.\, |b|$. V druhém případě je $ab \geqq 0$; tedy $|ab| = ab = (-a) \,.\, (-b) = |a| \,.\, |b|$. Ve třetím případě je jedno z čísel a, b kladné a jedno záporné; vzhledem ke komutativnímu zákonu pro násobení (věta 5) stačí vyšetřovat případ $a > 0$, $b < 0$.[19] Potom je $ab < 0$ a tedy $|ab| = -(ab) = a \,.\, (-b) = |a| \,.\, |b|$. Tím je rovnice $|ab| = |a| \,.\, |b|$ dokázána ve všech možných případech.

Věta 25. *Je-li* $b \neq 0$, *je* $\left|\dfrac{1}{b}\right| = \dfrac{1}{|b|}$.

Důkaz. Je $b \,.\, \dfrac{1}{b} = 1$, tedy podle věty 24 je

$$|b| \,.\, \left|\frac{1}{b}\right| = \left|b \,.\, \frac{1}{b}\right| = 1 \text{ a tedy } \left|\frac{1}{b}\right| = \frac{1}{|b|}.$$

Věta 26. *Je-li* $b \neq 0$, *je* $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$. (Slovy: prostá hodnota podílu se rovná podílu prostých hodnot.)

Důkaz. Podle věty 24 a 25 máme

$$\left|\frac{a}{b}\right| = \left|a \,.\, \frac{1}{b}\right| = |a| \,.\, \left|\frac{1}{b}\right| = |a| \,.\, \frac{1}{|b|} = \frac{|a|}{|b|}.$$

Pro součet a rozdíl je věc složitější:

Věta 27. $|a + b| \leqq |a| + |b|$.

[19]) Kdyby totiž bylo $a < 0$, $b > 0$, obrátili bychom prostě pořadí činitelů.

Důkaz. Budiž předně $a + b \geqq 0$; potom je $|a + b| = a + b$; ježto $a \leqq |a|$, $b \leqq |b|$, je $a + b \leqq |a| + |b|$ (viz cvičení 10). Tím je důkaz v tomto případě proveden. Budiž za druhé $a + b < 0$, takže $|a + b| = -(a + b) = (-a) + (-b)$. Ježto $-a \leqq |-a| = |a|$, $-b \leqq |-b| = |b|$, vychází $(-a) + (-b) \leqq |a| + |b|$, čímž je důkaz i v tomto případě proveden.

Příklady: je $|5 + 3| = |8| = 8$ a rovněž $|5| + |3| = 8$; zde platí znamení rovnosti. Znamení nerovnosti platí např. v tomto případě: je $|5 + (-3)| = |2| = 2$, ale $|5| + |-3| = 5 + 3 = 8$.

Věta obdobná k větě 27 platí pro rozdíl:

$$(14) \qquad |a - b| \geqq |a| - |b|$$

(kdežto prostá hodnota součtu je podle věty 27 *nejvýše* rovna součtu prostých hodnot obou sčítanců, je prostá hodnota rozdílu *nejméně* rovna rozdílu prosté hodnoty menšence a menšitele). Důkaz nerovnosti (14): položme $a - b = c$, takže $a = b + c$; podle věty 27 je tedy $|a| = |b + c| \leqq |b| + |c|$, tj. $|c| \geqq |a| - |b|$.

Vedle (14) platí též

$$(15) \qquad |a - b| \geqq |b| - |a| ;$$

neboť podle věty 23 a podle (14) je

$$|a - b| = |-(a - b)| = |b - a| \geqq |b| - |a| .$$

Leckdy je nutno řešit nerovnosti, v nichž se vyskytuje absolutní hodnota; k ilustraci, jak se přitom postupuje, stačí zajisté tyto dva příklady:

Příklad 7. Najděte, pro která x platí nerovnosti

$$(16) \qquad 3x - 1 < |x| < 3x + 1 .$$

Abychom odstranili znamení prosté hodnoty, uvažme, že pro $x \geqq 0$ je $|x| = x$, kdežto pro $x < 0$ je $|x| = -x$. Hledejme tedy napřed, pro která $x \geqq 0$ platí (16); pro $x \geqq 0$ jsou nerovnosti (16)

$$3x - 1 < x < 3x + 1$$

a ty platí tehdy a jen tehdy, je-li $-\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2}$; mezi hodnotami $x \geqq 0$ vyhovují tedy nerovnostem (16) ty a jen ty hodnoty x, které jsou menší než $\frac{1}{2}$. Za druhé hledáme, pro která $x < 0$ platí (16); pro $x < 0$ jsou nerovnosti (16)

$$3x - 1 < -x < 3x + 1$$

a ty jsou splněny tehdy a jen tehdy, je-li $-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{4}$; mezi hodnotami $x < 0$ vyhovují tedy nerovnostem (16) ty a jen ty hodnoty x, jež jsou větší než $-\frac{1}{4}$. Nerovnosti (16) jsou tedy splněny tehdy a jen tehdy, je-li $-\frac{1}{4} < x < \frac{1}{2}$.

Příklad 8. Najděte, pro která x platí nerovnost

$$(17) \qquad |x| \leqq |x - 1| .$$

Postupuji již rychleji: pro $x \geqq 1$ je nerovnost (17)

$$x \leqq x - 1$$

a ta není splněna nikdy; pro $x \leqq 0$ je nerovnost (17)

$$-x \leqq 1 - x$$

a ta je splněna vždy; pro $0 < x < 1$ je nerovnost (17)

$$x \leqq 1 - x$$

a ta je splněna tehdy a jen tehdy, je-li $x \leqq \frac{1}{2}$. Celkový výsledek tedy jest: nerovnost (17) platí tehdy a jen tehdy, je-li $x \leqq \frac{1}{2}$.

Buďte a, x dvě čísla; geometrický názor nám ukazuje, že číslo $|x - a|$ (což je buďto $x - a$ nebo $a - x$) nám dává vzdálenost bodu x od bodu a, nakreslíme-li je na číselné ose. Nerovnost $|x - a| < \varepsilon$ nám tedy říká, že vzdálenost bodu x od bodu a je menší než ε, tj. že $a - \varepsilon < x < a + \varepsilon$. Tato názorná úvaha není ovšem žádným řádným matematickým důkazem; proto si nyní výsledek, k němuž jsme názorem došli, řádně dokážeme:

Věta 28. *Buďte a, x, ε čísla; potom nerovnost*

(18) $$|x - a| < \varepsilon \text{ (nebo, což je totéž, } |a - x| < \varepsilon)$$

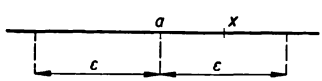
platí tehdy a jen tehdy, platí-li nerovnosti

(19) $$a - \varepsilon < x < a + \varepsilon .$$

Důkaz. I. Nechť platí (18). Potom je $x - a \leqq |x - a| < \varepsilon$, $a - x \leqq |a - x| = |x - a| < \varepsilon$, tedy $x < a + \varepsilon$ a současně $a - x < \varepsilon$, tj. $x > a - \varepsilon$, což jsou nerovnosti (19). — II. Nechť platí (19); potom je buďto $x - a \geqq 0$, a tedy $|x - a| = x - a < \varepsilon$, nebo je $x - a < 0$ a tedy $|x - a| = a - x < \varepsilon$. V obou případech platí tedy (18).

Větu 28 jsem uvedl jenom proto, že se bude v pozdějších úvahách často vyskytovat. Její smysl je znázorněn na obr. 1.

Než ukončím tento paragraf, zmíním se několika slovy o jedné velmi důležité metodě, totiž o tak zvané *úplné indukci*. Tuto metodu znáte ze školy, mimoto je soustavně vyložena v uvedené učebnici algebry od akad. Vl. Kořínka a v knize Hrušově a Pospíšilově, uvedených na str. 50; proto si obšírný výklad odpustím.



Obr. 1.

Jako první příklad na důkaz úplnou indukcí uvedu úlohu speciálního rázu, pro nás nepříliš významnou, která však je dosti poučná pro používání úplné indukce.

Sudá kladná čísla jsou $2, 4, 6, \ldots$ neboli $2 . 1, 2 . 2, 2 . 3, 2 . 4, \ldots$; n-té sudé kladné číslo (srovnáno podle velikosti) je tedy $2n$. Lichá kladná čísla jsou $1, 3, 5, \ldots$, takže

n-té liché kladné číslo je $2n - 1$ (tj. o 1 menší než n-té sudé). Položme si za úkol vypočíst součet prvních n lichých kladných čísel, tj. číslo $1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)$. Jest $1 = 1^2$, $1 + 3 = 4 = 2^2$, $1 + 3 + 5 = 9 = 3^2$, $1 + 3 + 5 + 7 = 16 = 4^2$. To nás vede k domněnce, že pro každé přirozené n platí rovnice (kterou označíme $V(n)$):

$$V(n): \quad 1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1) = n^2 .$$

Dokažme to.

α) Pro $n = 1$ je rovnice $V(n)$ správná, neboť $1 = 1^2$, což je rovnice $V(1)$.

β) Je-li n nějaké přirozené číslo a platí-li pro toto n rovnice $V(n)$, dostáváme pro součet prvních $n + 1$ lichých kladných čísel hodnotu

$$(1 + 3 + 5 + \ldots + (2n - 1)) + (2n + 1) = n^2 + (2n + 1) = (n + 1)^2 ,$$

takže je správná i rovnice $V(n + 1)$.

Z toho soudíme: Rovnice $V(n)$ je správná pro $n = 1$ (podle α). Ježto je správná pro $n = 1$, je správná i pro $n = 2$ (podle β); ježto je správná pro $n = 2$, je správná pro $n = 3$ (opět podle β); tedy je správná (opět podle β) pro $n = 4$ atd.; tedy je rovnice $V(n)$ vskutku správná pro každé přirozené n. Tím je rovnice $V(n)$ dokázána úplnou indukcí pro všechna přirozená n.

Tímto způsobem se metody úplné indukce často užívá: Propočtením několika případů vytušíme, jaká obecná zákonitost by mohla asi platit; načež se snažíme tuto zákonitost dokázat úplnou indukcí.

Podaný důkaz je typem *důkazu úplnou indukcí*; důkaz úplnou indukcí postupuje obecně podle tohoto schématu: Mějme nějaké tvrzení $V(n)$ (závislé na hodnotě čísla n) a nějaké celé číslo k; předpokládejme, že platí toto:

α) Tvrzení $V(k)$ je správné.

β) Je-li správné tvrzení $V(n)$, kde n je jisté číslo celé, $n \geqq k$, je správné i tvrzení $V(n + 1)$.

Potom je tvrzení $V(n)$ správné pro každé celé n, jež vyhovuje nerovnosti $n \geqq k$. (Podle α) je správné tvrzení $V(k)$; podle β) je tedy správné i tvrzení $V(k + 1)$; podle β) je tedy správné i tvrzení $V(k + 2)$; podle β) je tedy správné i tvrzení $V(k + 3)$ atd.)

Podrobně lze se poučit o důkazu úplnou indukcí, jakož i o jeho vztahu k axiomatice přirozených čísel např. ve třech knihách uvedených na předešlé stránce; v této knize budeme proto uvedené schéma důkazu úplnou indukcí považovat bez dalších výkladů za známé a budeme ho často užívat.

V poznámce 6 jsme poznali toto zobecnění věty 12: Budiž

$$(20) \qquad a_1 \leqq a_2 , \quad a_2 \leqq a_3 .$$

Potom je $a_1 \leqq a_3$; rovnost $a_1 = a_3$ platí pak tehdy a jen tehdy, je-li $a_1 = a_2$, $a_2 = a_3$. Dokažme tuto obecnější větu:

Věta 29. *Budiž n celé číslo, $n \geqq 3$; budiž*

$$(21) \qquad a_k \leqq a_{k+1} \ \textit{pro} \ k = 1, 2, \ldots, n - 1$$

(tj. budiž $a_1 \leqq a_2, a_2 \leqq a_3, \ldots, a_{n-1} \leqq a_n$). *Potom jest* $a_1 \leqq a_n$; *rovnost* $a_1 = a_n$ *platí tehdy a jen tehdy, je-li*

$$a_k = a_{k+1} \text{ pro } k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{22}$$

Důkaz. α) Pro $n = 3$ je tvrzení věty 29 správné, jak jsme právě řekli.

β) Mysleme si, že tvrzení věty 29 je správné pro nějakou hodnotu n, např. pro $n = l$, kde l je jisté celé číslo, $l \geqq 3$. Tvrdím, že potom je tvrzení věty 29 správné také pro následující hodnotu $n = l + 1$.

Budiž tedy $a_1 \leqq a_2, a_2 \leqq a_3, \ldots, a_{l-1} \leqq a_l, a_l \leqq a_{l+1}$. Ježto předpokládám, že tvrzení věty 29 je správné pro $n = l$, je $a_1 \leqq a_l$ a rovnost $a_1 = a_l$ platí tehdy a jen tehdy, je-li

$$a_1 = a_2, \quad a_2 = a_3, \ldots, a_{l-1} = a_l. \tag{23}$$

Podle α) platí tvrzení věty 29 pro $n = 3$; ježto $a_1 \leqq a_l \leqq a_{l+1}$, je $a_1 \leqq a_{l+1}$ a rovnost $a_1 = a_{l+1}$ platí tehdy a jen tehdy, je-li $a_1 = a_l$ (tj. platí-li (23)) a je-li současně $a_l = a_{l+1}$; tj. rovnost $a_1 = a_{l+1}$ platí tehdy a jen tehdy, je-li $a_1 = a_2, a_2 = a_3, \ldots$ $\ldots, a_{l-1} = a_l, a_l = a_{l+1}$. Tím je tvrzení β) dokázáno. Dokázali jsme tedy tato dvě tvrzení: α) tvrzení věty 29 je správné pro $n = 3$; β) je-li tvrzení věty 29 správné pro jistou hodnotu n ($n \geqq 3$, n celé), je toto tvrzení správné i pro následující (tj. o jedničku větší) hodnotu n. Tím je však věta 29 „úplnou indukcí" dokázána. (Tvrzení této věty platí podle α) pro $n = 3$, tedy podle β) pro $n = 4$, tedy – opět podle β) – pro $n = 5$, tedy – opět podle β) – pro $n = 6$ atd.)

Užiji ještě metody úplné indukce k důkazu několika vět o součtech a součinech. Na str. 22 až 25 jsme mluvili o součtu a součinu dvou čísel: $a_1 + a_2$, $a_1 . a_2$. Součet a součin tří čísel a_1, a_2, a_3 definujeme, jak víte, jakožto $(a_1 + a_2) + a_3$, $(a_1a_2) a_3$ a značíme je, jak rovněž víte, symboly $a_1 + a_2 + a_3$, $a_1a_2a_3$. Definovavše takto součet a součin tří čísel, definujme dále součet a součin čtyř čísel jakožto $(a_1 + a_2 + a_3) + a_4$, $(a_1a_2a_3) . a_4$, atd. Je vám zajisté jasný obecný význam symbolů $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $a_1a_2 \ldots a_n$ (součet a součin n čísel);[20]) kratčeji (a leckdy zřetelněji) píšeme $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ místo $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ a rovněž $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k$ místo $a_1a_2 \ldots a_n$ a podobně; např. $\sum\limits_{m=3}^{6} y_m = y_3 + y_4 + y_5 + y_6$. Abychom neměli nepříjemných výjimek, zavádíme též „součet" a „součin" o jediném sčítanci, resp. činiteli:

$$\sum_{k=l}^{l} a_k = a_l, \; \prod_{k=l}^{l} a_k = a_l \quad \left(\text{např. } \sum_{k=4}^{4} a_k = \prod_{k=4}^{4} a_k = a_4\right).$$

O těchto symbolech, jakož i o symbolech pro „prázdný" součet a součin $\Bigl(\sum\limits_{k=n+1}^{n} a_k = 0,$

[20]) Jde zde o tzv. „definici úplnou indukcí", jejíž hlubší diskusi viz např. v knize **Hrušově**, str. 33–34 a **Pospíšilově**, str. 88–90.

$\prod_{k=n+1}^{n} a_k = 1\Big)$ je podrobně pojednáno v uvedené **Kořínkově** algebře. Je nutno, abyste se symboly Σ a Π dovedli spolehlivě a rychle manipulovat; z citované knihy se tomu naučíte.

Jako třetí příklad na důkaz úplnou indukcí dokažme větu:

Věta 30. *Budiž n celé číslo, $n > 1$. Potom platí:*

Je-li $0 \leqq a_l < b_l$ pro $l = 1, 2, \ldots, n$, je

$$0 \leqq \prod_{l=1}^{n} a_l < \prod_{l=1}^{n} b_l.$$

Důkaz provedeme podle schématu, uvedeného na str. 35. Tvrzení $V(n)$ (při daném n) je nyní toto tvrzení:

$$\text{„Je-li } 0 \leqq a_l < b_l \text{ pro } l = 1, 2, \ldots, n, \text{ je } 0 \leqq \prod_{l=1}^{n} a_l < \prod_{l=1}^{n} b_l.\text{“}$$

Např. tvrzení $V(2)$ je toto: je-li $0 \leqq a_1 < b_1$, $0 \leqq a_2 < b_2$, je $0 \leqq a_1 a_2 < < b_1 b_2$. Platí nyní *především*: tvrzení $V(2)$ je správné podle věty 20.

Budiž nyní *za druhé* n celé, $n \geqq 2$ a předpokládejme, že tvrzení $V(n)$ je správné; máme dokázat, že potom i tvrzení $V(n + 1)$ je správné. Budiž tedy $0 \leqq a_l < b_l$ pro $l = 1, 2, \ldots, n, n + 1$. Podle tvrzení $V(n)$ je $0 \leqq A < B$, píšeme-li $A = \prod_{l=1}^{n} a_l$, $B = \prod_{l=1}^{n} b_l$. Tedy je $0 \leqq A < B$, $0 \leqq a_{n+1} < b_{n+1}$ a tedy podle věty 20 $0 \leqq Aa_{n+1} < < Bb_{n+1}$, tj. $0 \leqq \prod_{l=1}^{n+1} a_l < \prod_{l=1}^{n+1} b_l$, takže tvrzení $V(n + 1)$ je správné. Podle indukčního schématu je tedy tvrzení $V(n)$ správné pro každé celé $n \geqq 2$. Tím je věta 30 dokázána.

Podobně odvoďte z věty 18 větu:

Věta 31. *Budiž n celé číslo, $n > 1$; budiž $a_l < b_l$ pro $l = 1, 2, \ldots, n$;*[21] *potom je $\sum_{l=1}^{n} a_l < \sum_{l=1}^{n} b_l$.*

Konečně odvoďte z vět 24, 27 tuto větu:

Věta 32. *Pro každé celé $n \geqq 1$ je*

$$\left|\prod_{k=1}^{n} a_k\right| = \prod_{k=1}^{n} |a_k|, \quad \left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqq \sum_{k=1}^{n} |a_k|.$$

Z věty 9 odvoďte úplnou indukcí tuto větu:

[21]) Na rozdíl od věty 30 není zde nutno předpokládat, že čísla a_l jsou $\geqq 0$. Věta 29 platí ovšem též pro $n = 2$, věty 30 a 31 též pro $n = 1$.

Věta 33. *Budiž n celé číslo, $n \geqq 1$. Potom součin $\prod_{k=1}^{n} a_k$ je roven nule tehdy a jen tehdy, je-li aspoň jedno z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ rovno nule.* (Případ $n = 1$ je samozřejmý, pro $n = 2$ je věta správná podle věty 9.)

Cvičení

14. Nerovnost $|x - a| \leqq \varepsilon$ platí tehdy a jen tehdy, je-li $a - \varepsilon \leqq x \leqq a + \varepsilon$.

15. Nerovnost $xy < 1$ platí tehdy a jen tehdy, je-li buďto $y = 0$ nebo $y > 0$, $x < \frac{1}{y}$ nebo $y < 0$, $x > \frac{1}{y}$.

16. Nerovnost $|x| + |2 - x| < 2$ neplatí pro žádné x.

17. Nerovnost $|x| \leqq |x - 1| + \frac{1}{2}$ platí tehdy a jen tehdy, je-li $x \leqq \frac{3}{4}$.

18. Nerovnost $|a + b| < |a| + |b|$ platí tehdy a jen tehdy, je-li jedno z obou čísel a, b kladné a druhé záporné (návod: sledujte pozorně důkaz věty 27).

19. $|a - b| \leqq |a| + |b|$; $|a - b| \geqq ||a| - |b||$; $|a + b| \geqq ||a| - |b||$.

20. Budiž n celé číslo, $n > 1$; budiž $a_l \leqq b_l$ pro $l = 1, 2, \ldots, n$. Potom je $\sum_{l=1}^{n} a_l \leqq \sum_{l=1}^{n} b_l$; znamení rovnosti platí zde tehdy a jen tehdy, je-li $a_l = b_l$ pro $l = 1, 2, \ldots, n$.

21. V druhém vzorci věty 32 platí znamení $<$ tehdy a jen tehdy, je-li z čísel $a_1, a_2, \ldots, a_n$ aspoň jedno kladné a aspoň jedno záporné.

22. Budiž n celé číslo, $n > 1$; budiž $0 \leqq a_l \leqq b_l$ pro $l = 1, 2, \ldots, n$. Potom je $\prod_{l=1}^{n} a_l \leqq \prod_{l=1}^{n} b_l$. Znamení rovnosti v tomto vztahu platí tehdy a jen tehdy, je-li splněna aspoň jedna z těchto dvou podmínek: 1. buďto existuje aspoň *jedno* l ($1 \leqq l \leqq n$) tak, že je $b_l = 0$ (a tedy ovšem též $a_l = 0$); 2. nebo je $a_l = b_l$ pro *všechna* l ($1 \leqq l \leqq n$).

23. Ježto umocňování s kladným celým mocnitelem není nic jiného než opakované násobení ($a^2 = a \,.\, a$, $a^3 = a^2 \,.\, a, \ldots$), plynou z vět 1 až 15 také známé vám věty o mocninách s kladným celým mocnitelem. Jako cvičení dokažte binomickou poučku: Budiž n celé kladné; definujme $\binom{n}{k}$ pro $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ takto: $\binom{n}{0} = 1$, $\binom{n}{1} = n$, $\binom{n}{k} = \frac{n \,.\, (n-1) \,.\, (n-2) \ldots (n-k+1)}{1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots k}$ pro $2 \leqq k \leqq n$. Potom je

$$(a + b)^n = a^n + \binom{n}{1} a^{n-1} b + \binom{n}{2} a^{n-2} b^2 + \ldots + \binom{n}{n} b^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k. \tag{24}$$

Důkaz indukcí: Pro $n = 1$ platí (24). Nechť platí (24) pro jistou hodnotu n; potom je (podle (24) a podle distributivního zákona)

$$(a + b)^{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n+1-k} b^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^{k+1};$$

v druhém součtu položme $k + 1 = l$, pišme však hned zase k místo l; dostaneme

$$(a + b)^{n+1} = a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) a^{n+1-k} b^k \tag{25}$$

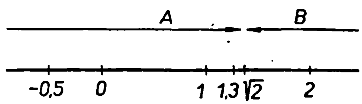
Snadno zjistíte, že

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k} \text{ pro } k = 1, 2, \ldots, n\,,$$

takže rovnice (25) je právě ona rovnice, jež vznikne z (24), píšeme-li v (24) $n + 1$ místo n.

§ 3. Zavedení iracionálních čísel; úvod. Dosud máme pouze čísla racionální; naším úkolem nyní je zavést nějakým způsobem další čísla, tzv. čísla iracionální. Abychom si ujasnili, jak asi máme přitom postupovat, postavme se na okamžik na zcela naivní stanovisko. Již na str. 25 jsem připomněl, jak jste si ve škole znázorňovali reálná čísla na tzv. číselné ose. Vyznačme na této ose nějaké iracionální číslo, např. $\sqrt{2}$. Vidíme, že číslo $\sqrt{2}$ rozděluje všechna *racionální* čísla ve dvě množiny: v množinu A všech racionálních čísel menších než $\sqrt{2}$ a v množinu B všech racionálních čísel větších než $\sqrt{2}$. A naopak nám názor říká, že číslo $\sqrt{2}$ je těmi dvěma množinami A, B úplně určeno: číslo $\sqrt{2}$ je právě ono číslo, jež je větší než všechna čísla množiny A a menší než všechna čísla množiny B; číslo $\sqrt{2}$ tvoří jakýsi „řez", který odděluje ty dvě množiny A, B. Určit číslo $\sqrt{2}$ znamená tedy vlastně totéž jako dát ty dvě množiny A, B.

Podobnou úvahu je možno provést pro každé iracionální číslo; ovšem má tato úvaha dvě zásadní vady: především jsme užili nepřípustného zrakového názoru a za druhé jsme na číselnou osu zakreslili iracionální číslo ($\sqrt{2}$ nebo jiné číslo) a k tomu nejsme dosud oprávněni, neboť čísla iracionální dosud nemáme, nýbrž naopak: pomocí toho, co známe (tj. pomocí čísel racionálních) chceme teprve čísla iracionální zavést. Ale hned vidíme také východisko: ony dvě množiny A, B, o nichž jsme mluvili, se skládají z prvků nám již známých, totiž z racionálních čísel; a proto právě těchto množin užijeme k definici oněch čísel, jež chceme zavést, tj. k definici tzv. „reálných iracionálních čísel".



Obr. 2.

Názor nám říká, že množiny A, B mají tyto vlastnosti: 1. žádná z těchto množin není prázdná (tj. každá z nich obsahuje aspoň jedno racionální číslo). 2. Každé racionální číslo je prvkem jedné a jen jedné z obou množin A, B (tj. obě množiny A, B dohromady obsahují všechna racionální čísla, ale žádné racionální číslo neleží současně v obou množinách A, B). 3. Kterékoliv číslo množiny A je menší než kterékoliv číslo množiny B (tj. je-li $a \in A$, $b \in B$, je $a < b$). Prozradím už předem, že každou dvojici množin racionálních čísel A, B, jež má tyto tři vlastnosti, nazveme řezem a že pomocí těchto řezů budeme definovat iracionální reálná čísla.

§ 4. Definice řezu. Provedeme nyní v několika následujících paragrafech to, co jsme v § 3 naznačili. Poznamenejme jenom předem, že úvahy § 3 nemají, jak jsem již zdůraznil, žádné průkazné ceny; sloužily jen k tomu, abyste pochopili, proč zavádíme iracionální čísla právě tím způsobem, jak to nyní učiníme. Ježto dosud máme jen racionální čísla, budeme pro zkrácení v § 4, 5, 6 místo „racionální číslo" říkat „číslo" Začneme definicí:

Definice 1. *Dvojici A, B množin číselných*[22]) *nazveme řezem, jsou-li splněny tyto podmínky:*

I. *Žádná z obou množin A, B není prázdná.*

II. *Každé číslo leží v jedné a jen jedné z množin A, B.*

III. *Je-li $a \in A$, $b \in B$, je $a < b$*

Množinu A nazýváme dolní, množinu B horní skupinou řezu. Řezy budeme značit malými řeckými písmeny; chci-li vyznačit obě skupiny řezu, píši (A/B); to značí řez s dolní skupinou A a s horní skupinou B. Dva řezy (A/B), (A'/B') jsou si rovny, je-li $A = A'$, $B = B'$. Jsou-li si řezy α, α' rovny, píšeme $\alpha = \alpha'$; nejsou-li si rovny, píšeme $\alpha \neq \alpha'$.K tomu, aby řez (A/B) byl dán, stačí dát např. dolní skupinu A; neboť horní skupina B je podle podmínky II z definice 1 právě množina všech čísel, jež nepatří do A; rovnost dvou řezů (A/B), (A'/B') je tedy zaručena, je-li $A = A'$. Podobně stačí k rovnosti řezů rovnost horních skupin $B = B'$. Ovšem: nemůže každá množina čísel být horní skupinou nějakého řezu; k tomu musí splňovat jisté podmínky, jež nyní vyslovíme:

Věta 34. *Číselná množina B je horní skupinou nějakého řezu tehdy a jen tehdy, splňuje-li tyto podmínky:*

1) *Množina B obsahuje aspoň jedno číslo, ale neobsahuje všechna čísla.*

2) *Je-li $b \in B$, $b' > b$, je také $b' \in B$.*[23])

Důkaz. I. Nechť je B horní skupinou nějakého řezu (A/B); podle podmínky II z definice 1 se skládá množina A právě z těch čísel, jež nepatří do B. Podle podmínky I z definice 1 je tedy splněna podmínka 1 z věty 34. Budiž dále $b \in B$, $b' > b$; kdyby nebylo $b' \in B$, bylo by $b' \in A$ a podle podmínky III z definice 1 by tedy bylo $b' < b$, což není možné, ježto $b' > b$. Tedy je $b' \in B$ a tedy podmínka 2 z věty 34 je splněna.

II. Nechť nějaká číselná množina B splňuje podmínky 1, 2 věty 34. Označme znakem A množinu všech čísel, jež nepatří do B; tvrdím, že (A/B) je řez. Podle definice množiny A je jasné, že množiny A, B splňují podmínku II z definice 1. Z podmínky 1 věty 34 plyne, že množiny A, B splňují podmínku I z definice 1. Budiž konečně $a \in A$, $b \in B$. Potom není $a = b$ (neboť číslo a nemůže patřit současně do množiny A i do množiny B). Kdyby bylo $a > b$, potom by a patřilo podle podmínky 2 věty 34 do množiny B (ježto $b \in B$), což je nemožné, ježto $a \in A$. Tedy není ani

[22]) „Množina číselná" značí totéž jako „množina čísel", tj. množina, jejíž prvky jsou čísla (rozumí se, čísla racionální).

[23]) Slovy: patří-li nějaké číslo do B, patří i každé větší číslo do množiny B.

$a = b$ ani $a > b$, tj. jest $a < b$. Tedy: je-li $a \in A$, $b \in B$, je $a < b$, takže množiny A, B splňují též podmínku III z definice 1. Dvojice A, B tvoří tedy vskutku řez. Tím je věta 34 dokázána.

Věta obdobná větě 34 platí též pro dolní skupinu řezu; pouze místo znamení $>$ je nutno v podmínce 2 psát znamení $<$ (proveďte podrobně důkaz!).

Příklady řezů:

α) Do dolní skupiny dáme číslo 2 a všechna čísla menší než 2, do horní skupiny všechna ostatní čísla, tj. všechna čísla větší než 2.

β) Do dolní skupiny dám všechna čísla záporná, do horní skupiny dám nulu a všechna čísla kladná.

γ) Do horní skupiny B dám všechna kladná čísla, jejichž čtverec je větší než 2; do dolní skupiny A dám všechna ostatní čísla.

Že v příkladech α), β) dostávám skutečně řezy, je jasné. Abych dokázal, že také dvojice množin A, B z příkladu γ) je řezem, stačí dokázat, že množina B splňuje podmínky 1, 2 z věty 34. (Neboť potom je B horní skupinou nějakého řezu a dolní skupinou je potom množina všech čísel nepatřících do B, tj. vskutku množina, kterou jsme v příkladě γ) označili písmenem A.) Množina B obsahuje aspoň jedno číslo, např. číslo 2 (neboť $2 > 0$, $2^2 > 2$), ale neobsahuje všechna čísla, např. neobsahuje číslo 0 (neboť 0 není kladná). Množina B tedy splňuje podmínku 1. Za druhé: budiž b číslo množiny B a budiž $b' > b$. Potom je $b > 0$, $b^2 > 2$. Tedy je též $b' > 0$. Podle věty 20 (násobím nerovnosti $0 \leqq b < b'$, $0 \leqq b < b'$) je tedy $b'^2 > b^2$ a tedy $b'^2 > 2$. Tedy $b' \in B$. Množina B tedy splňuje též podmínku 2. Tím je dokázáno, že množiny A, B z příkladu γ) tvoří vskutku řez (A/B).

Budiž M nějaká číselná množina; existuje-li číslo $q \in M$ takové, že žádný prvek množiny M není větší než q, říkáme, že množina M obsahuje největší číslo; číslo q nazýváme pak největším číslem množiny M. Podobně mluvíme o nejmenším čísle množiny M. Příklady:

1) Budiž M množina všech čísel x, jež splňují nerovnosti $-2 \leqq x \leqq 0$; tato množina obsahuje největší i nejmenší číslo; a to číslo -2 je nejmenším, číslo 0 největším číslem množiny M (neboť: číslo -2 patří k množině M a žádné číslo množiny M není menší než -2; podobně $0 \in M$ a žádné číslo množiny M není větší než 0).

2) Budiž M množina všech kladných čísel. Žádné číslo množiny M není ani největším ani nejmenším číslem množiny M; neboť je-li a číslo množiny M, tj. je-li $a > 0$, je též větší číslo $a + 1$ i menší číslo $\frac{1}{2}a$ prvkem množiny M. Tato množina M neobsahuje tedy ani největšího ani nejmenšího čísla.

Budiž nyní $\alpha = (A/B)$ libovolný řez; horní skupina neobsahuje největšího čísla, neboť je-li $b \in B$, je (viz větu 34) i větší číslo $b + 1$ číslem množiny B; podobně dolní skupina neobsahuje nejmenšího čísla (neboť, je-li $a \in A$, je i $a - 1 \in A$). Důležitá je však otázka, zda množina A obsahuje největší a množina B nejmenší číslo. Zde jsou myslitelné tyto čtyři případy:

1) Množina A obsahuje největší číslo, množina B neobsahuje nejmenší číslo; takovým řezům budeme říkat „řezy 1. druhu".

2) Množina A neobsahuje největší číslo, množina B obsahuje nejmenší číslo – „řez 2. druhu".

3) Množina A neobsahuje největší číslo, množina B neobsahuje nejmenší číslo – „řez 3. druhu".

4) Množina A obsahuje největší číslo, množina B obsahuje nejmenší číslo – „řez 4. druhu".

Ale hned dokážeme, že žádný řez 4. druhu neexistuje. Mysleme si, že (A/B) je řez 4. druhu; označme znakem a největší číslo množiny A a znakem b nejmenší číslo množiny B. Podle definice řezu (definice 1, podmínka III) je $a < b$, a tedy též $a < \frac{1}{2}(a + b) < b$ (podrobně: z $a < b$ plyne $\frac{1}{2}a < \frac{1}{2}b$, tedy $a = \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}a < \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$ a podobně $b = \frac{1}{2}b + \frac{1}{2}b > \frac{1}{2}a + \frac{1}{2}b$). Číslo $\frac{1}{2}(a + b)$ je tedy větší než největší číslo množiny A a je menší než nejmenší číslo množiny B, takže číslo $\frac{1}{2}(a + b)$ nemůže patřit ani do množiny A ani do množiny B; ale to je ve sporu s podmínkou II definice 1. Tedy řezy 4. druhu neexistují.

Že existují řezy 1. a 2. druhu, ukazují příklady α) (řez 1. druhu) a β) (řez 2. druhu). Ostatně každý řez 1. druhu vypadá takto: je-li a největší číslo dolní skupiny, patří všechna čísla menší než a též do dolní skupiny (neboť každé číslo horní skupiny je větší než a), kdežto všechna čísla větší než a patří do horní skupiny (neboť nemohou patřit do dolní skupiny, jsouce větší než její největší číslo). Naopak, je-li a libovolné číslo a dáme-li do skupiny A číslo a a všechna čísla menší než a, do skupiny B pak všechna čísla větší než a, je (A/B) zřejmě řez 1. druhu. Z toho je vidět: přiřadím-li každému číslu a řez (A/B), v němž číslo a je největším číslem skupiny A – tento řez budeme označovat znakem a^* – jsou tím řezy 1. druhu vzájemně jednoznačně přiřazeny číslům (racionálním).[24])

[24]) Dolní skupina řezu a^* se tedy skládá ze všech čísel $\leqq a$, horní skupina ze všech čísel $> a$. Řekněme si trochu obšírněji, co rozumíme vzájemně jednoznačným přiřazením prvků dvou množin M, N. Tím rozumíme toto: Každému prvku x množiny M je nějakým způsobem přiřazen určitý prvek množiny N, jejž nazveme *obrazem* prvku x; přitom každý prvek množiny N je obrazem jednoho a jen jednoho prvku množiny M. (Tím je ovšem též naopak každému prvku y množiny N přiřazen určitý prvek množiny M, totiž onen jednoznačně určený prvek $x \in M$, jehož obrazem je právě prvek y.)

Příklad: Budiž M množina o třech prvcích a, b, c; budiž N množina o třech prvcích x, y, z. Vzájemně jednoznačné přiřazení dostanu třeba tak, že přiřadím prvku a prvek x, prvku b prvek y, prvku c prvek z. Jiné vzájemně jednoznačné přiřazení: prvkům a, b, c přiřadím po řadě prvky y, z, x. Je právě šest různých takových přiřazení (sestrojte je!). Jiný příklad: budiž M množina všech přirozených čísel, budiž N množina všech sudých kladných čísel; každému prvku $x \in M$ přiřaďme prvek $2x \in N$. Napíšeme-li pod každý prvek množiny M jeho obraz, vypadá toto vzájemně jednoznačné přiřazení takto:

$$\begin{array}{l} M\colon\ 1,\ 2,\ 3,\ 4, \ldots,\ 15,\ \ldots \\ N\colon\ 2,\ 4,\ 6,\ 8, \ldots,\ 30,\ \ldots \end{array}$$

Podobně si můžeme učinit přehled o všech řezech 2. druhu. Libovolný řez 2. druhu dostaneme tak, že vezmeme libovolné racionální číslo a, načež dáme do dolní skupiny všechna čísla $< a$, do horní všechna čísla $\geqq a$. Označíme-li tento řez znakem a^{**}, jsou tím řezy 2. druhu opět vzájemně jednoznačně přiřazeny číslům (racionálním). Je trochu nepohodlné, že každému (racionálnímu) číslu a jsou přiřazeny dva řezy, totiž řez a^* a řez a^{**}. Proto budeme v dalším většinou řezy 2. druhu ze svých úvah vylučovat.

Předepsat řez 1. nebo 2. druhu znamená vlastně totéž jako předepsat (racionální) číslo, totiž největší číslo dolní skupiny, popř. nejmenší číslo horní skupiny. Nemůžeme tedy od řezů 1. a 2. druhu očekávat nic v podstatě nového; ježto řezy 4. druhu, jak víme, neexistují, je pro nás velmi důležitá otázka, zda existují řezy 3. druhu. Mohli bychom sice odpověď na tuto otázku podat později, a to způsobem velmi jednoduchým, ale snad je užitečné a poučné odpovědět na ni ihned, i když nás to bude stát trochu více práce. Zde je odpověď:

Věta 35. *Existuje aspoň jeden řez 3. druhu.*

Důkaz. Budiž $\alpha = (A/B)$ řez, sestrojený v příkladě γ) na str. 41. Stačí dokázat, že tento řez je 3. druhu. Mám tedy dokázat, že 1. *žádné číslo množiny B není jejím nejmenším číslem* a dále, že 2. *žádné číslo množiny A není jejím největším číslem.* Budiž tedy předně b libovolné číslo množiny B. Množina B se skládá z oněch čísel x, pro něž je $x > 0$, $x^2 > 2$. Je tedy $b > 0$, $b^2 > 2$. Podaří-li se mně dokázat, že existuje číslo c tak, že platí

$$(*) \qquad 0 < c < b\,, \quad (b - c)^2 > 2\,,$$

bude tím tvrzení 1 dokázáno; neboť podle (*) bude $b - c > 0$, $(b - c)^2 > 2$ a tedy $b - c \in B$ a přitom $b - c < b$, takže vskutku číslo b — libovolné to číslo množiny B — není nejmenším číslem množiny B. Jde tedy o to, sestrojit číslo c tak, aby platily nerovnosti (*). K tomu cíli stačí volit $c = \dfrac{b^2 - 2}{2b}$; neboť jest $b > 0$, $b^2 > 2$, tedy $c > 0$ a současně $c < \dfrac{b^2}{2b} = \dfrac{b}{2} < b$ a dále $(b - c)^2 = b^2 - 2bc + c^2 > b^2 - 2bc = b^2 - (b^2 - 2) = 2$, tj. $(b - c)^2 > 2$. Tím je tvrzení 1 dokázáno. Máme ještě dokázat tvrzení 2, tj. máme dokázat, že žádné číslo množiny A není největším číslem množiny A (pamatujme, že A je množina všech čísel, jež nepatří do B). Budiž tedy $a \in A$; je-li $a < 1$, není a největším číslem množiny A, ježto též $1 \in A$ (neboť není

Čtenáře jistě nemate okolnost, že každé sudé kladné číslo zde vystupuje dvakráte, v množině M i v množině N.

V našem případě, uvedeném v textu, šlo o vzájemně jednoznačné přiřazení řezů 1. druhu a racionálních čísel: Každému řezu 1. druhu je přiřazeno ono racionální číslo, jež je největším číslem jeho dolní skupiny.

$1^2 > 2$). Zbývá vyšetřit případ, že $a \in A$, $a \geqq 1$. Budiž tedy takové číslo a dáno; dokážeme-li, že existuje číslo d tak, že

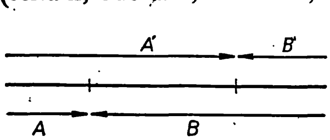
$$(**) \qquad d > 0, \quad (a + d)^2 < 2,$$

bude tím dokázáno, že číslo a není největším číslem množiny A (neboť $a + d > a$, $a + d \in A$) a tím bude i naše tvrzení 2 dokázáno. Ježto $a > 0$ (dokonce $a \geqq 1$), $a \in A$, není $a^2 > 2$ (neboť potom by bylo $a \in B$) a tedy je $a^2 < 2$ (neboť víme, že nemůže být $a^2 = 2$, viz str. 16). Zvolme nyní $d = \dfrac{2 - a^2}{2a + 1}$, takže $d > 0$; ježto $a \geqq 1$, je $a^2 = a \, . \, a \geqq 1 \, . \, 1 = 1$, $2 - a^2 \leqq 2 - 1 = 1$, a tedy $d \leqq \dfrac{1}{2a + 1} \leqq \frac{1}{3}$; tedy $d^2 = d \, . \, d \leqq d \, . \, \frac{1}{3} < d$ a tedy $(a + d)^2 = a^2 + 2ad + d^2 < a^2 + 2ad + d = a^2 + (2a + 1) d = a^2 + (2 - a^2) = 2$; tedy vskutku platí (**) a věta 35 je tím úplně dokázána.

Aspoň jeden řez 3. druhu tedy vskutku existuje; později si dokážeme, že existuje dokonce nekonečně mnoho řezů 3. druhu (to jest, že množina všech řezů 3. druhu je nekonečná).

Již jsme řekli, že řezy 2. druhu budeme vylučovat ze svých úvah; jak se odlišují od řezů 1. a 3. druhu? Zřejmě takto: horní skupina řezu 2. druhu obsahuje nejmenší číslo, kdežto horní skupina řezu 1. nebo 3. druhu neobsahuje nejmenší číslo.

§ 5. Uspořádání řezů. Budeme nyní pro řezy definovat čtyři základní výkony početní (sčítání, odčítání, násobení, dělení řezů) a uspořádání řezů podle velikosti, přičemž se omezíme na řezy 1. a 3. druhu; vybudujeme pak aritmetiku řezů obdobnou k aritmetice čísel racionálních. Začneme s uspořádáním řezů. Buďte $\alpha = (A/B)$, $\alpha' = (A'/B')$ řezy; názor nám říká (viz obr. 3), že bude asi přirozené, nazvat řez α' větším než řez α, sahá-li skupina A' dále doprava než skupina A, tj. existuje-li číslo, jež patří do A', ale nepatří do A, tj. patří do B. Definujme skutečně takto vztah „větší“:



Obr. 3.

Definice 2. *Buďte $\alpha = (A/B)$, $\alpha' = (A'/B')$ řezy 1. nebo 3. druhu. Existuje-li číslo, jež patří do A' a současně do B, říkáme, že řez α' je větší než α a vyznačujeme to znakem $\alpha' \succ \alpha$.*[25]

Pro zkrácení budeme místo $\alpha' \succ \alpha$ psát též $\alpha \prec \alpha'$ a říkat „α je menší než α'“.

[25]) Užívám znaku $\succ$, aby nenastalo nedorozumění s nerovností čísel; snad bych měl z téhož důvodu zavést jiné slovo než „větší“, ale jistě nevznikne nedorozumění, tím spíše, že budu více užívat znaku $\succ$ než slova „větší“.

Tuto definici jsme zvolili zcela svobodně;[26]) musíme nyní ovšem podrobně odvodit, které věty o zavedeném symbolu $\succ$ platí.

Věta 11*.[27]) *Jsou-li $\alpha = (A/B)$, $\alpha' = (A'/B')$ řezy 1. nebo 3. druhu, potom platí vždy jeden a jen jeden z těchto tří vztahů: buďto je $\alpha = \alpha'$ nebo je $\alpha' \succ \alpha$ nebo je $\alpha \succ \alpha'$.*

Důkaz. Vzpomeňme, že podle definice vztah $\alpha' \succ \alpha$ značí, že existuje číslo z A', jež patří do B, tj. jež nepatří do A. Je-li $\alpha = \alpha'$, potom je $A = A'$ a tedy neexistuje číslo z A', jež by nepatřilo do A, tj. není $\alpha' \succ \alpha$, ani neexistuje číslo z A, jež nepatří do A', tj. není $\alpha \succ \alpha'$. Je-li $\alpha' \succ \alpha$, existuje číslo a', jež patří do A' a současně do B; kdyby bylo současně $\alpha \succ \alpha'$, existovalo by číslo a, jež by patřilo do A a současně do B'. Ježto a by patřilo do A a a' do B, bylo by (viz definici 1) $a < a'$; ježto by a patřilo do B' a a' do A', bylo by současně $a > a'$; ale to není možno; tj. je-li $\alpha' \succ \alpha$, nemůže být současně $\alpha \succ \alpha'$. Tedy celkem: je-li $\alpha = \alpha'$, nemůže být ani $\alpha' \succ \alpha$ ani $\alpha \succ \alpha'$; je-li $\alpha' \succ \alpha$, nemůže být současně $\alpha \succ \alpha'$. To jest: ze tří vztahů $\alpha = \alpha'$, $\alpha' \succ \alpha$, $\alpha \succ \alpha'$ platí vždy *nejvýše* jeden.

Ale jeden z těchto vztahů vždy platí; neboť buďto je $A = A'$, a potom je $\alpha = \alpha'$; nebo je $A \neq A'$, a to znamená, že buďto existuje číslo z A', jež nepatří do A, takže je $\alpha' \succ \alpha$, nebo existuje číslo z A, jež nepatří do A', takže $\alpha \succ \alpha'$. Tím je věta 11* dokázána.

Věta 12*. *Je-li $\alpha \succ \alpha'$, $\alpha' \succ \alpha''$, je $\alpha \succ \alpha''$.*

Důkaz. Budiž $\alpha = (A/B)$, $\alpha' = (A'/B')$, $\alpha'' = (A''/B'')$; nechť je $\alpha \succ \alpha'$, $\alpha' \succ \alpha''$. Potom existuje číslo a, jež patří do A a současně do B', jakož i číslo a', jež patří do A' a současně do B''. Ježto a patří do horní a a' do dolní skupiny řezu α', je (podle definice řezu) $a > a'$. Ježto a' patří do B'', patří (podle věty 34) i větší číslo a do B'' Číslo a patří tedy do A a současně do B'', tj. (podle definice 2) $\alpha \succ \alpha''$.

Věta 15*. *Je-li α libovolný řez 1. nebo 3. druhu, existuje přirozené číslo n tak, že $n^* \succ \alpha$.*

Důkaz. Budiž $\alpha = (A/B)$; existuje aspoň jedno číslo $b \in B$; podle věty 15 existuje tedy přirozené číslo n tak, že $n > b$; tedy je také $n \in B$. Číslo n patří do

[26]) Slovo „svobodně“ nesmíme zde pojímat jako výraz libovůle, nýbrž spíše ve smyslu Engelsova výroku o svobodě jakožto poznané nutnosti. Nám nejde o to, abychom podali jakoukoliv definici vztahu $\alpha' \succ \alpha$, nýbrž takovou definici, která by přesně vyjadřovala ten vztah mezi α a α', který je naznačen na obr. 3, jak jsem již řekl. Mohli bychom definovat vztah $\alpha' \succ \alpha$ také jinak, jak by nás zrovna napadlo, a mohli bychom vybudovat příslušnou teorii tohoto vztahu. Tím bychom dostali teorii sice formálně bezvadnou, ale pravděpodobně neplodnou; rozhodně bychom však nedospěli k teorii odrážející v abstraktní a přesné formě vztah naznačený na obr. 3. Chceme-li podat definici odrážející tento vztah, musíme nutně zvolit definici 2 (nebo, po případě, nějakou definici s ní ekvivalentní).

[27]) Označuji tuto větu číslem 11*, protože je obdobná větě 11 o uspořádání čísel (racionálních); podívejte se na větu 11!

dolní skupiny řezu n^* (je jejím největším číslem). Existuje tedy číslo patřící do horní skupiny řezu α a současně do dolní skupiny řezu n^* (číslo n má totiž tyto vlastnosti). Podle definice 2 je tedy $n^* \succ \alpha$.

Důležitá je okolnost, že mezi (racionálními) čísly a, b jsou tytéž vztahy podle velikosti jako mezi příslušnými řezy 1. druhu a^*, b^*: jsou-li čísla a, b stejná, jsou i řezy a^*, b^* stejné; nejsou-li čísla a, b stejná, odpovídá většímu číslu větší řez. Vyslovme to větou:

Věta 36. *Buďte a, b čísla; je-li $a = b$, je $a^* = b^*$; je-li $a > b$, je $a^* \succ b^*$.*

Důkaz. První část je zřejmá. Budiž tedy $a > b$. Potom číslo a patří do dolní skupiny řezu a^* (je největším číslem této skupiny), ale nepatří do dolní skupiny řezu b^* (neboť je větší než největší číslo této skupiny, tj. číslo b). Podle definice 2 je tedy vskutku $a^* \succ b^*$.

§ 6. Čtyři základní výkony početní s řezy. Začneme sčítáním:

Věta 37. *Buďte $\alpha = (A/B)$, $\alpha' = (A'/B')$ řezy 1. nebo 3. druhu. Znakem D označme množinu všech čísel, jež se dají psát ve tvaru $b + b'$, kde b je číslo množiny B, b' číslo množiny B'. Množina D je horní skupinou jistého řezu 1. nebo 3. druhu $\gamma = (C/D)$.*

Definice 3. *Tento řez γ nazýváme součtem řezu α a řezu α' a značíme jej znakem $\alpha \oplus \alpha'$.*

Důkaz. Máme dokázat, že množina D je horní skupinou jistého řezu, tj. že splňuje podmínky 1, 2 věty 34 a že tento řez není druhého druhu, tj. že množina D neobsahuje nejmenší číslo. Vezměme nějaké číslo $b \in B$ a nějaké číslo $b' \in B'$ (taková čísla existují, ježto B, B' nejsou prázdné, viz definici 1); číslo $b + b'$ patří pak do D, takže množina D obsahuje aspoň jedno číslo. Vezměme nějaké číslo $a \in A$ a nějaké číslo $a' \in A'$ (taková čísla existují, ježto A, A' nejsou prázdné množiny). Každé číslo množiny D má tvar $b + b'$, kde $b \in B$, $b' \in B'$, takže $b > a$, $b' > a'$ a tedy $a + a' < b + b'$; číslo $a + a'$ je tedy menší než každé číslo množiny D a tedy nepatří do D (tj. není rovno žádnému číslu z D). Tedy množina D neobsahuje všechna čísla; podmínka 1 věty 34 je tedy splněna. Budiž nyní $d \in D$, $d' > d$. Jest $d = b + b'$, kde $b \in B$, $b' \in B'$. Položme $d' - (b + b') = c$, takže $c > 0$; je tedy $b + c > b$; ježto $b \in B$, je (podle věty 34) též $b + c \in B$; ale $d' = (b + c) + b'$, kde $b + c \in B$, $b' \in B'$; tedy je $d' \in D$. Tj.: je-li $d \in D$, $d' > d$, je též $d' \in D$, takže též podmínka 2 věty 34 je splněna. Budiž konečně d libovolné číslo z D; tvrdím, že d není nejmenším číslem z D. Lze totiž psát $d = b + b'$, kde $b \in B$, $b' \in B'$. Ježto $\alpha = (A/B)$ není řez 2. druhu, existuje číslo $b_0 \in B$ tak, že $b_0 < b$; číslo $b_0 + b'$ je menší než d a patří do D. Tím je důkaz proveden.

Dokážeme nyní, že pro sčítání řezů, definované definicí 3, platí tyto věty:

Věta 1*. $\alpha \oplus \alpha' = \alpha' \oplus \alpha$.

Věta 2*. $(\alpha \oplus \alpha') \oplus \alpha'' = \alpha \oplus (\alpha' \oplus \alpha'')$.

Věta 3*. $\alpha \oplus 0^* = \alpha$.

Věta 4*. *Jsou-li α, α' dva libovolné řezy 1. nebo 3. druhu, potom existuje jeden a jen jeden řez ξ 1. nebo 3. druhu, pro nějž platí rovnost $\alpha' \oplus \xi = \alpha$.*

Věta 13*. *Je-li $\alpha \succ \alpha'$, je $\alpha \oplus \alpha'' \succ \alpha' \oplus \alpha''$.*

K důkazu těchto pěti vět zaveďme označení $\alpha = (A/B)$, $\alpha' = (A'/B')$, $\alpha'' = (A''/B'')$.

Důkaz věty 1*. Horní skupina řezu $\alpha \oplus \alpha'$ je množina všech čísel tvaru $b + b'$, kde $b \in B$, $b' \in B'$; horní skupina řezu $\alpha' \oplus \alpha$ je množina všech čísel tvaru $b' + b$, kde $b \in B$, $b' \in B'$. Ale tyto dvě množiny jsou stejné, neboť podle věty 1 platí pro libovolná čísla b, b' rovnost $b + b' = b' + b$. Tedy řezy $\alpha \oplus \alpha'$, $\alpha' \oplus \alpha$ jsou si rovny (neboť mají touž horní skupinu).

Důkaz věty 2* je obdobný. Horní skupina řezu $(\alpha \oplus \alpha') \oplus \alpha''$ je množina všech čísel tvaru „číslo horní skupiny řezu $\alpha \oplus \alpha'$ plus číslo horní skupiny řezu α''“, tj. množina všech čísel tvaru $(b + b') + b''$, kde $b \in B$, $b' \in B'$, $b'' \in B''$. Obdobně horní skupina řezu $\alpha \oplus (\alpha' \oplus \alpha'')$ je množina všech čísel tvaru $b + (b' + b'')$, kde $b \in B$, $b' \in B'$, $b'' \in B''$. Opět obě množiny jsou stejné (podle věty 2).

Důkaz věty 3*. Budiž D horní skupina řezu $\alpha \oplus 0^*$. Horní skupina řezu 0^* se skládá ze všech čísel kladných (větších než 0). Tvrdím, že $D = B$. Budiž d libovolné číslo z D; tedy $d = b + p$, kde $b \in B$, $p > 0$. Podle věty 34 platí, že též $d \in B$ (neboť $d > b$, $b \in B$). Budiž za druhé b libovolné číslo z B; ježto α není 2. druhu, existuje číslo $b_0 \in B$ tak, že $b_0 < b$; tedy $b - b_0 > 0$, $b = b_0 + (b - b_0)$, tj. b je tvaru „číslo z B plus číslo kladné“, tedy $b \in D$ (neboť „číslo kladné“ znamená totéž jako „číslo horní skupiny řezu 0^*“). Tedy: každý prvek z D patří do B a každý prvek z B patří do D, tedy $D = B$ a tedy i $\alpha \oplus 0^* = \alpha$.

Než postoupíme dále, dokážeme tuto

pomocnou větu: *Budiž (A/B) libovolný řez, h libovolné kladné číslo. Potom existují čísla a, b tak, že $a \in A$, $b \in B$, $b - a = h$.*

Důkaz. Zvolme číslo $a_0 \in A$ a číslo $b_0 \in B$ (taková čísla existují). Jest $a_0 < b_0$. Podle věty 15 existuje přirozené číslo n tak, že $n > \dfrac{b_0 - a_0}{h}$, tedy $nh > b_0 - a_0$,

$$a_0 + nh > b_0 .$$

Ježto $b_0 \in B$, je též $a_0 + nh \in B$. Vytvořme čísla

$$a_0, a_0 + h, a_0 + 2h, \ldots, a_0 + nh ; \tag{26}$$

první z těchto čísel patří do A, poslední do B. Vezměme v řadě (26) poslední číslo, které ještě patří do A; budiž to číslo $a_0 + lh$, kde l je celé, $l \geqq 0$, $l < n$ (pro $l = n$

bychom už dostali číslo z B). Následující číslo v řadě (26), totiž $a_0 + (l + 1)h$, už patří do B. Píšeme-li $a = a_0 + lh$, $b = a_0 + (l + 1)h$, je skutečně $a \in A$, $b \in B$, $b - a = h$.

Důkaz věty 13*. Budiž $\alpha \succ \alpha'$; existuje tedy jisté číslo a_0 tak, že $a_0 \in A$, $a_0 \in B'$. Ježto α' není druhého druhu, existuje číslo $a_1 < a_0$ tak, že $a_1 \in B'$; jest ovšem $a_1 \in A$. Položme $a_0 - a_1 = h$; jest $h > 0$ a tedy existují podle pomocné věty dvě čísla a_0'', b_0'' tak, že $a_0'' \in A''$, $b_0'' \in B''$, $b_0'' - a_0'' = h$. Jest $a_0'' + a_0 = (b_0'' - h) + (a_1 + h) = b_0'' + a_1$. Ježto $b_0'' \in B''$, $a_1 \in B'$, patří $a_1 + b_0'' = a_0 + a_0''$ do *horní* skupiny řezu $\alpha' \oplus \alpha''$. Je-li d libovolné číslo horní skupiny řezu $\alpha \oplus \alpha''$, je $d = b + b''$, kde $b \in B$, $b'' \in B''$; tedy je $b > a_0$ (ježto $a_0 \in A$), $b'' > a_0''$ (ježto $a_0'' \in A''$) a tedy $d > a_0 + a_0''$. Číslo $a_0 + a_0''$ je tedy menší než každé číslo horní skupiny řezu $\alpha \oplus \alpha''$, nepatří tedy do této horní skupiny a patří tedy do *dolní* skupiny řezu $\alpha \oplus \alpha''$. Tedy existuje číslo (totiž $a_0 + a_0''$), jež patří do horní skupiny řezu $\alpha' \oplus \alpha''$ a současně do dolní skupiny řezu $\alpha \oplus \alpha''$. Podle definice 2 je tedy $\alpha \oplus \alpha'' \succ \alpha' \oplus \alpha''$.

Důkaz věty 4*. Jsou-li ξ, η dva *různé* řezy 1. nebo 3. druhu (tj. $\xi \neq \eta$), je $\alpha' \oplus \xi \neq \alpha' \oplus \eta$; neboť podle věty 11* je buďto $\xi \succ \eta$ a potom podle vět 13*, 1* $\xi \oplus \alpha' \succ \eta \oplus \alpha'$, tj. $\alpha' \oplus \xi \succ \alpha' \oplus \eta$, nebo $\eta \succ \xi$ a potom obdobně $\alpha' \oplus \eta \succ \alpha' \oplus \xi$. Nemůže se tedy řez $\alpha' \oplus \xi$ pro dva různé řezy (1. nebo 3. druhu) ξ rovnat témuž řezu α; tedy existuje *nejvýše* jeden řez ξ (1. nebo 3. druhu), pro který platí rovnost

$$\alpha' \oplus \xi = \alpha\,, \tag{27}$$

a k důkazu věty 4* stačí tedy jeden takový řez (1. nebo 3. druhu) sestrojit. Budiž Y množina všech čísel tvaru $b - a'$, kde $b \in B$, $a' \in A'$. Ježto existuje číslo $b \in B$ jakož i číslo $a' \in A'$, není množina Y prázdná. Za druhé: existuje číslo $a_0 \in A$, jakož i číslo $b_0' \in B'$. Pro každé číslo $b \in B$ a každé číslo $a' \in A'$ je $a_0 < b$, $b_0' > a'$ a tedy $a_0 - b_0' < b - a'$ (věta 19), takže číslo $a_0 - b_0'$ je menší než každé číslo množiny Y a tedy nepatří do množiny Y. Tedy *množina Y splňuje podmínku 1 věty 34* (obsahuje aspoň jedno číslo, ale neobsahuje všechna čísla). Budiž dále $y \in Y$, $y' > y$; tvrdím, že potom též $y' \in Y$. Neboť jest $y = b - a'$, kde $b \in B$, $a' \in A'$; jest $b + y' - y > b$, tedy též $b + y' - y \in B$; jest však $y' = y + (y' - y) = (b + y' - y) - a'$, kde $b + y' - y \in B$, $a' \in A'$, tedy $y' \in Y$. *Množina Y splňuje tedy též podmínku 2 věty 34.* Konečně tvrdím, že *množina Y neobsahuje nejmenšího čísla.* Neboť budiž $y \in Y$, tedy $y = b - a'$, $b \in B$, $a' \in A'$; ježto α není 2. druhu, existuje $b_1 < b$ tak, že $b_1 \in B$. Číslo $y_1 = b_1 - a'$ je vskutku menší než y a patří do množiny Y. Tedy je Y horní skupinou jistého řezu $\xi = (X/Y)$ a tento řez je 1. nebo 3. druhu. Ukážeme ještě, že tento řez ξ splňuje rovnici (27). Horní skupinu řezu $\alpha' \oplus \xi$ označme znakem D; stačí dokázat, že $D = B$. Množina D je množina všech čísel, jež se dají psát ve tvaru $b' + y$, kde $b' \in B'$, $y \in Y$, tj. množina všech čísel tvaru

$$d = b' + (b - a')\,, \quad \text{kde} \quad b' \in B'\,, \quad b \in B\,, \quad a' \in A'\,. \tag{28}$$

Budiž nyní $d \in D$, takže d lze psát ve tvaru (28); jest $b' > a'$, tedy $d > b$; ježto $b \in B$, je také $d \in B$: *každé číslo z D patří do B.* Budiž naopak $b \in B$; ježto α není druhého druhu, existuje číslo b_2 tak, že $b_2 < b$, $b_2 \in B$; položme $b - b_2 = h$, takže $h > 0$. Podle pomocné věty existují čísla $a' \in A'$, $b' \in B'$ tak, že $b' - a' = h$ Tedy je

$$b = b_2 + h = b_2 + (b' - a') = b' + (b_2 - a'),$$

kde

$$b' \in B', \quad b_2 \in B, \quad a' \in A',$$

takže $b \in D$. *Každé číslo z B tedy patří do D.* Tím je rovnost $B = D$ dokázána, a tím i věta 4*.

Je opět důležité, že se řezy 1. druhu sčítají jako příslušná (racionální) čísla:

Věta 38. $a^* \oplus b^* = (a + b)^*$. (Slovy: součet řezů 1. druhu, přiřazených číslům a, b, je řez přiřazený součtu čísel a, b.)

Důkaz. Horní skupina jakéhokoliv řezu c^* je množina všech čísel větších než c. Budiž M horní skupina řezu $a^* \oplus b^*$, tj. množina všech čísel tvaru $a' + b'$, kde $a' > a$, $b' > b$; budiž N horní skupina řezu $(a + b)^*$, tj. množina všech čísel větších než $a + b$. Stačí dokázat, že $M = N$. Budiž především $m \in M$; tedy $m = a' + b'$, $a' > a$, $b' > b$, tedy $m > a + b$, tedy $m \in N$. Budiž za druhé $n \in N$; tedy $n > a + b$; položme $\frac{1}{2}(n - (a + b)) = c$, takže $c > 0$, $n = (a + c) + (b + c)$. Položím-li $a' = a + c$, $b' = b + c$, je $a' > a$, $b' > b$, $n = a' + b'$, tedy $n \in M$. Tedy: je-li $m \in M$, je $m \in N$; je-li $n \in N$, je $n \in M$. Tedy vskutku $M = N$.

Mluvili jsme dosud o uspořádání řezů, o jejich sčítání (a vlastně také o jejich odčítání: řez ξ z věty 4* je totiž definován obdobně, jako se definuje rozdíl $x = a - b$ čísel a, b rovnicí $b + x = a$). Ještě nám zbývá definovat součin $\alpha \otimes \alpha'$ dvou řezů 1. nebo 3. druhu a odvodit příslušné věty obsahující součin řezů. Nebudu se tím již zabývat: na uspořádání a sčítání řezů již čtenář zajisté poznal, jakým způsobem se zde postupuje, a je snad ochoten věřit, že podobným způsobem je možno pokračovat také při násobení, a proto nebudu rozsah tohoto paragrafu rozšiřovat podrobným výkladem o definici násobení řezů ani o důkazy příslušných vět. Ostatně čtenář, který se chce přesvědčit, jak lze teorii násobení řezů vskutku vybudovat (a opravdový matematik nebude věřit žádnému výroku autority, nýbrž se přesvědčí sám o jeho správnosti), může postupovat dvojím způsobem: buďto rozřeší cvičení umístěná na konci tohoto paragrafu a tím obdrží právě onu část aritmetiky řezů, kterou jsem zde vynechal — to je nejcennější způsob, protože přitom vnikne samostatnou prací do podstaty teorie, kterou zde vykládám; nebo, netroufá-li si na řešení těchto cvičení, může si scházející část aritmetiky řezů doplnit z některé knihy jednající o tomto předmětu. Více nebo méně podrobnou teorii reálných čísel najde čtenář ve většině solidně založených knih o diferenciálním počtu. Upozorňuji např. na pěkný výklad v knize Fichtengolcově (Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления), sv. 1 (ОГИЗ, Moskva-Leningrad 1948) na str.

11–49. Upozorňuji pouze čtenáře, že Fichtengolc nevylučuje řezy 2. druhu, nýbrž 1. druhu. Systematický výklad teorie reálných čísel obsahuje kniha O. Perron, Irrationalzahlen, 2. vyd. (Berlín 1939), str. 1–35. Perron vylučuje řezy 2. druhu.

Dlužím však čtenáři ještě několik slov o literatuře k teorii čísel přirozených (1, 2, 3, ...), čísel celých a čísel racionálních. Přechod od čísel celých k číslům racionálním a teorie racionálních čísel jsou vyloženy v knize Vl. Kořínka Základy algebry (Praha 1953, 2. vyd. 1956). Tato kniha neobsahuje však teorii čísel přirozených ani teorii čísel celých (obor čísel celých vzniká z oboru čísel přirozených přidáním čísel 0, – 1, – 2, ...). Máme však nyní v české literatuře dvě knihy obsahující systematickou teorii čísel přirozených, celých, racionálních a reálných, v nichž teorie reálných čísel je vybudována na pojmu řezu. Jsou to knihy: K. Hruša, Elementární aritmetika (Praha 1953) a B. Pospíšil, Nekonečno v matematice (Praha 1949 – hlavně druhá část této knihy). Obě knihy spočívají na množinovém základě; v obou je proto možno se poučit o přesném smyslu výroků, jako „množina je konečná", „množina se skládá z n prvků" apod. (viz str. 21–22). Kniha Hrušova je psána obšírněji a obsahuje také teorii čísel komplexních a počátky teorie čísel hyperkomplexních. Velmi originální knížka Pospíšilova (tento vynikající matematik zemřel za okupace na následky věznění v r. 1944 ve věku 32 let) je psána mnohem zhuštěněji. V obou knihách se čtenář doví mnoho zajímavého z obecné teorie množin. Podotýkám, že oba autoři vylučují v teorii reálných čísel řezy 1. druhu.

Konečně existuje kniha, která si za jediný cíl klade právě úplný výklad nauky o číslech přirozených, potom racionálních, dále reálných a konečně komplexních. Je to knížka E. Landau, Grundlagen der Analysis (Lipsko 1930). Landau vylučuje řezy 1. druhu.

Landauova knížka je psána jeho známým stručným „telegrafickým" slohem. V české literatuře máme však pozoruhodnou knihu, která věnuje velkou pozornost právě tomu, aby čtenáře *postupně* přivedla k onomu způsobu myšlení, který je charakteristický pro dnešní matematiku. Je to kniha zesnulého akad. Ed. Čecha „Čísla a početní výkony" (1954). Teorie celých, racionálních a reálných čísel se týkají její první tři kapitoly. Na rozdíl od ostatních knih zde uvedených nebuduje Čech teorii reálných čísel na základě Dedekindovy teorie řezů, nýbrž pomocí posloupností racionálních čísel podle G. Cantora. Kdo má hlubší zájem o základní otázky matematiky, rozhodně by se měl s Cantorovou teorií někdy seznámit.

Shrňme výsledky paragrafů 5 a 6. Přitom slovem „řez" rozumím zde stále řez 1. nebo 3. druhu. Definovali jsme uspořádání řezů (tj. význam vztahu $\alpha' \succ \alpha$), součet řezů $\alpha \oplus \alpha'$ a součin řezů $\alpha \otimes \alpha'$ (poslední definici jsme si odpustili) a dokázali jsme, že pro tyto výkony platí věty 1* až 15*, zcela obdobné větám 1 až 15 pro čísla (zase jsme si odpustili věty obsahující součin, takže jsme podrobně dokázali pouze věty 1*, 2*, 3*, 4*, 11*, 12*, 13*, 15*; věty 4* a 10* dovolují definovat rozdíl a podíl řezů). Konečně jsme zjistili, že počítání řezy 1. druhu se v podstatě shoduje s počítáním příslušnými (racionálními) čísly: je-li $a = b$, je $a^* = b^*$; je-li $a > b$, je $a^* \succ b^*$;

dále je $a^* \oplus b^* = (a + b)^*$, $a^* \otimes b^* = (ab)^*$ (důkaz poslední rovnice jsme si opět odpustili).

Ovšem čtenář, který provedl cvičení, umístěná na konci tohoto paragrafu, si neodpustil nic.

Cvičení

V těchto cvičeních znamená slovo řez vždy řez 1. nebo 3. druhu; malá řecká písmena značí řezy, malá latinská značí čísla.

1. Budiž $\alpha = (A/B) \succ 0^*$; budiž $k > 1$. Potom existují a, b tak, že $a > 0$, $a \in A$, $b \in B$, $b : a = k$.[28]) Návod: existuje $a_0 > 0$, $a_0 \in A$; dále existuje $b_0 \in B$. Binomická věta dává (pro celé $n \geqq 1$) $k^n = (1 + (k - 1))^n > n(k - 1)$; odtud najdete, že existuje n tak, že $a_0k^n > b_0$, tedy $a_0k^n \in B$. Je-li a_0k^l poslední z čísel $a_0, a_0k, a_0k^2, \ldots, a_0k^n$, jež patří k A, stačí položit $a = a_0k^l$, $b = a_0k^{l+1} = ka$.

2. Ona část aritmetiky, jež plyne z vět 1, 2, 3, 4, 11, 12, 13, 15 (bez použití jiných vět o racionálních číslech), platí též pro řezy; některé věty toho druhu jsme pro racionální čísla již odvodili; budeme jich nyní užívat též pro řezy. Řez ξ z věty 4* označím $\alpha \ominus \alpha'$; místo $0^* \ominus \alpha'$ budeme psát $\ominus \alpha'$.

3. Budiž $\alpha = (A/B) \succ 0^*$, $\alpha' = (A'/B') \succ 0^*$. Budiž D množina všech čísel tvaru bb', kde $b \in B$, $b' \in B'$. Potom je D horní skupinou jistého řezu $(C/D) \succ 0^*$. Definujeme pak součin rovnicí $\alpha \otimes \alpha' = (C/D)$.

4. V ostatních případech definujeme:

$$\alpha \otimes 0^* = 0^* \otimes \alpha = 0^* \text{ pro libovolné } \alpha\,; \tag{29}$$

$$(\ominus \alpha) \otimes \alpha' = \alpha \otimes (\ominus \alpha') = \ominus (\alpha \otimes \alpha'), \quad (\ominus \alpha) \otimes (\ominus \alpha') = \alpha \otimes \alpha' \quad \text{pro } \alpha \succ 0^*, \ \alpha' \succ 0^*. \tag{30}$$

5. Dokažte věty 5*, 6*, 7*, 8*, 9* (tj. věty o řezech, obdobné větám 5 až 9 pro čísla). Návod: věty 5*, 6* plynou snadno pro $\alpha \succ 0^*$, $\alpha' \succ 0^*$; v ostatních případech užiji vzorců (29), (30). Věta 7*, tj. $(\alpha \oplus \alpha') \otimes \alpha'' = \alpha \otimes \alpha'' \oplus \alpha' \otimes \alpha''$ plyne pro $\alpha \succ 0^*$, $\alpha' \succ 0^*$, $\alpha'' \succ 0^*$ takto:[29]) Mám dokázat, že množina čísel tvaru

$$(b + b')\,b'', \quad b \in B, \quad b' \in B', \quad b'' \in B'' \tag{31}$$

je táž jako množina všech čísel tvaru

$$b_1b_1'' + b_1'b_2'', \quad b_1 \in B, \quad b_1' \in B', \ b_1'' \in B'', \quad b_2'' \in B''. \tag{32}$$

Každé číslo (31) má tvar (32). Naopak, je-li $b_2'' \geqq b_1''$, má (32) tvar

$$\left(b_1 + b_1' \frac{b_2''}{b_1''}\right) b_1'',$$

což je tvar (31); obdobně pro $b_2'' < b_1''$. Ostatní případy podle (29), (30). Věta 8* je snadná pro $\alpha \succ 0^*$; ostatní případy podle (29), (30). Věta 9* plyne ihned z cvičení 3, 4.

6. Dokažte větu 14*: je-li $\alpha \succ \alpha'$, $\alpha'' \succ 0^*$, je $\alpha \otimes \alpha'' \succ \alpha' \otimes \alpha''$. Návod: z vět dosud odvozených snadno najdete, že jde o nerovnost $(\alpha \ominus \alpha') \otimes \alpha'' \succ 0^*$, kde $\alpha \ominus \alpha' \succ 0^*$, jež však plyne z cvičení 3.

[28]) Srovnej podobnou pomocnou větu před důkazem věty 13*.

[29]) Píši stále $\alpha = (A/B)$, $\alpha' = (A'/B')$, $\alpha'' = (A''/B'')$.

7. Jsou-li α, α' řezy, $\alpha' \neq 0^*$, existuje jeden a jen jeden řez ξ tak, že $\alpha' \otimes \xi = \alpha$. Návod: je-li $\alpha \succ 0^*$, $\alpha' \succ 0^*$, budiž Y množina všech čísel $b : a'$, kde $b \in B$, $a' > 0$, $a' \in A'$; řez ξ potom bude definován rovnicí $\xi = (X/Y)$. Rovnici $\alpha' \otimes \xi = \alpha$ dokážete tak, že ukážete, že množina všech čísel

$$\frac{b'}{a'} . b \, (b \in B, \quad b' \in B', \quad a' \in A', \quad a' > 0)$$

je totožná s množinou B; k důkazu užijte cvičení 1.[30])

Ostatní případy podle (29), (30). Jednoznačnost plyne užitím věty 14*, podobně jako jednoznačnost v 4* plynula z 13*.

8. Jest $(-a)^* = \ominus a^*$; $a^* \otimes b^* = (ab)^*$.

§ 7. **Reálná čísla.** Teorie řezů, vybudovaná v paragrafech 4, 5, 6, dovoluje nám již velmi jednoduše zavést „iracionální reálná čísla". Máme dosud tyto věci k disposici: předně racionální čísla, za druhé řezy 1. druhu, za třetí řezy 3. druhu. Pro racionální čísla máme definován význam symbolů $>$, $+$, . (krát), a víme, že pro tyto symboly platí věty 1 až 15. Obdobně máme pro řezy 1. a 3. druhu definován význam symbolů $\succ$, $\oplus$, $\otimes$ a víme, že pro tyto symboly platí věty 1* až 15*, úplně analogické větám 1—15, jež platí pro racionální čísla. Nyní dáme řezům 3. druhu nové jméno: řez 3. druhu budeme také nazývat „reálným iracionálním číslem"; čísla racionální a reálná iracionální budeme dohromady nazývat „reálnými čísly". To je všechno ovšem jen nové pojmenování; hlavní věc teprve přijde. Reálná čísla budeme nyní bez rozdílu označovat písmeny kterékoliv abecedy (latinské, řecké, malé, velké, jak se nám to bude zrovna hodit).[31]) Řezy 1. a 3. druhu přiřadíme nyní vzájemně jednoznačně reálným číslům tím, že každému reálnému číslu α přiřadíme jistý řez 1. nebo 3. druhu α^* tímto způsobem: je-li α racionální číslo, bude α^*, tak jako dosud, značit onen řez 1. druhu, v němž číslo α je právě největším číslem dolní skupiny; je-li však α iracionální číslo, tj. řez 3. druhu, položíme $\alpha^* = \alpha$ (tj. řez α přiřadíme sám sobě). Tím jsou vskutku řezy 1. a 3. druhu vzájemně jednoznačně přiřazeny reálným číslům: a to řezy 1. druhu jsou přiřazeny vzájemně jednoznačně číslům racionálním (jak jsme podrobně vyložili na str. 42), řezy 3. druhu jsou pak vzájemně jednoznačně přiřazeny reálným číslům iracionálním (a to nejjednodušším možným způsobem: každý řez 3. druhu (= iracionální reálné číslo) je přiřazen sám sobě).[32]) Ze vzájemné jednoznačnosti přiřazení je patrné: jsou-li α, β dvě reálná čísla, potom rovnost $\alpha = \beta$ platí tehdy a jen tehdy, platí-li mezi příslušnými řezy rovnost $\alpha^* = \beta^*$. Pro *racionální* čísla α, β známe význam vzorce $\alpha > \beta$; víme také, že nerovnost $\alpha > \beta$ (kde α, β jsou *racionální* čísla) platí tehdy a jen tehdy, je-li

[30]) Hlavní krok je tento: je-li $b_1 \in B$, existuje $b < b_1$ $(b \in B)$. Tedy existují $a' > 0$, $b' (a' \in A', b' \in B')$ tak, že $b_1 : b = b' : a'$, načež $b_1 = b \cdot b' : a'$.

[31]) Poznamenejme, že skutečně, podle věty 35, existuje aspoň jedno reálné iracionální číslo (tj. řez 3. druhu). Tím, že jsme k racionálním číslům přidali ještě reálná iracionální čísla, dostali jsme tedy vskutku něco nového.

[32]) Každý řez 1. nebo 3. druhu lze tedy psát ve tvaru α^*, kde α je právě ono (jednoznačně určené) reálné číslo α, jemuž je daný řez přiřazen.

$\alpha^* \succ \beta^*$. (Protože jsem však tuto větu nikde v tomto tvaru nevyslovil, dokažme si ji: buďte α, β racionální čísla; je-li $\alpha > \beta$, je podle věty 36 $\alpha^* \succ \beta^*$. Nechť za druhé není $\alpha > \beta$; potom podle věty 11 je buďto $\alpha = \beta$ nebo $\beta > \alpha$, tedy podle věty 36 je buďto $\alpha^* = \beta^*$ nebo $\beta^* \succ \alpha^*$, a tedy podle věty 11* není $\alpha^* \succ \beta^*$. Tím je náš výrok dokázán: je-li $\alpha > \beta$, je $\alpha^* \succ \beta^*$; není-li $\alpha > \beta$, není $\alpha^* \succ \beta^*$.) Tedy ještě jednou: význam vzorce $\alpha > \beta$ byl definován dosud pouze pro racionální α, β a to tak, že nerovnost $\alpha > \beta$ platí tehdy a jen tehdy, platí-li $\alpha^* \succ \beta^*$ (tj. $\alpha > \beta$ znamená totéž co $\alpha^* \succ \beta^*$ – ovšem pro racionální α, β). Rozšíříme nyní smysl vzorce $\alpha > \beta$ na libovolná reálná (racionální nebo iracionální) čísla α, β touto definicí: vzorec $\alpha > \beta$ nechť znamená totéž co $\alpha^* \succ \beta^*$. (Je-li některé z čísel α, β iracionální, dostal vztah $\alpha > \beta$ touto definicí teprve smysl; jsou-li α, β racionální, měl vztah $\alpha > \beta$ smysl již dříve; ale zjistili jsme toto: vztah $\alpha > \beta$ ve „starém" smyslu (pro racionální α, β) znamená totéž co $\alpha^* \succ \beta^*$, tj. totéž co $\alpha > \beta$ v „novém" smyslu, takže nová definice je ve shodě se starou; kdyby tomu tak nebylo, musili bychom při nové definici zavést nějaký jiný znak než $>$, abychom se vyhnuli nedorozumění. Tuto celkem samozřejmou poznámku jsem proto tak obšírně vypsal, protože v podstatě totéž se bude opakovat při sčítání a násobení; tam ovšem už tuto poznámku opakovat nebudu.)

Přistupme nyní ke sčítání. Jsou-li α, β racionální čísla, je definován jistým způsobem „součet" $\alpha + \beta$. Podle věty 38 je pak $\alpha^* \oplus \beta^* = (\alpha + \beta)^*$, takže součet $\alpha + \beta$ (pro *racionální* α, β) lze nalézt takto: vytvořím součet řezů α^*, β^*; to je jistý řez γ^*, tj. $\alpha^* \oplus \beta^* = \gamma^*$; číslo k tomuto řezu příslušné, tj. číslo γ, je právě součet $\alpha + \beta$. Rozšíříme nyní definici součtu $\alpha + \beta$ na libovolná reálná čísla α, β takto: součet řezů $\alpha^* \oplus \beta^*$ je jistý řez γ^*; příslušné číslo γ nazýváme součtem čísla α a čísla β a značíme je $\alpha + \beta$. Tím máme definován součet $\alpha + \beta$ pro libovolná reálná α, β a v případě racionálních α, β je tato nová definice ve shodě se starou (podle věty 38).

Podobně násobení: podle jedné věty (jejíž důkaz jsme si odpustili)[33]) platí pro racionální čísla α, β rovnice $\alpha^* \otimes \beta^* = (\alpha\beta)^*$. Definici součinu rozšíříme na libovolná reálná čísla α, β takto: sestrojme součin řezů $\alpha^* \otimes \beta^*$; to je jistý řez γ^*. Číslo γ nazýváme součinem čísla α a čísla β a značíme je $\alpha\beta$ nebo $\alpha \,.\, \beta$.

Tím jsme definovali smysl vzorce $\alpha > \beta$, jakož i součet $\alpha + \beta$ a součin $\alpha\beta$ pro libovolná reálná čísla α, β; pro racionální α, β jsou tyto nové definice ekvivalentní se starými.

V § 2 jsem zopakoval věty 1 až 15; tyto věty platí, jak víme, jestliže slovo „číslo" znamená „racionální číslo". Ukážeme teď, že věty 1 až 15 platí obecněji pro reálná čísla, tj. že platí též tehdy, jestliže v nich slovo „číslo" znamená „reálné číslo".

Dokažme třeba větu 1. Buďte a, b reálná čísla; sestrojme $a^* \oplus b^* = c^*$, $b^* \oplus \oplus a^* = d^*$. Podle naší definice součtu reálných čísel je $c = a + b$, $d = b + a$. Ale podle věty 1* je $c^* = d^*$, a tedy i $c = d$ (neboť $c^* = d^*$ platí tehdy a jen tehdy, je-li $c = d$) a tedy vskutku $a + b = b + a$.

[33]) Viz však cvičení 8 k § 6.

Dokažme obdobně větu 11. Buďte a, b reálná čísla; podle věty 11* platí jeden a jen jeden ze vztahů $a^* = b^*$, $a^* \succ b^*$, $b^* \succ a^*$. Ale první vztah znamená totéž jako $a = b$, druhý totéž jako $a > b$, třetí totéž jako $b > a$. Ze tří posledních vztahů platí tedy vskutku jeden a jen jeden.

Dokažme ještě větu 4. Rovnice $b + x = a$ (kde a, b, x jsou reálná čísla) znamená totéž (podle definice součtu) jako $b^* \oplus x^* = a^*$. Při daných číslech a, b, tj. při daných řezech a^*, b^*, existuje podle věty 4* jeden a jen jeden řez x^*, pro nějž je $b^* \oplus$ $\oplus\, x^* = a^*$, tj. existuje jedno a jen jedno reálné číslo x, pro něž je $b + x = a$.

Podobným způsobem bychom mohli dokázat též ostatní z vět 1 až 15 pro reálná čísla; věc je tak jednoduchá (proto však též trochu nudná), že ji mohu přenechat čtenáři.[34])

§ 8. Množiny reálných čísel. — Věta o supremu a infimu (čili o horní a dolní hranici). V § 4 až 7 jsme zavedli do svých úvah čísla reálná. Čísla racionální jsou speciálním případem reálných čísel; čísla reálná, jež nejsou racionální, jsme nazvali reálnými iracionálními čísly; zjistili jsme, že aspoň jedno takové iracionální číslo existuje. Dále jsme zjistili toto: věty 1 až 15 platí i pro čísla reálná, tj. platí i tehdy, jestliže v nich slovem „číslo" rozumíme „reálné číslo" (a ne jenom „racionální číslo", jak jsme to činili v § 2).

Pro reálná čísla zavádíme ovšem také ona označení, jež jsme v § 2 zavedli speciálně pro racionální čísla; tak místo $a > b$ píšeme též $b < a$ a čteme „a je větší než b" nebo „b je menší než a". Rovněž zavádíme znak $a \geqq b$ (nebo $b \leqq a$) pro „$a > b$ nebo $a = b$". Dále značíme znakem $a - b$ číslo x splňující rovnici $b + x =$ $= a$, znakem $\frac{a}{b}$ nebo $a : b$ (pro $b \neq 0$) číslo x splňující rovnici $bx = a$; místo $0 - a$ píšeme $-a$, konečně zavádíme prostou čili absolutní hodnotu čísla a, totiž $|a| = a$ pro $a > 0$, $|a| = -a$ pro $a < 0$, $|0| = 0$. Čísla větší než nula opět nazýváme kladnými, čísla menší než nula zápornými. Často užíváme ještě těchto pojmenování: čísla kladná a nulu (tj. čísla $\geqq 0$) nazýváme *nezápornými*, čísla záporná a nulu (tj. čísla $\leqq 0$) *nekladnými*.

Čísla reálná jste zvyklí znázorňovat si na tzv. číselné ose; několik slov jsem již o tom řekl na str. 25, ostatně věc je vám běžná ze školy. Budeme příležitostně užívat geometrického názvosloví souvisícího s tímto znázorněním: místo „množina všech reálných čísel" budeme leckdy říkat „číselná osa", místo „reálné číslo a" budeme říkat „bod a"; místo „číslo a je větší (menší) než b" budeme říkat „bod a leží vpravo (vlevo) od bodu b" apod. Zdůraznili jsme ovšem již jednou, že zrakového názoru

[34]) Celý vtip je v tom: věty 1*—15* (obdobné větám 1—15) obsahují znaky (s řezy) tvaru

(A) $$\alpha^* = \beta^*, \quad \alpha^* \succ \beta^*, \quad \alpha^* \oplus \beta^*, \quad \alpha^* \otimes \beta^* .$$

Snadno se v každém jednotlivém případě přesvědčíte (u vět 1, 11, 4 jsme to provedli), že tyto věty zůstanou v platnosti, píšete-li místo řezů α^*, β^*, ... reálná čísla α, β, ... a místo znaků (A) znaky $\alpha = \beta$, $\alpha > \beta$, $\alpha + \beta$, $\alpha\beta$. Tím obdržíte věty 1—15 pro reálná čísla.

na přímku nesmíme užívat jako prostředku k důkazům; užíváme-li geometrického názvosloví, jako „číselná osa", „bod na číselné ose", není to nic jiného než jiné pojmenování pro „množinu všech reálných čísel", „reálné číslo" apod. Často je však geometrické názvosloví přece užitečné: leckdy má cenu heuristickou, tj. napovídá nám, kterou cestou se máme brát (viz např. názorové úvahy v § 3 a na začátku § 5); jindy je cennou pomůckou pro zapamatování důkazu nebo věty.

V dalších úvahách budeme až do konce kap. XIV pracovat jen s reálnými čísly; proto slovem „číslo" budeme v celé této knize (s výjimkou kapitoly XV) nadále rozumět číslo reálné („množina číselná" bude znamenat vždy množinu reálných čísel, tj. množinu, jejíž prvky jsou reálná čísla); půjde-li o nějaký speciální druh čísel (třeba o racionální, iracionální, kladná, celá čísla apod.), vytknu vždy výslovně tuto okolnost. Budiž nyní M množina číselná (tj. množina, jejíž prvky jsou reálná čísla). Množina M se nazývá *shora omezenou* (nebo též *shora ohraničenou*), existuje-li reálné číslo k takové, že žádné číslo množiny M není větší než k (jinak řečeno: každé číslo x množiny M splňuje nerovnost $x \leqq k$; názorně řečeno: žádné číslo množiny M neleží „vpravo" od k). Každé číslo k mající tuto vlastnost budeme nazývat „horní závorou množiny M". Množina M je tedy shora omezená, má-li alespoň jednu horní závoru. Jakmile má množina M jednu horní závoru, má jich ovšem nekonečně mnoho: neboť je-li číslo k horní závorou, je i každé číslo větší než k horní závorou.

Je-li např. M_1 množina všech čísel x splňujících nerovnosti $1 \leqq x \leqq 3$, je M_1 shora omezená: neboť např. číslo 10 je její horní závorou, a rovněž číslo 7 nebo $\frac{9}{2}$ nebo 3. Ale žádné číslo k menší než 3 není horní závorou množiny M_1; neboť je-li $k < 3$, existuje v množině M_1 číslo větší než k (např. číslo 3). Číslo 3 je tedy ještě horní závorou, ale žádné číslo menší než 3 není horní závorou množiny M_1, tj. číslo 3 je *nejmenší* ze všech horních závor množiny M_1.

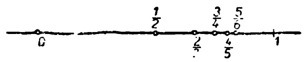
Vezměme jiný příklad. Budiž M_2 množina všech čísel x splňujících nerovnost $x < 2$. Také tato množina je shora omezená, neboť např. číslo 2 (a tedy také každé číslo větší než 2) je její horní závorou. Ale žádné číslo k menší než 2 není horní závorou množiny M_2. Důkaz: Je-li $k < 2$, je $k < \frac{1}{2}(k + 2) < 2$;[35]) to znamená: číslo $\frac{1}{2}(k + 2)$ patří do M_2, a přitom je větší než k; tedy číslo k není horní závorou množiny M_2. Tedy: číslo 2 je *nejmenší* ze všech horních závor množiny M_2.

Vezměme ještě jeden příklad trochu jiného rázu. Budiž M_3 množina všech čísel tvaru $1 - \dfrac{1}{n}$, kde n probíhá všechna přirozená čísla $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Množina M_3 je shora omezená, neboť např. číslo 1 (a tedy i každé číslo větší než 1) je její horní závorou. Tvrdím: žádné číslo k menší než 1 není horní závorou množiny M_3. Důkaz: Je-li $k < 1$ (a tedy $1 - k > 0$), existuje přirozené číslo n tak, že $\dfrac{1}{n} < 1 - k$ (stačí totiž vzít $n > \dfrac{1}{1 - k}$, načež podle věty 21 je $\dfrac{1}{n} < 1 - k$). Zvolíme-li n tímto způ-

[35]) **Vzpomeňme si, že jsme na str. 42 dokázali: je-li $a < b$, je $a < \frac{1}{2}(a + b) < b$.**

sobem, je $k < 1 - \frac{1}{n}$. Číslo $1 - \frac{1}{n}$ patří ovšem do množiny M_3; tedy existuje v M_3 číslo větší než k, takže k není horní závorou, což jsme měli dokázat. Tedy: číslo 1 je *nejmenší* ze všech horních závor množiny M_3. (Viz obr. 4.)

Jako příklad množiny, která není shora omezená, vezměme množinu všech přirozených čísel, kterou označme M_4. Je-li k libovolné reálné číslo, existuje přirozené číslo n (tj. číslo z M_4), které je větší než k (věta 15). Tedy žádné číslo k není horní závorou množiny M_4, tj. množina M_4 není shora omezená.



Obr. 4.

Všechny tři příklady shora omezených množin mají cosi společného: Mezi všemi horními závorami množiny M_1 byla jedna ze všech nejmenší, tj. (podle názvosloví zavedeného na str. 41) *množina všech horních závor množiny M_1 obsahuje nejmenší číslo.* A touž vlastnost měly množiny M_2, M_3. To není náhoda. Platí totiž obecně tato velmi důležitá věta, kterou za chvíli dokážeme:

Věta 39. *Budiž M neprázdná, shora omezená množina číselná. Potom mezi všemi horními závorami množiny M existuje jedna, která je ze všech nejmenší.* (Tj. množina všech horních závor množiny M obsahuje nejmenší číslo.) Této větě se říká *věta o supremu* nebo také *věta o horní hranici.*

Dá se vyslovit také takto:

Věta 39 (věta o supremu čili o horní hranici). *Budiž M neprázdná shora omezená množina číselná. Potom existuje jedno a jen jedno číslo G mající tyto dvě vlastnosti:*

1) *Žádné číslo množiny M není větší než G.*

2) *Je-li G' libovolné číslo menší než G, existuje aspoň jedno číslo množiny M, jež je větší než G'.*

Definice 4. *Tomuto číslu G říkáme supremum množiny M* (značka sup M) *nebo též horní hranice množiny M.*

Je ihned vidět, že obě znění věty 39 říkají totéž. Neboť vlastnost 1 (z druhého znění) říká, že číslo G je horní závorou množiny M, a vlastnost 2 (z druhého znění) říká, že žádné číslo menší než G není horní závorou, tj. že G je *nejmenší* ze všech horních závor množiny M. Druhé znění věty 39 tedy říká právě toto: Je-li M neprázdná a shora omezená, existuje mezi všemi jejími horními závorami jedna a jen jedna, jež je ze všech nejmenší.

Že *jen* jedna z těch horních závor může být ze všech nejmenší (tj. že jen jedno číslo může mít současně vlastnosti 1, 2), je jasné. Můžeme to však také dokázat přímo (neodvolávajíce se na první znění věty 39) takto: Kdyby existovala dvě různá čísla mající vlastnosti 1, 2, označme menší z nich G_1, větší G_2. Ježto číslo G_1 má mít vlastnost 1, neexistovalo by v M žádné číslo větší než G_1. Ale ježto číslo G_2 má mít vlastnost 2 a ježto $G_1 < G_2$, musilo by v M existovat číslo větší než G_1 — a to je spor

Abychom tedy dokázali větu 39 (budeme to provádět pro její druhé znění), stačí dokázat, že existuje *aspoň* jedno číslo G mající vlastnosti 1, 2; že nemůže existovat více než jedno takové číslo, jsme již zjistili.

Napřed však zavedeme pojem množiny zdola omezené. Číselná množina M se nazývá *zdola omezenou* (nebo též *zdola ohraničenou*), existuje-li reálné číslo k takové, že žádné číslo množiny M není menší než k (jinak řečeno: každé číslo x množiny M splňuje nerovnost $x \geqq k$; názorně řečeno: žádné číslo množiny M neleží „vlevo" od k). Každé číslo k mající tuto vlastnost budeme nazývat „dolní závorou množiny M". Množina M je tedy zdola omezená, má-li aspoň jednu dolní závoru. A obdobně jako pro horní závory platí zde tato důležitá

Věta 40. *Budiž M neprázdná, zdola omezená množina číselná. Potom mezi všemi dolními závorami množiny M existuje jedna, která je ze všech největší.*

Této větě se říká *věta o infimu* nebo také *věta o dolní hranici.*

Příklady: Budiž M_5 množina všech čísel x splňujících nerovnosti $5 < x \leqq 10$; budiž M_6 množina všech čísel x splňujících nerovnost $x > -2$; budiž M_7 množina všech záporných čísel. Potom největší dolní závora množiny M_5 je číslo 5, největší dolní závora množiny M_6 je číslo -2; množina M_7 pak nemá vůbec dolní závory, tj. není zdola omezená.

Podotkněme ještě: Je-li množina M zdola i shora omezená, říkáme krátce, že je *omezená* (nebo také *ohraničená*). Tak z uvedených množin M_1 až M_7 jsou omezené množiny M_1, M_3, M_5.

Podobně jako větu 39 je možno i větu 40 vyslovit ještě v jiném tvaru:

Věta 40 (věta o infimu čili o dolní hranici). *Budiž M neprázdná, zdola omezená množina číselná. Potom existuje jedno a jen jedno číslo g, jež má tyto dvě vlastnosti:*

1) *Žádné číslo množiny M není menší než g.*

2) *Je-li g' libovolné číslo větší než g, existuje aspoň jedno číslo množiny M, jež je menší než g'.*

Definice 5. *Tomuto číslu g říkáme infimum množiny M* (značka $\inf M$) *nebo také dolní hranice množiny M.*

Podobně jako u věty 39 snadno dokážeme, že existuje nejvýše jedno číslo g mající vlastnosti 1 a 2. K důkazu věty 40 stačí tedy opět dokázat, že existuje aspoň jedno číslo g mající vlastnosti 1 a 2.

V dalším budeme vycházet téměř vždy z *druhého* znění vět 39, 40.

Než se pustíme do důkazu vět 39, 40, ukažme ještě, že věta 39 je jednoduchým důsledkem věty 40. Předpokládejme tedy na okamžik, že věta 40 už byla dokázána, a budiž dána shora omezená neprázdná číselná množina M, takže existuje číslo k takové, že pro každé $x \in M$ je $x \leqq k$. Zaveďme novou množinu N takto: x patří do N tehdy a jen tehdy, když $-x$ patří do M (obsahuje-li tedy M např. prvky 2, 0, -7, 5, obsahuje N prvky -2, 0, 7, -5). Je-li $x \in N$, je $-x \in M$, tedy $-x \leqq k$, tedy $x \geqq -k$; žádné číslo z N tedy není menší než číslo $-k$, takže množina N je zdola omezená a neprázdná. Podle věty 40 existuje tedy číslo g s těmito vlastnostmi: 1. Je-li $x \in N$, je $x \geqq g$. 2. Je-li $g' > g$, existuje aspoň jedno $x \in N$ tak, že $x < g'$. Položme $G = -g$; tvrdím, že číslo G má vlastnosti 1, 2 z věty 39. Předně: budiž $x \in M$; potom je $-x \in N$, tedy $-x \geqq g$, tedy $x \leqq -g$, tj. $x \leqq G$, tj. číslo G má vlastnost 1. Budiž za druhé $G' < G$, takže $-G' > -G$, tj. $-G' > g$; podle 2. vlastnosti čísla g existuje číslo $y \in N$ tak, že $y < -G'$. Číslo $-y$ potom patří do M a je $-y > G'$; tedy číslo G má i vlastnost 2. Tím je věta 39 dokázána, ovšem za předpokladu, že byla již dokázána věta 40.

Zbývá nám tedy dokázat větu 40. K tomu cíli musíme sáhnout k teorii řezů, a to k § 4, 5, 7; čtenář, který tyto paragrafy nestudoval, musí tedy zatím následující důkaz vynechat. Budeme však potřebovat z ní dosti málo; z § 4 definici řezů, větu 34 a rozlišení řezů 2. druhu od řezů 1. a 3. druhu; z § 5 pouze definici 2 a větu 11*; z § 7 pouze tolik: každému číslu (reálnému) x jsme přiřadili jistý řez 1. nebo 3. druhu x^* tak, že toto přiřazení je vzájemně jednoznačné; přitom rovnost $x = y$ znamená totéž co rovnost $x^* = y^*$ (následkem vzájemné jednoznačnosti) a nerovnost $x > y$ znamená totéž co $x^* \succ y^*$.

D ů k a z v ě t y 40. Budiž M neprázdná zdola omezená množina číselná; k budiž číslo, které je menší než všechna čísla množiny M (takové k existuje: stačí vzít nějakou dolní závoru l množiny M a položit $k = l - 1$; pro všechna $x \in M$ je potom $k < l \leqq x$). Budiž $\mathfrak{M}$ množina řezů (1. a 3. druhu) takto definovaná: řez x^* je prvkem množiny $\mathfrak{M}$ tehdy a jen tehdy, je-li číslo x prvkem množiny M. Množina $\mathfrak{M}$ je neprázdná.

Definujme nyní množinu B racionálních čísel takto: racionální číslo r patří do B tehdy a jen tehdy, leží-li r v horní skupině některého (alespoň jednoho) řezu z $\mathfrak{M}$. *Množina B obsahuje aspoň jedno racionální číslo*; neboť množina $\mathfrak{M}$ obsahuje aspoň jeden řez, horní skupina tohoto řezu obsahuje aspoň jedno racionální číslo a toto číslo — podle definice množiny B — patří do B. Vezměme za druhé nějaké (racionální) číslo t z dolní skupiny řezu k^*. Kdyby toto číslo t patřilo do horní skupiny některého řezu $x^* \in \mathfrak{M}$, bylo by (podle definice 2) $k^* \succ x^*$. Je-li však $x^* \in \mathfrak{M}$, je $x \in M$, tedy $x > k$, tedy $x^* \succ k^*$; nemůže však (podle věty 11*) být současně $k^* \succ x^*$, $x^* \succ k^*$. Tedy číslo t nemůže patřit do horní skupiny žádného řezu $x^* \in \mathfrak{M}$, tedy (podle definice množiny B) číslo t nepatří do B. Tedy *množina B neobsahuje všechna racionální čísla*. Budiž dále b nějaké číslo z B a budiž $b' > b$; číslo b patří do horní skupiny nějakého řezu $x^* \in \mathfrak{M}$; podle věty 34 patří do této horní skupiny též větší číslo b'; podle definice množiny B je tedy $b' \in B$. Tedy: *je-li $b \in B$, $b' > b$, je též $b' \in B$*. Množina B tedy vyhovuje podmínkám věty 34 a tedy je B horní skupinou jistého řezu (A/B). Je-li $b \in B$, leží b v horní skupině jistého řezu $x^* \in \mathfrak{M}$; budiž třeba $x^* = (X/Y)$, takže $b \in Y$. Ježto x^* není řez druhého druhu, existuje v Y číslo $b' < b$; číslo b' patří tedy též do B. Tedy číslo b, libovolné to číslo množiny B, není nejmenším číslem množiny B, takže *řez (A/B) je řezem 1. nebo 3. druhu* (nikoliv

2. druhu). Existuje tedy (podle § 7) jisté číslo g tak, že $g^* = (A/B)$. Tvrdím nyní, že číslo g má vlastnosti 1 a 2 z věty 40. Budiž především $x \in M$, tedy $x^* \in \mathfrak{M}$. Budiž $x^* = (X/Y)$. Kdyby bylo $g > x$, bylo by $g^* \succ x^*$, tj. existovalo by (podle definice 2) číslo z patřící do Y a současně do A. Z okolnosti, že $z \in Y$, kde Y je horní skupina řezu $x^* \in \mathfrak{M}$, by plynulo, že $z \in B$. Ale to je nemožné, neboť číslo z nemůže patřit do A a současně do B (neboť (A/B) je řez!). Nemůže tedy být $g > x$. Tedy: je li $x \in M$, není číslo x menší než g, takže *číslo g má vlastnost 1 z věty 40*. Budiž za druhé g' libovolné číslo větší než g; tvrdím, že v množině M leží číslo menší než g'. Je totiž $g' > g$, a tedy $g'^* \succ g^*$. Píši-li $g'^* = (A'/B')$, existuje jisté číslo t, které patří do A' a současně do B. Ježto $t \in B$, patří číslo t do horní skupiny jistého řezu $x^* \in \mathfrak{M}$, tj. píši-li $x^* = (X/Y)$, je $t \in Y$. Tedy číslo t patří do A' a současně do Y; tedy (podle definice 2) $g'^* \succ x^*$, tj. $g' > x$; ale $x^* \in \mathfrak{M}$, tedy $x \in M$, takže v M existuje číslo x, jež je menší než g'. Tedy *číslo g má i vlastnost 2 z věty 40*. Tím je věta 40 úplně dokázána.

Jak vidět, není její důkaz příliš obtížný; radím však čtenáři, aby si tento důkaz dokonale promyslil; učiní-li to, uvidí, jak je tento důkaz vlastně jednoduchý a přirozený.

Než postoupíme dále, připojím ještě poznámku k názvosloví. Budeme se v této knize důsledně přidržovat názvů: supremum, infimum, shora a zdola omezený. Názvy: horní hranice, dolní hranice, shora a zdola ohraničený jsem uvedl jen proto, protože jich mnozí autoři užívají. Název „horní a dolní závora", který jsem zde zavedl, není obvyklý a nezní příliš pěkně; místo něho je možno užít též názvu „horní a dolní odhad" (číslo k je „horním odhadem" množiny M, jestliže žádné číslo množiny M není větší než k).

Důkazem vět 39 a 40 jsme dobudovali základ, na němž budou spočívat úvahy této knihy. K tomu, aby čtenář rozuměl dalším výkladům, stačí, jestliže si z toho, co jsme od počátku § 3 až do tohoto okamžiku vyložili, zapamatuje toto: Obor racionálních čísel jsme rozšířili o další čísla, tzv. reálná čísla iracionální; číslům racionálním a reálným iracionálním dohromady říkáme „reálná čísla"; protože v dalším budeme až do konce kapitoly XIV operovat jen s reálnými čísly, budeme místo „reálné číslo" říkat stručněji „číslo", místo „reálné iracionální číslo" budeme říkat „iracionální číslo". Pro tato reálná čísla platí věty 1 až 15, uvedené v § 2, a věty 39, 40. Ježto platí věty 1 až 15, platí ovšem i všechny věty, které z těchto vět plynou; tj. nauka, kterou jsme nazvali „aritmetikou racionálních čísel", platí i pro čísla reálná;[36]) část této aritmetiky jsme odvodili v § 2. Řekl jsem již na str. 27, že tuto aritmetiku, z větší části vám běžnou, nebudu soustavně probírat. Připojím však nyní ještě několik poznámek o mocninách s *celým* mocnitelem. Je-li a libovolné číslo, definujeme: $a^0 = 1$,[37]) $a^1 = a$, $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a^2 \cdot a$, obecně (pro celé kladné n)

[36]) Mezi tyto věty, plynoucí z vět 1—15, *nepatří* rozvoj reálných čísel v nekonečné desetinné zlomky; těmi se budeme zabývat později (viz kap. IV, § 5).

[37]) Definujeme tedy též $0^0 = 1$; někteří autoři znak 0^0 nedefinují, ale pro naše účely je výhodné, definovat $0^0 = 1$, jak jsme učinili.

$a^n = a^{n-1} \,.\, a$. Je-li $a \neq 0$, klademe dále $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$ pro celé kladné n (symbol 0^{-n} pro celé kladné n nedefinujeme). Umocňování s celým mocnitelem (kladným, záporným nebo rovným nule) se nám tedy jeví jako opakované násobení, popř. dělení. Věty o těchto mocninách, jež znáte ze školy, patří též do souhrnu vět, jež lze odvodit z vět 1 až 15; nebudu je zde proto soustavně probírat. Znáte např. vzorce

$$(33)\qquad \begin{gathered} 1^n = 1\,,\quad a^n a^m = a^{n+m},\ \frac{a^n}{a^m} = a^{n-m},\ a^n b^n = (ab)^n\,, \\ \frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n,\quad (a^n)^m = a^{nm}\,. \end{gathered}$$

Tyto vzorce platí pro libovolná a, b a pro libovolná *celá* čísla n, m; výjimku tvoří jen ty případy, kdy se v těchto vzorcích vyskytne nějaký symbol nemající smyslu, tj. buďto zlomek tvaru $\frac{p}{0}$ nebo výraz 0^{-k} $(k > 0)$ (tyto výjimky mohou nastat jen tehdy, je-li některé z čísel a, b rovno nule – promyslete si tyto výjimečné případy). Rovněž vám známá binomická poučka

$$(34)\qquad (a + b)^n = \binom{n}{0} a^n + \binom{n}{1} a^{n-1}b + \binom{n}{2} a^{n-2}b^2 + \ldots + \binom{n}{n} b^n$$

(platná pro libovolná a, b a pro celé kladné n) plyne z vět 1 až 15; viz cvičení 23 k § 2. Těmito běžnými věcmi se nebudu zdržovat.[38]) Ale odvodím několik drobností o *nerovnostech*, které vám snad nejsou dosti běžné.

Věta 41. *Budiž n celé kladné, $0 \leqq a < b$. Potom je $a^n < b^n$.*

Důkaz. Je-li $0 \leqq a_l < b_l$ pro $l = 1, 2, \ldots, n$, je (podle věty 30) $a_1 \,.\, a_2 \ldots a_n < b_1 \,.\, b_2 \ldots b_n$. Klademe-li zde všechna a_l rovna číslu a, všechna b_l rovna číslu b, máme ihned $a^n < b^n$.

Věta 42. *Buďte n, m celá čísla,*[39]) *$n > m$, $a > 1$. Potom je $a^n > a^m$.*

Důkaz. $n - m$ je celé kladné; podle věty 41 je tedy $1^{n-m} < a^{n-m}$, tj. $a^{n-m} > 1$. Násobím-li obě strany kladným číslem a^m, dostávám $a^n > a^m$.

[38]) Připomeňme jenom toto označení, kterého budeme často užívat: pro přirozené $n > 1$ klademe $n! = 1 \,.\, 2 \,.\, 3 \ldots (n - 1) \,.\, n$ (čti n faktoriál); mimoto definujeme $1! = 1$, $0! = 1$. Při této úmluvě jest ovšem

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{pro celá } k, n, \text{ je-li } 0 \leqq k \leqq n\,.$$

Místo $\binom{n}{k}$ se často píše C_n^k.

[39]) Nemusí být kladná.

Dodatek. *Je-li n celé záporné,* $0 < a < b$, *je* $a^n > b^n$ (naopak než ve větě 41). Neboť podle věty 41 je (ježto $-n$ je celé kladné) $0 < a^{-n} < b^{-n}$ a tedy podle věty 21 je $\frac{1}{a^{-n}} > \frac{1}{b^{-n}}$, tj. $a^n > b^n$. Obdobně: *jsou-li* n, m *celá čísla,* $n > m$, $0 < a < 1$, *je* $a^n < a^m$ (opět naopak než ve větě 42). Neboť $\frac{1}{a} > 1$, $\left(\frac{1}{a}\right)^n > \left(\frac{1}{a}\right)^m$ (podle věty 42), $\frac{1}{a^n} > \frac{1}{a^m}$, $a^m > a^n$.

Poznamenejme, že pro libovolné a a pro celé n je $|a^n| = |a|^n$; výjimku tvoří případ $a = 0$, $n < 0$; potom rovnice nemá smyslu. Pro $n = 0$ je to samozřejmé (obě strany jsou 1). Pro $n > 0$ plyne tato rovnost z věty 32 pro $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$. Je-li konečně $n < 0$, $a \neq 0$, je $-n > 0$, tedy $|a^{-n}| = |a|^{-n}$, tedy $\left(\text{ježto } \left|\frac{1}{x}\right| = \frac{1}{|x|} \text{ pro } x \neq 0\right)$

$$|a^n| = \left|\frac{1}{a^{-n}}\right| = \frac{1}{|a^{-n}|} = \frac{1}{|a|^{-n}} = |a|^n .$$

Odvodím ještě dvě pomocné věty, které budu za chvíli potřebovat.

1. pomocná věta. *Budiž n celé kladné, budiž* $a > 0$. *Budiž x takové kladné číslo, že* $x^n < a$. *Potom existuje číslo y tak, že je* $y > x$, $y^n < a$.

Důkaz. Položme $\frac{a}{x^n} = A$, takže $A > 1$. Dokáži, že existuje číslo h tak, že

$$h > 0, \quad (1 + h)^n < A . \tag{35}$$

Tím bude věta dokázána: neboť položíme-li $y = x(1 + h)$, bude $y > x$, $y^n = x^n(1 + h)^n < Ax^n = a$.

Uvažme nyní: pro $0 < h < 1$ je podle dodatku k větám 41, 42: $h^k < h$ pro $k = 2, 3, \ldots, n$, takže podle (34) jest

$$\begin{aligned}(1 + h)^n &= 1 + \binom{n}{1} h + \binom{n}{2} h^2 + \ldots + \binom{n}{n} h^n \leqq \\ &\leqq 1 + \left(\binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n}\right) h .\end{aligned} \tag{36}$$

Ale vzorec (34) pro $a = b = 1$ dává

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n} = (1 + 1)^n = 2^n ,$$

takže podle (36) jest

$$(37) \qquad (1 + h)^n < 1 + 2^n h \quad \text{pro} \quad 0 < h < 1 .$$

Existuje-li tedy h tak, aby bylo $0 < h < 1$, $1 + 2^n h < A$, budou pro tuto hodnotu h podle (37) vztahy (35) splněny; takové h však skutečně existuje, např. $h = \dfrac{A-1}{A \cdot 2^n}$ $\left(\text{neboť } A > 1, \text{ takže } 0 < h < 1, \text{ a dále } 1 + 2^n h = 1 + \dfrac{A-1}{A} < 1 + A - 1 = A\right)$.

2. pomocná věta. *Budiž n celé kladné, budiž $a > 0$. Budiž x takové kladné číslo, že $x^n > a$. Potom existuje číslo z tak, že je $0 < z < x$, $z^n > a$.*

Důkaz. Jest $\dfrac{1}{x} > 0$, $\dfrac{1}{a} > 0$, $\left(\dfrac{1}{x}\right)^n < \dfrac{1}{a}$. Podle 1. pomocné věty existuje tedy číslo $y > \dfrac{1}{x}$ tak, že $y^n < \dfrac{1}{a}$; položíme-li $\dfrac{1}{y} = z$, je $z > 0$, $z = \dfrac{1}{y} < x$, $z^n = \dfrac{1}{y^n} > a$.

Jak jsme již řekli, budou naším základem jednak aritmetika reálných čísel spočívající na větách 1 až 15 (jejíž obsah vám je běžný), jednak věty o supremu a infimu (tj. věty 39, 40). Tyto věty mají základní důležitost, jak v následujícím uvidíme; doporučuji čtenáři, aby si v následujícím vždy uvědomil, ve kterých důkazech se vět 39, 40 přímo nebo nepřímo užívá; tak si nejlépe ujasní jejich důležitost. Vlastně jsme iracionální čísla zaváděli jen proto, abychom dostali věty 39 a 40; ukážeme za chvíli, že v oboru *racionálních* čísel (tedy bez rozšíření tohoto oboru o čísla iracionální) by věty 39, 40 byly nesprávné.

Abych však čtenáři ihned aspoň na jednom důležitém příkladě ukázal důležitost vět 39, 40, dokáži základní větu o odmocninách. Již na str. 16 jsme zjistili, že neexistuje racionální číslo x, vyhovující rovnici $x^2 = 2$; nyní však dokážeme, že existuje reálné (a tedy ovšem iracionální) číslo x, vyhovující této rovnici. Obecněji dokážeme tuto větu:

Věta 43. *Budiž $a > 0$, $n > 0$, n celé. Potom existuje jedno a jen jedno kladné číslo x splňující rovnici $x^n = a$. Toto číslo nazýváme n-tou odmocninou čísla a a značíme je $\sqrt[n]{a}$. Místo $\sqrt[2]{a}$ píšeme obyčejně stručněji $\sqrt{a}$. Jest ovšem $\sqrt[1]{a} = a$.*

Důkaz. Případ $n = 1$ je samozřejmý, neboť rovnice $x^1 = a$ znamená totéž jako $x = a$. Předpokládejme tedy, že $n > 1$.

Dokážeme napřed, že aspoň jedno takové kladné číslo x existuje.

1) Předpokládejme napřed, že $a > 1$. Znakem M označme množinu všech čísel y, která vyhovují nerovnostem $y > 0$, $y^n > a$. *Číslo a patří do množiny M*: neboť podle věty 42 jest $a^n > a^1 = a$. Množina M je tedy neprázdná a zdola omezená (neboť všechna čísla z M jsou > 0). Položme $x = \inf M$. Tvrdím: *je-li $y > x$, je $y^n > a$*. Budiž $y > x$; potom – ježto číslo x má vlastnost 2 z věty 40 – existuje číslo $z \in M$ tak, že $z < y$; tedy $z > 0$, $z^n > a$; podle věty 41 je tedy $y^n > z^n > a$, takže

tvrzení je dokázáno. Kdyby bylo $x < 1$, bylo by $1^n > a$, tj. $1 > a$, což není pravda; *tedy je* $x \geqq 1$. Kdyby bylo $x^n < a$, existovalo by podle 1. pomocné věty číslo $y > x$ tak, že by bylo $y^n < a$; ale to není možné, neboť pro $y > x$ je $y^n > a$. Tedy není $x^n < a$. Kdyby bylo $x^n > a$, existovalo by podle 2. pomocné věty číslo z tak, že by bylo $0 < z < x$, $z^n > a$. Tedy by bylo $z \in M$; ale to není možné, neboť $z < x$, a číslo x je infimum množiny M. Tedy není $x^n > a$. Ježto není ani $x^n > a$ ani $x^n < a$, je nutně $x^n = a$ a tím je existence kladného čísla x, vyhovujícího této rovnici, pro $a > 1$ dokázána.

2) Předpokládejme za druhé, že $a = 1$. Potom číslo $x = 1$ zřejmě vyhovuje rovnici $x^n = a$.

3) Předpokládejme za třetí, že $0 < a < 1$. Potom je $\frac{1}{a} > 1$; podle případu 1) existuje tedy kladné číslo y tak, že $y^n = \frac{1}{a}$; položím-li $x = \frac{1}{y}$, je $x > 0$, $x^n = \left(\frac{1}{y}\right)^n = \frac{1}{y^n} = a$, čímž je existence kladného čísla x, vyhovujícího rovnici $x^n = a$, dokázána i v tomto případě.

Dokažme nyní, že existuje *jen* jedno kladné číslo x, pro něž je $x^n = a$. Nechť existují dvě různá taková čísla; označme menší z nich x, větší y, takže $0 < x < y$, $x^n = y^n = a$; ale to je ve sporu s větou 41, podle které je $x^n < y^n$.

Poznámka 1 (k větě 43). Podle naší definice znaku $\sqrt[n]{a}$ je např. $\sqrt{4} = 2$ (a nikoliv -2), $\sqrt[4]{81} = 3$ atd. Připomeňme: pro sudé n je $(-x)^n = x^n$, pro liché n je $(-x)^n = -x^n$. Z toho ihned plyne (jak víte už ze školy):

1) Budiž $a > 0$; potom rovnice $x^n = a$ má, je-li n sudé, dvě řešení, a to $x = \sqrt[n]{a}$ (kladné řešení) a $x = -\sqrt[n]{a}$ (záporné řešení). Je-li však n liché, má rovnice $x^n = a$ jediné řešení, a to kladné: $x = \sqrt[n]{a}$.

2) Budiž $a = 0$; rovnice $x^n = 0$ má jediné řešení $x = 0$; *rozšiřujeme proto definici* $\sqrt[n]{a}$ *též na případ* $a = 0$, *kladouce* $\sqrt[n]{0} = 0$.

3) Budiž $a < 0$; rovnice $x^n = a$ nemá pro *sudé* n žádné řešení (neboť $x^n \geqq 0$ a tedy $x^n \neq a$ pro každé x); je-li však n liché, je $(-x)^n = -x^n$ a tedy rovnice $x^n = a$ znamená totéž jako $(-x)^n = -a$, a tato rovnice (ježto $-a > 0$, n liché) má podle případu 1) právě jedno řešení, a to $-x = \sqrt[n]{-a}$, tj. $x = -\sqrt[n]{-a}$. *Rozšiřujeme proto definici* $\sqrt[n]{a}$ *též na případ* $a < 0$, *n liché, kladouce v tomto případě* $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$; např. $\sqrt[7]{-15} = -\sqrt[7]{15}$.

Vcelku zavádíme tedy $\sqrt[n]{a}$ (n celé, $n > 0$) v těchto případech: 1. pro $a > 0$ větou 43; 2. pro $a = 0$ definicí $\sqrt[n]{0} = 0$; 3. pro $a < 0$ a n liché (ne pro n sudé!) definicí $\sqrt[n]{a} = -\sqrt[n]{-a}$. V ostatních případech symbol $\sqrt[n]{a}$ v této knize nedefinujeme.

Rovnice $x^n = a$ má tato řešení: pro *liché n* jediné řešení $x = \sqrt[n]{a}$; pro *sudé n* dvě řešení $x = \sqrt[n]{a}$, $x = -\sqrt[n]{a}$ pro $a > 0$, jediné řešení $x = \sqrt[n]{0} = 0$ pro $a = 0$, žádné řešení pro $a < 0$. Tyto poznámky jsou správné ovšem pouze v oboru čísel reálných; víte snad z algebry (a ukážeme to v kap. XV, § 3, cvič. 5), že rovnice $x^n = a$, rozšíříme-li obor reálných čísel na obor čísel komplexních, má v oboru čísel komplexních právě n různých kořenů, je-li $a \neq 0$ — ale my se zde komplexními čísly nezabýváme.

Poznámka 2. Ve větě 35 jsme dosti namáhavě dokázali, že existuje řez 3. druhu, tj. iracionální číslo. Z věty 43 plyne tento výsledek okamžitě; podle věty 43 existuje reálné číslo $\sqrt{2}$, jehož čtverec se rovná dvěma. Ale podle úvahy, provedené v § 1, není číslo $\sqrt{2}$ racionální; tedy je iracionální.

Dokažme ještě několik drobností o odmocninách, které budeme za chvíli potřebovat; pro jednoduchost se omezíme na odmocniny nezáporných čísel (o záporných číslech viz cvičení 4).

Věta 44. *Buďte x, y nezáporná čísla, n celé kladné číslo. Potom je* $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\,\sqrt[n]{y}$.

Důkaz. Je-li $x = 0$ nebo $y = 0$, je též $xy = 0$; tedy $\sqrt[n]{xy} = 0$, $\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} = 0$. Je-li však $x > 0$, $y > 0$, je též $\sqrt[n]{x} > 0$, $\sqrt[n]{y} > 0$, tedy $\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} > 0$. Dále je $(\sqrt[n]{x} \,.\, \sqrt[n]{y})^n = (\sqrt[n]{x})^n \,.\, (\sqrt[n]{y})^n = x \,.\, y$. Tedy je $\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$ kladné číslo, jehož n-tá mocnina je xy. Ale podle věty 43 existuje jen jedno číslo, jež má tyto dvě vlastnosti, totiž číslo $\sqrt[n]{xy}$. Tedy je $\sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y} = \sqrt[n]{xy}$.

Poznámka 3. *Je-li n celé kladné, $x > 0$, je* $\sqrt[n]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$. Pro $y = \frac{1}{x}$ plyne totiž z věty 44 $\sqrt[n]{x} \,.\, \sqrt[n]{\frac{1}{x}} = \sqrt[n]{x \,.\, \frac{1}{x}} = \sqrt[n]{1} = 1$, takže $\sqrt[n]{\frac{1}{x}} = \frac{1}{\sqrt[n]{x}}$. *Je-li n celé kladné, $x > 0$, $y > 0$, je* $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$. Neboť $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \sqrt[n]{x \,.\, \frac{1}{y}} = \sqrt[n]{x} \cdot \sqrt[n]{\frac{1}{y}} = \sqrt[n]{x} \,.\, \frac{1}{\sqrt[n]{y}}$.

Věta 45. *Budiž n celé kladné; buďte x, y nezáporná čísla. Potom platí: je-li $x < y$, je $x^n < y^n$, $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$; je-li $x = y$, je $x^n = y^n$, $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y}$; je-li $x > y$, je $x^n > y^n$, $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y}$.* (Jinak řečeno: mezi čísly x^n, y^n a rovněž mezi čísly $\sqrt[n]{x}$, $\sqrt[n]{y}$ je totéž pořadí podle velikosti jako mezi čísly x, y — ovšem, pokud jsou x, y nezáporná, n celé kladné.)

Důkaz. Případ $x = y$ je samozřejmý; případ $x > y$ plyne z případu $x < y$, vyměním-li písmena x, y. Budiž tedy $0 \leqq x < y$. Podle věty 41 je $x^n < y^n$. Kdyby bylo $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y}$, bylo by $(\sqrt[n]{x})^n = (\sqrt[n]{y})^n$, tj. $x = y$. Kdyby bylo $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y}$, bylo by podle věty 41 $(\sqrt[n]{x})^n > (\sqrt[n]{y})^n$, tj. $x > y$. Není tedy ani $\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{y}$ ani $\sqrt[n]{x} > \sqrt[n]{y}$, tedy je $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y}$.

Cvičení

Ve všech těchto cvičeních je n celé kladné číslo, k celé číslo.

1. Je-li $x > 1$, je $x^n > 1$, $\sqrt[n]{x} > 1$; je-li $0 \leqq x < 1$, je $x^n < 1$, $\sqrt[n]{x} < 1$.

2. $\sqrt[n]{x^k} = (\sqrt[n]{x})^k$ pro $x > 0$; je-li $k \geqq 0$, platí rovnice i pro $x = 0$.

3. Pro $k > 0$, $x \geqq 0$ je $\sqrt[n]{\sqrt[k]{x}} = \sqrt[nk]{x}$.

4. Je-li n liché, je ve větě 44, v poznámce 3, ve větě 45 a v cvičení 2 dovoleno připustit i záporná čísla x, y. Podobně ve cvičení 3, je-li nk liché.

5. Je-li $x > 0$ iracionální, je též $\sqrt[n]{x}$ iracionální.

6. Je-li x racionální kladné, lze — jak víte — psát

$$x = \frac{p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_r^{a_r}}{q_1^{b_1} q_2^{b_2} \dots q_s^{b_s}},$$

kde $p_1, p_2, \dots, p_r, q_1, q_2, \dots, q_s$ jsou navzájem různá prvočísla, $a_1, \dots, a_r$, $b_1, \dots, b_s$ jsou celá kladná čísla;[40]) přitom může být též $r = 0$, tj. čísla $p_1, \dots, p_r$ scházejí, to znamená, že čitatel je 1; obdobně může být $s = 0$, tj. jmenovatel může být 1. Dokažte: číslo $\sqrt[n]{x}$ je racionální tehdy a jen tehdy, jsou-li všechna čísla $a_1, \dots, a_r$, $b_1, \dots, b_s$ dělitelná číslem n.

7. Je-li x přirozené číslo, je $\sqrt[n]{x}$ buďto přirozené nebo iracionální číslo.

8. Je-li $x > 0$, $x \neq 1$, je mezi čísly

$$\sqrt[2]{x},\ \sqrt[3]{x},\ \sqrt[4]{x}, \dots$$

nejvýše konečný počet racionálních čísel.

9. Budiž a číslo racionální, b číslo iracionální; potom jsou čísla $a + b$, $a - b$ iracionální. Je-li $a \neq 0$, jsou též čísla ab, $\frac{a}{b}$, $\frac{b}{a}$ iracionální. (Návod: kdyby bylo $a + b$ racionální, bylo by též $b = (a + b) - a$ racionální; podobně dále.)

Dokažme ještě dvě jednoduché věty o reálných číslech.

Věta 46. *Budiž x libovolné reálné číslo. Potom existuje jedno a jen jedno celé číslo n tak, že platí $n \leqq x < n + 1$.*

Toto číslo n se značí často znakem $[x]$; příklady: $[\frac{5}{2}] = 2$, $[2] = 2$, $[\frac{1}{3}] = 0$, $[0] = 0$, $[-3] = -3$, $[-\frac{5}{2}] = -3$.

Důkaz. Podle věty 15 existují celá kladná čísla h, k tak, že $h > -x$, $k > x$, tedy $-h < x < k$. Číslo $k + h = p$ je celé kladné, $k = -h + p$. V řadě celých čísel

$$-h,\quad -h + 1,\quad -h + 2, \dots, -h + p$$

[40]) Vyjádříte x ve tvaru $x = y : z$, kde y, z jsou nesoudělná přirozená čísla, a potom rozložíte čísla y, z v prvočinitele, což je možno, jak víte, jedním a jen jedním způsobem.

je první číslo $\leqq x$ (dokonce $< x$), poslední je $> x$. Vezměme v této řadě poslední číslo, které je $\leqq x$, a označme je znakem n; následující číslo, totiž $n + 1$, bude již $> x$ a tím je dokázána existence celého čísla n, pro něž platí $n \leqq x < n + 1$. Jiné celé číslo než n, které by splňovalo obdobné nerovnosti, neexistuje; neboť je-li také m celé číslo, $m \neq n$, je buďto $m < n$, a tedy $n - m$ celé kladné, $n - m \geqq 1$, $m + 1 \leqq n$, tedy $m + 1 \leqq x$ a nerovnost $x < m + 1$ neplatí; nebo je $m > n$ a tedy $m - n$ celé kladné, $m - n \geqq 1$, $m \geqq n + 1$, tedy $m > x$, a tedy nerovnost $m \leqq x$ neplatí.

Věta 47. *Buďte a, b dvě reálná čísla, $a < b$. Potom existuje nekonečně mnoho racionálních čísel x, pro něž je $a < x < b$, jakož i nekonečně mnoho iracionálních čísel y, pro něž $a < y < b$.*[41])

Důkaz. Označme znakem M množinu všech racionálních čísel x, pro něž je $a < x < b$, znakem N pak množinu všech iracionálních čísel y, pro něž $a < y < b$. Podle věty B) na str. 22 stačí dokázat: *je-li n libovolné přirozené číslo, obsahuje množina M, jakož i množina N konečnou část, mající právě n prvků.*

Budiž tedy n přirozené číslo. Podle věty 15 existuje přirozené číslo m tak, že

$$m > \frac{n}{b - a}, \quad \text{tj.} \quad \frac{n}{m} < b - a \,.$$

Položme $k = [am]$, takže je k celé, $k \leqq am < k + 1$, tj.

$$\frac{k}{m} \leqq a < \frac{k + 1}{m}, \quad \text{a tedy} \; \frac{k + n}{m} \leqq a + \frac{n}{m} < a + (b - a) = b \,.$$

Čísla

$$\frac{k + 1}{m}, \; \frac{k + 2}{m}, \; \ldots, \frac{k + n}{m} \tag{38}$$

jsou racionální čísla větší než a (neboť $(k + 1) : m > a$) a menší než b (neboť $(k + n) : m < b$). Čísla (38) tvoří tedy vskutku konečnou část množiny M mající právě n prvků.

Víme, že číslo $\sqrt{2}$ je iracionální; ježto $a < b$, je $a - \sqrt{2} < b - \sqrt{2}$. Podle toho, co jsme právě dokázali, existuje n racionálních čísel $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ tak, že je $a - \sqrt{2} < x_r < b - \sqrt{2}$ pro $r = 1, 2, \ldots, n$. Je tedy $x_1 + \sqrt{2} < x_2 + \sqrt{2} < \ldots\ldots < x_n + \sqrt{2}$ a pro $r = 1, 2, \ldots, n$ je $a < x_r + \sqrt{2} < b$. Mimoto jsou čísla $x_1 + \sqrt{2}, x_2 + \sqrt{2}, \ldots, x_n + \sqrt{2}$ iracionální (viz cvičení 9). Tato čísla tvoří tedy vskutku konečnou část množiny N mající právě n prvků.

Obsah věty 47 se vyjadřuje též stručně slovy: množina všech racionálních čísel a rovněž množina všech iracionálních čísel je hustá na ose číselné. V geometrickém názvosloví můžeme větu 47 vyjádřit také takto: mezi dvěma různými (jakkoliv blízko

[41]) Výrok „existuje nekonečně mnoho čísel s vlastností V“ znamená ovšem: množina oněch čísel, jež mají vlastnost V, je nekonečná.

sobě položenými) body číselné osy leží nekonečně mnoho čísel racionálních a rovněž nekonečně mnoho čísel iracionálních. (Jsou-li dána dvě různá čísla – menší z nich označme třeba a, větší b, potom říkáme, že číslo x leží *mezi* a a b, je-li $a < x < b$.) Populárně řečeno: množinu všech racionálních čísel, nakreslenou sebe jemnějšími prostředky, nedovedli bychom žádným sebe ostřejším drobnohledem rozeznat od celé osy číselné, ačkoliv v té množině scházejí všechna iracionální čísla, jejichž množina dokonce rovněž by se nedala rozeznat od celé osy číselné. Tento – celkem naivní – příklad snad stačí k tomu, aby upozornil čtenáře, že by se mohl dopustit svrchovaně hrubých chyb, kdyby matematické důkazy zakládal na zrakovém názoru.

§ 9. **Poznámky k větám o infimu a supremu.** Poznamenal jsem již, že tyto věty nejsou správné v oboru čísel racionálních; dokažme to pro větu 40 (o infimu – důkaz pro větu 39 by byl zcela obdobný). Mám tedy dokázat, že věta 40 je nesprávná, jestliže v ní všude slovem „číslo" rozumím „číslo racionální" (a slovy „množina číselná" ovšem množinu racionálních čísel). Abychom to dokázali, vyšetřujme libovolný řez 3. druhu (A/B) (víme, že takový řez existuje). Za množinu M věty 40 vezměme nyní množinu B. Množina B není prázdná a je zdola omezená: neboť vezmu-li libovolné číslo $a \in A$ (takové číslo existuje, ježto A není prázdné), jsou všechna čísla množiny B větší než a. Tvrdím nyní, že žádné racionální číslo g nemá vlastnosti 1 a 2 z věty 40 (kdež ovšem množinou M je nyní množina B). Každé racionální číslo g patří totiž do A nebo do B. Je-li $g \in B$, existuje číslo $x \in B$ tak, že $x < g$ (ježto B neobsahuje nejmenšího čísla); tedy číslo g nemá vlastnost 1. Je-li však $g \in A$, existuje číslo $g' \in A$ tak, že $g' > g$ (neboť A neobsahuje největšího čísla). Potom však všechna racionální čísla menší než g' patří též do A a tedy nepatří do B. Tedy: ačkoliv je $g' > g$, neexistuje přece žádné číslo množiny B, menší než g', takže číslo g nemá vlastnost 2. Tedy žádné racionální číslo nemá současně vlastnosti 1 i 2 z věty 40.

Druhá poznámka se týče zavedení iracionálních čísel řezy. Vyšli jsme z oboru racionálních čísel, definovali jsme řezy (jakožto dvojice množin racionálních čísel mající jisté vlastnosti I, II, III, viz definici 1); zjistili jsme, že tyto řezy jsou trojího druhu; dále jsme zjistili, že řezy 1. druhu a rovněž řezy 2. druhu jsou jistým velmi jednoduchým způsobem vzájemně jednoznačně přiřazeny racionálním číslům, takže nám neposkytují vlastně nic nového. Něco podstatně nového nám poskytují pouze řezy 3. druhu – ty jsme nazvali iracionálními reálnými čísly a o tato iracionální čísla jsme rozšířili obor racionálních čísel; tím jsme dostali obor čísel reálných. (Důležitá je okolnost, že řezy 3. druhu skutečně existují – jinak by celá teorie řezů byla zbytečná.)

Je nyní nasnadě tato myšlenka: to, co jsme dělali v oboru racionálních čísel, proveďme nyní v oboru reálných čísel; snad dospějeme k dalšímu rozšíření oboru reálných čísel? Ale ukážeme, že tímto způsobem k žádnému dalšímu rozšíření oboru reálných čísel nedospějeme. Proveďme to. „Řezem v oboru reálných čísel" nazveme nyní každou dvojici množin A, B *reálných* čísel, jež má tyto vlastnosti: I. Žádná z množin A, B není prázdná. II. Každé reálné číslo leží v jedné a jen jedné z množin A, B. III. Je-li $a \in A$, $b \in B$, je $a < b$. Tyto řezy – podobně jako v § 4 – dělíme na řezy 1., 2., 3., 4. druhu; stejně jako tam dokážeme, že řezy 4. druhu neexistují. Řezy 1. druhu jsou (podobně jako v § 4) vzájemně jednoznačně přiřazeny reálným číslům (každý řez 1. druhu v oboru reálných čísel se dostane takto: vezme se libovolné reálné číslo a, načež se číslo a a všechna čísla menší než a dají do dolní skupiny, všechna čísla větší než a do horní skupiny) a totéž platí o řezech 2. druhu. Řezy 1. a 2. druhu nám tedy nedávají nic podstatně nového: dát takový řez znamená vlastně totéž jako dát reálné číslo (totiž největší číslo jeho dolní skupiny, popř. nejmenší číslo jeho horní skupiny). A nyní si dokážeme: *každý řez v oboru reálných čísel je 1. nebo 2. druhu.* Důkaz: Budiž (A/B) řez v oboru reálných čísel; množina B je neprázdná. Vezmu-li dále libovolné číslo $a \in A$ (takové číslo existuje, ježto A není prázdná), jsou všechna čísla množiny B větší než a, takže množina B je zdola omezená. Pišme $x = \inf B$. Číslo x má podle věty 40 tyto vlastnosti: 1. Žádné číslo množiny B není $< x$. 2. Je-li $y > x$, existuje v množině B číslo menší než y.

Je buďto $x \in A$ nebo $x \in B$. Je-li $x \in B$, je podle vlastnosti 1 číslo x nejmenším číslem množiny B a tedy řez (A/B) je 2. druhu. Vyšetřujme ještě případ $x \in A$. Budiž $y > x$; podle vlastnosti 2 existuje v množině B číslo $z < y$. Ježto $z \in B$, $y > z$, je podle podmínky III pro řezy též $y \in B$. V případě $x \in A$ tedy platí: je-li $y > x$, je $y \in B$ a tedy není $y \in A$, tj. žádné číslo větší než x nepatří do A, číslo x však patří do A; tj. číslo x je největším číslem skupiny A, tj. řez (A/B) je 1. druhu. Tím je důkaz proveden.

Podle věty, kterou jsme právě dokázali – a která pochází od Dedekinda – neexistují řezy v oboru reálných čísel, které by byly 3. druhu. Nemá tedy smyslu, sledovat dále teorii řezů v oboru reálných čísel – nedostali bychom nic nového.

Dedekindovu větu jsme dostali jako důsledek věty o infimu (věta 40). Mohli jsme sledovat též opačný postup: věta Dedekindova dá se totiž též dokázat přímo (bez použití věty o infimu) a věta o infimu plyne potom jako snadný důsledek věty Dedekindovy. Za základ teorie reálných čísel vzali jsme – vedle vět 1 až 15 – větu o infimu (věta o supremu, jak jsme viděli, je jednoduchým důsledkem věty o infimu); místo věty o infimu mohli jsme vzít – podle toho, co jsem řekl – za základ větu Dedekindovu, jak to mnozí autoři činí. Zvolil jsem větu o infimu, protože je snad pro začátečníka názornější a protože v dalších úvahách se užívá většinou přímo *této* věty.

Cvičení

Proveďme to, co jsem právě naznačil: z teorie řezů odvoďme větu Dedekindovu a z ní pak větu 40.

1. Buďte $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$ dvě množiny řezů (slovo „řez“ znamená řez 1. nebo 3. druhu ve smyslu § 4, tedy v oboru racionálních čísel), jež mají tyto vlastnosti: I. Ani $\mathfrak{X}$ ani $\mathfrak{Y}$ není prázdná. II. Každý řez patří do jedné a jen jedné z obou množin $\mathfrak{X}$, $\mathfrak{Y}$. III. Je-li $\xi \in \mathfrak{X}$, $\eta \in \mathfrak{Y}$, je $\xi \prec \eta$. Tvrdím: existuje řez λ tak, že každý řez $\succ \lambda$ patří do $\mathfrak{Y}$, každý řez $\prec \lambda$ do $\mathfrak{X}$. (Tedy: buďto je $\lambda \in \mathfrak{X}$ a tedy je λ největší ze všech řezů množiny $\mathfrak{X}$ nebo je $\lambda \in \mathfrak{Y}$ a tedy je λ nejmenší ze všech řezů množiny $\mathfrak{Y}$.) Návod: Řez $\lambda = (R/S)$ definujme takto: číslo x patří do S tehdy a jen tehdy, existuje-li řez $\eta = (X/Y) \in \mathfrak{Y}$ tak, že $x \in Y$. Je-li $\alpha = (A/B) \succ \lambda$, existuje číslo x tak, že $x \in A$, $x \in S$, tj. $x \in Y$ pro jistý řez $\eta = (X/Y) \in \mathfrak{Y}$; tedy $\alpha \succ \eta$, takže (podle III) $\alpha \in \mathfrak{Y}$. Je-li však $\alpha = (A/B) \prec \lambda$, existuje číslo x tak, že $x \in B$, $x \in R$, tj. $x \in X$ pro *každý* řez $\eta = (X/Y) \in \mathfrak{Y}$; tedy $\alpha \prec \eta$ pro každé $\eta \in \mathfrak{Y}$, tedy α *non* $\in \mathfrak{Y}$, $\alpha \in \mathfrak{X}$.

2. Přejdete-li od řezů k reálným číslům podle vzoru § 7, dostanete z cvičení 1 ihned větu Dedekindovu.

3. Z věty Dedekindovy odvoďte větu 40. Návod: budiž M neprázdná, zdola omezená množina reálných čísel. Řez (A/B) (v oboru reálných čísel) definujme takto: do A dám všechna čísla, jež jsou menší než všechna čísla z M, do B dám ostatní čísla. Podle Dedekindovy věty existuje číslo g, jež je buďto největším číslem množiny A nebo nejmenším číslem množiny B; snadno ukážete, že číslo g má vlastnosti 1, 2 z věty 40.

§ 10. Další poznámky k větám o supremu a infimu. Zavedeme napřed dvě označení, jichž budeme v dalších kapitolách užívat. Je-li n přirozené číslo a jsou-li dána reálná čísla

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \tag{39}$$

(jež nemusí být různá), označujeme znakem $\mathrm{Max}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ „největší z čísel (39)“. Podrobně řečeno: znak $\mathrm{Max}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ znamená ono číslo t, jež má tyto dvě vlastnosti: číslo t je rovno některému z čísel (39), ale žádné z čísel (39) není větší než t. Např. pro $n = 4$, $a_1 = 2$, $a_2 = -3$, $a_3 = 2$, $a_4 = 0$ je $\mathrm{Max}\,(2, -3, 2, 0) = 2$. Podobně definujeme „nejmenší z čísel (39)“, tj. ono číslo v, jež má tyto dvě vlastnosti: číslo v se rovná některému z čísel (39), ale žádné z čísel (39) není menší než v; znak $\mathrm{Min}\,(a_1, a_2, \ldots, a_n)$. Příklady: $\mathrm{Min}\,(2, -3, 2, 0) = -3$, $\mathrm{Max}\,(2, -5) = 2$, $\mathrm{Min}\,(2, -5) = -5$, $\mathrm{Max}\,(5, 5, 5) = \mathrm{Min}\,(5, 5, 5) = 5$.[42]) Pro každé x je dále $|x| = \mathrm{Max}\,(x, -x)$ (neboť pro $x \geqq 0$ je $-x \leqq x = |x|$ a pro $x < 0$ je $x < -x = |x|$).

Číselná množina M se nazývá, jak víme, shora omezenou, existuje-li číslo k tak, že všechna čísla množiny M jsou $\leqq k$.[43]) Tak jsme definovali pojem množiny shora omezené v § 8. Tuto definici lze však vyslovit také takto: Číselná množina M se nazývá shora omezenou, jestliže existuje číslo l tak, že všechna čísla množiny M jsou $< l$. Vskutku: Jestliže všechna čísla množiny M jsou $< l$, jsou tato čísla také $\leqq l$; za druhé, jestliže všechna čísla množiny M jsou $\leqq k$, jsou tato čísla $< l$, zvolíme-li za l kterékoliv číslo větší než k (např. $l = k + 1$). Smysl této poznámky je v tom, že v definici množiny shora omezené můžeme psát znak $<$ místo $\leqq$. Podobná poznámka platí o množinách zdola omezených. Viz k tomu cvičení na konci tohoto paragrafu.

[42]) Naše definice má smysl též pro $n = 1$; jest ovšem $\mathrm{Max}\,(a_1) = \mathrm{Min}\,(a_1) = a_1$.

[43]) Tomuto výroku je třeba rozumět ve smyslu implikace: „je-li $x \in M$, je $x \leqq k$“, tj. „neexistuje číslo $x \in M$, pro něž by bylo $x > k$“. Tedy také prázdná množina je shora omezená. V tomto smyslu je třeba rozumět každému výroku tohoto tvaru „každý prvek množiny M má vlastnost V“ — tento výrok znamená implikaci „je-li $x \in M$, má x vlastnost V“ čili „neexistuje prvek množiny M nemající vlastnost V“.

Věta 48. *Budiž M neprázdná číselná množina. Jestliže existuje číslo k tak, že pro všechna $x \in M$ je $x \leqq k$, je množina M shora omezená a platí* $\sup M \leqq k$; *jestliže existuje číslo l tak, že pro všechna $x \in M$ je $x \geqq l$, je množina M zdola omezená a platí* $\inf M \geqq l$.

Důkaz. Nechť pro všechna $x \in M$ je $x \leqq k$; množina M je potom zřejmě shora omezená; označme $G = \sup M$, takže G má vlastnosti 1, 2 z věty 39. Kdyby bylo $k < G$, existovalo by podle vlastnosti 2 z věty 39 číslo $x \in M$ tak, že $x > k$; ale takové číslo neexistuje, tedy není $k < G$, tedy je $G \leqq k$. Podobně se dokáže druhá část věty.

Věta 49. *Budiž M neprázdná část číselné množiny N; je-li N shora omezená, je též M shora omezená a platí* $\sup M \leqq \sup N$; *je-li N zdola omezená, je též M zdola omezená a platí* $\inf M \geqq \inf N$.

Důkaz. Budiž M neprázdná, $M \subset N$, N shora omezena. Pro všechna čísla x z N, a tím spíše pro všechna čísla x z M, platí nerovnost $x \leqq \sup N$. Podle věty 48 je tedy M shora omezená a je $\sup M \leqq \sup N$. Druhá část věty se dokáže obdobně.

O číselné množině M říkáme, že obsahuje největší číslo, existuje-li číslo $q \in M$ tak, že žádné číslo z M není větší než q; číslo q nazýváme pak největším číslem množiny M. Obdobně: existuje-li číslo $r \in M$ tak, že žádné číslo z M není menší než r, nazýváme toto číslo r nejmenším číslem množiny M a o množině M říkáme, že obsahuje nejmenší číslo. (Zopakoval jsem pojmy z druhé poloviny str. 41.)

Zřejmě každá číselná množina konečná[44]) a neprázdná obsahuje největší i nejmenší číslo; množina nekonečná může, ale nemusí obsahovat největší i nejmenší číslo. Příklady: M_1 budiž množina všech nezáporných čísel; M_2 budiž množina všech čísel x, pro něž platí $0 \leqq x \leqq 1$; M_3 budiž obdobně definována nerovnostmi $0 \leqq x < < 1$; M_4 nerovnostmi $0 < x \leqq 1$; M_5 nerovnostmi $0 < x < 1$. Všechny tyto množiny jsou nekonečné; M_1 obsahuje nejmenší číslo (0), neobsahuje největší (je-li $x \in M_1$, patří i větší číslo $x + 1$ do M_1); M_2 obsahuje nejmenší i největší číslo (0 a 1); M_3 obsahuje nejmenší číslo (0), ale neobsahuje největší (je-li $x \in M_3$, tedy $0 \leqq x < 1$, je též $0 \leqq \frac{1}{2}(x + 1) < 1$, tedy i $\frac{1}{2}(x + 1) \in M_3$, takže číslo x není největším číslem množiny M_3, neboť $\frac{1}{2}(x + 1) > x$); M_4 obsahuje největší číslo (1), ale neobsahuje nejmenší; M_5 neobsahuje ani nejmenší ani největší číslo.

Platí věta: *Obsahuje-li číselná množina M největší číslo, je M shora omezená a její supremum se rovná tomuto největšímu číslu.* Důkaz: Budiž q toto největší číslo; je-li $x \in M$, je $x \leqq q$; tedy M je shora omezená a číslo q má vlastnost 1 z věty 39; je-li $G' < q$, existuje aspoň jedno číslo množiny M (totiž právě číslo q), jež je větší než G'. Číslo q má tedy také vlastnost 2 z věty 39; tedy $\sup M = q$.

[44]) Prosím čtenáře, aby nepletl pojmy „množina konečná" (tj. s konečným počtem prvků) a „množina omezená". Každá konečná množina číselná je ovšem omezená; nekonečná množina číselná nemusí být omezená (příklad: množina všech reálných čísel), ale také může být omezená (příklad: množina všech čísel x vyhovujících nerovnostem $0 < x < 1$).

Obsahuje-li tedy číselná množina M největší číslo, je číslo $\sup M$ prvkem množiny M. Naopak: neobsahuje-li číselná množina M největšího čísla, potom číslo $\sup M$ – existuje-li vůbec[45]) – nemůže patřit k množině M (neboť žádné číslo z M není větší než $\sup M$; kdyby tedy $\sup M$ patřilo do M, bylo by $\sup M$ největším číslem množiny M). Obdobné poznámky platí ovšem pro $\inf M$ a pro nejmenší číslo množiny M. Příklady (viz předešlou stránku): $\inf M_1 =$ nejmenšímu číslu z $M_1 = 0$; $\sup M_1$ neexistuje (M_1 není shora omezená). $\inf M_2 =$ nejmenšímu číslu z $M_2 = 0$; $\sup M_2 =$ největšímu číslu z $M_2 = 1$. $\inf M_3 =$ nejmenšímu číslu z $M_3 = 0$; $\sup M_3 = 1$ nepatří k množině M_3 (M_3 neobsahuje největšího čísla). Proberte ještě M_4, M_5.

Množinu číselnou jsme nazvali omezenou, je-li zdola i shora omezená. Je-li tedy M neprázdná omezená množina číselná, existuje $\sup M$ i $\inf M$; platí pak toto: jest $\inf M \leqq \sup M$ a znamení rovnosti platí tehdy a jen tehdy, obsahuje-li M *jediný* prvek. (Důkaz: obsahuje-li M jediný prvek x, je zřejmě $x = \sup M = \inf M$; obsahuje-li M aspoň dva různé prvky x, y $(x < y)$, je $\inf M \leqq x < y \leqq \sup M$.) Dokažme ještě:

Věta 50. *Číselná množina M je omezená tehdy a jen tehdy, existuje-li číslo k tak, že pro všechna $x \in M$ jest $|x| \leqq k$.*

Důkaz. Jestliže pro všechna $x \in M$ platí nerovnost $|x| \leqq k$, platí (podle věty 28 pro $a = 0$)[46]) nerovnost $-k \leqq x \leqq k$, takže M je omezená. Jestliže naopak je množina M omezená (shora i zdola), existují čísla k_1, k_2 tak, že pro všechna $x \in M$ je $k_1 \leqq x \leqq k_2$. Položme $k = \operatorname{Max}(|k_1|, |k_2|)$. Ježto pro každé y je $y \leqq |y|$, máme pro každé $x \in M$ nerovnosti $x \leqq |k_2| \leqq k$ a rovněž $-x \leqq -k_1 \leqq |-k_1| = |k_1| \leqq \leqq k$; tedy $|x| = \operatorname{Max}(x, -x) \leqq k$.

Poznámka 1. Podobně jako před větou 48 mohli bychom ovšem též ve větě 50 psát $|x| < k$ místo $|x| \leqq k$; proveďte to.

Cvičení

1. Všimněte si věty 39 (v prvním znění). V ní se předpokládalo, že M byla shora omezená a neprázdná. Rozvažte si toto: Není-li M shora omezená, nemá nejmenší horní závoru — poněvadž vůbec nemá horní závoru. Je-li za druhé M prázdná, potom každé reálné číslo je její horní závorou, a tedy opět neexistuje nejmenší ze všech horních závor.

2. Je-li M číselná množina a jsou-li všechna čísla z M menší než jisté číslo k, nazveme na okamžik číslo k „horní závorou množiny M v užším smyslu" (jen pro potřeby tohoto a následujícího cvičení). Rozdíl proti horní závoře je jen ten, že místo $\leqq$ požadujeme $<$. Podle textu před větou 48 je číselná množina shora omezená tehdy a jen tehdy, má-li aspoň jednu horní závoru v užším smyslu. Ale pro horní závoru v užším smyslu neplatí věta obdobná prvnímu znění věty 39. Důkaz: Budiž M množina všech čísel $x \leqq 2$. Každé číslo > 2 je horní závorou množiny M

[45]) Tj. je-li množina M neprázdná a shora omezená.

[46]) Lépe řečeno: podle cvičení 14 na str. 38 pro $a = 0$ (neboť v tomto cvičení jde o nerovnost $\leqq$, kdežto ve větě 28 o nerovnost $<$).

v užším smyslu, ale číslo 2 nikoliv. Proto neexistuje nejmenší ze všech horních závor v užším smyslu množiny M.[47])

3. Budiž M číselná množina. Kdy existuje horní závora v užším smyslu množiny M, jež je nejmenší ze všech horních závor v užším smyslu množiny M? Odpověď: Tehdy a jen tehdy, jestliže M je shora omezená, neprázdná a neobsahuje největší číslo. (Návod: Jde hlavně o to, kdy nejmenší horní závora je horní závorou v užším slova smyslu.) Cvičení 2 a 3 ukazují, že pojem horní závory v užším smyslu nemá velkou cenu. Uvedl jsem tato cvičení jen proto, abych upozornil na možnost chyby, které se začátečník snadno dopustí (záměna $<$ za $\leqq$).

[47]) Podobně je tomu s druhým zněním věty 39. První vlastnost čísla G lze vyslovit také takto: Pro každé číslo x množiny M je $x \leqq G$. Napíšete-li zde $<$ místo $\leqq$, dostanete místo věty 39 nesprávnou větu.