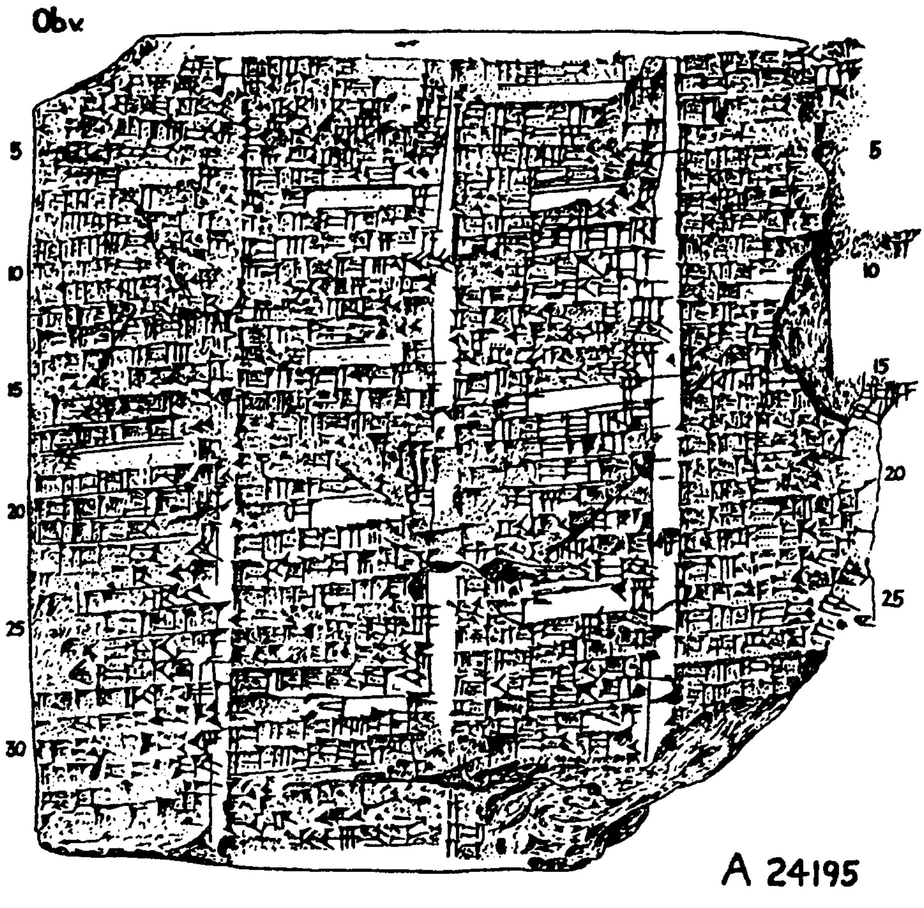


Matematická tabulka A 24195 (líc)

MATEMATIKA VE STARÉ MEZOPOTÁMII

PRAMENY.

Z velkého množství mezopotámských tabulek, které jsou uloženy na řadě míst na světě, je jen malá část prostudována. Tabulek s matematickými úlohami bylo pročteno a rozluštěno jen asi 400. Matematické výpočty jsou však i na tabulkách, které obsahují i jiné texty, zejména hospodářské.

Jedním z prvních asyrologů, který si povšiml i matematických textů, byl E. Hincks. V padesátých letech 19. století studoval v Britském muzeu texty vztahující se k asyrské epoše, které obsahovaly astronomické tabulky. Ukázal, že jejich správné pochopení je možné, když zapsaná čísla budeme číst v šedesátkové soustavě.

Ve stejné době vedl W. K. Loftus vykopávky v Senkeraku, kde nalezl starobylé sumerské město Larsa. Mezi množstvím tabulek objevil dvě čistě matematické ze starobabylónského období. Tyto tabulky publikoval roku 1875 H. C. Rawlinson, který potvrdil, že čísla jsou psána v šedesátkové soustavě.

V letech 1894 až 1895 objevila francouzská expedice obrovský archív ve starosumerské Lagaši,[29] který obsahoval mimo jiné i hospodářské zápisy, plány, výpočty obsahů polí apod. Některé z těchto textů byly rozluštěny zásluhou M. V. Nikolskiho (1848–1915).

V letech 1898 až 1900 našla americká expedice z Pensylvánie město Nippur s obrovskou knihovnou. Roku 1906 byly publikovány matematické tabulky z Nippuru obsahující soubory tabulek pro násobení a dělení a tabulky druhých a třetích mocnin. Na počátku 20. století bylo v Nippuru objeveno více než 80 matematických tabulek a o něco později asi 50 matematických tabulek ve městě Kiš. Následovaly další objevy.

Až do roku 1916 nejevili asyrologové velký zájem o tabulky s matematickým obsahem. V roce 1916 však němečtí badatelé E. F. Weidner, H. Zimmern a A. Ungnad částečně dešifrovali geometrické tabulky v Berlínském a Britském muzeu. Tehdy byla poprvé oceněna úroveň mezopotámské matematiky.

Při studiu narazili badatelé na značné problémy terminologické. Problémy vyplývaly též z poškození tabulek, i z toho, že chybějící podmínky v zadání úloh často zcela znemožňují jejich výklad. Potíže při studiu matematických tabulek často souvisely s tím, že badatelé nebyli matematici.

Roku 1922 publikoval C. J. Gadd rozluštěný text z kolekce Britského muzea, který obsahoval soubor příkladů na výpočet obsahů geometrických útvarů; chyběla však řešení i výsledky. Jeho překlad vyvolal řadu pochybností, probudil však zájem o matematické tabulky.

O šest let později vydal C. Frank překlad řady matematických tabulek z kolekce muzea ve Štrasburku. Některé úlohy přeložil úplně, některé jen částečně, překlady některých však nezvládnul.

[29] Jde o archív II. dynastie Uru.

Pro poznání mezopotámské matematiky udělal velmi mnoho německý matematik a historik Oskar Neugebauer (1899–1990). Od roku 1927 překládal klínopisné texty uložené v různých muzeích v Evropě. Své první práce publikoval už v roce 1929.

Ve třicátých letech 20. století byla rozpracována terminologie matematických textů, což zrychlilo a usnadnilo další studium. V letech 1935 až 1937 Neugebauer vydal své stěžejní trojsvazkové dílo *Mathematische Keilschrift-Texte*, v němž publikoval matematické klínopisné texty asi 250 tabulek. Jeho monografie obsahuje fotografie i překreslení některých tabulek, jejich transliteraci, německý překlad a jazykový i matematický rozbor. Neugebauer rozluštil více než 500 matematických úloh. Jeho práce vyvolala velký zájem o starobylou matematiku.

Některé jeho překlady, rozbory a interpretace byly později opraveny či upřesněny.[30]

Ve třicátých letech intenzívně studovali starobabylónskou matematiku německý matematik K. Vogel (1888–1985), Američan S. Gandz, Ital E. Bortolotti (1866–1947) a Francouz F. Thureau-Dangin. Posledně jmenovaný v roce 1938 publikoval v Leidenu další kolekci matematických textů; jeho monografie je nazvána *Texts mathématiques Babyloniens*.

Během druhé světové války Neugebauer emigroval do USA, kde pak spolupracoval s A. Sachsem; studovali kolekci tabulek uloženou na Yale University. V roce 1945 vydali obsáhlou publikaci nazvanou *Mathematical Cuneiform Texts*, která obsahuje fotografie a přepisy nejdůležitějších matematických tabulek, jejich transliteraci a anglický překlad. Zveřejněno je zde asi 1 040 příkladů.

V letech 1950 až 1951 publikoval Iráčan Taha Baqir 11 textů bohatých na úlohy, které byly uloženy v Iráckém muzeu v Bagdádu. Koncem padesátých let pracoval na překladech matematických tabulek uložených v Ermitáži A. A. Vajman, jeho práce vyvrcholila v roce 1961 vydáním monografie *Šumero-vavilonskaja matematika*.

Roku 1961 vydali E. M. Bruins (1909–1990) a M. Rutten monografii *Textes mathématiques de Suse* obsahující francouzské překlady a rozbory nově objevených matematických tabulek.

Na základě všech těchto poznatků byly v padesátých a šedesátých letech 20. století vydávány monografie, které popisovaly úroveň sumerské, starobabylónské a novobabylónské matematiky, a speciální časopisecké vědecké práce. Jejich autory byli hlavně E. M. Bruins, A. E. Rajk, I. N. Veselovskij, K. Vogel, M. Ja. Vygodskij (1898–1965) a B. L. van der Waerden (1903–1996).

Speciální články o matematice v Mezopotámii se objevovaly a dodnes objevují např. v časopisech *Altorientalische Forschungen*, *American Mathematical Monthly*, *Archives for History of Exact Sciences*, *Centaurus*, *Historia Mathematica*, *Istoriko-matematičeskie issledovanija Journal of Cuneiform Studies*, *Journal of Near Eastern Studies*, *Physis*, *Sumer*, *Zeitschrift für Assyrologie*.

Jejich autoři hlavně reagují na nejnovější objevy; rovněž se však vracejí k otázkám, které byly již řešeny, a předkládají nové interpretace.

[30] Opravy prováděli např. C. Ja. Lur'je, E. M. Bruins, B. L. van der Waerden.

Vzhledem k tomu, že jen velmi malá část mezopotámských tabulek byla zatím přeložena a prostudována a navíc je možno očekávat další objevy při vykopávkách, může dojít k dalším, velmi překvapujícím objevům o charakteru a úrovni matematiky ve staré Mezopotámii.

Na závěr uveďme přehled muzeí a knihoven, v nichž jsou uloženy významné kolekce matematických tabulek.

- British Museum (Department of Egyptian and Babylonian Antiquities), Londýn, Velká Británie – tabulky jsou označeny písmeny BM, resp. Bu, resp. Rm, za nimiž následuje číslo, výjimečně jen číslem.
- Musées Royaux du Cinquintenaire, Brusel, Belgie – tabulky jsou označeny písmenem O, za nímž následuje číslo.
- Staatliche Museen (Vorderasiatische Abteilung), Berlín, Německo – tabulky jsou označeny písmeny Vat, za nimiž následuje číslo.
- Bibliothéque Nationale et Universitaire de Strasbourg, Štrasburk, Francie – tabulky jsou označeny zkratkou Strassbg., za níž následuje číslo.
- Sammlung Böhl, Leyden, Nizozemsko – tabulky jsou označeny slovem Böhl, za nímž následuje číslo.
- Musée du Louvre (Département des Antiquités Orientales), Paříž, Francie – tabulky jsou většinou označeny písmeny AO, za nimiž následuje číslo (některé však i písmeny (AO)S, RA nebo slovem Syria a číslem).
- Ashmolean-Museum (The Herbert Weld Collection), Oxford, Velká Británie – tabulky jsou označeny písmenem W a číslem.
- Musées d'Antiquités, Istanbul, Turecko – tabulky jsou označeny písmeny Ist.Ni, Ist.O, Ist.S, Ist.A, Ist.T a číslem.
- Yale Babylonian Collection, Yale University, New Haven, USA – tabulky jsou označeny symbolem YBC, resp. NBC, resp. A a číslem.
- J. Pierpont Morgan Library Collection, New Haven, USA – tabulky jsou dnes uloženy rovněž na Yale University, jsou označeny písmeny MLC a číslem.
- Archaelogical Museum of the University of Pennsylvania, USA – tabulky jsou značeny písmeny CBM, resp. CBS, za nimiž následuje číslo.
- Royal Ontario Museum of Archaeology, Toronto, Kanada – tabulky jsou označeny písmeny ROMA a číslem.

V této knize je pozornost věnována zejména tabulkám uloženým v Londýně (tabulky značené MB), Berlíně (Vat), Štrasburku (Strassbg.), Paříži (AO) a USA (YBC, NBC, A a MLC).

LITERATURA

[Ba1] Baqir Taha, *An important mathematical problem-text from Tell-Harmal*, Sumer **6** (1950), 39–54, 130–148.

[Ba2] Baqir Taha, *Some more mathematical texts from Tell-Harmal*, Sumer **7** (1951), 28–45.

[Ba3] Baqir Taha, *Foreword (Tel Dhiba'i: New Mathematical Texts)*, Sumer **18** (1962), 11–14.

[BR] Bruins E. M., Rutten M., *Textes mathématiques de Suse*, Paul Geuthner, Paris, 1961.

[Fr] Frank C., *Straßburger Keilschrifttexte in sumerischer und babylonischer Sprache*, Walter de Gruyter, Berlin und Leipzig, 1928.

[Fri1] Friberg J., *The Early Roots of Babylonian Mathematics III: Three Remarkable Texts from Ancient Ebla*, Vicino Oriente **6** (1986), 3–25.

[Fri2] Friberg J., *Mathematik*, in *Reallexikon der Assyriologie und Vorderasiatischen Archäologie*, VII, 531–585, de Gruyter, Berlin and New York, 1990.

[Ga1] Gandz S., *Studies in Babylonian Mathematics I. Indeterminate Analysis in Babylonian Mathematics*, Osiris **8** (1948), 12–40.

[Ga2] Gandz S., *Studies in Babylonian Mathematics II. Conflicting Interpretations of Babylonian Mathematics*, Isis **31** (1939), 405–425.

[Go] Goetze A., *A Mathematical Compendium from Tell Harmal*, Sumer **7** (1951), 126–155.

[Hø1] Høyrup J., *Mathematical Susa Texts VII and VIII. A Reinterpretation*, Altorientalische Forschungen **20** (1993), 245–260.

[Hø2] Høyrup J., *Changing Trends in the Historiography of Mesopotamian Mathematics: An Insider's View*, History of Science **34** (1996), 1–32.

[Hø3] Høyrup J., *The Finer Structure of the Old Babylonian Mathematical Corpus. Elements of Classification, with some Results*, in J. Marzahn, H. Neumann (eds.): *Assyriologica et Semitica. Festschrift für Joachim Oelsner anläßlich seines 65. Geburtstages an 18. Februar 1997*, 117–177, (Altes Orient und Altes Testament, 252), Ugarit Verlag, Münster, 2000.

[Hø4] Høyrup J., *Lengths, Widths, Surfaces. A portrait of Old Babylonian Algebra and Its Kin*, Springer, New York, 2002.

[Je] Jestin R., *Tablettes sumériennes de Shuruppak conservées au Musée de Stamboul*, Mémoires de l'Institut Français d'Archéologie de Stambul, Boccard, Paris, 1937.

[N1] Neugebauer O., *Mathematische Keilschrift-Texte*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1935 (erster und zweiter Teil), 1937 (dritter Teil), reprint Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[N2] Neugebauer O., *Vorlesungen über Geschichte der Antiken Mathematischen Wissenschaften, Erster Band. Vorgriechische Mathematik*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1934.

[NS] Neugebauer O., Sachs A., *Mathematical Cuneiform Texts*, American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research, New Haven, Connecticut, 1945, reprint, Harrassowitz, 1986.

[RFR] al-Rawi, Farouk N. H., Roaf M., *The Old Babylonian Mathematical Problems Text from Tell Haddad, Himrin*, Sumer **43** (1984), 195–218.

[Ro1] Robson E., *Mesopotamian Mathematics 2100–1600 BC. Technical Constants in Bureaucracy and Education*, Oxford Editions of Cuneiform Texts, Clarendon Press, Oxford, 1999.

[Ro2] Robson E., *Mathematical Cuneiform Tablets in Philadelphia, Part 1: Problems and Calculations*, SCIAMUS **1** (2000), 11–48.

[So] von Soden W., *Zu den mathematischen Aufgabentexten vom Tell Harmal*, Sumer **8** (1952), 49–56.

[Td1] Thureau-Dangin F., *Texts mathématiques Babyloniens*, Brill, Leiden, 1938.

[Td2] Thureau-Dangin F., *Tablettes d'Urukà l'usage des prêtres du Temple d'Anu au temps des Séleucides*, Paris, 1922.

[Va1] Vajman A. A., *Šumero-vavilonskaja matematika III.-I. tysjačeletija do n. e.*, Izdatel'stvo vostočnoj literatury, Moskva, 1961.

[Va2] Vajman A. A., *Vavilonskie čisla*, Istoriko-matematičeskie issledovanija **10** (1957), 587–594.

[Va3] Vajman A. A., *Vavilonskie geometričeskie risunki prostranstvennych figur*, Istoriko-matematičeskie issledovanija **13** (1960), 379–382.

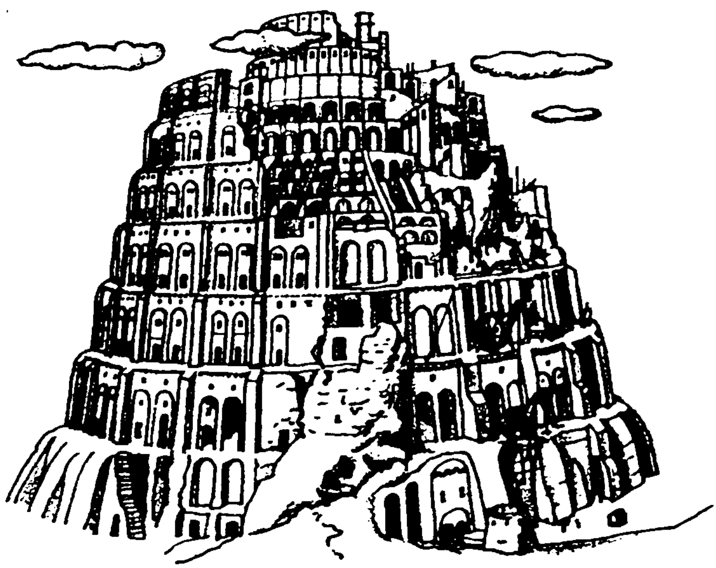
[Vo1] Vogel K., *Vorgriechische Mathematik*, Würzburg, 1958–1959.

[Vo2] Vogel K., *Ist die babylonische Mathematik sumerisch oder akkadisch?*, Mathematische Nachrichten **18** (1958), 377–382.

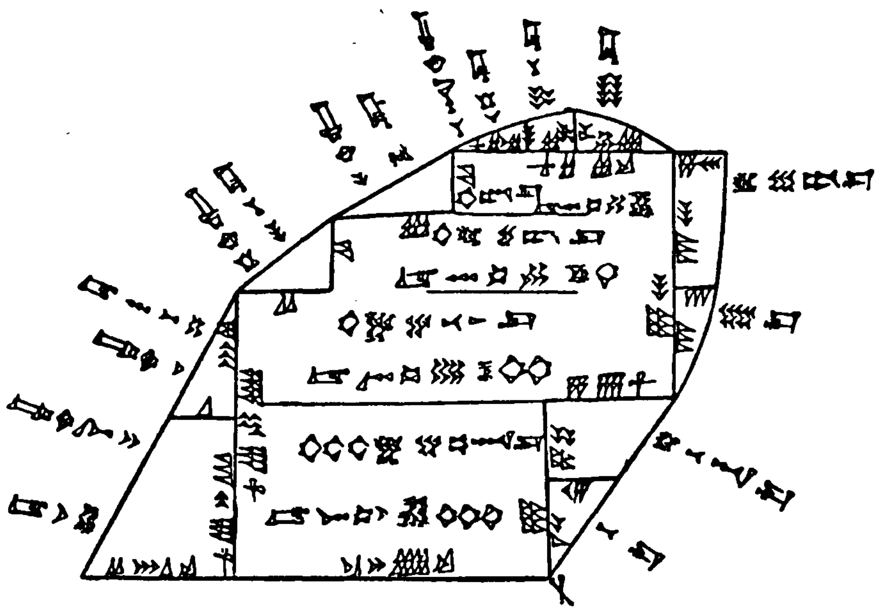
[Vy] Vygodskij M. Ja., *Arifmetika i algebra v drevněm mire*, Nauka, Moskva, 1967.

WWW STRÁNKY

[WWW] http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath.



„Babylónská věž“ podle Pietra Brueghela



Babylónský plán polí
s číselnými znaky vyjadřujícími míry jednotlivých částí

ZÁPIS ČÍSEL.

V této kapitole se pokusíme stručně popsat značně komplikovaný vývoj zápisu čísel v Mezopotámii v průběhu více než pěti tisíc let. Zdůrazněme však, že v různých dobách existovalo v jednotlivých oblastech Mezopotámie několik odlišných zápisů čísel a že v následujícím textu popíšeme jen ty nejdůležitější z nich.

Prehistorie.

V osmém tisíciletí př. n. l. se na Blízkém Východě objevily malé hliněné geometrické „modely" (kužele, koule, válce apod.), tzv. *tokens*, které byly pravděpodobně používány k „záznamu" množství hlavních zemědělských komodit (obilí, ovoce, olej, ovce apod.). Tokens vznikaly v době, kdy primitivní lidé přecházeli od lovu a sběru k zemědělství. Jejich význam jako dávných předchůdců „zápisů" čísel vysvětlil v sedmdesátých letech 20. století D. Schmandt-Besserat; během následujících dvaceti let pak byla v řadě prací rozvinuta bohatá teorie o původu a významu tokens (viz např. [Da], [DE], [En], [SB] a [Sw]).

Specifický tvar (a později jeho otisk) reprezentoval určité množství nějaké plodiny. Například kužel odpovídal malému množství obilí a koule velkému množství. Geometrický objekt byl přitom pevně spjat s počítanou kvalitou (např. jednotka množství obilí), záznam byl aditivní, např. tři jednotky obilí byly reprezentovány třemi hliněnými modely příslušného tvaru.

S rozvojem měst došlo k rozvoji řemesel, zemědělství i obchodu, což se odrazilo i v tokens. Objevily se nové tvary, komplikovanější design (vroubkování, dírky, čárky apod.), probíhala standardizace tvarů tokens a jejich používání. Zdá se, že zachycování počtu pomocí tokens bylo užíváno častěji než primitivní záznamy množství např. pomocí vrubů apod.

Kolekce tokens byly uchovávány v klášterních komplexech, palácích a archívech; sloužily k záznamu minulé či budoucí obchodní transakce, dluhu, daní apod. Do dnešních dnů se dochovaly dva druhy takových „zápisů".

První obsahoval tzv. „ostré tokens" s dírkami, kterými se protahoval provázek. Na provázek se navléklo patřičné množství tokens, vše se zavázalo a konce provázku se připevnily k pevnému kusu hlíny, tzv. *bullae*, který se pohodlně vešel do dlaně. Bullae se opatřily pečetí (tj. otiskem pečetního válečku) tak, aby každý pokus změnit počet nebo tvar tokens byl možný jen při porušení pečeti.

Druhý zápis využívající „obálku" byl podstatně významnější pro vývoj matematiky. „Tokens" se ukládaly do připravených hliněných obálek, které se nejprve uzavřely a uzávěr se pak opatřil pečetí. Hliněná obálka však byla „neprůhledná"; jediný způsob, jak zjistit, jakou informaci obsahuje, by bylo rozbití obálky a tím i porušení pečeti. Tento problém byl vyřešen tím, že se na vnější straně obálky před jejím uzavřením otiskly do hlíny všechny ukládané tokens. Odtud byl již jen krůček k prvnímu opravdovému zápisu čísel.

Nepoziční systém.

Na přelomu čtvrtého a třetího tisíciletí se v Mezopotámii objevil aditivní nepoziční zápis čísel, který pravděpodobně vyšel z „obálkové metody“ užívané u tokens. Je zajímavé, že nevznikl systém s několika málo jednoduchými znaky, ale několik systémů s různými znaky pro jednotky a různými vztahy mezi nimi. Dodnes bylo objeveno a rozluštěno šedesát odlišných číselných znaků, které lze rozdělit do dvanácti samostatných systémů.

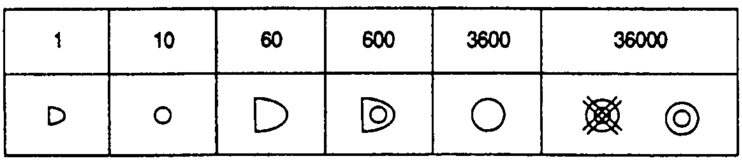
Byla užívána např. tato soustava: jednotka byla zaznamenávána jako otisk malého kužele, deset malých kuželů byl jeden malý kruh, šest malých kruhů byl jeden velký kužel, deset velkých kuželů byl jeden velký kužel s kruhem uvnitř, šest velkých kuželů s kruhem uvnitř byl jeden velký kruh, deset velkých kruhů byl jeden velký kruh s malým kruhem uvnitř. V této soustavě, která byla založena na kombinaci dvou soustav o základech 10 a 6, se obyčejně zapisovala čísla od 1 do 360 000.

Jiný systém, tzv. *bisexagesimální*, nejčastěji zachycoval čísla od 1 do 7 200 (užíval faktory 10, 6, 2, 10 a 6).

Obilí bylo někdy měřeno v systému s faktory 5, 10, 3 a 10; obvykle zachycoval čísla od 1 do 1 500.

Většina systémů používala kombinaci dvou znaků (otisk kužele a otisk koule nebo snad válce, tj. klínek a kruh), které byly snadno čitelné a reprodukovatelné.

V následující tabulce jsou uvedeny znaky užívané pro zápis čísel ve třetím tisíciletí př. n. l. v Uruku. Jde o jeden z nejstarších dochovaných zápisů čísel vůbec.



Na dalším obrázku jsou dvě tabulky, které pocházejí z Uruku z třetího tisíciletí př. n. l. Je na nich zachycen sumerský zápis čísel.

Prohlédneme-li si dobře první tabulku (horní dva obdélníky), můžeme identifikovat zápis čísla

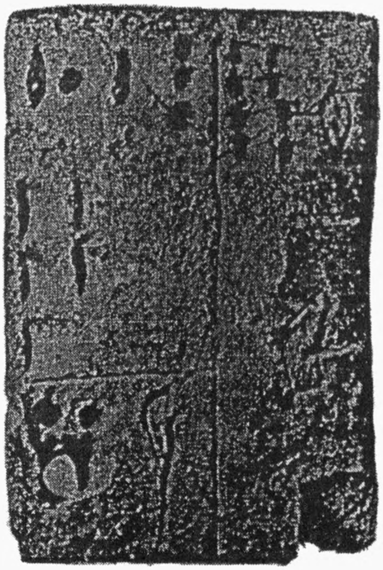
$$698 = 1 \cdot 600 + 1 \cdot 60 + 3 \cdot 10 + 8 \cdot 1$$

(v levém horním obdélníku je jeden znak pro 600, jeden znak pro 60, tři znaky pro 10; pravý horní obdélník obsahuje osm znaků pro 1).

Na druhé tabulce lze identifikovat zápis čísla

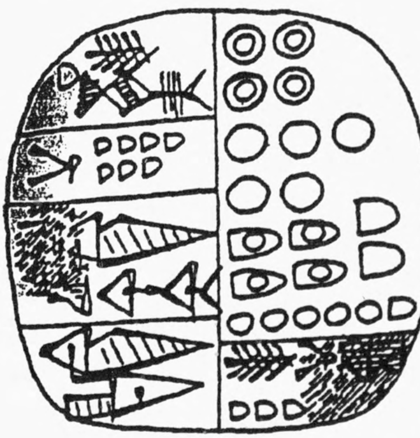
$$3\,750 = 1 \cdot 3\,600 + 2 \cdot 60 + 3 \cdot 10$$

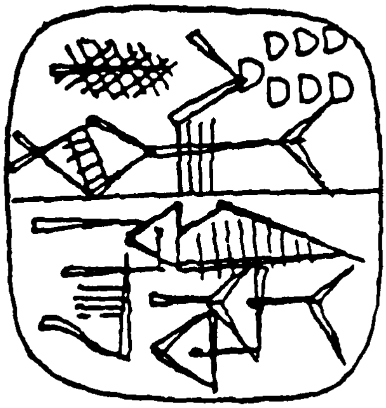
(v levém horním obdélníku je jeden znak pro 3 600, dva znaky pro 60 a tři znaky pro 10).

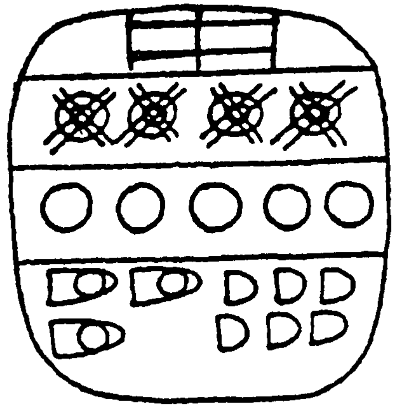


Pečlivým studiem tabulek bylo zjištěno, že znaky vznikaly vtlačením vhodného „vzoru“ do měkké hlíny. Pro různé řády byly používány stejné tvary, znaky se však lišily velikostí (např. 1 a 60, 10 a 3 600).

Uveďme pro zajímavost ještě jeden příklad. Na následujících dvou obrázcích jsou překresleny tabulka 50 a tabulka 671 (líc a rub), jejichž originály jsou dnes uloženy v muzeu v Istanbulu. Pocházejí asi z poloviny třetího tisíciletí, byly nalezeny v Shuruppaku (údolí Eufratu jižně od Bagdádu).







Prohlédneme-li si dobře levou část tabulky 50 a líc tabulky 671, zjistíme, že se na nich objevují stejné znaky.[1] Na tabulkách je stejná úloha:

Má se rozdělit známé množství obilí [sýpka] mezi neznámý počet mužů tak, aby každý dostal 7 sìla obilí.

Postup řešení uveden není, v pravé horní části tabulky 50 je zapsán výsledek

$$164\,571 = 4 \cdot 36\,000 + 5 \cdot 3\,600 + 4 \cdot 600 + 2 \cdot 60 + 5 \cdot 10 + 1 \cdot 1$$

a v pravé dolní části je poznamenáno: *zbude 3 sìla obilí.*

Výsledek je správný. Z hospodářských záznamů známe vztah mezi jednotkou *sýpka* a *sìla*:

$$1 \textit{ sýpka} = 2\,400 \textit{ gur}\,, \qquad 1 \textit{ gur} = 480 \textit{ sìla}\,.$$

Jedna *sýpka* představuje 2 400 · 480 *sìla*, tj. 1 152 000 *sìla*. Uvedený výsledek tedy získáme, když číslo 1 152 000 vydělíme sedmi (3 *sìla* je zbytek).

Na rubu tabulky 671 je však zapsán výsledek

$$164\,160 = 4 \cdot 36\,000 + 5 \cdot 3\,600 + 3 \cdot 600 + 6 \cdot 60\,,$$

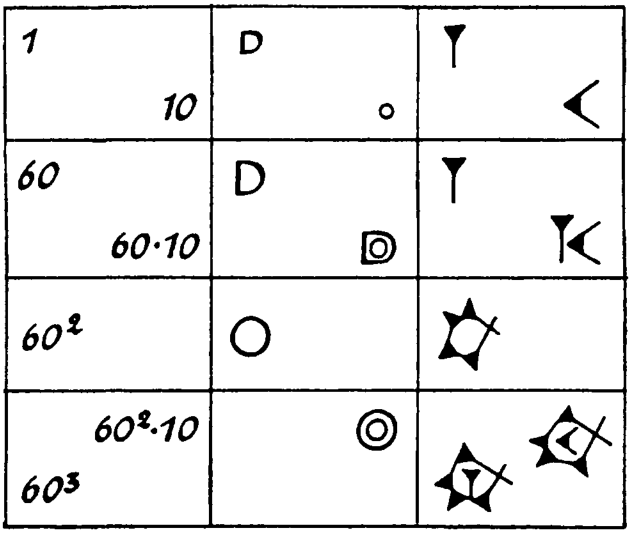
který, jak víme z předešlého, je chybný. Jak ho mohl počtář získat? Dělení bylo tehdy velmi obtížnou operací (viz dále kapitola o aritmetických operacích). Počtář patrně nechtěl dělit velké číslo, a proto vydělil množství obilí *sýpky* převedené na jednotky *gur*, zbytek zanedbal a výsledek převedl na jednotky *sìla*:

$$2\,400 : 7 = 342 \quad \text{(zbude 6)} \qquad 342 \cdot 480 = 164\,160\,.$$

Zanedbání zbytku tedy vedlo k chybě. Nevíme však, zda si toho byl počtář vědom, neumíme říci, jak bylo provedeno dělení, neznáme přesný význam těchto tabulek. Byl na nich řešen praktický problém? Měly snad ukázat chybný postup?

[1] Více o zápisu čísel v Mezopotámii v nejstarším období viz např. [If], [Cha], [Da] a [En].

V průběhu třetího tisíciletí byly otisky válečků (či koulí) a kuželů nahrazeny klínovými znaky, které byly psány rydlem. Jednoduché znaky, rané sumerské číslovky z třetího tisíciletí př. n. l., jsou znázorněny na následujícím obrázku.



V této době se patrně zápis čísel oddělil od zápisu objektů, které byly počítány; proběhla důležitá abstrakce, číslo se osvobodilo od počítaných předmětů. Ve stejné době převládla číselná soustava pracující s jednotkami 1, 10, 60, 600, 3 600, 36 000, tj. kombinovaná soustava o základech 10 a 60. Pro zajímavost uveďme názvy některých čísel:

1 aš (geš)	20 niš	1 200 geš-u-min
2 min	30 ušu	3 600 šar
3 eš	40 nin (nimin)	36 000 šar-u
4 limmu	50 ninu (ninnû)	216 000 šar-gal (šar-geš)
5 ia	60 geš (gešta)	
6 aš	120 geš-min	
7 imin	180 geš-eš	
8 ussu	600 geš-u	
9 ilimmu		
10 u		

Podrobný výklad o vývoji názvů číslovek v Mezopotámii viz např. [Gu], [Hø], [N1], [N2] a [Po].

Stále se diskutuje o tom, proč se zrodila soustava, která kombinuje základ 10 a základ 60. Názory odborníků se však dodnes velmi podstatně liší (více viz např. [N1], [N2], [NS], [Ny], [P2], [Vy] a [W]).

Poziční zápis.

Výše popsaný sumerský zápis vydržel bez velkých změn zhruba do poloviny třetího tisíciletí, kdy byl postupně nahrazován novým, daleko pokročilejším akkadským zápisem založeným na „poziční" soustavě o základu 60.

Přeměna proběhla ve dvou etapách. Nejprve se objevily oblé znaky pro jednotku a desítku, které byly psány rydlem s kulatým hrotem. Desítka byla zapisována kroužkem (otisk kolmo postaveného rydla), jednotka oválkem (otisk šikmo postaveného rydla).

Ve druhé etapě se objevilo nové rydlo, které mělo špičatý hrot. Jednotka byla zapisována tzv. *prostým klínkem*, desítka tzv. *dvojitým klínkem*. V polovině třetího tisíciletí př. n. l. se rovněž objevily speciální znaky pro 120, 1 200 a 3 600 (viz následující obrázek), které pak během několika dalších století vymizely. Používány byly zejména při zápisech dat, vah nebo velikostí ploch. Při záznamech větších čísel byly vyšší řády značeny většími znaky nebo kombinacemi několika znaků.

120 1 200 3 600

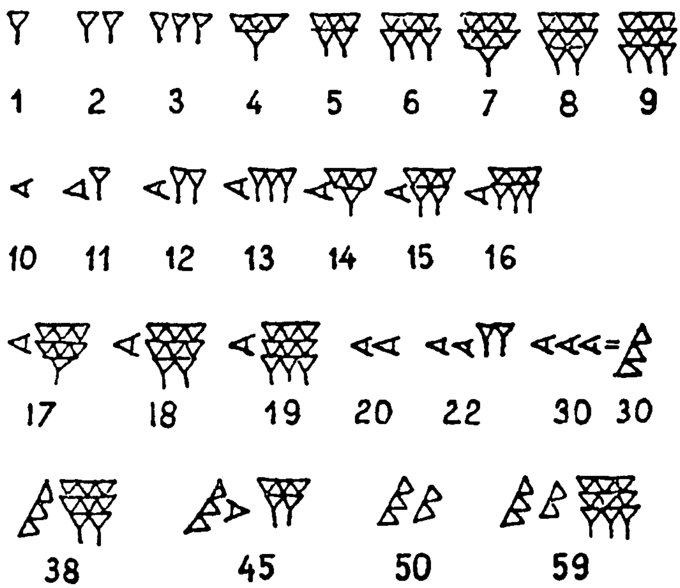
Pro hospodářské zápisy se ve třetím tisíciletí používala i nepoziční desítková soustava; některé její znaky vidíme na dalším obrázku. Poznamenejme, že zápisy v desítkové soustavě měly několik různých variant, které se lišily časově i místně.

100 1 000 10 000

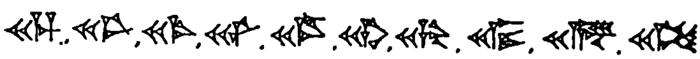
Ve druhém tisíciletí př. n. l. se v Mezopotámii ustálilo používání *poziční šedesátkové soustavy* se dvěma znaky zapisovanými špičatým rydlem. Tyto znaky umožnily zaznamenat libovolně velká přirozená čísla a některá kladná racionální čísla. Ze dvou základních znaků byly vytvořeny standardní symboly pro čísla 1 až 59 (viz následující obrázek); vznikly aditivní kumulací symbolů pro jednotku a desítku. Poznamenejme, že pokud se stejný symbol opakoval více než třikrát, byl seskupován po třech nebo čtyřech do „estetických" útvarů.[2] Čísla byla zapisována do řádků zleva doprava od nejvyšších řádů k nejnižším.

---

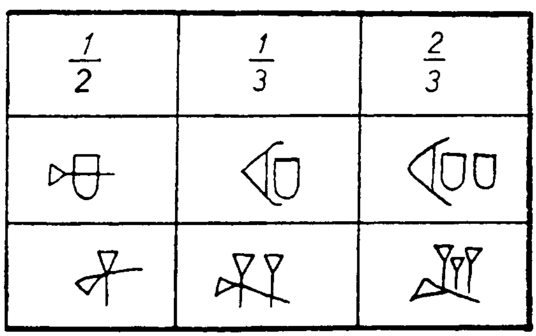
[2] Mírně se lišily v závislosti na místě a čase.



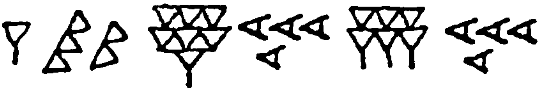
Poznamenejme pro úplnost, že se někdy objevovaly i číselné symboly vytvořené podle „principu odčítání“. Na následujícím obrázku jsou některé takové zápisy čísla 19; byly objeveny na tabulkách v Nippuru.



Stejným způsobem jako přirozená čísla byly v Mezopotámii zapisovány i šedesátinné zlomky, tj. zlomky, jejichž jmenovatelé mají tvar 60^k, kde k je přirozené číslo. Jen pro zlomky $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$ a $\frac{2}{3}$ byly někdy používány speciální znaky (viz obrázek – druhý řádek odpovídá sumerskému zápisu, třetí akkadskému).



Uveďme na závěr příklady zápisu čísel 147 a 424000 v poziční šedesátkové soustavě užívané v Mezopotámii:



V naší symbolice zapisujeme tato čísla v šedesátkové soustavě v tvaru

$$(2,27)\ , \qquad \text{resp.} \qquad (1,57,46,40)\ ,$$

což značí

$$2\cdot 60+27\ , \qquad \text{resp.} \qquad 1\cdot 60^3+57\cdot 60^2+46\cdot 60+40\ .$$

Zrod nuly.

Velkým problémem výše popsaného pozičního systému byl chybějící znak pro nulu a s tím související zmatky při rozlišování řádů. Např. zápis $(5,6,3)$ lze chápat jako

$$5\cdot 60^2+6\cdot 60+3\ , \quad 5\cdot 60^3+6\cdot 60^2+3\cdot 60\ , \quad 5\cdot 60^4+6\cdot 60^2+3$$

apod. Zapsaná čísla bylo často třeba dešifrovat z kontextu; pokud byla používána „malá čísla“ (tj. do třetího řádu), většinou to nečinilo problém.

Někdy však došlo k chybám i při výpočtech. Např. na starobabylónské tabulce VAT 8492, na které jsou uvedeny třetí mocniny přirozených čísel, je pro 31^3 uveden chybný výsledek $(8,46,1)$; správná hodnota je $(8,16,31)$. Chyba mohla vzniknout tak, že počtář vypočetl nejprve $31^2=(16,1)$. Pak tento výsledek násobil 31 a to tak, jak bylo tehdy obvyklé, tj.

$$(30)\times(16,1)+(1)\times(16,1)=(8,0,30)+(16,1)\ .$$

Vzhledem k tomu, že nevyznačil chybějící řád nulou, chybně interpretoval první číslo a při sčítání pak získal špatný výsledek:[3]

$$(8,30,0)+(16,1)=(8,46,1)\ .$$

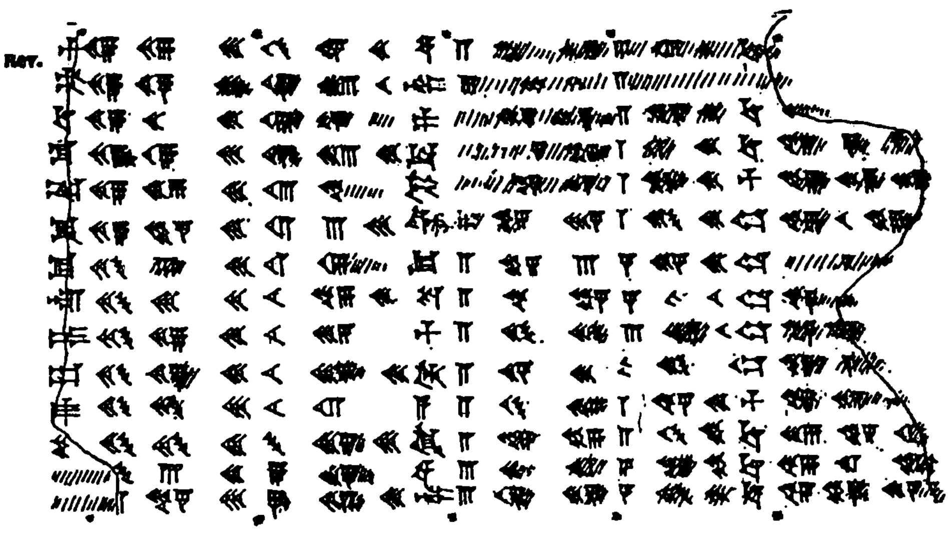
Po dlouhá staletí nenacházíme v Mezopotámii žádné stopy po samostatném znaku pro nulu; zdá se, že tehdejší počtáři její absenci příliš nepociťovali.

[3] Více viz [Vy2], str. 418.

Uvědomme si, že pro zápis čísel od 1 do 100 potřebujeme v desítkové soustavě nulu jedenáctkrát, zatímco v šedesátkové jen jednou.

Potřeba nuly se vynořila při sestavování astronomických tabulek, kde bylo nutno čísla rychle číst a jednoznačně vykládat. Takovéto tabulky byly sestavovány v menší míře již ve druhém tisíciletí př. n. l.; chybějící řád byl vyznačován malou mezerou v zápisu čísla. Pokud však chyběly dva nebo více řádů, mohlo docházet k chybám.

Asi v osmém století př. n. l. začal být chybějící řád vyznačován nějakým vhodným znakem. Po dvě až tři následující století však ještě nebyl standardizován, v sedmém století byly např. pro nulu užívány dva znaky – tři malé klínečky nebo jeden malý klíneček;[4] na tabulce W 1931-38[5] obsahující čtverce čísel od (1,0) do (10,0) s krokem (30) a od (1) do (1,0) s krokem (0;30) se v zápisu pěti kvadrátů objevuje nula.[6] V prvních čtyřech případech je nula označena třemi klínečky (asi jako číslo 30), v posledním znak nuly chybí. Na tabulce CBS 1535[7] jsou uvedeny čtverce některých čísel. V zápisu dvou výsledků se vyskytuje nula.[8] U prvního je místo nuly použit jeden malý klíneček (asi jako znak pro 10), ve druhém případě znak chybí.



S rozvojem astronomie za vlády Seleukovců (4. století př. n. l.) došlo ke kodifikaci zápisu čísel, který již využíval nuly. Nula byla označována malým dvojitým klínkem, jehož původní význam zhruba odpovídal tečce za větou.[9]

---

[4] Např. na tabulkách nalezených v městě Kiš východně od Bagdádu.

[5] Tabulka pochází z 8. až 5. století př. n. l.

[6] Jde o čísla $(15,30)^2 = (4,0,15)$, $(20,30)^2 = (7,0,15)$, $(24,30)^2 = (10,0,15)$, $(39,30)^2 = (26,0,15)$ a $(59,30)^2 = (59,0,15)$.

[7] Tabulka pochází z 8. až 5. století př. n. l.

[8] Jde o čísla $(24;30)^2 = (10,0;15)$ a $(44;30)^2 = (33,0;15)$.

[9] Viz např. zápis převrácených hodnot přirozených čísel na tabulce AO 6456 ze Seleukovské doby. Desetkrát se zde objevuje výše zmíněný standardní znak pro nulu, jen dvakrát je použita mezera.

Tento symbol byl používán především v astronomických textech, jeho použití v matematických textech nebylo důsledné; většinou se však neobjevoval na konci nebo na začátku zapsaného čísla. Zápis (1) mohl znamenat 1, 60, 3600, ale i $\frac{1}{60}$, $\frac{1}{60^2}$, ...; v těchto případech bylo nutno řád čísla vyrozumět z kontextu. Použití nuly dokládá i výše uvedený přepis značně poškozené astronomické tabulky z konce druhého století př. n. l.[10]

Poznamenejme na závěr, že se dnes pro přepis mezopotámských čísel užívá jednoduchá konvence: jednotlivé řády jsou oddělovány čárkou, celá část od „zbývajících zlomků" středníkem. Např. zápis $(1, 15, 7; 3, 20)$ znamená

$$1 \cdot 60^2 + 15 \cdot 60 + 7 + \frac{3}{60} + \frac{20}{60^2} .$$

V následujících kapitolách budeme čísla a operace s nimi vyjadřovat jak v desítkové, tak v šedesátkové soustavě. Budeme-li se snažit více přiblížit mezopotámské početní postupy prováděné v šedesátkové soustavě, budeme při zápisu čísel užívat výše uvedenou konvenci (závorky, čárky oddělující jednotlivé řády, středník oddělující celou část od zlomků) a pro násobení takto zapsaných čísel symbol $\times$.[11]

LITERATURA

[Ca] Cajori F., *A History of Mathematical Notations*, Dover Publications, INC, New York, 1993, reprint dvoudílné knihy z roku 1928 a 1929.

[Da] Damerow P., *The Origins of Writing as a Problem of Historical Epistemology*, Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte, Berlin, 1999.

[DE] Damerow P., Englund R. K., *Die Zahlzeichensystem der Archaischen Texten aus Uruk*, Berlin, 1987, in Zeichenliste der Archaischen Texte aus Uruk, eds. M. W. Green and H. J. Nissen, str. 117–166.

[En] Englund R., *The State of Decipherment of Proto-Elamite*, Max-Planck-Institut für Wissenschaftsgeschichte, Berlin, 2001.

[FG] Fauvel J., Gray J., *The History of Mathematics. A Reader*, The Open University, 1987.

[GG1] Grattan-Guinness I., *Companion Encyclopedia of the History and Philosophy of the Mathematical Sciences, Volume 1*, London and New York, 1994.

[GG2] Grattan-Guinness I., *The Fontana History of the Mathematical Sciences*, Fontana Press, London, 1997.

[Gi] Guitel G., *Histoire comparée des numérations écrites*, Flammarion, Paris, 1975.

[Gl] Gullberg J., *Mathematics. From the Birth of Numbers*, W. W. Norton & Company, New York, London, 1997.

[Gu] Guedj D., *Numbers The Universal Language*, Thames and Hudson Ltd, London, 1998.

---

[10] Prohlédneme-li si pozorně osmý a desátý řádek, objevíme malý dvojitý klínek.

[11] Některé „malé" zlomky, hlavně $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$ apod., pro které byly v Mezopotámii užívány speciálními znaky, budeme zapisovat současnými symboly. Dále budeme užívat současnou symboliku $\frac{1}{n}$ místo zdlouhavého opisu „n-tý díl", který byl běžně užíván mezopotámskými písaři a počtáři.

[Ha] Hankel H., *Zur Geschichte der Mathematik in Altertum und Mittelalter*, Teubner, Leipzig, 1874.

[Hø] Høyrup J., *Remarkable Numbers in Old Babylonian Mathematical Texts: A Note on the Psychology of Numbers*, Journal of Near Eastern Studies **52** (1993), 281–286.

[Hø2] Høyrup J., *Varieties of Mathematical Discourse in Pre-modern Socio-cultural Contexts: Mesopotamia, Greece and the Latin Middle Ages*, Science and Society **49** (1985), 4–41.

[Ch] Chabert J.-L. et al., *A History of Algorithms. From the Pebble to the Microchip*, Springer, Berlin, Heidelberg, ..., 1999.

[If] Ifrah G., *The Universal History of Numbers from Prehistory to the Invention of the Computer*, John Wiley & Sons, Inc., New York, Chichester, Weinheim, Brisbane, Singapore, Toronto, 2000.

[Ke] Kewitsch G., *Zweifel an der astronomischen und geometrischen Grundlage des 60-Systeme*, Zeitschrift für Assyrologie und Verwandte Gebiete **18** (1904), 73–95.

[Kl] Kline M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972.

[Ko] Kolman A., *Dějiny matematiky ve starověku*, Academia, Praha, 1968.

[Lo] Löffler E., *Die arithmetischen Kenntnisse der Babylonier und das Sexagesimalsystem*, Archiv der Mathematik und Physik, 3. série **17** (1911), 135–144.

[Ma] Matvievskaja G. P., *K istorii učenija o čisle na srednevekovom Bližnem i Srednem Vostoke*, Istoriko-matematičeskie issledovanija **17** (1964), 273–280.

[Me] Menninger K., *Number Words and Number Symbols. A Cultural History of Numbers*, 2001.

[Mu] Muroi K., *The Expressions of Zero and of Squaring in the Babylonian Mathematical Text VAT 7537*, Historia Scientiarum, Second Series **1** (1991), 59–62.

[N1] Neugebauer O., *Mathematische Keilschrift-Texte*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1935 (erster und zweiter Teil), 1937 (dritter Teil), reprint Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[N2] Neugebauer O., *Vorlesungen über Geschichte der Antiken Mathematischen Wissenschaften, Erster Band. Vorgriechische Mathematik*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1934.

[N3] Neugebauer O., *On a Special Use of the Sign »Zero«*, Oriental Society **61** (1941), 213–215.

[N4] Neugebauer O., *Sexagesimalsystem und babylonische Bruchenrechnung I–IV*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, B, Band 1, 1931, 183–193, 452–457, 458–463, Band 2, 1933, 199–210.

[N5] Neugebauer O., *Zur Entstehung des Sexagesimalsystems*, Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse **13** (1927), 1–55.

[N6] Neugebauer O., *Točnye nauki v drevnosti*, Nauka, Moskva, 1968.

[N7] Neugebauer O., *The Exact Sciences in Antiquity*, Harper, New York, 1962.

[NS] Neugebauer O., Sachs A., *Mathematical Cuneiform Texts*, American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research, New Haven, Connecticut, 1945, reprint, Harrassowitz, 1986.

[Ny] Nykl A. R., *The Quinary-Vigesimal System of Couting in Europe, Asia and America*, Language **2** (1926), 165–173.

[P1] Powell M. A., *Sumerian Numeration and Metrology*, University Microfilms (72-14 445), Minneapolis, 1971.

[P2] Powell M. A., *The Origin of the Sexagesimal System: The Interaction of Language and Writing*, Visible Language **6** (1972), 5–18.

[P3] Powell M. A., *The Antecedents of Old Babylonian Place Notation and the Early History of Babylonian Mathematics*, Historia Mathematica **3** (1976), 414–439.

[Po] Poebel A., *Grundzüge der sumerischen Grammatik*, Rostock, 1923.

[S1] Sachs A. J., *Notes on Fractional Expressions in Old Babylonian Mathematical Texts*, Journal of Near Eastern Studies **5** (1946), 203–214.

[SB] Schmandt-Besserat D., *Oneness, Twoness, Threenes*, The Sciences **27** (1987), 44–48.

[Se] Sethe K., *Von Zahlen und Zahlworten bei den alten Ägyptern*, Strassburg, 1916.

[Sw] Swetz F. (ed.), *From Five Fingers to Infinity*, Open Court, 1994.

[ThD1] Thureau-Dangin F., *Tablettes d'Uruk à l'usage des prêtres du Temple d'Anu au temps des Seleucides*, Paris, 1922.

[ThD2] Thureau-Dangin F., *Textes mathématiques babyloniens*, Brill, Leiden, 1938.

[ThD3] Thureau-Dangin F., *Esquisse d'une histoire du système sexagésimal*, Geuthner, Paris, 1932.

[ThD4] Thureau-Dangin F., *Le système décimal chez les anciens Sumérien. (Notes Assyriologiques LX.)*, Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale **29** (1932), 22–25.

[Va] Vajman A. A., *Vavilonskie čisla*, Istoriko-matematičeskie issledovanija **10** (1957), 587–594.

[Ve] Vetter Q., *Jak se počítalo a měřilo na úsvitě kultury*, Melantrich, Praha, 1926.

[Vo] Vogel K., *Vorgriechische Mathematik*, Würzburg, 1958–1959.

[Vs] Veselovskij I. N., *Vavilonskaja matematika*, Trudy Instituta istorii estestvennych nauk i techniky **5** (1955), 241–303.

[Vy] Vygodskij M. Ja., *Arifmetika i algebra v drevnem mire*, Nauka, Moskva, 1967.

[Vy2] Vygodskij M. Ja., *Proischoždenie znaka nulja v vavilonskoj numeracii*, Istoriko-matematičeskie issledovanija **12** (1959), 393–420.

[Vy3] Vygodskij M. Ja., *Matematika drevnich vavilonjan*, Uspechi matematičeskich nauk **7** (1952), 102–153.

[Vy4] Vygodskij M. Ja., *Matematika drevnich vavilonjan*, Uspechi matematičeskich nauk **8** (1953), 293–335.

[W] Whiting R. M., *More Evidence for Sexagesimal Calculations in the Third Millennium B. C.*, Zeitschrift für Assyrologie und Vorderasiatische Archäologie **74** (1984), 59–66.

WWW STRÁNKY

[WWW] http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath.

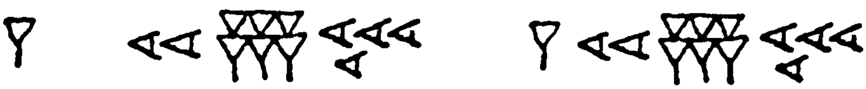
ARITMETICKÉ OPERACE.

V této kapitole se pokusíme objasnit algoritmy používané mezopotámskými počtáři při provádění základních početních operací v poziční šedesátkové soustavě. Připomeňme, že mezopotámská matematika pracovala pouze s přirozenými čísly, kladnými šedesátinnými zlomky a smíšenými čísly.

Sčítání.

Nejjednodušší početní operací bylo sčítání, které velký problém nepředstavovalo. Sčítanci byli nejčastěji zapsáni na jeden řádek vedle sebe, obyčejně zleva doprava, operace většinou značena nebyla, výsledek byl zapsán jako poslední číslo vpravo.

Příklad $216\,000 + 1\,600 = 217\,600$ by v klínopisném zápisu vypadal asi takto:



Přepis do naší symboliky, tj. zápis

$$(1) \qquad (26,40) \qquad (1,26,40)\ ,$$

je třeba ještě dešifrovat; z kontextu pochopit, o jaká čísla jde, a pak příklad přepsat v tvaru

$$(1,0,0) + (26,40) = (1,26,40)\ .$$

Z příkladu je patrné, že typ operace i řád sčítanců bylo nutno pochopit z kontextu. V řadě případů poznáme řád jednotlivých sčítanců (resp. vztah jejich řádů) až z výsledku.

Na některých tabulkách je sčítání vyjádřeno slovy „dej dohromady" (*a-na*) a výsledek uvozen slovem „dostaneš" (*dah-ma*); výše uvedený příklad by pak byl zapsán v tvaru

(1) *a-na* (26, 40) *dah-ma* (1, 26, 40) .

Odčítání.

Trochu složitější operací bylo odčítání. Původně byl menšenec i menšitel napsán na jednom řádku vedle sebe; nejprve byl obvykle zapisován menšitel, operace se vyjadřovala slovem „odejmi" nebo „odeber".

Příklad 2 225 − 125 = 2 100 by byl zapsán asi takto:

$$(2,5) \quad \textit{od} \quad (37,5) \quad \textit{odňato dá} \quad (35)\ .$$

Opět je patrné, že řády čísel bylo nutno při chybějícím textu pochopit z kontextu:

$$(37,5) - (2,5) = (35,0)$$

Zhruba od druhého tisíciletí př. n. l. bylo odčítání zapisováno naopak, podobně jako v dnešní době, tedy menšenec minus menšitel:

$$(37,5) \quad \textit{i-na} \quad (2,5) \quad \textit{zi-ma} \quad (35)\ .$$

Poznamenejme, že nevíme, jaký algoritmus byl pro sčítání a odčítání používán, žádný popis se nedochoval. Pravděpodobně se obě operace prováděly po řádech asi tak, jak je provádíme dnes.

Násobení.

Mezopotámské algoritmy pro násobení nebyly založeny jen na dokonalé znalosti malé násobilky. To by totiž znamenalo naučit se nazpaměť součiny $(1) \times (1)$ až $(59) \times (59)$, tedy 1 770 součinů. Je zřejmé, že násobení muselo vycházet z jiného, jednoduššího základu.[1]

Mezopotámské algoritmy pro násobení se opíraly o tzv. *tabulky násobení*. Do dnešních dnů se zachovalo několik desítek jednak kompletních, jednak více či méně poškozených takovýchto tabulek pro násobení. Lze je rozdělit na tři skupiny.

První skupinu tvoří tzv. *souborné tabulky*, nazývané též kombinované. Jsou to tabulky velkých rozměrů popsané téměř ze všech stran, které obsahují více násobících tabulek najednou. Do dnešních dnů se jich zachovalo 39 takřka úplných, navíc máme k disposici i řadu zlomků.[2] Většina nepoškozených souborných tabulek obsahuje stejný sortiment násobků. Struktura i obsah těchto tabulek musely tedy být „kanonizovány".

Druhou skupinu tvoří tzv. *samostatné tabulky typu I*, které obsahují v záhlaví jedno konkrétní číslo (násobitele) a v těle tabulky sloupec násobenců a sloupec součinů. Byly součástí větších souborů; na každé takovéto tabulce je poznamenáno, jaká tabulka jí předchází a jaká následuje, tj. nese údaje o předchozím a následujícím čísle v záhlaví. Tabulek tohoto typu se zachovalo několik desítek.

Třetí skupinu tvoří tzv. *samostatné tabulky typu II*, které rovněž obsahují v záhlaví jedno číslo (násobitele) a v těle tabulky sloupec násobenců a sloupec

[1] Při násobení čísel zapsaných v šedesátkové soustavě budeme užívat symbol $\times$, abychom více odlišili zápis v šedesátkové soustavě od zápisu v soustavě desítkové.

[2] Mnohé z těchto tabulek prostudoval O. Neugebauer; více viz [N1] a [NS].

součinů. Nepodávají však informace o předchozích a následujících tabulkách. Domníváme se proto, že nebyly součástí žádných tabulkových souborů. Mohly být užívány samostatně, mohly sloužit jako rezervy pro velké tabulkové soubory, mohly být žákovskými opisy apod.[3]

Podíváme-li se na jednotlivé tabulky podrobněji, snadno zjistíme, že mají shodnou strukturu; v záhlaví násobitele, vždy stejných 23 násobenců a odpovídajících 23 součinů. Pro názornost ukažme multiplikativní tabulku, která má v záhlaví desítku, tj. zachycuje desetinásobky 23 uvedených čísel.

(10)	*a-rá*	(1)	(10)
	a-rá	(2)	(20)
	a-rá	(3)	(30)
	a-rá	(4)	(40)
	a-rá	(5)	(50)
	a-rá	(6)	(1)
	a-rá	(7)	(1,10)
	a-rá	(8)	(1,20)
	a-rá	(9)	(1,30)
	a-rá	(10)	(1,40)
	a-rá	(11)	(1,50)
	a-rá	(12)	(2)
	a-rá	(13)	(2,10)
	a-rá	(14)	(2,20)
	a-rá	(15)	(2,30)
	a-rá	(16)	(2,40)
	a-rá	(17)	(2,50)
	a-rá	(18)	(3)
	a-rá	(19)	(3,10)
	a-rá	(20)	(3,20)
	a-rá	(30)	(5)
	a-rá	(40)	(6,40)
	a-rá	(50)	(8,20)

Tabulky mají nejprve krok 1, pak krok 10. Všechny uvádějí jen 23 součinů (viz výše uvedená tabulka), některé uvádějí i kvadrát čísla stojícího v záhlaví. Druhá mocnina snad byla chápána jako zvláštní operace.

Termín *a-rá* znamená násobek, součin, násobit, krát apod.; někdy byl užíván i pro druhou mocninu. U velkého počtu tabulek se opakuje u každého násobence, někdy je zapsán jen v prvním řádku, na několika tabulkách chybí zcela.

Prostudujeme-li všechny dochované tabulky i jejich fragmenty, zjistíme, že v záhlaví je uvedeno pouze těchto 40 násobitelů:

---

[3] **Podrobněji o struktuře, klasifikaci, čtení a používání tabulek pro násobení viz [N1], 1. díl, str. 32–67.**

(50)	(24)	(12)	(6,40)	(2,30)
(48)	(22,30)	(10)	(6)	(2,24)
(45)	(20)	(9)	(5)	(2,15)
(44,26,40)	(18)	(8,20)	(4,30)	(2)
(40)	(16,40)	(8)	(4)	(1,40)
(36)	(16)	(7,30)	(3,45)	(1,30)
(30)	(15)	(7,12)	(3,20)	(1,20)
(25)	(12,30)	(7)	(3)	(1,15)

Skoro na všech souborných tabulkách či souborech tabulek typu I se objevilo všech 40 výše uvedených násobitelů. Čísla v záhlaví byla uspořádána „od největšího k nejmenšímu“. Z nich je 22 čísel jednociferných (v šedesátkové soustavě) a 17 dvojciferných, číslo $(44, 26, 40)$ je trojciferné. Poznamenejme, že tyto tabulky bylo možno používat bez ohledu na řády násobenců a násobitelů.

Násobení nebylo založeno jen na prostém vyhledání součinů v tabulkách, neboť ty neobsahují všechny součiny od $(1) \times (1)$ do $(59) \times (59)$.

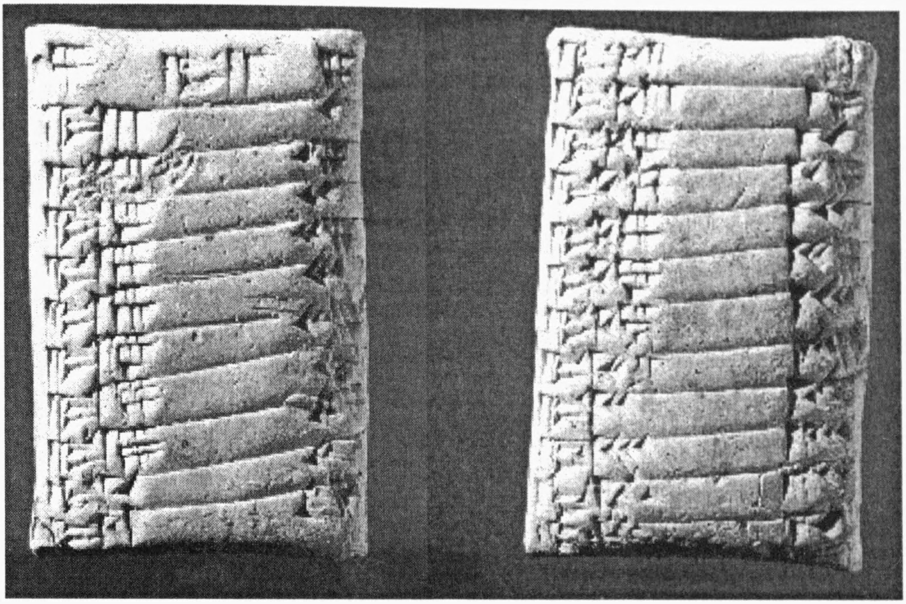
Uvažujme, jak bychom vypočítali součin $42 \cdot 33 = 1\,386$; číslo 42, resp. 33 totiž není uvedeno ani v záhlaví tabulek jako násobitel, ani v těle tabulek jako násobenec. Máme však tabulky s čísly 40 a 2 v záhlaví a v každé této tabulce je násobenec 3 i 30. Výpočet podle mezopotámských tabulek tedy mohl probíhat takto:

$$
\begin{aligned}
(42) \times (33) &= [(40) + (2)] \times [(30) + (3)] = \\
&= (40) \times (30) + (40) \times (3) + (2) \times (30) + (2) \times (3) = (23, 6)
\end{aligned}
$$

K předchozímu výpočtu musel počtář použít dvě tabulky pro násobení (se záhlavím 40 a 2) a na nich vyhledat a sečíst příslušné násobky. Musel ovládat distributivní zákon, znát komutativní zákon a strukturu tabulek.

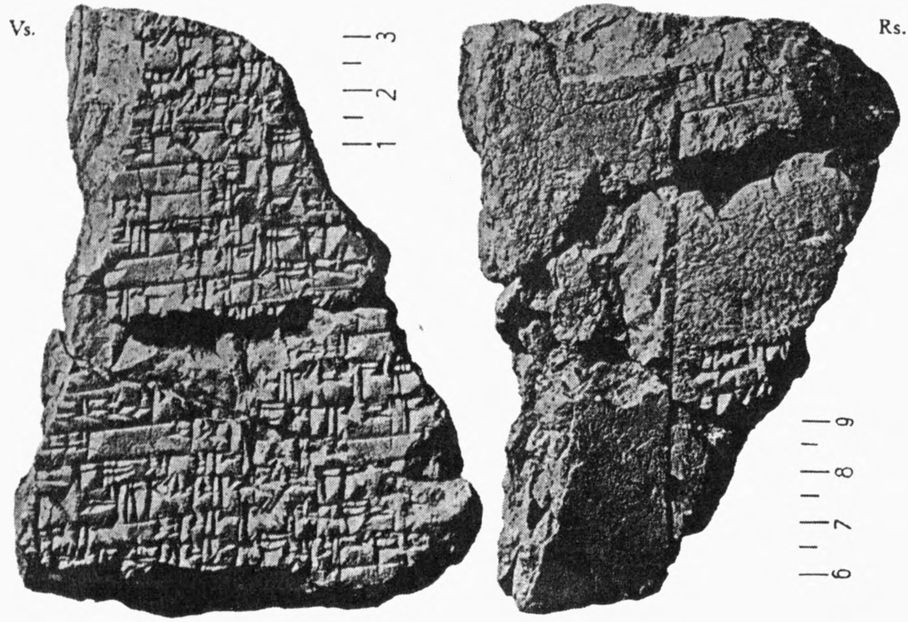
V souvislosti s problematikou mezopotámských tabulek pro násobení se vynořují závažné otázky. Proč byla do záhlaví vybrána právě ta čísla, která tam jsou (výše uvedených 40 násobitelů). Proč byla v tělech tabulek uvedena ta čísla, která tam jsou (výše uvedených 23 násobenců)? Proč nebyly tabulky vytvořeny jednodušeji, např. 1 až 10 s krokem 1 a pak s krokem 10? Proč se v tabulkách objevila víceciferná čísla? Měla význam smíšených čísel či zlomků? Jak byly tabulky používány? Tyto otázky asi nebudou nikdy zcela uspokojivě zodpovězeny.

Na následujícím obrázku je tabulka s násobitelem 5, která pochází z Yale Babylonian Collection (NBC 7344). Poprvé byla publikována O. Neugebauerem a A. Sachsem [NS]. Je popsána po obou stranách, pro lepší představu o její velikosti je v horní části obrázku umístěno měřítko.

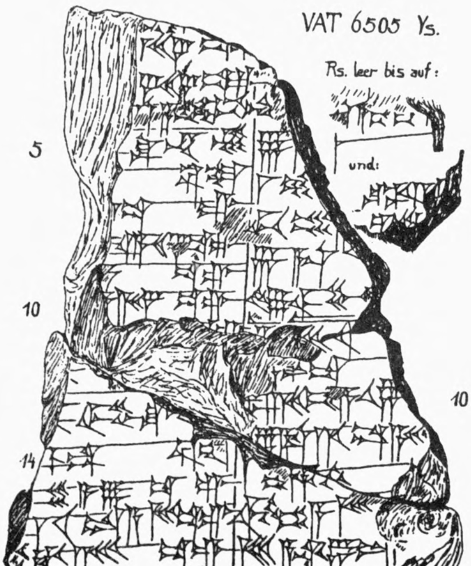


Tabulka obsahující násobky čísla 25 je dnes uložena v Louvru v Paříži: její přepis vypadá takto:

(25)	(1)	(25)
	(2)	(50)
	(3)	(1,15)
	(4)	(1,40)
	(5)	(2,5)
	(6)	(2,30)
	(7)	(2,55)
	(8)	(3,20)
	(9)	(3,45)
	(10)	(4,10)
	(11)	(4,35)
	(12)	(5)
	(13)	(5,25)
	(14)	(5,50)
	(15)	(6,15)
	(16)	(6,40)
	(17)	(7,5)
	(18)	(7,30)
	(19)	(7,55)
	(20)	(8,20)
	(30)	(12,30)
	(40)	(16,40)
	(50)	(20,50)



VAT 6505



Tabulka VAT 6505 a její transkripce

Podrobněji se o mezopotámských tabulkách pro násobení můžeme dočíst např. v pracích [Kn], [N1], [N2], [NS], [Vy] a [WWW].

Dělení.

Dělení bylo velmi obtížnou operací. Mnoho školních tabulek obsahuje úlohu nalézt k danému číslu n jeho *převrácenou* neboli *reciprokou* hodnotu, tj. číslo $\frac{1}{n}$. Jednoduché dělení, tj. dělení beze zbytku, bylo prováděno přímo. Složitější dělení bylo převáděno na násobení převrácenou hodnotou; místo podílu $a : b$ byl počítán součin $a \cdot \frac{1}{b}$, přičemž k nalezení převrácené hodnoty i součinu byly používány tabulky. Kromě tabulek pro násobení vytvořili tedy mezopotámští počtáři rovněž tabulky reciprokých hodnot. Do dnešních dnů se dochovalo asi 50 takových tabulek; přepis standardní reciproké tabulky označené MCTp 11 obsahuje převrácené hodnoty některých přirozených čísel menších než 82:

n	$\frac{1}{n}$	n	$\frac{1}{n}$	n	$\frac{1}{n}$
(2)	(30)	(16)	(3,45)	(45)	(1,20)
(3)	(20)	(18)	(3,20)	(48)	(1,15)
(4)	(15)	(20)	(3)	(50)	(1,12)
(5)	(12)	(24)	(2,30)	(54)	(1,6,40)
(6)	(10)	(25)	(2,24)	(1)	(1)
(8)	(7,30)	(27)	(2,13,20)	(1,4)	(56,15)
(9)	(6,40)	(30)	(2)	(1,12)	(50)
(10)	(6)	(32)	(1,52,30)	(1,15)	(48)
(12)	(5)	(36)	(1,40)	(1,20)	(45)
(15)	(4)	(40)	(1,30)	(1,21)	(44,26,40)

Prohlédneme-li si tabulku MCTp 11, zjistíme, že udává převrácené hodnoty pouze třiceti čísel. To, že jde o některá čísla od 2 do 81, je náš výklad; v tabulce nejsou označeny řády; její použití je proto opět univerzální. Poznamenejme, že zápis čísel v tabulce byl jiný, než ten, který je zde prezentován; na každém řádku byla uvedena pouze jedna hodnota čísla n a odpovídající hodnota $\frac{1}{n}$.

Nad tabulkou reciprokých hodnot nás napadají závažné otázky. Která čísla jsou v tabulce uvedena? Existuje nějaká zákonitost jejich výběru? Proč byla tabulka vytvořena právě takto? Jak byla používána? Tyto otázky řešili v první polovině 20. století přední světoví asyrologové, matematici a historikové matematiky.

Snadno prověříme, že jsou v tabulce reciprokých hodnot uvedena jen ta čísla, která se dají zapsat v tvaru $2^p \cdot 3^q \cdot 5^r$, kde p, q, r jsou celá nezáporná čísla. V tabulce jsou tedy právě ta čísla, jejichž převrácená hodnota má v šedesátkové soustavě konečný rozvoj.

Je zajímavé, že výše zmíněná tabulka reciprokých hodnot je ukončena pro $n = (1,21) = 81$ hodnotou $\frac{1}{n} = (0;0,44,26,40)$, tj. jediným trojciferným číslem, které se objevuje v záhlaví tabulek pro násobení. Je pravděpodobné, že mezopotámští počtáři měli podstatně hlubší znalosti o vztahu dělení a násobení, než si běžně myslíme.

Poznamenejme, že číslo n se označuje v úlohách termínem *igu* nebo *igi* a $\frac{1}{n}$ termínem *igibu*.

Jakými metodami byly reciproké tabulky sestaveny a jak byly při běžných výpočtech používány? Na tyto otázky se pokusili odpovědět O. Neugebauer a A. Sachs, kteří prostudovali velké množství mezopotámských matematických tabulek. Jejich rozbor byl založen zejména na studiu tabulek AO 6456 a VAT 6505.[4]

První z těchto tabulek je pravděpodobně největší zachovanou reciprokou tabulkou, obsahuje 200 párů čísel n a $\frac{1}{n}$; poslední dvojicí čísel, která je na ní uvedena, je dvojice

$$n = (2,59,21,40,48,54)\ ,$$

$$\frac{1}{n} = (20,4,16,22,28,44,14,57,40,4,56,17,46,40)\ .$$

Pokud bychom předpokládali, že je n nejmenší možné přirozené číslo, bylo by

$$n = 2 \cdot 60^5 + 59 \cdot 60^4 + 21 \cdot 60^3 + 40 \cdot 60^2 + 48 \cdot 60 + 54 = 2\,324\,522\,934.$$

Druhá tabulka původně obsahovala dvanáct výpočtů reciprokých hodnot, čitelných bohužel zůstalo jen pět; okraje tabulky jsou totiž značně poškozené. Sehrála důležitou roli při studiu reciprokých tabulek. Pečlivým studiem bylo ukázáno, že výpočty reciprokých hodnot byly prováděny vždy stejně, podle jednoduchého algoritmu.

Mějme přirozené číslo n a hledejme jeho převrácenou hodnotu $\frac{1}{n}$. Předpokládejme, že číslo n má tvar $2^p \cdot 3^q \cdot 5^r$, kde p, q a r jsou celá nezáporná čísla. Číslo n vyjádříme jako součet dvou vhodných přirozených čísel, $n = x + y$, kde x je takové, že $\frac{1}{x}$ lze najít ve standardní reciproké tabulce. Potom

$$\frac{1}{n} = \frac{1}{x+y} = \frac{1}{x} \cdot \frac{1}{1 + \frac{1}{x} \cdot y}\ ;$$

hodnotu $\frac{1}{x}$ nalezneme na standardní reciproké tabulce, součin čísel $\frac{1}{x}$ a y nalezneme v tabulce pro násobení, přičteme jedničku. Pokud je číslo, které vyšlo, na standardní reciproké tabulce, nalezneme jeho převrácenou hodnotu a pomocí tabulek pro násobení vypočteme součin čísel $\frac{1}{x}$ a $\frac{1}{1+\frac{1}{x}\cdot y}$, tj. číslo $\frac{1}{n}$.

Pokud číslo $1 + \frac{1}{x} \cdot y$ na standardní reciproké tabulce není, potom postup opakujeme, tj. rozložíme číslo $\frac{1}{1+\frac{1}{x}\cdot y}$.

[4] Tabulka AO 6456 pochází z doby Seleukovců, tabulka VAT 6505 ze Starobabylónské říše. Úplný rozbor těchto tabulek lze najít v [N1], 1. díl, str. 8–22.

Výpočet převrácených hodnot předvedeme na několika příkladech.

$(2,5)$. *Vezmi* (5). *Převrácené je* (12).
Vynásob (12) *dvojkou. Dostaneš* (24).
Přičti (1). *Dostaneš* (25).
Převrácené k (25) *je* $(2,24)$.
Vynásob $(2,24)$ *a* (12). *Dostaneš* $(28,48)$.
Převrácené k $(2,5)$ *je* $(28,48)$.[5]

Hledejme tedy převrácenou hodnotu k číslu $(2,5) = 125$, tj. číslo $0{,}008$. Zdůrazněme, že číslo $125 = 5^3$ má požadovaný tvar; jeho převrácená hodnota má proto v šedesátkové soustavě konečný rozvoj. Číslo $(2,5)$ není ve standardní reciproké tabulce, proto ho rozdělíme na dvě části:

$$(2,5) = (5) + (2,0)\ , \qquad \text{tj.} \qquad 125 = 5 + 120\ .$$

Číslo (5) je na standardní reciproké tabulce, vyhledáme jeho převrácenou hodnotu

$$(0;12)\ , \qquad \text{tj.} \qquad 0{,}2\ .$$

Nyní vypočteme pomocí tabulek pro násobení součin

$$(0;12) \times (2,0) = (24)\ , \qquad \text{tj.} \qquad 0{,}2 \cdot 120 = 24\ .$$

V dalším kroku přičteme k součinu jedničku a dostaneme 25. Číslo (25) je na standardní reciproké tabulce, vyhledáme jeho převrácenou hodnotu

$$(0;2,24)\ , \qquad \text{tj.} \qquad 0{,}04\ .$$

Na tabulce pro násobení vyhledáme součin

$$(0;12) \times (0;2,24) = (0;0,28,48)\ , \qquad \text{tj.} \qquad 0{,}2 \cdot 0{,}04 = 0{,}008\ .$$

Obdobným způsobem byla patrně vypočtena reciproká hodnota k číslu $n = (2,13,20) = 8\,000$. Číslo $8\,000 = 2^6 \cdot 5^3$ má požadovaný tvar, jeho převrácená hodnota má proto v šedesátkové soustavě konečný rozvoj. Číslo $(2,13,20)$ v tabulce reciprokých hodnot není. Rozdělíme je na dvě části:

$$n = (3,20) + (2,10,0)\ , \qquad \text{tj.} \qquad 8\,000 = 200 + 7\,800\ .$$

V tabulce reciprokých hodnot nalezneme převrácenou hodnotu k číslu $(3,20)$:

$$(0;0,18)\ , \qquad \text{tj.} \qquad 0{,}005\ ,$$

vypočteme součin

$$(0;0,18) \times (2,10,0) = (39)\ , \qquad \text{tj.} \qquad 7\,800 \cdot 0{,}005 = 39\ .$$

[5] Viz [WWW].

Pak přičteme jedničku, dostaneme číslo (40) a vyhledáme jeho převrácenou hodnotu $(0;1,30)$. S využitím tabulek pro násobení již snadno vypočteme součin

$$(0;0,18) \times (0;1,30) = (0;0,0,27)\ .$$

Uvědomme si, že mezopotámský počtář nuly nezapisoval a během výpočtu věnoval velkou pozornost řádům jednotlivých čísel; na druhé straně však sledoval pouze „relativní vztahy“ řádů.

Velmi zajímavá je tabulka AO 6456 s řadou reciprokých hodnot čísel z intervalu $(1,0,0,0,0)$ až $(3,0,0,0,0,0)$, která byla poprvé publikována roku 1922. O třináct let později byla pečlivě prostudována O. Neugebauerem, který v ní objevil 60 písařských chyb. Na základě podrobného rozboru zjistil, že tabulka končí přenosovým řádkem, který signalizuje, že mohlo existovat její pokračování pro čísla větší než (3,0,0,0,0,0), tj. v dekadickém zápisu čísla větší než 2 332 800 000.

Tabulka je neúplná, neobsahuje všechna čísla tvaru $2^p \cdot 3^q \cdot 5^r$ z výše uvedeného intervalu; 96 takovýchto čísel chybí a počet chybějících vzrůstá ke konci tabulky. Ten, kdo tabulku sestavoval, vyšel pravděpodobně ze standardní reciproké tabulky třiceti převrácených hodnot, které postupně násobil mocninami dvojky, trojky a pětky. Čísla uvedená na tabulce AO 6456 mají totiž právě takový tvar. Chybějící čísla se tak vyjádřit nedají.

Neúplnost tabulky byla pravděpodobně jejímu tvůrci známa; snad chtěl ve výpočtech převrácených hodnot chybějících čísel pokračovat, jak dokládá odkaz na pokračování tabulky.

Běžná početní praxe však asi nepotřebovala tabulky s čísly šestého řádu v šedesátkové soustavě (v desítkové soustavě jde o čísla s 9 nebo 10 ciframi).

Uveďme ještě pro zajímavost jednu dvojici navzájem reciprokých hodnot (bez upřesnění řádů) z tabulky AO 6456:

$$n = (1,5,32,9,36)\ , \qquad \frac{1}{n} = (54,55,53,54,22,30)\ .$$

Chceme-li získat převrácenou hodnotu k číslu n a postupujeme-li podle výše uvedeného algoritmu, musíme projít tuto cestu:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n} &= \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{y_1}\ , \\
\frac{1}{n} &= \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{y_2}\ , \\
\frac{1}{n} &= \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{x_3} \cdot \frac{1}{y_3}\ , \\
\frac{1}{n} &= \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{x_3} \cdot \frac{1}{x_4} \cdot \frac{1}{y_4}\ , \\
\frac{1}{n} &= \frac{1}{x_1} \cdot \frac{1}{x_2} \cdot \frac{1}{x_3} \cdot \frac{1}{x_4} \cdot \frac{1}{x_5} \cdot \frac{1}{y_5}\ ;
\end{aligned}$$

přitom je:

$$\begin{aligned} x_1 &= (36) = 2^2 \cdot 3^2 \,, & y_1 &= (1,49,13,36) \,, \\ x_2 &= \ \ (6) = 2 \cdot 3 \,, & y_2 &= \ \ (18,12,16) \,, \\ x_3 &= (16) = 2^4 \,, & y_3 &= \ \ (1,\ 8,16) \,, \\ x_4 &= (16) = 2^4 \,, & y_4 &= \ \ \ \ (4,16) \,, \\ x_5 &= (16) = 2^4 \,, & y_5 &= \ \ \ \ \ \ (16) \,. \end{aligned}$$

Čísla x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 a y_5 jsou součiny mocnin čísel 2, 3, 5; navíc je nalezneme na standardní reciproké tabulce.

Poznamenejme, že na tabulkách, které obsahují početní příklady na dělení, byli dělitelé voleni velmi často ze standardních reciprokých tabulek. Jen výjimečně se jako dělitelé objevovala čísla třetího řádu, většinou se dělilo čísly menšími.

Patrně existovaly i standardní reciproké tabulky pro čísla druhého řádu, tj. pro čísla větší než 60, ale menší než 3 600. Z pozdní doby se nám dochovalo několik zlomků neúplných tabulek čísel třetího řádu (viz např. tabulka YBC 10529).

Z předešlého popisu víme, jak dělit čísly tvaru $2^p \cdot 3^q \cdot 5^r$, kde p, q, r jsou celá nezáporná čísla. Někdy však bylo třeba dělit i jinými čísly, např. 7, 11, 13 … . I s příklady tohoto typu se na některých tabulkách setkáváme. Nalézáme úlohy „vhodně zadané", kdy dělenec je násobkem dělitele, tj. jde o dělení beze zbytku. V těchto případech se někdy v úloze objevuje slovní obrat „převrácenou hodnotu nehledej". Současně je položena otázka směřující k hledání toho násobku dělitele, který je roven dělenci.

Pokud nejde o dělení beze zbytku, objevuje se někdy lakonická odpověď, že dělení nelze provést (např. na destičce BM 85 210). Na jiných destičkách se pracuje s přibližnou hodnotou převrácené hodnoty. Například číslo $\frac{1}{7}$ je odhadnuto nerovnostmi

$$(0;8,34,16,59) < \frac{1}{7} < (0;8,34,18) \,,$$

což můžeme v desítkové soustavě vyjádřit v tvaru

$$0,142856404 < \frac{1}{7} < 0,14286\overline{1} \,.$$

V některých příkladech je při dělení sedmi použit aritmetický průměr výše uvedeného horního a dolního odhadu, tj. číslo $(0;8,34,17,29,30)$. Užitím této hodnoty se dopouštíme nepatrné chyby, asi $0,001\%$. V jiných příkladech se při dělení sedmi používá odhad $(0;8,34,17,8,34,17)$ s chybou asi $1,2 \cdot 10^{-8}$. Na speciálních tabulkách tzv. *aproximací* byly nalezeny obdobně přesné odhady pro převrácené hodnoty dalších čísel.

Poznamenejme, že z některých příkladů je velmi dobře patrné, že si mezopotámští počtáři byli dobře vědomi vzájemně inverzního vztahu čísel n a $\frac{1}{n}$.

Speciální tabulky.

Kromě tabulek pro násobení, tabulek převrácených hodnot čísel tvaru $2^p \cdot 3^q \cdot 5^r$ a tabulek aproximací převrácených hodnot některých dalších čísel byly v Mezopotámii užívány i tabulky druhých a třetích mocnin přirozených čísel a tabulka jejich součtů. Uplatňovaly se především při řešení úloh, které dnes řešíme pomocí kvadratických nebo kubických rovnic. Připomeňme, že druhá mocnina se objevovala i na některých tabulkách pro násobení, ale jen pro čísla, která byla uvedena v záhlaví. Do dnešních dnů se zachovalo 26 samostatných tabulek druhých mocnin.

Poznamenejme, že se pro výpočet druhé mocniny užíval termín *a-rá*, který označoval i násobení; např.

$$3 \quad a\text{-}r\acute{a} \quad 3 \quad 9\,,$$

nebo termín *Ib-Di*, např.

$$9 \quad \text{-}E \quad 3 \quad \text{-}Ib\text{-}Di\,,$$

pro třetí mocninu se užívalo označení *Ba-Di-E*, např.

$$27 \quad \text{-}E \quad 3 \quad \text{-}Ba\text{-}Di\text{-}E\,.$$

Další speciální tabulky obsahovaly přibližné hodnoty druhých a třetích odmocnin. Nevíme, jak je mezopotámští počtáři vypočítali; na základě studia některých příkladů, je však velmi pravděpodobné, že používali následující jednoduchý algoritmus.

Vypočtěme druhou odmocninu přirozeného čísla A, které není druhou mocninou nějakého přirozeného čísla. Číslo A vyjádříme vztahem

$$A = a^2 + b\,,$$

kde a, b jsou přirozená čísla a pro číslo a je

$$a^2 < A < (a+1)^2\,.$$

Potom lze $\sqrt{A}$ odhadnout takto:

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2+b} < \sqrt{a^2+b+\frac{b^2}{4a^2}} = a + \frac{b}{2a} =$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\left(2a+\frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a^2+b}{a}+a\right) = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{A}{a}+a\right).$$

Číslo A však můžeme vyjádřit rovněž vztahem

$$A = a^2 - b\,,$$

kde a, b jsou přirozená čísla a pro číslo a je

$$(a-1)^2 < A < a^2 .$$

Potom lze $\sqrt{A}$ odhadnout takto:

$$\sqrt{A} = \sqrt{a^2 - b} < \sqrt{a^2 - b + \frac{b^2}{4a^2}} = a - \frac{b}{2a} =$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \left(2a - \frac{b}{a}\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a^2 - b}{a} + a\right) = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{A}{a} + a\right) .$$

Pokud bychom použili tento algoritmus například k výpočtu druhé odmocniny čísel 2 a 3, získali bychom jen velmi hrubou aproximaci:

$$\sqrt{2} = \sqrt{1+1} \doteq \frac{1}{2} \cdot \left(2 + 1\right) = \frac{3}{2} \qquad \text{(chyba asi 6\%)} ,$$

$$\sqrt{3} = \sqrt{4-1} \doteq \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{3}{2} + 2\right) = 1\frac{3}{4} \qquad \text{(chyba asi 1\%)} .$$

Mezopotámští počtáři však užívali lepší aproximace, které získali tzv. *metodou průměru.*

Označme

$$a_1 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{A}{a} + a\right)$$

první odhad odmocniny $\sqrt{A}$. Víme, že je $a_1 > \sqrt{A}$. Jako druhý odhad vezmeme číslo

$$a_2 = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{A}{a_1} + a_1\right) .$$

Tento vzorec je založen na následujícím výpočtu. Druhou aproximaci a_2 předpokládáme v tvaru

$$a_2 = a_1 - x ;$$

hledáme číslo x, pro které

$$(a_1 - x)^2 \doteq a_1^2 - 2a_1 x = A .$$

Odtud

$$x = \frac{a_1^2 - A}{2a_1}$$

a tedy

$$a_2 = a_1 - \frac{a_1^2 - A}{2a_1} = \frac{a_1^2 + A}{2a_1} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{A}{a_1} + a_1\right) .$$

Užijme tuto metodu na výpočet aproximace $\sqrt{2}$.

$$\sqrt{2} = \sqrt{1+1} \doteq \frac{1}{2} \cdot \left(2 + 1\right) = \frac{3}{2} , \qquad \text{tj. v šedesátkové soustavě } (1;30) .$$

Jako první odhad vezmeme právě tuto hodnotu, tj. položíme

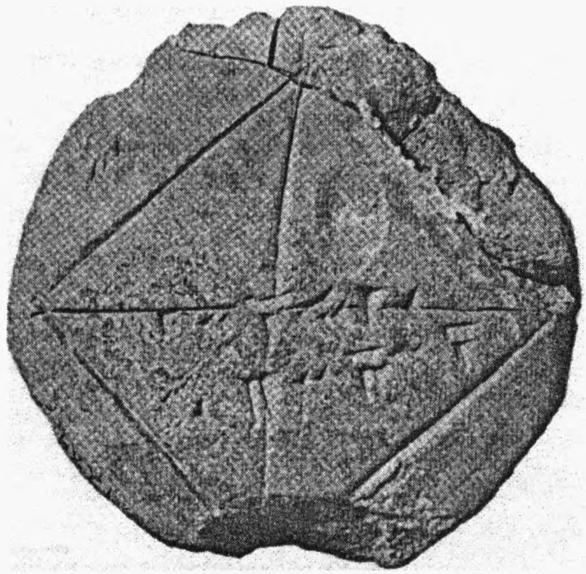
$$a_1 = (1; 30) = 1,5 .$$

Nyní vypočteme číslo $\frac{2}{a_1}$ a to tak, že nalezneme pomocí reciprokých tabulek převrácenou hodnotu k (1; 30) a vynásobíme ji číslem $A = 2$; převrácená hodnota je (0; 40), po zdvojnásobení obdržíme číslo (1; 20).

Nyní vypočteme aritmetický průměr čísel (1; 20) a $a_1 = (1; 30)$, dostaneme tak druhý odhad

$$a_2 = (1; 25) = 1,41\bar{6} .$$

Tuto hodnotu můžeme skutečně nalézt na některých tabulkách z druhého tisíciletí př. n. l. Použijeme-li metodu průměru ještě jednou, dostaneme aproximaci $(1; 24, 51, 10) = 1,414212963$; chyba je už jen $4,2 \cdot 10^{-5}\%$. Tato aproximace byla užívána k výpočtům v době Chammurabiho. Zapsána je např. na následující tabulce YBC 7289, která zachycuje vztah mezi délkou strany a délkou úhlopříčky čtverce.



Obdobným způsobem byly vypočteny i tabulky třetích odmocnin. Další speciální tabulky obsahovaly např. různé charakteristiky trojúhelníků a pravidelných n-úhelníků, různé „technické koeficienty“, převody jednotek apod.

Zájemcům o problematiku aritmetických operací ve staré Mezopotámii je možno doporučit bohatou literaturu uvedenou v následujícím seznamu.

LITERATURA

[Al] Colonel Allotte de la Fuÿe, *La Table Mathématique AO 6456*, Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale **29** (1932), 12–19.

[Br1] Bruins E. M., *Ulučšenie približenij v matematike Vavilonjan*, Istoriko-matematičeskie issledovanija **21** (1967), 61–70.

[Br2] Bruins E. M., *Computation in the Old Babylonian Period*, Janus **58** (1971), 222–267.

[C] Cazalas G., *Le calcul de la Table Mathématique AO 6456*, Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale **29** (1932), 183–187.

[Ca] Cajori F., *A History of Mathematical Notations*, Dover Publications, INC, New York, 1993, reprint dvoudílné knihy z roku 1928 a 1929.

[E] Edwards C. H., Jr., *The Historical Development of the Calculus*, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1979.

[DE] Damerow P., Englund R., *Die Zahlzeichensystem der Archaischen Texten aus Uruk*, in *Archaischen Texte aus Uruk* (eds. M. Green and H. J. Nissen), Berlin, 1987, str. 117–166.

[FR] Fowler D., Robson E., *Square Root Approximations in Old Babylonian Mathematics: YBC 7289 in Context*, Historia Mathematica **25** (1998), 366–378.

[Ga] Gazalé M., *Number From Ahmes to Cantor*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2000.

[Go] Goetsch H., *Die Algebra der Babylonier*, Archive for History of Exact Sciences **5** (1968/69), 79–153.

[H1] Høyrup J., *Investigations of an Early Sumerian Division Problem c. 2500 B. C.*, Historia Mathematica **9** (1982), 19–36.

[H2] Høyrup J., *Algebra and Naive Geometry: an Investigation of some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought*, Altorientalische Forschungen **17** (1990), 27–69, 262–354.

[H3] Høyrup J., *On Substractive Operations, Substractive Numbers and Purportedly Negative Numbers in Old Babylonian Mathematics*, Zeitschrift für Assyriologie und Vorderasiatische Archäologie **83** (1993), 42–60.

[H4] Høyrup J., *Babylonian Algebra from the View-Point of Geometrical Heuristics. An Investigation of Terminology, Methods, and Patterns of Thought*, University Centre, Roskilde, 1985.

[H5] Høyrup J., *A Note on Old Babylonian Computational Techniques*, Historia Mathematica **29** (2002), 193–198.

[Ch] Chabert J.-L. et al., *A History of Algorithms. From the Pebble to the Microchip*, Springer, Berlin, Heidelberg, ..., 1999.

[Ki] Kilmer A. D., *Two New Lists of Key Numbers for Mathematical Operations*, Orientalia **29** (1960), 273–308.

[Kn] Knuth D. E., *Ancient Babylonian Algorithms*, Communications of the Association of Computing Machinery **15** (1972), 671–677, opravy viz 19(1976), 108.

[Ko] Kolman A., *Dějiny matematiky ve starověku*, Academia, Praha, 1968.

[Me] Menninger K., *Number Words and Number Symbols. A Cultural History of Numbers*, 2001.

[Mu] Muroi K., *Extraction of Square Roots in Babylonian Mathematics*, Historia Scietiarum, Second Series, **9** (1999), 127–133.

[N1] Neugebauer O., *Mathematische Keilschrift-Texte*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1935 (erster und zweiter Teil), 1937 (dritter Teil), reprint Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[N2] Neugebauer O., *Vorlesungen über Geschichte der Antiken Mathematischen Wissenschaften, Erster Band. Vorgriechische Mathematik*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1934.

[NS] Neugebauer O., Sachs A., *Mathematical Cuneiform Texts*, American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research, New Haven, Connecticut, 1945, reprint, Harrassowitz, 1986.

[NW] Neugebauer O., Waschow H., *Bemerkungen über Quadratwurzeln und Quadratwurzel-Approximationen in der babylonischen Mathematik*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, B, Band 2, 1933, 291–297.

[Op] Oppert J., *Sechshundert und fünfzig. Eine babylonische magische Quadrattafell*, Zeitschrift für Assyrologie und Verwandte Gebiete **17** (1903), 60–74.

[P1] Powell M. A., *Sumerian Numeration and Metrology*, University Microfilms (72-14 445), Minneapolis, 1971.

[S1] Sachs A. J., *Notes on Fractional Expressions in Old Babylonian Mathematical Texts*, Journal of Near Eastern Studies **5** (1946), 203–214.

[S2] Sachs A. J., *Babylonian Mathematical Texts I: Reciprocals of Recular Sexagesimal Numbers*, Journal of Cuneiform Studies **1** (1947), 219–240.

[S3] Sachs A. J., *Babylonian Mathematical Texts II: Approximations of Reciprocals of Irregular Numbers in an Old Babylonian Text. III: the Problem of Finding the Cube Root of a Number*, Journal of Cuneiform Studies **6** (1952), 151–156.

[Se] Sethe K., *Von Zahlen und Zahlworten bei den alten Ägyptern*, Strassburg, 1916.

[Sch] Scholz E., *Geschichte der Algebra*, Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1990.

[Ve] Vetter Q., *Babylonské násobení a dělení*, Časopis pro pěstování matematiky a fyziky **51** (1922), 271–278.

[Vo] Vogel K., *Vorgriechische Mathematik*, Würzburg, 1958–1959.

[Vy] Vygodskij M. Ja., *Arifmetika i algebra v drevnem mire*, Nauka, Moskva, 1967.

[Wa] Waerden B. L. van der, *Probuždajuščajasja nauka, Matematika drevnego Egipta, Vavilona i Grecii*, Fizmatgiz, Moskva, 1959, překlad I. N. Veselovskij.

[W] Whiting R. M., *More Evidence for Sexagesimal Calculations in the Third Millennium*, Zeitschrift für Assyrologie **74** (1984), 59–66.

WWW STRÁNKY

[WWW] http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath.

STAROBABYLÓNSKÉ MÍRY A VÁHY.

Systém měr a vah byl ve Starobabylónské říši velmi komplikovaný, ale jednodušší než starý systém sumerský. Ve většině matematických textů je soubor měr a vah relativně standardizovaný; pevně jsou stanovené relace mezi jednotkami, většina převodů pracuje jen s jednoduchými šedesátinnými zlomky.

Délkové míry.

Nejmenší délkovou jednotkou bylo 1 še [zrno] (asi 2,75 mm). Větší jednotky jsou přehledně zachyceny v následující tabulce:

1 šu-ši	=	6 še	[prst]	asi 1,65 cm
1 kùš	=	30 šu-ši	[loket]	asi $\frac{1}{2}$ m
1 gi nebo 1 qanu	=	6 kùš	[rákos]	asi 3 m
1 nindam nebo 1 gar	=	2 gi	[tyč, hůl, prut]	asi 6 m
1 eše	=	10 gar	[lano]	asi 60 m
1 uš	=	6 eše		asi 360 m
1 beru	=	30 uš		asi 10,8 km

Plošné míry.

Základní plošnou jednotkou byl 1 sar (asi 36 m^2); dělil se na 60 gin, přičemž se 1 gin ještě dělil na 180 še. Jeden sar byl tedy roven 10 800 še. Plošné míry jsou zaneseny v následující tabulce:

1 gin	=	180 še		asi 0,6 m^2
1 sar	=	60 gin		asi 36 m^2
1 ubu	=	50 sar		asi 0,18 ha
1 iku	=	2 ubu	[kvadratické lano]	asi 0,36 ha
1 eše	=	6 iku		asi 2,16 ha
1 bur	=	3 eše	[1 beru × 1 gar]	asi 6,48 ha

Objemové míry.

Základní objemovou jednotkou byl 1 objemový sar; šlo o objem hranolu se čtvercovou podstavou o straně 1 gar a výškou 1 kúš. Vzhledem k tomu, že 1 gar je roven 12 kúš, je 1 objemový sar roven jedné dvanáctině kubického garu, tj. $(0;5)$ gar^3. Objemové jednotky měly stejné názvy jako jednotky plošné.

1 objemový gin	=	180 objemových še
1 objemový sar	=	60 objemových gin
1 objemový ubu	=	50 objemových sar

Duté míry.

Duté míry sloužily k měření objemu zrna, oleje, piva apod. Odvozeny byly od starých sumerských měr. Základní dutou jednotkou byla 1 sìla (asi 1 litr). Dělila se na 60 gin, přičemž 1 gin se dále dělil na 180 še. Jednotka sìla tedy byla rovna 10 800 še. Přehled dutých měr je v následující tabulce:

1 gin	=	180 še
1 sìla	=	60 gin
1 bàn	=	10 sìla
1 pi	=	6 bàn
1 gur	=	5 pi

Váhy.

Základní váhovou jednotkou byla 1 mina (asi 0,5 kg); další jednotky jsou zachyceny v následující tabulce.

1 še	[zrno]	asi 0,05 g
1 gin = 180 še	[šekel]	asi 0,83 dkg
1 mina = 60 gin		asi 0,5 kg
1 gú = 60 mina	[talent]	asi 30 kg

Poznamenejme, že nejstarší identifikovaná závaží pocházejí z poloviny třetího tisíciletí př. n. l. Některá byla vyrobena v podobě kachen nebo lvů, jiná měla kulový nebo válcový tvar. Například ve starobylém Kalchu byla nalezena série 17 bronzových závaží v podobě lvů; největší závaží váží téměř 20 kg a je dlouhé skoro 30 cm, nejmenší váží skoro 50 g a je dlouhé asi 2 cm. Některá závaží byla popsána jménem krále Sinecheriba (asi 704–681 př. n. l.) a údajem o váze. Více viz [Ro].

Cihlová míra.

Speciální objemovou jednotkou byla 1 cihla, která byla odvozena od objemu malého hranolu, který představoval ideální cihlu. Přitom 720 cihel dalo tzv. cihlový sar, tj. 1 objemový sar.

1 gin	=	12 cihel
1 sar	=	720 cihel
1 ubu	=	36 000 cihel
1 iku	=	72 000 cihel

Poznamenejme, že se jednotky a převody mezi nimi v Kassitské a Novobabylónské říši nepatrně změnily. Například u délkové míry byly stanoveny tyto převody

1 kùš	=	24 šu-ši
1 gar	=	14 kùš
1 sìla	=	10 nindam
1 bàn	=	6 sìla
1 pi	=	6 bàn

LITERATURA

[Fr1] Friberg J., *A Survey of Publications on Sumero-Akkadian Mathematics, Metrology and Related Matters (1854-1982)*, Department of Mathematics, Chalmers University of Technology and the University of Göteborg, No. 1982-17, 1982.

[Fr2] Friberg J., *Bricks and Mud in Metro-Mathematical Cuneiform Texts* in J. Høyrup, P. Damerow (eds.): *Changing Views on Ancient Near Eastern Mathematics*, Berliner Beiträge zum Vorderen Orient, 19. Berlin, Dietrich Reimer, 2001, pp. 61–154.

[Hi] Hilprecht H. V., *Mathematical Metrological and Chronological Tablets from the Temple Library of Nippur*, Philadelphia, 1906.

[Ho] Høyrup J., *In Measure, Number, and Weight*, Studies in Mathematics and Culture, State University of New York Press, New York, 1994.

[N1] Neugebauer O., *Mathematische Keilschrift-Texte*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1935 (erster und zweiter Teil), 1937 (dritter Teil), reprint Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[N2] Neugebauer O., *Vorlesungen über Geschichte der Antiken Mathematischen Wissenschaften, Erster Band. Vorgriechische Mathematik*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1934.

[NS] Neugebauer O., Sachs A., *Mathematical Cuneiform Texts*, American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research, New Haven, Connecticut, 1945, reprint, Harrassowitz, 1986.

[Po] Powell M. A., *Maße und Gewichte in Reallexikon der Assyriologie und Vorderasiatischen Archäologie VII, de Gruyter*, Berlin, New York, 1990, pp. 457–516.

[Ro] Roaf M., *Svět staré Mezopotámie a starověkého Blízkého východu*, Knižní klub Balios, Praha, 1998.

[ThD] Thureau-Dangin F., *La Mesure du „QA“*, Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale **29** (1932), 189–191.

WWW STRÁNKY

[WW1] http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath.

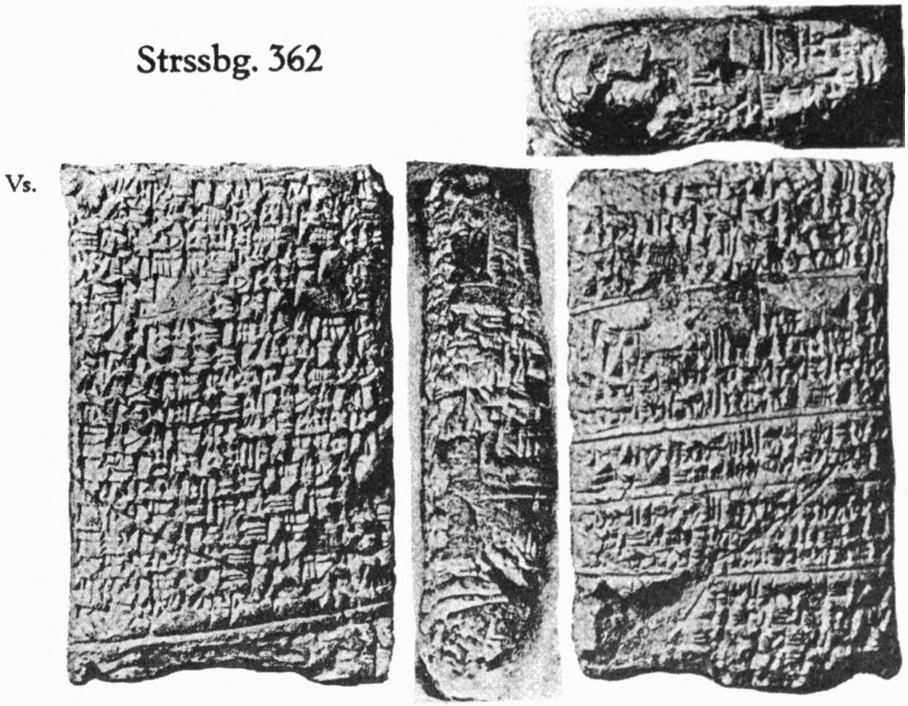
[WW3] http://www.math.tamu.edu/~don.allen/history/babylon/babylon.html.

[WW4] http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Indexes/Babylonians.html.

POSLOUPNOSTI.

Aritmetická posloupnost.

Ze starobabylónského období se zachovalo několik tabulek, které obsahují příklady vedoucí na aritmetickou posloupnost. Je v nich většinou řešen problém rozdělení nějakého majetku (práce apod.) mezi předem daný počet lidí.



První úloha na tabulce Strssbg. 362 (viz předchozí obrázek)[1] je věnována aritmetické posloupnosti. Její text není příliš jasný:

(10) *bratrů,* (1) *a* $\frac{2}{3}$ *miny stříbra, bratr nad bratrem dostává část, kolik, já nevím. Díl osmého bratra je* (6) *šekelů. Bratr za bratrem dostává kolik?*

Spojení *bratr za bratrem dostává*, resp. *bratr nad bratrem dostává* signalizuje aritmetickou posloupnost. V úloze se má rozdělit $1\frac{2}{3}$ miny stříbra mezi deset bratrů tak, aby jejich majetkové podíly tvořily aritmetickou posloupnost; přitom je dán majetek osmého bratra (6 šekelů). Úkolem je najít diferenci této klesající aritmetické posloupnosti a všechny její členy. Řešení příkladu je zapsáno takto:

---

[1] Tabulka pochází ze Starobabylónské říše (asi 2000 až 1800 př. n. l.), byla nalezena ve starobylé Warce. Obsahuje pět úloh, jejichž text je na některých místech značně poškozen.

Ty svým způsobem: vypočti převrácenou hodnotu (10), *počtu lidí, získal jsi* (0; 6).
Vynásob (0; 6) *a* (1) *a* $\frac{2}{3}$ *miny stříbra.* (10) *šekelů jsi získal.*
Zdvoj (10). *Dostaneš* (20). (6), *část osmého bratra, zdvoj.* (12) *jsi získal.*
Odečti (12) *od* (20). (8) *získáváš.* (8) *si udrž v paměti.*
(1) *a* (1), *ša-ap-li-a-am*[2] *sečti,* (2) *jsi získal.* (2) *zdvoj.* (4) *jsi získal.*
(1) *a* (4) *sečti.* (5) *jsi získal.* (5) *od* (10), *počet lidí, odečti.* (5) *jsi získal.*
Vypočti převrácenou hodnotu od (5). (0; 12) *jsi dostal.*
(0; 12) *vynásob* (8). *Získal jsi* (1; 36). (1; 36) *je to, čím se liší bratr od bratra.*[3]

Označme členy uvažované posloupnosti symboly $a_1, a_2, \ldots, a_{10}$, její diferenci písmenem d.

Písař vypočetl průměrný díl, který by připadl na jednoho bratra: vydělil $1\frac{2}{3}$ miny stříbra, tj. 100 šekelů[4] deseti; přesněji řečeno, vynásobil $1\frac{2}{3}$ miny stříbra převrácenou hodnotou k 10, tj. číslem (0; 6); vyšlo 10 šekelů. Tuto hodnotu zdvojnásobil a získal tak součet majetku třetího a osmého bratra, tj. $a_3 + a_8 = 20$. Protože je však $a_3 + a_8 = 2a_8 + 5d$, odečetl písař od čísla 20 dvojnásobek čísla 6 a získal číslo 8. Toto číslo pak vydělil číslem 5 (resp. vynásobil jeho převrácenou hodnotou, tj. (0; 12)) a získal tak diferenci $d = (1; 36)$.[5]

Poměrně komplikovaně písař stanovil počet diferencí „mezi“ osmým a třetím bratrem. Určil počet diferencí mezi osmým a desátým bratrem, který je stejný jako počet diferencí mezi třetím a prvním bratrem; počet diferencí mezi osmým a třetím bratrem je pak roven rozdílu počtu všech bratrů (10) a dvojnásobku počtu diferencí mezi osmým a desátým bratrem (4) zvětšeného o jedničku, tj. $10 - (4 + 1) = 5$.

Ze zápisu řešení je zřejmé, že písař dobře věděl, co dělá, neboť všechny výpočty jsou bezchybné. Text úlohy je poškozen, výpočet jednotlivých členů posloupnosti chybí. Ve výsledku se mohly objevit majetkové podíly všech deseti bratrů:

$$17\frac{1}{5}, \quad 15\frac{3}{5}, \quad 14, \quad 12\frac{2}{5}, \quad 10\frac{4}{5}, \quad 9\frac{1}{5}, \quad 7\frac{3}{5}, \quad 6, \quad 4\frac{2}{5}, \quad 2\frac{4}{5},$$

neboli

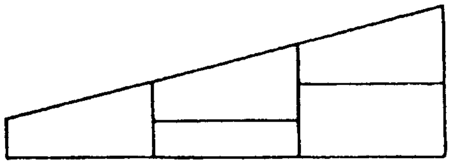
(17; 12), (15; 36), 14, (12; 24), (10; 48), (9; 12), (7; 36), 6, (4; 24), (2; 48).[6]

Pátá úloha téže tabulky bývá chápána[7] jako aplikace aritmetické posloupnosti v praxi. Její značně poškozený text zní asi takto:

Zeď. (10) *gar,* (1) *a* $\frac{1}{2}$ *gar šířky.* (3) *dozorci mají po* (3) *gar* (4) *loktech na délku vzít. První má* (60) *mužů, druhý* (1, 20), *třetí* (1, 40) *mužů. Započato s* (5) *lokty výšky, získáno* [.......] *hmoty země. Zdi* [.......] *a kolik až hmoty země?*[8]

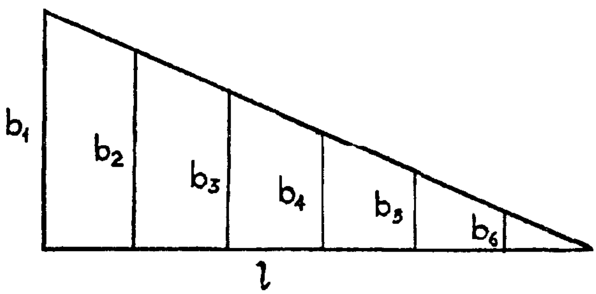
[2] Význam tohoto výrazu není jasný, ani Neugebauer v [N1] ho nepřekládá.
[3] Viz [N1]; originální text str. 239–240, německý překlad str. 240–241, rozbor str. 242.
[4] 1 mina stříbra je 60 šekelů.
[5] Poznamenejme, že v našem pojetí je diference záporná.
[6] Zajímavé je srovnat tento příklad s příkladem R64 Rhindova papyru.
[7] Např. Neugebauerem v [N1].
[8] Viz [N1], originální text str. 240, německý překlad str. 242, rozbor str. 243.

Je tedy dán počet pracovníků, kteří budují nějakou zeď (hloubí příkop nebo staví násep) tvaru seříznutého klínu (viz obrázek).



Zeď délky 10 gar (tj. 120 loktů), je rozdělena na třetiny; na prvním úseku pracuje 60, na druhém 80 a na třetím 100 mužů. Počty pracovníků tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí 20. Odpovídajícím způsobem může vzrůstat i zeď. Výška zdi v nejnižší části je 5 loktů, šířka je $1\frac{1}{2}$ gar (tj. 18 loktů). Patrně se má vypočítat hmota, kterou je třeba navršit nebo vykopat na jednotlivých úsecích. Ani postup ani výsledek však na tabulce uveden není.

Zajímavá úloha je na tabulce YBC 4608 ze Starobabylónské říše; pole tvaru pravoúhlého trojúhelníku, jehož jedna odvěsna je $l = (6,30)$ a obsah $S = (11,22,30)$ (viz následující obrázek), se má rozdělit mezi 6 bratrů tak, aby jejich díly tvořily aritmetickou posloupnost.

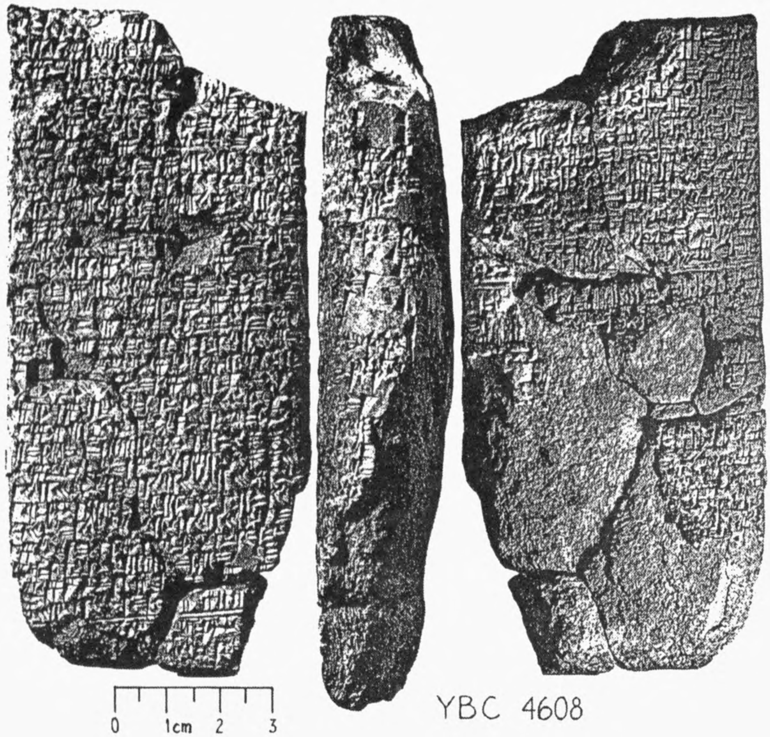


Odvěsna $l = (6,30)$ (*délka*) se rozdělí na šest stejných dílů, každý má délku $(1,5)$. Dále se vypočte druhá odvěsna b_1 (*šířka*) uvažovaného trojúhelníkového pole:

$$b_1 = \frac{2S}{a} = (22,45,0) : (6,30) = (3,30)\ .$$

Rovněž odvěsna $b_1 = (3,30)$ se rozdělí na šest stejných dílů, vychází 35; pak jsou vypočteny „šířky" polí jednotlivých bratrů; každá je o 35 menší než šířka dílu předchozího bratra:

1. bratr	$b_1 = (3,30)$
2. bratr	$b_2 = (2,55)$
3. bratr	$b_3 = (2,20)$
4. bratr	$b_4 = (1,45)$
5. bratr	$b_5 = (1,10)$
6. bratr	$b_6 = \quad (35)$


0
1cm
2
3
YBC 4608


Obv.
5
10
15
20
25
30
Rev.
5
10
15
20
25
Fragments
YBC 4608

Z dochované části řešení je patrné, že mezopotámský počtář aritmetické posloupnosti dobře rozuměl; každý člen posloupnosti vypočetl ze znalosti diference a předchozího členu. Poškozený text končí výčtem šířek jednotlivých dílů. Dále mohl písař pokračovat výpočtem rozdílu výměr polí dvou po sobě jdoucích bratrů: $(35) \times (1,5) = (37,55)$. Pole jednotlivých bratrů tedy měla tyto výměry:

1. bratr $S_1 = (5;30) \times (37,55) = (3,28,32;30)$

2. bratr $S_2 = (4;30) \times (37,55) = (2,50,37;30)$

3. bratr $S_3 = (3;30) \times (37,55) = (2,12,42;30)$

4. bratr $S_4 = (2;30) \times (37,55) = (1,34,47;30)$

5. bratr $S_5 = (1;30) \times (37,55) = (56,52;30)$

6. bratr $S_6 = (0;30) \times (37,55) = (18,57;30)$

V jedné úloze tak mohla být aritmetická posloupnost procvičena hned dvakrát, šířky pozemků tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí (35), výměry polí tvoří aritmetickou posloupnost s diferencí (37, 55). Pozemky prvních pěti bratrů mají tvar pravoúhlého lichoběžníku, pozemek posledního bratra má tvar pravoúhlého trojúhelníka.[9]

Poznamenejme, že z kasitského období se na tabulce AO 172 64 zachovala ještě složitější úloha, v níž se mezi šest bratrů rozděluje pozemek tvaru lichoběžníku o základnách 217 a 135 a ramenech 81 a 51. Rozdělení má být provedeno tak, aby dvojice po sobě jdoucích bratrů dostala stejně, a aby rozdíl mezi po sobě jdoucími dvojicemi byl konstantní.[10]

Tabulka Strssbg. 363 (viz následující obrázek)[11] je některými badateli považována za „sbírku úloh" na procvičení aritmetické posloupnosti. Toto tvrzení je značně problematické, neboť se majetek většinou rozděluje jen mezi tři nebo čtyři bratry.

První úloha tabulky je zcela zničena. Z druhé úlohy se zachoval pouze výsledek $a_1 = (2,30)$, $a_2 = (1,40)$ a $a_3 = (50)$.

Třetí příklad pravděpodobně rozděluje majetek mezi čtyři bratry. V závěru špatně zachovaného řešení je napsáno, že majetek prvního bratra je $(1,40)$, majetek druhého bratra neznáme, třetí bratr má $\frac{2}{3}$ majetku prvního a čtvrtý $\frac{1}{3}$ majetku prvního. Aritmetickou posloupnost tedy tvoří majetky prvního, třetího a čtvrtého bratra.

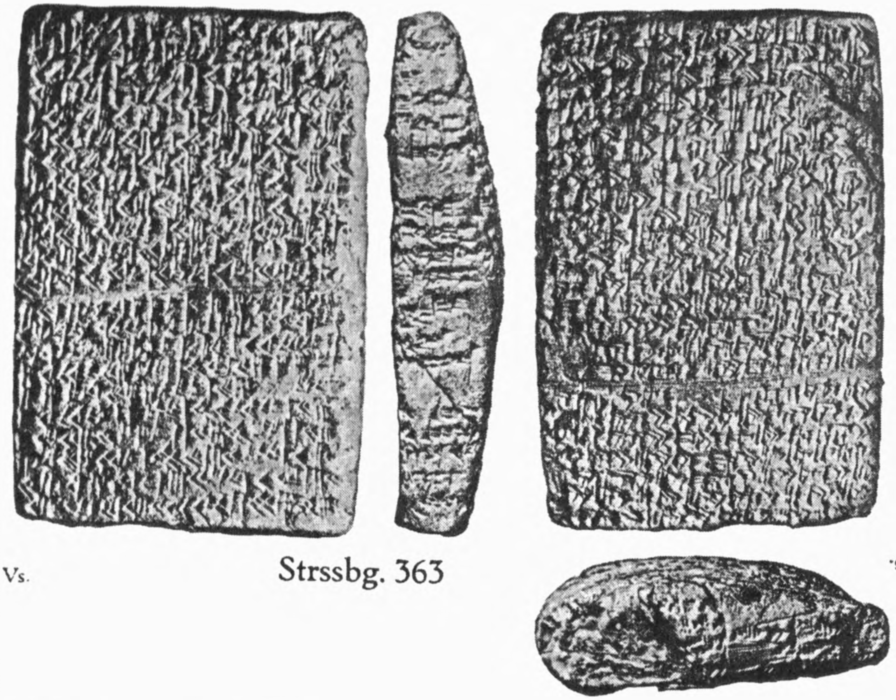
[9] Viz [NS], originální text str. 50, anglický překlad str. 51, rozbor str. 52–53.

[10] Více viz [Cv].

[11] Tabulka pochází ze Starobabylónské říše, byla nalezena ve Warce. Obsahuje pět úloh, jejichž znění je na některých místech značně poškozeno.

Ve čtvrtém příkladu se rozděluje hodnota 93 mezi 3 bratry, přičemž jsou stanoveny poměry jejich podílů 7 : 11 : 13; hodnoty vypočtených majetků jsou 21, 33, 39 a nejde tedy o aritmetickou posloupnost.

Poslední příklad je zničen, podle nepatrných zbytků textu se mohlo jednat o analogii předešlého příkladu.[12] Domníváme se, že uvedené úlohy nemůžeme řadit k aritmetické posloupnosti.



Vs. Strssbg. 363 Rs.

Geometrická posloupnost.

Ze starobabylónského období se zachoval jeden příklad, který dokládá práci s geometrickou posloupností. Jde o čtvrtou úlohu na tabulce Strssbg. 362,[13] která pracuje s geometrickou posloupností s kvocientem 2. Její text zní takto:

Úsečka. Po (1) *loket* (1) *prst až k úplnému součtu abys zdvojoval. K jaké délce jsem šel? Šel jsem až k* (1) *garu a* (3) *a* $\frac{1}{2}$ *lokte délky.*[14]

V úloze je zadána úsečka délky 1 loket a 1 prst, tj. (1;2) lokte. Tato úsečka je zvětšována v geometrické posloupnosti. Součet délek všech úseků je 1 gar a $3\frac{1}{2}$ lokte, což je (15; 30) lokte. Mezi čtvrtým a pátým příkladem na tabulce je poznamenáno číslo 4, což je počet členů geometrické posloupnosti ze čtvrtého příkladu.

---

[12] Viz [N1], originální text str. 274–275, německý překlad str. 275–276, rozbor str. 277.

[13] Tabulka pochází ze Starobabylónské říše, byla nalezena ve Warce. Obsahuje pět úloh, jejichž text je na některých místech poškozen.

[14] Poznamenejme, že 1 gar je 12 loktů a 1 loket 30 prstů.

Buď je vedle délky dané úsečky $a = (1;2)$ lokte dán také počet členů posloupnosti, tj. (4), a má se vypočítat součet délek což se zdá pravděpodobnější, nebo je dán součet délek, tj. (15; 30), a má se vypočítat počet členů posloupnosti. Řešení úlohy lze získat takto:

$$(1;2) \times (1 + 2 + 4 + 8) = (15;30) \ .$$

Postup řešení však chybí; kromě geometrické posloupnosti je zde procvičen i převod jednotek.[15]

Z období prvního tisíciletí máme dva příklady, které dokládají jistý pokrok v chápání posloupností.

Na tabulce AO 6484[16] je první příklad věnován geometrické posloupnosti. Text úlohy je velmi stručný, poslední řádek je navíc poškozený:

Od (1) *do* (10) *polož, přes* (2) *stoupej, sčítej.* (8, 32). (1) *od* (8, 32) *odečti. Zbude* (8, 31).

(8, 31) *přidej k* (8, 32). (17, 3) [.......][17]

V příkladu se má vypočítat součet prvních deseti členů geometrické posloupnosti s prvním členem $a_1 = 1$ a kvocientem $q = 2$, tj. vypočítat číslo $1 + 2 + 2^2 + \cdots + 2^9$. Identifikovat přímo ze zadání, že jde o geometrickou posloupnost, není jednoduché, neboť zadání není dobře srozumitelné. Podle návodu je zřejmé, že počtář počítal takto:

$$S = a_{10} + a_{10} - 1 = (8,32) + (8,31) = (17,3) \ .$$

Není však jasné, jak byl vypočten desátý člen $a_{10} = 2^9$, zda přímo nebo zda bylo vypočteno všech deset členů. Je však zřejmé, že součet prvních deseti členů této posloupnosti nebyl vypočten postupným sčítáním jednotlivých členů. Znalost obecné metody řešení, která odpovídá známému vzorci

$$S_n = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \ ,$$

však z uvedeného příkladu nevyplývá.

Poznamenejme, že mezopotámský postup je správný právě ve speciálním případě $a_1 = 1$ a $q = 2$; předchozí vzorec má za těchto podmínek velmi jenoduchý tvar

$$S_n = 2^n - 1 = 2^{n-1} + 2^{n-1} - 1 \ .$$

---

[15] Viz [N1], originální text str. 240, německý překlad str. 241–242, rozbor str. 243.

[16] Tabulka pochází z doby Seleukovců, byla objevena ve Warce. Obsahuje sedmnáct úloh napsaných na obou stranách tabulky.

[17] Viz [N1], originální text str. 97, německý překlad str. 99, rozbor str. 102.

Součet čtverců.

Ve druhém příkladu na tabulce AO 6484 je vypočten součet čtverců prvních deseti přirozených čísel, tj. číslo $1^2+2^2+3^2+\cdots+10^2$. Zadání i řešení příkladu je opět velmi stručné, je z něj však možno jasně zjistit postup. Text úlohy a jejího řešení zní takto:

Čtverec (1) × (1), *to je od* (1), *do* (10) × (10), *to je* (1, 40). *Vypočti součet!*
(1) *vynásob* (0; 20) [třetina]. (0; 20).
(10) *vynásob* (0; 40). *To jsou dvě třetiny.*
(6; 40) *sečti s* (0; 20). *To je* (7).
(7) *vynásob* (55). (6, 25). *Součet je* (6, 25).

Popsaný postup řešení lze v naší symbolice zapsat známým vzorcem pro součet čtverců n po sobě jdoucích přirozených čísel:

$$S_n = \frac{2n+1}{3} \cdot \frac{n(n+1)}{2} = \frac{2n+1}{3} \cdot s_n\,,$$

kde s_n je součet prvních n přirozených čísel.

Nevíme, jak počtář určil součet prvních deseti přirozených čísel. Pravděpodobně byla tato část úlohy tak lehká, že ji vůbec nekomentoval a pouze uvedl výsledek 55.[18]

LITERATURA

[Ca] Cajori F., *A History of Mathematical Notations*, Dover Publications, INC, New York, 1993, jde o reprint dvoudílné knihy z roku 1928 a 1929.

[Cv] Caveing M., *La Tablette babylonienne AO 172 64 et le probléme des six frères*, Historia Mathematica **12** (1985), 6–24.

[Ga] Gazalé M., *Number from Ahmes to Cantor*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2000.

[GG2] Grattan-Guinness I., *The Fontana History of the Mathematical Sciences*, Fontana Press, London, 1997.

[Ch] Chabert J.-L. et al., *A History of Algorithms. From the Pebble to the Microchip*, Springer, Berlin, Heidelberg, ..., 1999.

[Ko] Kolman A., *Dějiny matematiky ve starověku*, Academia, Praha, 1968.

[N1] Neugebauer O., *Mathematische Keilschrift-Texte*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1935 (erster und zweiter Teil), 1937 (dritter Teil), reprint Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[N2] Neugebauer O., *Vorlesungen über Geschichte der Antiken Mathematischen Wissenschaften, Erster Band. Vorgriechische Mathematik*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1934.

[N3] Neugebauer O., *Beiträge zur Geschichte der babylonischen Mathematik*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, B, Band 1, 1931, 120–130.

[18] Viz [N1], originální text str. 98, německý překlad str. 99, rozbor str. 103.

[NS] Neugebauer O., Sachs A., *Mathematical Cuneiform Texts*, American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research, New Haven, Connecticut, 1945, reprint, Harrassowitz, 1986.

[Vo] Vogel K., *Vorgriechische Mathematik*, Würzburg, 1958–1959.

[Vy] Vygodskij M. Ja., *Arifmetika i algebra v drevnem mire*, Nauka, Moskva, 1967.

[WN] Waschow H., Neugebauer O., *Reihen in der babylonischen Mathematik*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, B, Band 2, 1933, 298–304.

WWW STRÁNKY

[WW1] http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath.

[WW3] http://www.math.tamu.edu/~don.allen/history/babylon/babylon.html.

[WW4] http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Indexes/Babylonians.html.

ÚROKOVÝ POČET.

Mezopotámie byla jednou z oblastí, kde se od pradávna čile rozvíjely různé finanční transakce; dokládají to některé tabulky z nejstarších dob. Na nich jsou zaznamenány daně, smlouvy, depozita, úroky, dluhy, klauzule o placení doručiteli apod. Ve druhém tisíciletí př. n. l. bylo nejprve jako peněžní jednotka používáno zrno; postupně se však nahrazovalo stříbrem, tj. klasickým oběživem. Původně plnily úlohu banky chrámové komplexy nebo palácová sídla, kde se shromažďovalo obilí a později stříbro. V dalších stoletích se objevily první soukromé podniky, které byly řízeny rozvětvenými rodinami, které pronajímaly pozemky, zvířata a pracovní nářadí, půjčovaly peníze apod. Průměrný úrok v Mezopotámii byl poměrně vysoký, pohyboval se od dvaceti do třiceti procent, někdy býval i vyšší. Řada zákonů v Chammurabiho zákoníku pojednává o právech a povinnostech dlužníků i bankéřů:

Jestliže (je tu) někdo, na němž vázne úročný dluh, jehož pole bůh Adad zaplavil nebo povodeň odnesla nebo pro nedostatek vody se obilí na poli neurodí, (tu) v tomto roce obilí věřiteli neodvede a svou tabulku navlhčí a úrok za tento rok nedá.[1] ([Mo], str. 204)

Jestliže šenkýřka nepřijala při koupi opojného nápoje obilí, (ale) přijala stříbro podle velikého závaží a snížila hodnotu opojného nápoje oproti ceně obilí, tuto šenkýřku usvědčí a hodí do vody. ([Mo], str. 205)

Není proto divu, že se dochovaly i tabulky, které obsahují příklady procvičující různé bankovní výpočty, např. výpočet výše základního kapitálu ze znalosti splácených úroků při jednoduchém úrokování, růst kapitálu při komplikovanějším úrokování, výpočet let během nichž vzroste složený kapitál na požadovanou hodnotu apod.

Jednoduchý úrokový počet.

Na tabulce Vat 8521 (viz následující obrázek)[2] jsou čtyři úlohy, v nichž je zadán roční úrok, roční úroková sazba a má se vypočítat základní kapitál, tj. půjčený obnos. První příklad zní:

Za (1) *minu stříbra on dal* (12) *šekelů, jaká hodnota je splácena, dal-li splátku* (1,40) *šekelů.*

Vezmi (1) *minu.* (0;12) *vezmi,* (1,40) *vezmi za to, co ti dal.*
(0;12) *vynásob* (1). (0;12). *Převrácenou hodnotu od* (0;12) *hledej.* (5) *máš.*
(5) *vynásob* (1,40). (8,20) *je základní kapitál.*

---

[1] *Navlhčením hliněné tabulky se odstraní původní text a do změklé hmoty je možno vepsat text opravený.*

[2] Pochází ze starobabylónského období, je popsána z obou stran, text je však místy poškozen.

Jestliže (8,20), *základní kapitál, je splácen* (12) *šekely z* (1) *miny, pak* (1,40) *je úrok.*

(1) *minu* (0;12) *násob.* (0;12). (0;12) *a* (8,20) *násob.* (1,40) *je úrok.*

Jaký je kořen z (1,40)*?* (10) *to je.*[3]

VAT 8521

V úloze je zadána úroková sazba 12 šekelů z 1 miny, tj. 12 šekelů ze 60 šekelů; jde tedy o obvyklou sazbu 20 procent.[4] Dále známe úrok $(1,40) = 100$ šekelů.

Úkolem je vypočítat půjčenou částku. Tehdejší postup lze v naší symbolice zapsat takto:

$$z = \frac{u}{p} = \frac{100}{0,2} = 500 = (8,20) \ ,$$

kde z je hledaný základní kapitál, $u = (1,40)$ je splácený úrok a $p = (0;12)$ je úroková sazba. Zajímavé je, že se v textu řešení objevuje z našeho pohledu velmi triviální násobení číslem 1. Tento obrat se vyskytuje i na jiných tabulkách, snad šlo o vytvoření obecného algoritmu, který by byl použitelný i pro případ, že by byla úroková sazba zadána jinak než *k šekelů z 1 miny.*

Druhá část zachyceného řešení je patrně zkouška; může však jít i o modifikaci původního příkladu: z výsledku se počítá zadání. Snad jde o jakousi rekapitulaci příkladu, která připomíná „odpověď celou větou“.

[3] V originálním textu je místo slova kořen slovo *íb-si*, což se někdy překládá jako *kořen*, někdy jako *odmocnina.*

[4] Poznamenejme, že úroková sazba byla v Mezopotámii vzhledem k šedesátkové soustavě zadávána určitým dílem ze šedesáti.

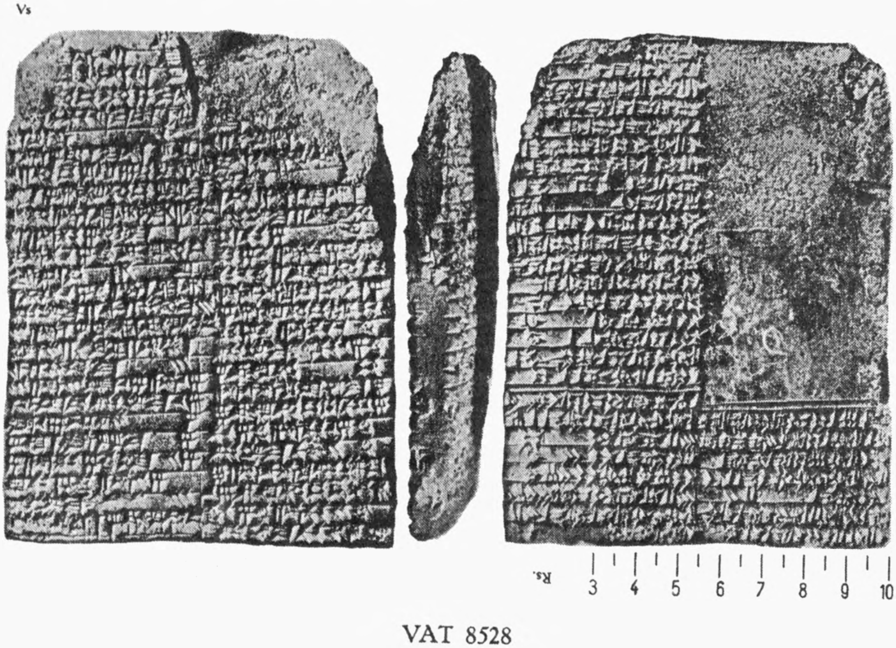
Zvláštní smysl má závěr úlohy, kde se objevuje termín *íb-si*, který má širší význam. Někdy je překládán jako kořen jindy jako druhá odmocninu. V tomto příkladě je vypočtena druhá odmocnina čísla $(1,40) = 100$. Není jasné, proč počtář v takovýchto situacích druhou odmocninu uvádí.

V dalších třech příkladech této tabulky[5] je úroková sazba stejná, úrok je po řadě $(7,30) = 450$, (36) a (18). Vypočtené kapitály jsou $(37,30) = 2\,250$, $(3,0) = 180$ a $(1,30) = 90$. Všechny tři úlohy užívají stejný postup jako úloha první.

Zajímavá je závěrečná část všech úloh. Ve druhé se má určit *ba-si* ze $(7,30)$, výsledek je poškozen, ve třetí se má určit *íb-si* ze (36), výsledek je (6), ve čtvrté se má opět určit *ba-si* z (18), výsledek je (3). Zkoumáním obdobných příkladů bylo zjištěno, že *íb-si* je druhá odmocnina hodnoty splátky a *ba-si* druhá odmocnina poloviny hodnoty splátky. Smysl výpočtů druhých odmocnin v těchto příkladech není jasný.

Komplikovanější úrokový počet.

Tři složitější úlohy na úrokový počet jsou obsaženy na starobabylónské tabulce VAT 8528 (viz následující obrázek).



VAT 8528

Rekonstrukce značně poškozeného textu druhé úlohy této tabulky byla provedena po pečlivém studiu uvedeného postupu řešení. Celý text zní ve volném překladu takto:

[5] Viz [N1]; originální text str. 351–352, německý překlad str. 355–356, rozbor str. 360–361.

Uložil-li si někdo (1) minu na (30) let, na co se přemění, když je každoroční úrok (12) šekelů z (1) miny, v průběhu prvního pětiletí úrok sám zisk nepřináší. Po uplynutí pěti let se původní majetek zdvojnásobil. V následujících letech se úroková sazba nemění a přirůstání je na (2) miny ...

... (0; 12) vynásob (5). (1).

V pátém roce kapitál i úrok se rovnají (1), přidej úrok k základnímu kapitálu, (2) je kapitál a úrok v pátém roce.

(5) let k pátému roku přidej, to je desátý rok. (2), kapitál a úrok, zdvoj, (4). (4) je kapitál a jeho úrok v desátém roce.

(5) let přidej k deseti letům, to je patnáctý rok, (4) kapitál a úrok, zdvoj, (8). (8) je kapitál a úrok v patnáctém roce.

(5) let přidej k patnácti rokům, to je dvacátý rok, (8) zdvoj, to je (16). (16) je kapitál a úrok ve dvacátém roce,

(5) let přidej k dvaceti letům, to je dvacet pět let, (16), kapitál a úrok, zdvoj, to je (32). (32) je kapitál a jeho úrok ve dvacátém pátém roce.

(5) let přidej k dvaceti pěti letům, to je třicet let. (32) zdvoj, (1, 4). (1, 4) je kapitál a úrok za třicet let.[6]

Úkolem je určit, jaký kapitál z_{30} získáme za třicet let, uložíme-li základní kapitál $z_0 = 1$ mina s roční úrokovou sazbou 20 procent. Získaný úrok se však úročí až po pěti letech; jde vlastně o situaci, kdy je poskytován za období pěti let stoprocentní úrok.

Nejprve je vypočten úrok za prvních pět let a celkový kapitál na konci prvního pětiletého cyklu:

$$
\begin{aligned}
u_5 &= (5) \times (0; 12) = 5 \cdot 0,2 = 1 \ , \\
z_5 &= z_0 + u_5 = 1 + 1 = 2 \ .
\end{aligned}
$$

Pak je určen kapitál na konci každého pětiletého cyklu:

$$
\begin{aligned}
z_{10} &= 2 \cdot z_5 \ \ = 4 \ , \\
z_{15} &= 2 \cdot z_{10} = 8 \ , \\
z_{20} &= 2 \cdot z_{15} = 16 \ , \\
z_{25} &= 2 \cdot z_{20} = 32 \ , \\
z_{30} &= 2 \cdot z_{25} = 64 = (1, 4) \ .
\end{aligned}
$$

Postup lze v naší symbolice vyjádřit vzorcem

$$z_{m \cdot n} = z_0 \cdot (1 + p \cdot m)^n \ ,$$

kde m je délka cyklu (v našem případě 5 let), p je úroková sazba (v našem příkladě 0,2) a z_0 původní vložený kapitál (1 mina), n je počet cyklů (v našem příkladě 6).

[6] Viz [N1], originální text str. 354, německý překlad str. 357–358, rozbor str. 364.

Úloha má dosti komplikované a značně nereálné zadání, je řešena poměrně primitivně; konstruována je aritmetická posloupnost roků s diferencí 5 a geometrická posloupnost s kvocientem 2 popisující narůstání kapitálu. Délka slovního komentáře svědčí o nevelké úrovni matematických schopností písaře či počtáře.

První úloha na téže tabulce je úloha opačná ke druhé úloze, je řešena jinak, než bychom očekávali. Je obtížnější než úloha druhá, její zadání je značně poškozené, ale lze je rekonstruovat s přihlédnutím k postupu řešení:

Ze zadané sumy $(1,4)$ *na níž se přeměnila* (1) *mina, najdi čas, v jehož průběhu se načítal úrok podle výše ukázaného principu ...*[7]

... vezmi (1) *minu.* $(0;12)$ *je úrok; za* (5) *let příjmy.*

Vezmi $(1,4)$ *kapitál a úrok.* $(0;12)$ *úrok z* (1) *základní kapitál zmnož, dostaneš* $(0;12)$ *úrok.*

$(0;12)$ *za* (5) *let zmnož, to je* (1).

V pátém roce kapitál a úroky jsou si rovny, (1) *k* (1) *přibude. Kapitál a úrok je* (2).

Najdi převrácenou hodnotu, to je $(0;30)$. $(0;30)$ *násob* $(1,4)$, *součet kapitálu a úroků, je* (32).

Ba-si (2) *co je? To je* (1). *Najdi převrácenou hodnotu* (2). *To je* $(0;30)$.

$(0;30)$ *násob* (30). *To je* (15). *K* (15) *přidej* (1). *To je* (16). *Íb-si z* (16) *co je to? To je* (4).

(4) *a* (1). *To je* (5). (5) *krát* (5) *je* (25).

A (5) *přidej ke* (25). *To je* (30). (30) *let je doba, za kterou kapitál a úroky budou* $(1,4)$.[8]

Počtář nejprve vysvětlil, že se za pět let kapitál zdvojnásobí. Zadaný kapitál byl proto před pěti lety poloviční, tj. 32 min.

Dalo by se očekávat, že bude opakovaně dělit dvěma, až dojde k 1, a zjistí tak počet pětiletých cyklů. Postup je trochu jiný. Nejprve sice 32 dělí dvěma, tj. násobí $(0;30)$.[9] Obdrží číslo 16, kapitál na počátku předposledního cyklu. Nyní však nepokračuje v dělení dvěma, ale číslo 16 odmocní; vyjádřeno je to spojením „*íb-si* z 16 je 4“, což odpovídá kapitálu před dalšími dvěma pětiletími. Zbytek textu není příliš srozumitelný. Počtář však spočítal všechna nalezená pětiletí a dostal šest pětiletí, tedy 30 let.

Třetí úloha na této tabulce je věnována složenému úrokování. Objevuje se v ní výpočet úroku z úroku, roční a denní úrokování apod. Text úlohy je nejasný, výpočet je sice reprodukovatelný, ale nedává dobrý smysl.[10]

---

[7] Princip, při kterém se úrok připisuje ke kapitálu každých 5 let.

[8] Viz [N1], originální text str. 353, německý překlad str. 357, rozbor str. 361–363.

[9] Vzhledem ke konstrukci tabulek pro násobení rozdělí 32 na 30 a 2, násobení provede každým číslem zvlášť a výsledek sečte.

[10] Viz [N1], originální text str. 354–355, německý překlad str. 358–359, rozbor str. 364–365.

Složené úrokování.

Na tabulce AO 6770 se nachází často citovaný příklad řešící složené úrokování;[11] text zní takto:

Někdo si uložil (1) *gur. Za jak dlouho se zdvojnásobí?*

Ty svým způsobem prodluž do čtvrtého roku. O kolik to překročí (2)*?*
Co se přidává, čím se převýší třetí rok?
Co se odečítá od čtvrtého roku? Je to $(0;2,33,20)$.
To odečti od čtyřech let, dostaneš plné roky a dny.[12]

Úkolem je určit dobu, za kterou dojde ke zdvojnásobení základního kapitálu. Výše úrokové sazby není v zadání úlohy uvedena, při řešení se předpokládá, že jde o obvyklou úrokovou sazbu 12 ze 60 šekelů, tj. 20 procent. Výsledek na tabulce chybí, ale lze ho snadno dopočítat:

$$(4) - (0;2,33,20) = (3;57,26,40) \doteq 3,957\,407\ .$$

V naší symbolice lze příklad vyjádřit následující rovnicí:

$$\left(1 + \frac{12}{60}\right)^x = 2\ , \qquad \text{tj.} \qquad 1,2^x = 2\ .$$

Odtud

$$x = \frac{\lg 2}{\lg 1,2} \doteq 3,802\ .$$

Mezopotámský počtář postupoval patrně tak, že nejprve určil kapitál na konci třetího a čtvrtého roku:

$$\begin{array}{lll} \text{3. rok:} & 1,2^3 = 1,728 \ = 1 + \frac{43}{60} + \frac{40}{60^2} + \frac{48}{60^3} & < 2\ , \\ \text{4. rok:} & 1,2^4 = 2,0736 = 2 + \frac{4}{60} + \frac{24}{60^2} + \frac{57}{60^3} + \frac{36}{60^4} & > 2\ . \end{array}$$

Po třech letech kapitál ještě nedosahuje hodnoty 2 gur, po čtyřech letech ji však již přesahuje. Počtář dále postupoval patrně metodou lineární interpolace. Kapitál narůstá ročně o 20 procent, pokud je uložen jen na část roku, je třeba vzít odpovídající část úroku. Označme dobu, která do ukončení čtvrtého roku chybí, písmenem y. Hodnotu 2 tedy dostaneme, když od částky, kterou bychom měli po čtyřech letech, odečteme úrok za dobu y z částky, kterou máme po třech letech:

$$(1;12)^4 - (1;12)^3 \times (0;12) \times y = (2)\ .$$

[11] Tabulka pochází ze starobabylónského období, byla nalezena ve Warce. Je popsána z obou stran, jsou na ní dvě úlohy.

[12] Viz [N1], originální text str. 37–38, německý překlad str. 40, rozbor str. 40–41. Viz též [Ra].

Vychází

$$y = (0;12,46,40) \doteq 0,212\,96 .$$

Písař udává na tabulce hodnotu

$$(0;2,33,20) \doteq 0,042\,593 ,$$

což je přesně

$$(0;12) \times (0;12,46,40) .$$

Písař tedy patrně zapomněl vypočtené číslo vynásobit pěti, je možné že chyba vznikla vynecháním části textu při přepisu.

Číslo $(0;2,33,20)$ dává odpověď na jinou otázku: *O kolik je potřeba ve čtvrtém roce snížit úrokovou sazbu, aby se kapitál na konci čtvrtého roku zdvojnásobil.*

Nová úroková sazba by byla

$$(0;12) - (0;2,33,20) = (0;9,26,40) ,$$

což by umožnilo zdvojnásobení kapitálu na konci čtvrtého roku

$$(1;12)^3 \times (1;9,26,40) = (1;43,40,48) \times (1;9,26,40) = 2 .$$

Pak je však na tabulce číslo $(0;2,33,20)$ odečítáno nesprávně od čísla 4. Je možné, že je na tabulce zachováno jen torzo příkladu, že části výpočtů chybí nebo byly omylem spojeny úryvky, které k sobě nepatřily.

Připomeňme ještě, že správná hodnota y vypočtená pomocí logaritmů je

$$y = 4 - x \doteq 0,198 .$$

LITERATURA

[BM] Brentjes S., Müller M., *Eine neue Interpretation der ersten Aufgabe des altbabylonischen mathematischen Textes AO 6770*, Schriftenreihe für Geschichte der Naturwissenschaften, Technik und Medicin **19** (1982), 21–26.

[Br] Bruins E. M., *Ulučšenie približenij v matematike Vavilonjan*, Istoriko-matematičeskie issledovanija **21** (1967), 61–70.

[Ga] Gazalé M., *Number From Ahmes to Cantor*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2000.

[Ko] Kolman A., *Dějiny matematiky ve starověku*, Academia, Praha, 1968.

[Mo] Moscati S., *Živoucí minulost*, Panorama, Praha, 1984.

[N1] Neugebauer O., *Mathematische Keilschrift-Texte*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1935 (erster und zweiter Teil), 1937 (dritter Teil), reprint Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[N2] Neugebauer O., *Vorlesungen über Geschichte der Antiken Mathematischen Wissenschaften, Erster Band. Vorgriechische Mathematik*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1934.

[NS] Neugebauer O., Sachs A., *Mathematical Cuneiform Texts*, American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research, New Haven, Connecticut, 1945, reprint, Harrassowitz, 1986.

[P1] Powell M. A., *Sumerian Numeration and Metrology*, University Microfilms (72-14 445), Minneapolis, 1971.

[Ra] Raik A. E., *Novye rekonstrukcii nekotorych zadač iz drevneegipetskich i vavilonskich tekstov*, Istoriko-matematičeskie issledovanija **11** (1958), 171–182.

[Se] Sethe K., *Von Zahlen und Zahlworten bei den alten Ägyptern*, Strassburg, 1916.

[Vo] Vogel K., *Vorgriechische Mathematik*, Würzburg, 1958–1959.

[Vy] Vygodskij M. Ja., *Arifmetika i algebra v drevnem mire*, Nauka, Moskva, 1967.

WWW STRÁNKY

[WWW] http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath.

LINEÁRNÍ ROVNICE A JEJICH SOUSTAVY.

Již v období Chammurabiho byly v Mezopotámii řešeny úlohy, které dnes řešíme pomocí lineárních rovnic a jejich soustav.

Je třeba zdůraznit, že v té době téměř úplně chyběla matematická symbolika a místo dnešní algebraické terminologie byla používána terminologie geometrická. Slova označující hledané neznámé byla i v akkadských textech psána sumersky a jak postupně mizela znalost sumerštiny, proměňovala se tato slova v termíny, které se postupně stávaly starobylými matematickými symboly. Neznámé veličiny byly označovány jako *délka*, *šířka*, *výška* či *hloubka*, součin dvou neznámých jako *plocha*, *obsah*, *pole* nebo dokonce *délka-šířka*, *čtverec délky* nebo *čtverec šířky*, součin tří neznámých byl většinou označován jako *objem*.

Původ většiny úloh je geometrický, proto je geometrická i terminologie; přesto není dodržován zákon homogenity, tj. v úlohách se bez zábran sčítají délky (*uš*), šířky (*sag*), obsahy, objemy a bezrozměrné konstanty.

V klínopisných textech není příliš mnoho příkladů vedoucích na lineární rovnice nebo jejich soustavy. Algoritmus řešení nelze u většiny úloh určit, neboť tabulky obsahují jen zadání a někdy i výsledek. Je pravděpodobné, že byly úlohy řešeny postupnou eliminací neznámých, substitucí nebo metodou chybného předpokladu.

Lineární rovnice.

Uveďme na ukázku několik příkladů vedoucích na lineární rovnice.

Na starobabylónské tabulce YBC 4669 (viz následující obrázek) nalezneme tento jednoduchý příklad:

$\frac{2}{3}$ *z* $\frac{1}{3}$ *mých zásob dal jsem pryč.* (7) *zbylo. Jaké byly mé zásoby?* (31; 30).[1]

Zapíšeme-li příklad v naší symbolice, obdržíme rovnici

$$x - \frac{2}{9} \cdot x = 7 ,$$

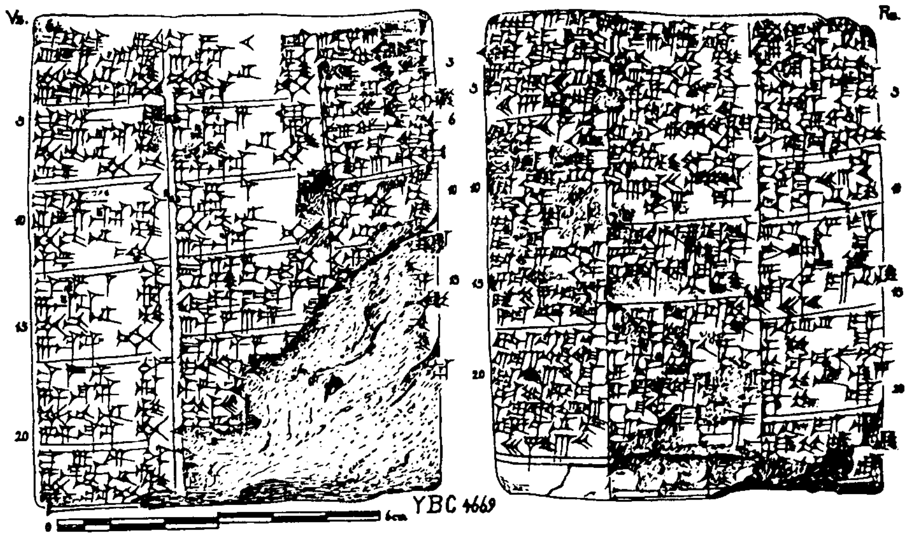
kde x je hledané množství zásob. Její výsledek je však 9 a nikoli $31\frac{1}{2}$ jak uvádí tabulka.

Výsledek $31\frac{1}{2}$, neboli (31; 30), je však řešením rovnice

$$\frac{2}{9} \cdot x = 7 .$$

Je možné, že zadání bylo zkomoleno, nebo že byl výsledek zapsán chybně. Mohlo dojít i k chybnému prolnutí dvou příkladů, které na sebe navazovaly.

[1] Viz [N1], 3. díl, originální text str. 27, německý překlad str. 28, rozbor str. 28.



Na téže tabulce nalezneme i tuto úlohu:

$\frac{2}{3}$ ze $\frac{2}{3}$ a (1) *bàn přidal jsem, výsledek byl $\frac{1}{2}$ ječmene. Jaké bylo původní množství ječmene?* (3) *pi ječmene je původní množství.*[2]

Úlohu lze zapsat rovnicí

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot x+1=\frac{x}{2}\,.$$

Po jednoduché úpravě dostaneme

$$\frac{1}{18}\cdot x=1\,,\qquad \text{tj.}\qquad x=18\,.$$

Vychází tedy 18 *bàn*, tj. 3 *pi.*[3]

Na tabulce AO 6770[4] je následující příklad:

Měl jsem kámen. Neznal jsem jeho hmotnost. $\frac{1}{7}$ jsem dal pryč, $\frac{1}{3}$ šekelu a (0; 15) *zrnek. Dostal jsem zpět $\frac{1}{11}$ toho, co jsem měl, a $\frac{2}{3}$ gú. Kámen byl vrácen do původního stavu. Jaká byla jeho hmotnost?*[5]

Neznáme výsledek ani metodu řešení; při řešení však bylo třeba převádět jednotky (*šekel* je 180 zrnek, *gú* je 60^2 *šekelů*). Úlohu lze snad zapsat touto rovnicí (množství x je v zrnkách):

$$x-\frac{1}{7}\cdot x-\left(\frac{1}{3}\cdot 3\cdot 60+\frac{15}{60}\right)=\frac{1}{11}\cdot x+\frac{2}{3}\cdot 3\cdot 60^3\,.$$

[2] Viz [NS], originální text str. 103, anglický překlad str. 103, rozbor str. 103.
[3] Připomeňme, že 1 *pi* = 6 *bàn*.
[4] Tabulka pochází ze starobabylónského období, nalezena byla ve Warce.
[5] Viz [N1], 2. díl, originální text str. 38, německý překlad str. 41, rozbor str. 41.

Na starobabylónské tabulce YBC 4652 je uvedena „sbírka příkladů" na procvičení úloh, které dnes řešíme lineární rovnicí. Tabulka původně obsahovala 22 příkladů; jen 11 však zůstalo částečně zachováno a z nich jen 6 může být zcela rekonstruováno. Sedmý příklad zní takto:

Nalezl jsem kámen, ale neznám jeho hmotnost. Poté, co jsem přidal $\frac{1}{7}$ a ještě $\frac{1}{11}$ toho všeho, je to (1) *mina. Jaká byla původní hmotnost kamene? Původní hmotnost kamene byla $\frac{2}{3}$ mina,* (8) *gin a* (22) *a $\frac{1}{2}$ še.*[6]

Úlohu lze v naší symbolice zapsat rovnicí

$$\left(x+\frac{x}{7}\right)+\frac{1}{11}\cdot\left(x+\frac{x}{7}\right)=60\,,$$

tj.

$$\frac{12}{11}\cdot\left(x+\frac{x}{7}\right)=60\,.$$

Řešení této lineární rovnice je $x=(48;7,30)$ *gin*. Užijeme-li jednoduchou úpravu a převodní vztahy mezi váhovými jednotkami, dostaneme 40 *gin* a 8 *gin* a $(\frac{7}{60}+\frac{30}{3600})\cdot 180$ *še*, to je $\frac{2}{3}$ *mina*, 8 *gin* a $22\frac{1}{2}$ *še*.

Dalších pět příkladů lze v naší symbolice zapsat takto:

8. příklad $\left(x-\frac{x}{7}\right)-\frac{1}{13}\cdot\left(x-\frac{x}{7}\right)=60\,,$

9. příklad $\left(x-\frac{x}{7}\right)+\frac{1}{11}\cdot\left(x-\frac{x}{7}\right)-\frac{1}{13}\cdot\left[\left(x-\frac{x}{7}\right)+\frac{1}{11}\cdot\left(x-\frac{x}{7}\right)\right]=60\,,$

19. příklad $\left(6x+2\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7}\cdot 24\cdot\left(6x+2\right)=60\,,$

20. příklad $\left(8x+3\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{13}\cdot 21\cdot\left(8x+3\right)=60\,,$

21. příklad $\left(x-\frac{x}{6}\right)+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot\left(x-\frac{x}{6}\right)=60\,.$

Ostatní příklady jsou poničeny, je však pravděpodobné, že byly obdobného typu. U všech dochovaných příkladů jsou uvedeny správné výsledky. Prohlédneme-li zadání, zjistíme, že se v úlohách počítá se zlomky, jejichž jmenovatelé jsou 3, 6, 8 (k nim existují reciproké hodnoty), a 7, 11 a 13 (k nim neexistují přesné reciproké hodnoty). Upravíme-li však všechny rovnice na tvar

$$\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot x+\frac{e}{f}\right)=60\,,$$

kde a, b, c, d, e a f jsou přirozená čísla, obdržíme toto.

8. příklad $\frac{12}{13}\cdot\left(x-\frac{x}{7}\right)=60\,,$

9. příklad $\frac{144}{143}\cdot\left(x-\frac{x}{7}\right)=60\,,$

[6] Texty příkladů tabulky YBC 4652 viz [NS], originální text str. 100–101, anglický překlad str. 101–102, rozbor str. 102–103.

19. příklad $\quad \frac{45}{21} \cdot \left(6x + 2\right) = 60$,

20. příklad $\quad \frac{60}{39} \cdot \left(8x + 3\right) = 60$,

21. příklad $\quad \frac{25}{24} \cdot \left(x - \frac{x}{6}\right) = 60$.

Čitatelé všech zlomků jsou čísla, ke kterým existují v mezopotámské matematice přesné reciproké hodnoty. Příklady byly tedy voleny tak, aby bylo možno vypočítat přesná řešení.

Na tabulce máme pouze zadání úloh a výsledky, chybí postupy řešení. Je možné, že byly úlohy řešeny pomocí substituce a chybného předpokladu. Např. v sedmé úloze mohla být zvolena substituce

$$x + \frac{x}{7} = y ,$$

která umožnila přejít k jednoduché rovnici

$$\frac{12}{11} \cdot y = 60 ,$$

jejíž řešení je $y = 55$. Pak mohla být zvolena metoda chybného předpokladu:

$$x + \frac{x}{7} = 55 , \qquad x_0 = 7 , \qquad x = \frac{55}{8} \cdot x_0 = (48; 7,30) .$$

Bylo také možno použít přímý výpočet:

$$x + \frac{x}{7} = 55 , \qquad \frac{8}{7} \cdot x = 55 , \qquad x = 55 \cdot 7 \cdot \frac{1}{8} = (48; 7,30) .$$

Úlohy tohoto typu patrně sloužily i k procvičování operací se zlomky, s nimiž se mezopotámští úředníci potýkali při výpočtech hospodářského charakteru, při dědických řízeních apod. Výše uvedené příklady, jak je patrné z jejich zadání, však asi nemají příliš společného s praktickým životem.

Soustavy lineárních rovnic.

Na starobabylónské tabulce AO 8862 je uveden následující příklad:

... cihly, lidé a své dny sečetl jsem, to dá (2; 20). $\frac{2}{3}$ *lidí jsou mé dny. Stanov cihly, lidi a dny.*[7]

Podle připojeného výpočtu a rovněž s přihlédnutím ke studiu jiných tabulek lze úlohu interpretovat jako soustavu tří rovnic o třech neznámých:

---

[7] Viz [N1], 1. díl, originální text str. 112, německý překlad str. 117, rozbor str. 121–122.

$$x + y + z = 140\,,$$
$$x + y = 120\,,$$
$$\frac{2}{3} \cdot y = z\,,$$

kde x je počet cihel, y počet lidí a z počet dnů. Mezopotámská tabulka obsahuje správný výsledek: $(1,30) = 90$ cihel, 30 lidí a 20 dnů.

Na starobabylónské tabulce objevené v Suse[8] je příklad, který lze v naší symbolice zapsat soustavou dvou rovnic o dvou neznámých:

$$x + \frac{y}{4} = 7\,,$$
$$x + y = 10\,.$$

Rozebereme-li připojené řešení a zapíšeme-li ho naší symbolikou, zjistíme, že byl nejprve odstraněn zlomek:

$$4x + y = 28\,,$$
$$x + y = 10\,.$$

Pak byla provedena eliminace neznámé y (patrně odečtením rovnic) a získána rovnice $3x = 18$. Odtud již snadno vyplynulo řešení: $x = 6$ a $y = 4$.

Velmi zajímavý příklad vedoucí na soustavu dvou lineárních rovnic o dvou neznámých je na tabulce VAT 8389 (viz následující obrázek).[9] Jeho text zní takto:

Z (1) *bur* (4) *gur obilí jsem sklidil. Z jednoho druhého bur* (3) *gur obilí jsem sklidil. Obilí nad obilí o* (8, 20) *převyšuje.*

Moje pole přičteno a (30, 0) *dává. Moje pole jsou co?*

(30, 0) *pro pole vezmi.* (20, 0) *pro obilí, které on sklidil, vezmi.* (30, 0) *pro druhé pole vezmi.* (15, 0) *pro obilí, které on sklidil, vezmi.*

(8, 20), *obilí nad obilí vychází, vezmi. A* (30, 0) *součet ploch polí vezmi a* (30, 0) *součet ploch polí do dvou rozděl a* (15, 0) *je to.*

(15, 0) *a* (15, 0) *dvakrát k zdvojnásobení vezmi a reciproké z* (30, 0) *toho pole utvoř a* (0; 0, 2) *je to.*

(0; 0, 2) *s* (20, 0), *obilí, které on sklidil, násobeno.* (0; 40) *je předešlé obilí.*

S (15, 0), *to dvakrát k jeho dvojnásobku bylo vzato, násobeno.* (10, 0) *pamatuje tvoje hlava.*

Reciproké z (30, 0), *toho druhého pole, utvoř a* (0; 0, 2) *je to.*

(0; 0, 2) *s* (15, 0) *obilí, které on sklidil, násobeno.* (0; 30) *je předešlé obilí.*

S (15, 0), *to dvakrát k jeho dvojnásobku bylo vzato, násobeno, je* (7, 30).

---

[8] Viz [Ju], str. 42.

[9] Tabulka pochází ze starobabylónského období, dnes je uložena v muzeu v Berlíně.

$(10,0)$, *tvoje hlava pamatuje nad* $(7,30)$ *o co vychází?* $(2,30)$ *vychází.*

$(2,30)$, *co vychází, z* $(8,20)$, *obilí nad obilí vychází, odečti a* $(5,50)$ *necháš zpátky.*

$(5,50)$, *které jsi nechal zpátky, pamatuje tvá hlava.* $(0;40)$ *jeden faktor a* $(0;30)$ *druhý faktor sečtené a* $(1;10)$ *jako jmenovatele.*

Co s $(1;10)$ *se má vzíti, to mně* $(5,50)$, *co tvá hlava pamatuje, dává?* $(5,0)$ *vezmi.*

$(5,0)$ *s* $(1;10)$ *násobeno* $(5,50)$ *dá tobě.* $(5,50)$, *to bylo vzato, z* $(15,0)$, *to dvakrát k jeho dvojnásobnému bylo vzato, od jednoho odečti, k druhému přičti a za prvé* $(20,0)$, *za druhé* $(10,0)$ *dává to.* $(20,0)$ *je plocha prvního pole,* $(10,0)$ *plocha druhého pole.*[10]

Vs.

VAT 8389

Text příkladu lze vysvětlit asi takto. Máme dvě pole. Z plošné jednotky *bur* prvního pole sklidíme 4 *gur* obilí, z plošné jednotky *bur* druhého pole sklidíme 3 *gur* obilí. Sklizeň z prvního pole převyšuje sklizeň z druhého pole o $(8,20) = 500$ *sìla*. Součet ploch polí je $(30,0) = 1\,800$ *sar*. Jaké jsou výměry obou polí?[11]

[10] Viz [N1], originální text str. 317–318, německý překlad str. 323–324, rozbor str. 330–335.

[11] Připomeňme, že 4 *gur* jsou $(20,0)$ *sìla*, 3 *gur* jsou $(15,0)$ *sìla*, 1 *bur* je $(30,0)$ *sar*.

Označíme-li x a y výměry uvažovaných polí v jednotkách *sar*, lze úlohu zapsat následující soustavou dvou rovnic o dvou neznámých:

$$\frac{(20,0)}{(30,0)} \cdot x - \frac{(15,0)}{(30,0)} \cdot y = (8,20) ,$$
$$x + y = (30,0) .$$

Soustava nebyla řešena ani eliminací, ani metodou dosazovací, ale metodou chybného předpokladu. Nejprve se vypočte úroda na jednotlivých polích za předpokladu, že obě pole mají stejnou výměru, tj. (15, 0) *sar*:

$$\frac{(20,0)}{(30,0)} \cdot (15,0) = (0;0,2) \times (20,0) \times (15,0) = (0;40) \times (15,0) = (10,0) ,$$
$$\frac{(15,0)}{(30,0)} \cdot (15,0) = (0;0,2) \times (15,0) \times (15,0) = (0;30) \times (15,0) = (7,30) .$$

Rozdíl úrod na těchto dvou polích stejné výměry je tedy:

$$(10,0) - (7,30) = (2,30) .$$

Úrody se však mají lišit o (8, 20), rozdíl úrod při stejné výměře polí je tedy o (5, 50) menší. Počtář nyní vycházel z jednoduché úvahy: na každý *sar*, o který se zvětší první pole a zmenší druhé pole, se získá o (0; 40) více úrody na prvním poli a o (0; 30) méně úrody na druhém poli. Rozdíl úrod proto naroste o (0; 40) + (0; 30) = (1; 10).

Pak počtář provedl příslušné dělení, tj. našel, čím je třeba vynásobit číslo (1; 10), aby vyšlo číslo (5, 50), tj. „chybějící" rozdíl úrod. Snadno zjistil, že výsledek je (5, 0). Pole tedy mají výměru (15, 0) + (5, 0) = (20, 0) a (15, 0) − (5, 0) = (10, 0).

Zobecníme-li tento postup, lze říci, že počtář použil klasickou mezopotámskou substituci. Je-li třeba řešit rovnici

$$x + y = 2h ,$$

kde pro x a y je dána ještě nějaká další podmínka, potom se položí

$$x = h + w , \qquad y = h - w ,$$

kde w je nová neznámá.

Na tabulce VAT 8389 jsou další tři příklady, které jsou modifikací předchozího příkladu. Ve druhém jsou dány výměry polí a stejné podmínky popisující úrodu; má se určit úroda na jednotlivých polích a rozdíl úrod. Řešení odpovídá těmto vztahům:

úroda na prvním poli $\quad G_1 = \frac{(20,0)}{(30,0)} \times (20,0) = (13,20)$,

úroda na druhém poli $\quad G_2 = \frac{(15,0)}{(30,0)} \times (10,0) = (5,0)$,

rozdíl úrod $\quad G_1 - G_2 = (13,20) - (5,0) = (8,20)$.

Ve třetím příkladě je řešena soustava

$$\frac{(20,0)}{(30,0)} \cdot x - \frac{(15,0)}{(30,0)} \cdot y = (8,20) ,$$
$$x - y = (10,0) .$$

Ve čtvrtém příkladě jsou dány výměry polí a stejné podmínky jako v úloze třetí. Má se vypočítat úroda na jednotlivých polích a rozdíl úrod.

Šest příkladů téměř totožného znění je také na starobabylónské tabulce VAT 8390 (viz následující obrázek).

Vs.

Rs.

VAT 8390

V prvním příkladu jsou dány výměry polí a stejné podmínky jako u prvního příkladu na tabulce VAT 8389; mají se vypočítat úrody na jednotlivých polích, součet úrod a součet výměr polí.

Druhý příklad lze zapsat soustavou

$$\frac{(20,0)}{(30,0)} \cdot x + \frac{(15,0)}{(30,0)} \cdot y = (18,20) ,$$
$$x + y = (30,0) .$$

Ve třetím příkladu se vychází ze stejných podmínek, počítají se úrody na jednotlivých polích. Čtvrtý příklad vede na řešení soustavy

$$\frac{(20,0)}{(30,0)} \cdot x + \frac{(15,0)}{(30,0)} \cdot y = (18,20)\,,$$
$$x - y = (10,0)\,.$$

V pátém příkladu jsou dány výměry polí a stejné podmínky jako ve čtvrtém příkladu, počítají se úrody na jednotlivých polích.

V šestém příkladu je dána výměra prvního pole a podmínky stejné jako ve čtvrtém příkladu. Počítá se výměra druhého pole a úrody na jednotlivých polích.

Poznamenejme, že jednoduché lineární rovnice a jejich soustavy lze nalézt i na starobabylónských tabulkách YBC 4668, YBC 4712, YBC 4713, YBC 4714, YBC 4715, VAT 7528 a VAT 7535.

LITERATURA

[Ju] Juškevič A. P., *Istorija matematiky*, Nauka, Moskva, 1970.

[Ko] Kolman A., *Dějiny matematiky ve starověku*, Academia, Praha, 1968.

[N1] Neugebauer O., *Mathematische Keilschrift-Texte*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1935 (erster und zweiter Teil), 1937 (dritter Teil), reprint Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[N2] Neugebauer O., *Vorlesungen über Geschichte der Antiken Mathematischen Wissenschaften, Erster Band. Vorgriechische Mathematik*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1934.

[N3] Neugebauer O., *Studien zur Geschichte der antiken Algebra I*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, B, Band 2, 1933, 1–27.

[N4] Neugebauer O., *Serientexte in der babylonischen Mathematik*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, B, Band 3, 1936, 106–114.

[NS] Neugebauer O., Sachs A., *Mathematical Cuneiform Texts*, American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research, New Haven, Connecticut, 1945, reprint, Harrassowitz, 1986.

[Sch] Scholz E., *Geschichte der Algebra*, Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1990.

[ThD1] Thureau-Dangin F., *Le prisme Mathématique AO 8862*, Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale **29** (1932), 1–10.

[ThD2] Thureau-Dangin F., *Le prisme Mathématique AO 8862. Un Post-Scriptum*, Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale **29** (1932), 89–90.

[Vo] Vogel K., *Vorgriechische Mathematik*, Würzburg, 1958-1959.

[Vy] Vygodskij M. Ja., *Arifmetika i algebra v drevnem mire*, Nauka, Moskva, 1967.

WWW STRÁNKY

[WW1] http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath.

[WW3] http://www.math.tamu.edu/~don.allen/history/babylon/babylon.html.

[WW4] http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Indexes/Babylonians.html.

KVADRATICKÉ ROVNICE.

Mezopotámská matematika řešila i úlohy, které vedou na kvadratické rovnice. Některé byly svázány s potřebami praxe, jiné spíše poukazují na vnitřní vývoj samotné matematiky a na otázky vyučování matematice.

Ve většině takovýchto úloh nalézáme, stejně jako u rovnic lineárních, geometrickou terminologii. Neznámé veličiny byly označovány jako *délka* a *šířka*, jejich součiny jako *plocha* atd. Ani zde nebyl dodržován zákon homogenity, tj. bez rozpaků byla sčítána např. délka s obsahem apod. Z hlediska užívané geometrické terminologie, která byla patrně podložena nějakými geometrickými představami, je to zvláštní. Někdy však byly termíny převzaty i z oblasti aritmetických operací (*dělenec* a *dělitel*, *násobenec* a *násobitel* atd.).

Při řešení úloh vedoucích na kvadratické rovnice museli mezopotámští počtáři zvládnout operace se známými i neznámými veličinami. Museli si dobře osvojit i poznatky, které dnes symbolicky zapisujeme vztahy

$$(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2, \qquad (a - b)(a + b) = a^2 - b^2 .$$

Vytvoření metodiky řešení úloh vedoucích na kvadratické rovnice znamenal novou etapu rozvoje matematiky; dokládá jednak vysokou úroveň matematického myšlení, jednak počátky algebry. Vždy byly řešeny úlohy s konkrétními čísly; některé z nich však měly charakter vzorových příkladů, podle nichž byly řešeny obdobné příklady.

O poměrně vysokém stupni rozvoje algebraických metod v Mezopotámii svědčí i to, že tehdejší počtáři vytvořili obecné návody, které umožňovaly převádět nejrůznější úlohy na tzv. „kanonické tvary", pro něž byly vypracovány standardní postupy řešení.

K převodu na tyto kanonické tvary tehdejší počtáři užívali různé úpravy, především substituci a eliminaci; s neznámými veličinami zacházeli podobně jako s veličinami známými, přičemž používali výhradně algebraické metody.

Poznamenejme ještě, že mezopotámští matematici nikdy nedospěli k obecnému algoritmu pro řešení kvadratické rovnice tvaru $ax^2 + bx + c = 0$, $a \neq 0$, který odpovídá našemu známému vzorci

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} .$$

Bylo to tím, že kořeny rovnice mohla být pouze kladná čísla. Z této omezující podmínky vyplynula nutnost klasifikace kvadratických rovnic na výše zmíněné „kanonické tvary" a rozpracování metod jejich řešení. S těmito metodami se nyní seznámíme.

Úlohy, kterým se budeme věnovat, obsahují většinou více neznámých. Dnes bychom je patrně převedli na kvadratickou rovnici. Mezopotámští počtáři však velmi často postupovali odlišně.

I. Kvadratická rovnice typu $x^2 = q$.

Nejjednodušším typem kvadratické rovnice byla rovnice $x^2 = q$, kde q bylo dané přirozené číslo, šedesátinný zlomek nebo smíšené číslo. Tato rovnice se objevovala zejména v příkladech procvičujících Pythagorovu větu. Její řešení bylo vyhledáno v tabulkách čtverců nebo v tabulkách odmocnin, případně byla druhá odmocnina čísla q vypočítána.

Příklady tohoto typu jsou obyčejně formulovány velmi stručně. *Co musíme násobit mezi sebou, aby ... ?*, *Jaký je kvadratický kořen ... ?* Hned za těmito slovy následuje odpověď.

II. Kvadratická rovnice typu $x^2 + q = px$.

Tuto rovnici lze považovat za první „skutečnou" kvadratickou rovnici, se kterou se mezopotámská matematika potýkala. Úlohy, které na tuto kvadratickou rovnici vedou, byly většinou formulovány jinak; v naší symbolice je lze zapsat soustavou dvou rovnic o dvou neznámých:

$$x + y = p \,,$$
$$x \cdot y = q \,,$$

kde $x > y$ jsou hledaná kladná čísla a p, q jsou přirozená čísla, šedesátinné zlomky nebo čísla smíšená.

Výše uvedenou soustavu dvou rovnic můžeme označit za *první kanonický tvar*; na něj byly převáděny složitější úlohy.

Dosadíme-li z první rovnice za y do druhé, obdržíme kvadratickou rovnici

$$x^2 + q = px \,.$$

Ukažme nyní metodu řešení úlohy prvního kanonického tvaru na příkladu, který lze nalézt na tabulce AO 6484.[1]

Dělenec a dělitel je $(2;0,0,33,20)$.
Dělenec a dělitel, totiž $(2;0,0,33,20)$, *s* $(0;30)$ *násob. To dá* $(1;0,0,16,40)$.
$(1;0,0,16,40)$ *s* $(1;0,0,16,40)$ *násob. To dá* $(1;0,0,33,20,4,37,46,40)$.
(1) *odečti z toho. Zůstane nazpět* $(0;0,0,33,20,4,37,46,40)$.
Co se má samo sebou násobit, aby to dalo $(0;0,0,33,20,4,37,46,40)$*?*
$(0;0,44,43,20)$ *s* $(0;0,44,43,20)$ *násobeno dá* $(0;0,0,33,20,4,37,46,40)$.
$(0;0,44,43,20)$ *k* $(1;0,0,16,40)$ *přidej. To dá* $(1;0,45)$.
$(0;0,44,43,20)$ *od* $(1;0,0,16,40)$ *odeber. To dá* $(0;59,15,33,20)$ *jako dělitele.*[2]

---

[1] Tabulka pochází z období Seleukovců, nalezena byla ve Warce.

[2] Viz [N1], originální text str. 98–99, německý překlad str. 101–102, rozbor str. 106–107. Nuly, středníky a čárky zde byly doplněny pro lepší porozumění textu, v originálu nebyly řády vyznačeny. Připomeňme, že v mezopotámských úlohách je vždy součin dělence a dělitele roven 1 nebo 60; odtud vyplynula druhá rovnice $x \cdot y = 1$.

Úlohu je možno přepsat následující soustavou rovnic:

$$x + y = (2;0,0,33,20)\ ,$$
$$x \times y = (1)\ .$$

Mezopotámský postup lze vyjádřit vzorci

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - 1}\ , \qquad y = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - 1}\ .$$

Budeme-li pozorně číst text na tabulce, dostaneme tuto sérii kroků, která odpovídá našemu dosazení do známého vzorce:

$$p = (2;0,0,33,20)\ ,$$
$$\frac{p}{2} = (1;0,0,16,40)\ ,$$
$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 = (1;0,0,33,20,4,37,46,40)\ ,$$
$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 - 1 = (0;0,0,33,20,4,37,46,40)\ ,$$
$$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - 1} = (0;0,44,43,20)\ ,$$
$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - 1} = (1;0,0,16,40) + (0;0,44,43,20) = (1;0,45)\ ,$$
$$y = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - 1} = (1;0,0,16,40) - (0;0,44,43,20) = (0;59,15,33,20)\ .$$

V několika dalších obdobných příkladech, které jsou na tabulce AO 6484 uvedeny, je $p = (2;3)$, $p = (2;5,26,40)$, $p = (2;0,15)$ a vždy $q = (1)$. Poznamenejme, že p bylo voleno tak, aby šlo snadno vypočítat příslušnou odmocninu. Všechny úlohy tohoto typu jsou řešeny stejnou metodou.

V dalších příkladech je již $q \neq (1)$; řešeny jsou pomocí substituce. Místo dvou neznámých x a y je zavedena nová neznámá z:

$$x = \frac{p}{2} + z\ , \qquad y = \frac{p}{2} - z\ .$$

Dosadíme-li za x a y do druhé rovnice soustavy, získáme vztah

$$x \cdot y = \left(\frac{p}{2} + z\right) \cdot \left(\frac{p}{2} - z\right) = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - z^2 = q\ ,$$

odtud

$$z^2 = \left(\frac{p}{2}\right)^2 - q\ .$$

Odmocněním získáme

$$z = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

a pak již snadno vypočteme neznámé x a y:

$$x = \frac{p}{2} + \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,, \qquad y = \frac{p}{2} - \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}\,.$$

Úlohy tohoto typu jsou např. na tabulce YBC 4612.[3] Uveďme pro zajímavost znění čtvrtého příkladu:

(1) *bur je plocha, sečetl jsem délku a šířku, výsledek je* (5,5). *Jaké jsou délka a šířka?* (3,45) *gar je délka.* (1,20) *gar je šířka.*[4]

Příklad lze v naší symbolice zapsat soustavou rovnic:

$$x + y = 305\,,$$
$$x \cdot y = 18\,000\,.$$

Na stejný kanonický typ vede i následující složitější soustava dvou rovnic o dvou neznámých:

$$x^2 + y^2 = a\,,$$
$$x + y = b\,.$$

Dosadíme-li totiž z druhé rovnice $y = b - x$ do první, obdržíme po jednoduché úpravě rovnici

$$x^2 + \frac{b^2 - a}{2} = bx\,,$$

tj. výše uvedený typ kvadratické rovnice.[5]

S příkladem tohoto typu se setkáváme např. na tabulce BM 13901;[6] osmý příklad zní takto:

---

[3] Tato starobabylónská tabulka obsahuje patnáct velmi jednoduchých příkladů o obdélníku (rozměry x, y, kde $x > y$, obsah S). Na tabulce je zachyceno pouze zadání příkladů a výsledky. Prvních pět příkladů se vztahuje k obdélníku o rozměrech $x = (3,45)$ gar, $y = (1,20)$ gar a obsahu $S = (5,0,0)$ gar^2; dalších pět příkladů k obdélníku o rozměrech $x = (2,30)$ gar, $y = (24)$ gar a obsahu $S = (1,0,0)$ gar^2. V prvním příkladu je dáno x a y, počítá se S, ve druhém je dáno S a x a počítá se y, ve třetím je dáno S a y a počítá se x, ve čtvrtém, resp. pátém je dáno S a $x + y$, resp. $x - y$, a počítá se x a y. Obdobně formulováno je druhých pět příkladů. V posledních pěti příkladech je dáno x a y a počítá se S (vychází vždy $(1,0,0)$ gar^2); tyto jednoduché příklady jsou komplikovány převody jednotek.

[4] Viz [NS], originální text str. 103, anglický překlad str. 104, rozbor str. 104–106.

[5] Předpokládáme, že a, b jsou kladná čísla, pro která $a < b^2 < 2a$; tato podmínka zaručuje jednak příslušnost rovnice k danému typu, jednak její řešitelnost.

[6] Tato tabulka pochází ze starobabylónského období, její rozměry jsou 12 × 20 cm. Obsahuje 24 příkladů, které vedou na lineární a kvadratické rovnice. Viz [N1], 3. díl, originální text str. 1–5, německý překlad str. 5–9, rozbor str. 10–14.

Plocha mých sečtených čtverců je (21, 40)*; strany mých čtverců sečetl jsem, je to* (50).

Polovinu z (21, 40) *udělej.* (10, 50) *máš.*

Polovinu z (50) *udělej.* (25) *máš.* (25) *a* (25) *násob.* (10, 25) *máš.*

(10, 25) *od* (10, 50) *odečti.* (25) *máš.* (25) *má kvadratický kořen* (5).

(5) *k prvním* (25) *přidej a* (30) *je strana prvního čtverce.*

(5) *od druhých* (25) *odečti.* (20) *je strana druhého čtverce.*[7]

V naší symbolice lze příklad zapsat touto soustavou rovnic:

$$x^2 + y^2 = 1\,300\,,$$
$$x + y = 50\,.$$

K jejímu řešení je zvolena standardní substituce:

$$x = \frac{50}{2} + z\,, \qquad y = \frac{50}{2} - z\,.$$

Ta převede soustavu na jednoduchou kvadratickou rovnici

$$z^2 = \frac{1\,300}{2} - \left(\frac{50}{2}\right)^2\,,$$

z níž lze snadno vypočítat z a potom x a y:

$$z = \sqrt{650 - 625} = 5\,, \qquad x = 25 + 5 = 30\,, \qquad y = 25 - 5 = 20\,.$$

Mezopotámští počtáři však dospěli ještě dále, jak ukazují čtyři příklady na tabulce AO 8862.[8] První ze čtveřice příkladů zní takto:

Délka, šířka. Délku a šířku vynásobil jsem a plochu dostal jsem. Pak od délky byla odňata šířka a to bylo přičteno k ploše. (3, 3) *to dá. Délka a šířka dá* (27). *Jaká je délka, šířka a plocha?*[9]

(27) (3, 3) *součet*

(15) *délka*

(12) *šířka* (3, 0) *plocha*

Ty svým způsobem: (27) *součet délky a šířky k* (3, 3) *přidej, to dá* (3, 30).

(2) *k* (27) *přičti. To dělá* (29).

Polovinu od (29) *odečti,* (14; 30) *vynásob* (14; 30)*, to je* (3, 30; 15).

Od (3, 30; 15) *odečti* (3, 30). (0; 15) *je rozdíl.* (0; 15) *má kořen* (0; 30).

---

[7] Viz [N1], 3. díl, originální text str. 2, německý překlad str. 7, rozbor str. 10–14.

[8] Tabulka pochází ze starobabylónského období, byla nalezena v Senkereh (Susa). Viz [N1], originální text str. 108–113, německý překlad str. 113–117, rozbor str. 117–123.

[9] Příklad je přepsán zhruba tak, jak je zachycen na tabulce. Písař si pravděpodobně před zahájením výpočtu přehledně poznamenal dané veličiny a pak doplnil i výsledky.

(0;30) *k prvnímu* (14;30) *přičti. To dělá* (15) *jako délku.* (0;30) *od druhého* (14;30) *odečti. Ty dostaneš* (14) *jako šířku.*

(2), *které jsi k* (27) *přičetl, od* (14), *šířka, odečti. To dělá* (12) *jako konečná šířka.*

(15), *délka,* (12), *šířka, násobím.* (15) *krát* (12) *dá* (3,0) *jako plochu.*

(15), *délka, o co přesahuje* (12), *šířka?* (3) *je navíc.* (3) *k* (3,0), *plocha, přičteno.* (3,3) *je výsledek.*

Příklad lze v naší symbolice zapsat takovouto soustavou rovnic:

$$x \cdot y + x - y = 183 ,$$
$$x + y = 27 .$$

Úloha již není zadána tak, aby byl patrný příslušný kanonický tvar. Počtář musí nejprve pomocí substituce uvést soustavu na kanonický tvar. Zavede pomocnou veličinu

$$y' = y + 2 ,$$

a tak dojde k soustavě

$$x \cdot y' = 210 ,$$
$$x + y' = 29 ,$$

která již má požadovaný kanonický tvar a kterou vyřeší substitucí

$$x = \frac{29}{2} + z , \qquad y' = \frac{29}{2} - z .$$

Ta převede první rovnici na rovnici

$$z^2 = \left(\frac{29}{2}\right)^2 - 210 ,$$

jejíž kladné řešení je

$$z = \sqrt{\left(\frac{29}{2}\right)^2 - 210} = \frac{1}{2} .$$

Z něho se vypočte délka x, pomocná šířka y' a skutečná šířka y:

$$x = 15 , \qquad y' = 14 , \qquad y = 12 .$$

Nakonec se ještě vypočte obsah obdélníka a provede zkouška.

Druhý příklad na téže tabulce lze zapsat touto soustavou rovnic:

$$\frac{1}{2} \cdot x + \frac{1}{3} \cdot y + x \cdot y = 15 ,$$
$$x + y = 7 .$$

Je řešen substitucí $x - \frac{1}{6} = x'$, která tuto soustavu převede na kanonický tvar

$$x' \cdot y = 11\frac{1}{2} ,$$
$$x' + y = 6\frac{5}{6} .$$

Obdobné příklady lze najít i na tabulkách A 24194, A 24195 a BM 13901.

III. Kvadratická rovnice typu $x^2 = px + q$.

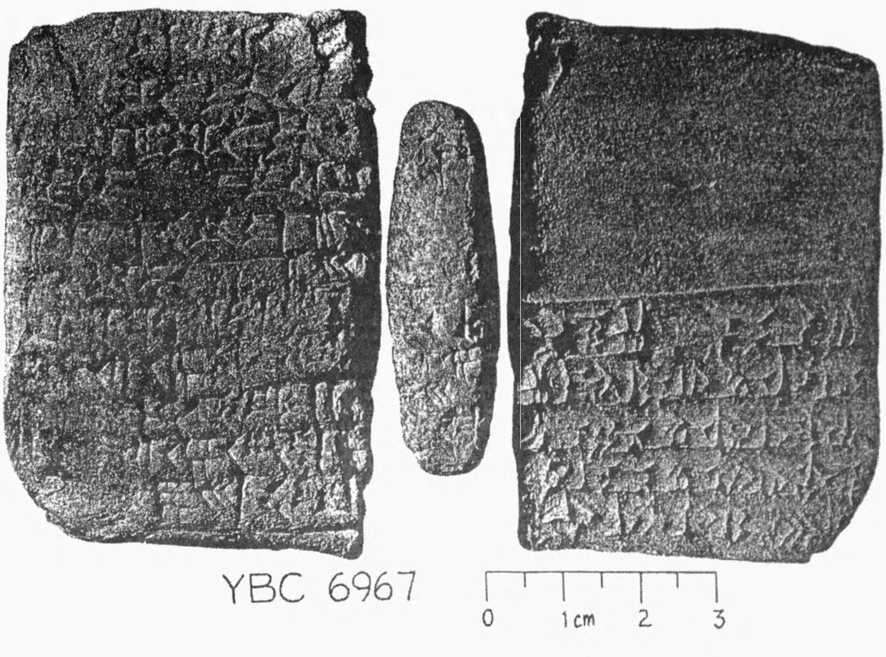
I tento typ kvadratické rovnice se objevoval v mezopotámské matematice v jiné podobě; slovní zadání řady příkladů lze v naší symbolice zapsat následující soustavou dvou rovnic o dvou neznámých:

$$x - y = p\,,$$
$$x \cdot y = q\,,$$

kde p, q jsou přirozená čísla, šedesátinné zlomky nebo smíšená čísla; vždy se předpokládalo, že $x > y$. Tuto soustavu lze považovat za ***druhý kanonický tvar***; na něj opět počtáři převáděli složitější příklady určitého typu.

Dosadíme-li z první rovnice za y do rovnice druhé, přejdeme ke kvadratické rovnici

$$x^2 = px + q\,.$$



Ukažme metodu řešení druhého kanonického tvaru na příkladu, který lze nalézt na starobabylónské tabulce YBC 6967 (viz předchozí obrázek).

Dělenec přesahuje dělitele o (7). *Jací jsou?*

Ty: rozpul (7), *o co dělenec přesahuje dělitele, výsledek je* (3; 30).
Násob (3; 30) *s* (3; 30). *Výsledek je* (12; 15).
K (12; 15), *které jsi obdržel, přidej* (1, 0). *Výsledek je* (1, 12; 15).
Jaký je kořen z (1, 12; 15)*? Odpověď:* (8; 30).

Vezmi (8; 30) *a* (8; 30). *Pak odečti* (3; 30) *od jednoho, a přičti ke druhému. Jedno je* (12), *druhé je* (5). (12) *je dělenec,* (5) *je dělitel.*[10]

Úlohu lze v naší symbolice zapsat soustavou rovnic:

$$x - y = 7 \,,$$
$$x \cdot y = 60 \,.$$

Položme $p = 7$, $q = 60$. K vyřešení soustavy je zavedena nová neznámá z:

$$x = z + \frac{p}{2} = z + 3\frac{1}{2} \,, \qquad y = z - \frac{p}{2} = z - 3\frac{1}{2} \,.$$

Druhá rovnice pak přejde v rovnici

$$z^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2 = q \,, \qquad \text{neboli} \qquad z^2 - \left(3\frac{1}{2}\right)^2 = 60 \,.$$

Její kladné řešení je

$$z = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} = \sqrt{\left(3\frac{1}{2}\right)^2 + 60} = 8\frac{1}{2} \,.$$

Odtud

$$x = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} + \frac{p}{2} = \sqrt{\left(3\frac{1}{2}\right)^2 + 60} + 3\frac{1}{2} = 12 \,,$$
$$y = \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} - \frac{p}{2} = \sqrt{\left(3\frac{1}{2}\right)^2 + 60} - 3\frac{1}{2} = 5 \,.$$

Mezopotámský postup lze rozepsat do těchto kroků:

$$p = (7) \,,$$
$$\frac{p}{2} = (3;30) \,,$$
$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 = (12;15) \,,$$
$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q = (12;15) + (1,0) = (1,12;15) \,,$$
$$\sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 + q} = (8;30) \,,$$
$$x = (8;30) + (3;30) = (12) \,,$$
$$y = (8;30) - (3;30) = (5) \,.$$

Je tedy zřejmé, že se mezopotámský postup od našeho příliš neliší.

Podobné příklady lze najít i na tabulkách YBC 4612, VAT 6598 a BM 13901.

---

[10] Viz [NS], originální text str. 129, anglický překlad str. 129–130, rozbor str. 130.

Obtížnější je druhý příklad starobabylónské tabulky VAT 8520 (viz následující obrázek).

VAT 8520

(13)-tá část součtu násobence a násobitele vynásobena (6). Odtud odečti násobence. (0; 20) zůstane, oni řekli. (13), odpovídá třináctině dílu, vezmi.

(6), to, co bylo zvětšeno, vezmi. (0; 20), co zůstalo, vezmi a (1), obsah, vezmi. Od (13), odpovídá (13)-tině dílu, (6), to, co bylo zvětšeno, odejmi a (7) zůstane. (7), které zůstalo, a (6) nechť udrží tvá hlava.

(7) a (6) vynásob. (42). (1), obsah, vynásob (42). To dá (42). (42) nechť udrží tvá hlava.

(13), odpovídající (13)-tině dílu, vynásob (0; 20), to, co zůstalo. (4; 20).

Rozlom na (2) části. To je (2; 10). (2; 10) a (2; 10) násob. To je (4; 41, 40).

K (4; 41, 40) přidej (42), co tvá hlava držela. To je (46; 41, 40).

Jaký je kořen (46; 41, 40)? (6; 50).

(6; 50) a (6; 50), které mu odpovídá, vezmi a (2; 10) k prvnímu přičti a od druhého odečti. První je (9), druhé (4; 40).

Převrácenou hodnotu od (6), to, co tvá hlava držela, vytvoř. To je (0; 10). (0; 10) vynásob (9). (1; 30) součin.

Co je nutno vzít (7)-krát, což držela tvá hlava, aby to dalo (4; 40)? (0; 40) vezmi.

(0; 40) vynásobeno (7) dává ti (4; 40). (0; 40) se vzalo jako násobitel.

Je-li násobenec (1; 30) *a násobitel* (0; 40), *jaká je plocha?* (1; 30) *vynásob* (0; 40). (1) *je plocha.*

(1; 30) *násobenec a* (0; 40) *násobitel. Násobenec a násobitel dává* (2; 10).
Třináctá část (2; 10) *je?* (0; 10).
Vynásob (6), *to je* (1). *Od té* (1) *odejmi* (0; 40) *a* (0; 20) *zůstane.*[11]

Úlohu lze v naší symbolice zapsat touto soustavou rovnic:

$$6 \cdot \frac{x+y}{13} - y = \frac{1}{3}\,,$$
$$x \cdot y = 1\,.$$

Jde tedy o úlohu, která není zadána v kanonickém tvaru. Mezopotámský počtář nejprve odstranil v první rovnici zlomek; získal tak soustavu

$$6x - 7y = 4\frac{1}{3}\,,$$
$$x \cdot y = 1\,.$$

Pak zvolil jednoduchou substituci:[12]

$$x' = 6 \cdot x\,, \qquad y' = 7 \cdot y\,,$$

která umožnila získat soustavu

$$x' - y' = 4\frac{1}{3}\,,$$
$$x' \cdot y' = 42\,,$$

Ta je již v kanonickém tvaru, mezopotámský počtář ji snadno vyřešil s využitím substituce

$$x' = z + 2\frac{1}{6}\,, \qquad y' = z - 2\frac{1}{6}\,.$$

Získal rovnici

$$\left(z + 2\frac{1}{6}\right) \cdot \left(z - 2\frac{1}{6}\right) = 42\,,$$

jejíž kladné řešení je

$$z = \sqrt{\left(2\frac{1}{6}\right)^2 + 42} = 6\frac{5}{6}\,.$$

Pak již vypočítal x' a y':

$$x' = z + 2\frac{1}{6} = 9\,, \qquad y' = z - 2\frac{1}{6} = 4\frac{2}{3}\,,$$

[11] Viz [N1], originální text str. 346–347, německý překlad str. 347–349, rozbor str. 349–351. Znovu připomeňme, že součin násobence a násobitele je v mezopotámském pojetí roven 1 nebo 60. Z této podmínky vyplynula druhá rovnice soustavy $x \cdot y = 1$, resp. $x \cdot y = 60$; pravá strana byla volena tak, aby příklad „dobře vycházel“.

[12] Viz „(7), *které zůstalo, a* (6) *nechť udrží tvá hlava*“.

nakonec se vrátil k substituci

$$x' = 6 \cdot x\,, \qquad y' = 7 \cdot y$$

a vypočítal x a y; zajímavé je, že y nevypočítal stejně jako x, neboť 6 má v šedesátkové soustavě reciprokou hodnotu, ale 7 nikoli:

$$x = \frac{1}{6} \cdot x' = (0;10) \times (9) = (1;30) = 1\frac{1}{2}\,.$$

Nyní vyhledal takové y, které vynásobeno 7 dá $(4;40)$; je to $y = (0;40)$. V závěru ještě provedl zkoušku.

Poznamenejme, že první příklad na tabulce VAT 8520 lze v naší symbolice zapsat soustavou rovnic

$$\begin{aligned} x - \frac{6}{13} \cdot (x+y) &= \frac{1}{2}\,, \\ x \cdot y &= 1\,. \end{aligned}$$

Řešen je obdobně: nejprve je odstraněn zlomek, rovnice upraveny na tvar

$$\begin{aligned} 7x - 6y &= 6\frac{1}{2}\,, \\ 7x \cdot 6y &= 42\,, \end{aligned}$$

pak je zvolena substituce

$$x' = 7x\,, \qquad y' = 6y\,,$$

která převádí soustavu na tvar

$$\begin{aligned} x' - y' &= 6\frac{1}{2}\,, \\ x' \cdot y' &= 42\,; \end{aligned}$$

ta je vyřešena zavedením nové neznámé z:

$$x' = z + 3\frac{1}{4}\,, \qquad y' = z - 3\frac{1}{4}\,.$$

Volba koeficientů u obou příkladů umožňuje bezproblémový výpočet druhé odmocniny.

Složitější soustava

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= a\,, \\ x - y &= b\,, \end{aligned}$$

kde $a > 0$, $b > 0$, $a > b^2$ (podmínka příslušnosti k tomuto typu), vede na stejný kanonický typ

$$x - y = p ,$$
$$x \cdot y = q .$$

Z druhé rovnice výchozí soustavy totiž plyne $y = x - b$ a po dosazení do první rovnice dostaneme po jednoduché úpravě rovnici

$$x^2 = \frac{a - b^2}{2} + bx .$$

Devátý příklad na tabulce BM 13901 zní takto:

Plocha mých sečtených čtverců je (21, 40) *a strana čtverce převyšuje stranu čtverce o* (10).

Polovinu z (21, 40) *odděl.* (10, 50) *máš.*

Polovinu z (10) *udělej.* (5) *násob* (5). (25) *od* (10, 50) *odečti.*

(10, 25) *má kvadratický kořen* (25).

(25) *a* (25) *vezmi.* (5) *přičti k prvním* (25). (30) *máš jako stranu prvního čtverce.*

(5) *odečti od druhých* (25). (20) *máš jako stranu druhého čtverce.*[13]

Úlohu lze v naší symbolice zapsat takovouto soustavou rovnic:

$$x^2 + y^2 = 1\,300 ,$$
$$x - y = 10 .$$

Při řešení byla zavedena nová neznámá z:

$$x = z + 5 ,$$
$$y = z - 5 .$$

Soustava tak byla převedena na jednoduchou rovnici

$$z^2 = 650 - 5^2 ;$$

odtud

$$z = \sqrt{625} = 25 .$$

Ze znalosti z lze snadno dopočítat x a y:[14]

$$x = 25 + 5 = 30 , \qquad y = 25 - 5 = 20 .$$

[13] Viz [N1], originální text str. 2, německý překlad str. 7, rozbor str. 10–14.

[14] Výsledek je stejný jako u výše uvedeného osmého příkladu téže tabulky.

IV. Kvadratická rovnice typu $x^2 + px = q$.

Na tabulce AO 8862 (viz následující obrázek)[15] je velmi zajímavá úloha, která vede na kvadratickou rovnici. Její text zní takto:

Délka, šířka. Délku a šířku jsem vynásobil a vznikla plocha. Dále to, oč je délka větší než šířka, jsem vynásobil součtem délky a šířky. K tomu přidal jsem plochu. Odbržel jsem (1, 13, 20). *Dále jsem sečetl délku a šířku. Dostal jsem* (1, 40).[16]

(1, 40)		(1, 13, 20) ***součet***
	(1, 0) ***délka***	
(40) ***šířka***		(40, 0) ***plocha.***

Ty svým způsobem: (1, 40), ***součet délky a šířky, vynásob*** (1, 40). (2, 46, 40).
Od (2, 46, 40) *odejmi* (1, 13, 20), *plocha. Zde jsi určil* (1, 33, 20).
Polovinu součtu (1, 40) *odlom.* (50) *krát* (50) *je* (41, 40). *K* (1, 33, 20) *přidej.*
(2, 15, 0) *má kořen* (1, 30). (1, 40) *minus co dá* (1, 30)*? To je* (10).
(10) *přidej k* (50). (1, 0) *je délka.*
(10) *odejmi od* (50). (40) *je šířka* ...

Úlohu lze v naší symbolice zapsat následující soustavou rovnic:

$$\begin{aligned} x \cdot y + (x + y) \cdot (x - y) &= 4\,400\,, \\ x + y &= 100\,. \end{aligned}$$

Položme $S = (1, 13, 20)$, $a = (1, 40)$. Mezopotámský postup řešení odpovídá v naší symbolice vztahům

$$x = \frac{a}{2} + \left[a - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a^2 - S)}\right],$$

$$y = \frac{a}{2} - \left[a - \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + (a^2 - S)}\right].$$

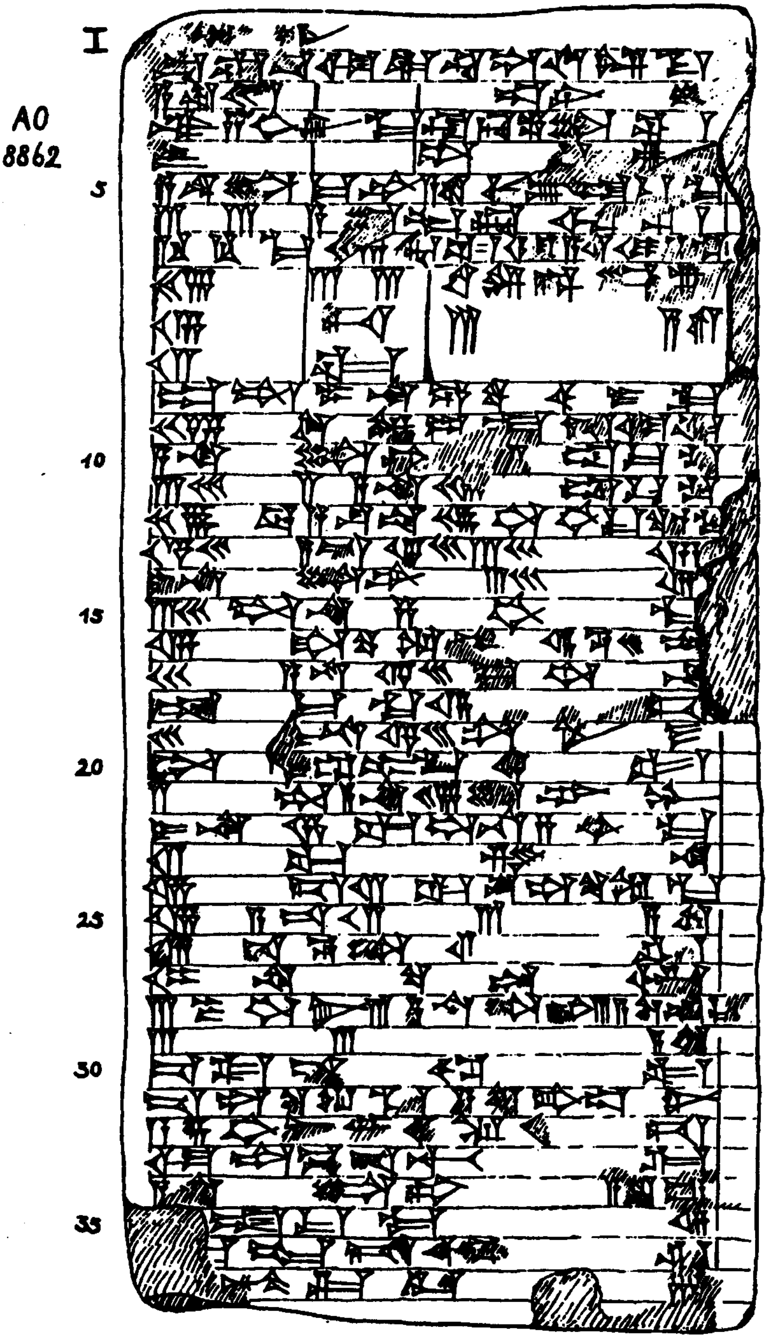
Je tedy zřejmé, že y není vypočteno ze vztahu $x + y = a$.

Při původním řešení byla patrně použita substituce; byla zavedena nová neznámá z vztahem $2z = x - y$. Umocněním rovnic

$$x + y = a\,, \qquad x - y = 2z\,,$$

[15] Tabulka pochází ze starobabylónského období, byla nalezena v Senkereh (Susa). Viz [N1], originální text str. 108–113, německý překlad str. 113–117, rozbor str. 117–123.

[16] Příklad je přepsán zhruba tak, jak je zachycen na tabulce. Písař si patrně před zahájením výpočtu přehledně poznamenal dané veličiny a potom připojil i výsledky.



Tabulka AO 8862 – první část

následným odečtením a vydělením čtyřmi dojdeme ke vztahu

$$x \cdot y = \left(\frac{a}{2}\right)^2 - z^2 .$$

Po dosazení do první rovnice dostaneme rovnici

$$2az + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - z^2 = S ,$$

kterou lze snadno převést na tvar

$$-(z-a)^2 + a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 = S .$$

Odtud

$$z = a \pm \sqrt{a^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 - S} ;$$

znaménko + je třeba zavrhnout, neboť by pak y vyšlo záporné ($x + y = a$, $2z = x - y$).

Zavedení pomocné veličiny bylo v Mezopotámii velmi oblíbenou a značně užívanou metodou. Z postupu řešení výše uvedeného příkladu vyplývá, že babylónští matematici uměli úspěšně řešit i úlohy vedoucí na obecné kvadratické rovnice. Zdůrazněme však, že nemáme k disposici žádnou úlohu, která by měla dvě kladná řešení a tato řešení byla vypočtena. Není možno říci, proč tomu tak bylo. Snad mezopotámští počtáři necítili potřebu najít všechna řešení. Nelze však s jistotou tvrdit, že druhé řešení neznali.

V. Kvadratická rovnice typu $ax^2 + bx = c$.

K obecnému typu kvadratické rovnice patří některé příklady, které jsou na tabulce BM 13901. Její čtrnáctý příklad zní takto:

Plochy dvou svých čtverců sečetl jsem a (25, 25) *to je. Strana druhého čtverce je rovna* $\frac{2}{3}$ *strany prvního čtverce a ještě* (5) *gar.*

(1) *a* (0; 40) *a* (5) *e-le-nu*[17] (0; 40) *udělej.* (5) *a* (5) *násob.* (25) *od* (25, 25) *odeber.* (25, 0) *máš.*

(1) *a* (1) *násob.* (1) *máš.* (0; 40) *a* (0; 40) *násob.* (0; 26, 40) *k* (1) *přidej a* (1; 26, 40) *s* (25, 0) *násob.* (36, 6; 40) *máš.*

(5) *s* (0; 40) *násob.* (3; 20) *máš a* (3; 20) *násob.*

(11; 6, 40) *k* (36, 6; 40) *přidej.* (36, 17; 46, 40) *máš.*

(46; 40) *jako kvadratický kořen.* (3; 20), *což jsi se sebou násobil, od* (46; 40) *odeber a* (43; 20) *máš.*

Reciproké k (1; 26, 40) *nehledej. Co je třeba násobit* (1; 26, 40), *abys dostal* (43; 20)*?* (30) *je tvůj faktor.*

---

[17] Slovo nejasného významu – viz [N1].

(30) *násob* (1) *a* (30) *je strana prvního čtverce.* (30) *s* (0; 40) *násob a* (20) *a* (5) *sečti a* (25) *je strana druhého čtverce.*[18]

V naší symbolice lze příklad zapsat jako soustavu rovnic:

$$x^2 + y^2 = 1\,525\,,$$
$$y = \frac{2}{3} \cdot x + 5\,.$$

Dosadíme-li za y z druhé rovnice do první, obdržíme kvadratickou rovnici

$$13x^2 + 60x = 13\,500\,.$$

Z postupu řešení je zřejmé, že mezopotámský počtář nejprve vypočítal koeficienty:

$$a = (0;40)^2 + (1) = (1;26,40) = 1\frac{4}{9}\,,$$
$$\frac{b}{2} = (5) \times (0;40) = (3;20) = 3\frac{1}{3}\,,$$
$$c = (25,25) - (5)^2 = (25,0) = 1\,500\,.$$

Jeho výpočet neznámé x lze v naší symbolice zapsat takto:[19]

$$\begin{aligned} x &= a^{-1} \cdot \left(\sqrt{ac + \left(\frac{b}{2}\right)^2} - \frac{b}{2}\right) = \\ &= (1;26,40)^{-1} \times \left(\sqrt{(1;26,40) \times (25,0) + (3;20) \times (3;20)} - (3;20)\right) = \\ &= (1;26,40)^{-1} \times \left(\sqrt{(36,6;40) + (11;6,40)} - (3;20)\right) = \\ &= (1;26,40)^{-1} \times \left(\sqrt{(36,17;46,40)} - (3;20)\right) = \\ &= (1;26,40)^{-1} \times \left((46;40) - (3;20)\right) = (1;26,40)^{-1} \times (43;20) = (30)\,. \end{aligned}$$

Pak již snadno vypočítal y:

$$y = \frac{2}{3} \cdot x + (5) = (0;40) \times (30) + (5) = (25)\,.$$

Doplňme ještě pro zajímavost, že na tabulce BM 13901 bylo zaznamenáno 24 příkladů, tři z nich (20. až 22.) jsou však zničeny. Ostatní vedou na kvadratické rovnice; lze je rozdělit do tří skupin. Vyjádříme je stručně naší symbolikou.

[18] Viz [N1], 3. díl, originální text str. 3, německý překlad str. 8, rozbor str. 10–14.

[19] Poznamenejme, že písař nehledá hodnotu a^{-1}, neboť reciproká hodnota k číslu $a = (1;26,40) = \frac{13}{9}$ v šedesátkové soustavě neexistuje.

A. Kvadratické rovnice s jednou neznámou:

1. $x^2 + x = \frac{3}{4}$,

2. $x^2 - x = 870$,

3. $x^2 - \frac{1}{3} \cdot x^2 + \frac{1}{3} \cdot x = \frac{1}{3}$,

4. $x^2 - \frac{1}{3} \cdot x^2 + x = 286\frac{2}{3}$,

5. $x^2 + x + \frac{1}{3} \cdot x = \frac{11}{12}$,

6. $x^2 + \frac{2}{3} \cdot x = \frac{7}{12}$,

7. $11x^2 + 7x = 6\frac{1}{4}$,

16. $x^2 - \frac{1}{3} \cdot x = \frac{1}{12}$,

23. $x^2 + 4x = \frac{25}{36}$.

B. Soustavy dvou rovnic o dvou neznámých vedoucí na kvadratické nebo bikvadratické rovnice:

8.	$x^2 + y^2 = 1\,300$,	$x + y = 50$,
9.	$x^2 + y^2 = 1\,300$,	$x - y = 10$,
10.	$x^2 + y^2 = 21\frac{1}{4}$,	$x - y = -\frac{1}{7} \cdot x$,
11.	$x^2 + y^2 = 28\frac{1}{4}$,	$x - y = \frac{1}{7} \cdot y$,
12.	$x^2 + y^2 = 1\,300$,	$x \cdot y = 600$,
13.	$x^2 + y^2 = 1\,700$,	$y = \frac{1}{4} \cdot x$,
14.	$x^2 + y^2 = 1\,525$,	$y = \frac{2}{3} \cdot x + 5$,
19.	$x^2 + y^2 + (x - y)^2 = 1\,400$,	$x + y = 50$.

C. Soustavy tří rovnic o třech neznámých nebo čtyř rovnic o čtyřech neznámých vedoucí na kvadratické rovnice:

15.	$x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 1\,625$,	$y = \frac{2}{3} \cdot x$,	$z = \frac{1}{2} \cdot x$,	$t = \frac{1}{3} \cdot x$,
17.	$x^2 + y^2 + z^2 = 612\frac{3}{4}$,	$y = \frac{1}{7} \cdot x$,	$z = \frac{1}{7} \cdot y$,	
18.	$x^2 + y^2 + z^2 = 1\,400$,	$x - y = 10$	$y - z = 10$,	
24.	$x^2 + y^2 + z^2 = 1\,750$,	$y = \frac{2}{3} \cdot x + 5$,	$z = \frac{1}{2} \cdot y + 2\frac{1}{2}$.	

Uvedené příklady byly řešeny standardními metodami.

Upozorněme ještě na dvanáctý příklad této tabulky, který zní takto:

Plocha součtu mých čtverců je (21, 40). *Součin stran mých čtverců je* (10, 0). *Polovinu z* (21, 40) *odeber a* (10, 50) *násob s* (10, 50). (1, 57, 46, 40) *to je.*
(10, 0) *a* (10, 0) *násob.* (1, 40, 0, 0) *od* (1, 57, 46, 40) *odeber a* (17, 46, 40) *má* (4, 10) *jako kvadratický kořen.*
(4, 10) *k prvnímu* (10, 50) *přidej a* (15, 0) *má* (30) *jako kořen kvadratický.* (30) *je strana prvního čtverce.*
(4, 10) *od druhého* (10, 50) *odeber.* (6, 40) *má* (20) *jako kořen kvadratický.*[20]

Úlohu lze v naší symbolice zapsat soustavou

$$x^2 + y^2 = 1\,300\,,$$
$$x \cdot y = 600\,.$$

Po dosazení za x z druhé rovnice do rovnice první dospějeme k bikvadratické rovnici

$$y^4 - 1\,300y^2 + 600^2 = 0\,.$$

Její kořeny jsou

$$y_1 = 20\,, \quad y_2 = 10\sqrt{5}\,, \quad y_3 = -20\,, \quad y_4 = -10\sqrt{5}\,.$$

Řešení soustavy jsou tedy čtyři:

$$\begin{aligned} x_1 &= 30\,, & y_1 &= 20\,, \\ x_2 &= 12\sqrt{5}\,, & y_2 &= 10\sqrt{5}\,, \\ x_3 &= -30\,, & y_3 &= -20\,, \\ x_4 &= -12\sqrt{5}\,, & y_4 &= -10\sqrt{5}\,. \end{aligned}$$

Poslední dvě nevyhovují podmínkám zadání (x a y jsou délky stran).

Mezopotámský počtář uvádí pouze jedno řešení, jeho postup odpovídá následujícímu vyjádření neznámých ($b = (21,40) = 1\,300$, $c = (10,0)^2 = 600^2$):

$$x = \sqrt{\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c^2}} = \sqrt{650 + \sqrt{422\,500 - 360\,000}} = 30\,,$$

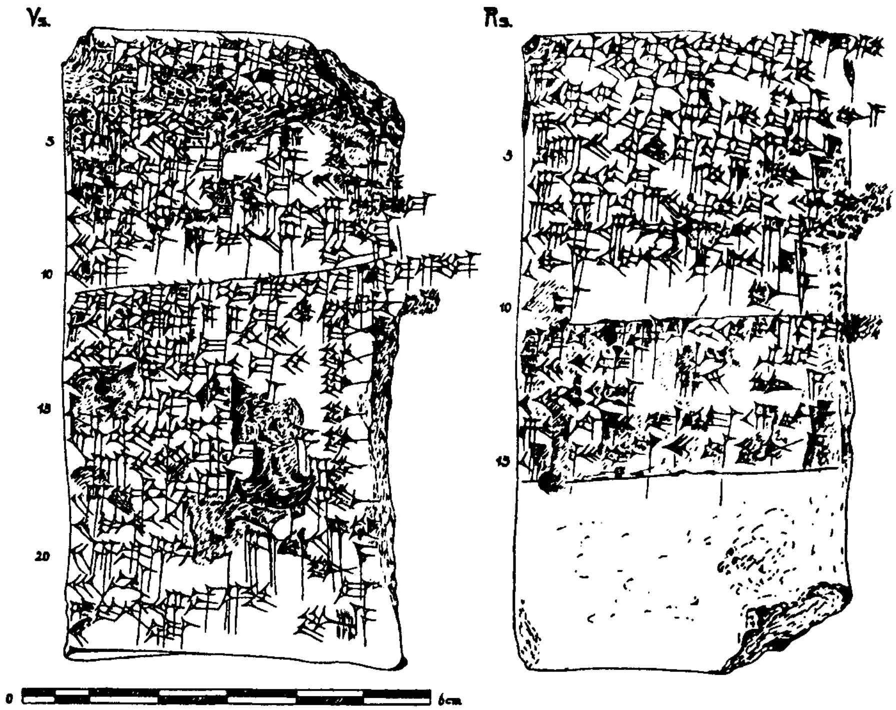
$$y = \sqrt{\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c^2}} = \sqrt{650 - \sqrt{422\,500 - 360\,000}} = 20\,.$$

Z uvedeného postupu je patrná brilantní znalost problematiky kvadratických rovnic.

Poznamenejme ještě, že tabulka BM 13901 není klasickou mezopotámskou sbírkou příkladů, neboť obsahuje různé typy úloh, jejichž výsledky jsou vesměs různé.

[20] V textu jsou písařské chyby: místo (1, 57, 46, 40) má být (1, 57, 21, 40) a místo (17, 46, 40) má být (17, 21, 40). Výsledek je však správný.

Obdobný charakter má starobabylónská tabulka YBC 6504 (viz následující obrázek), na které jsou jen čtyři dobře dochované příklady.[21]



YBC 6504

První příklad vede na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x \cdot y - (x-y)^2 &= 500 \;, \\ x - y &= 10 \;. \end{aligned}$$

Jednoduchou úpravou je tato soustava převedena na kanonický tvar

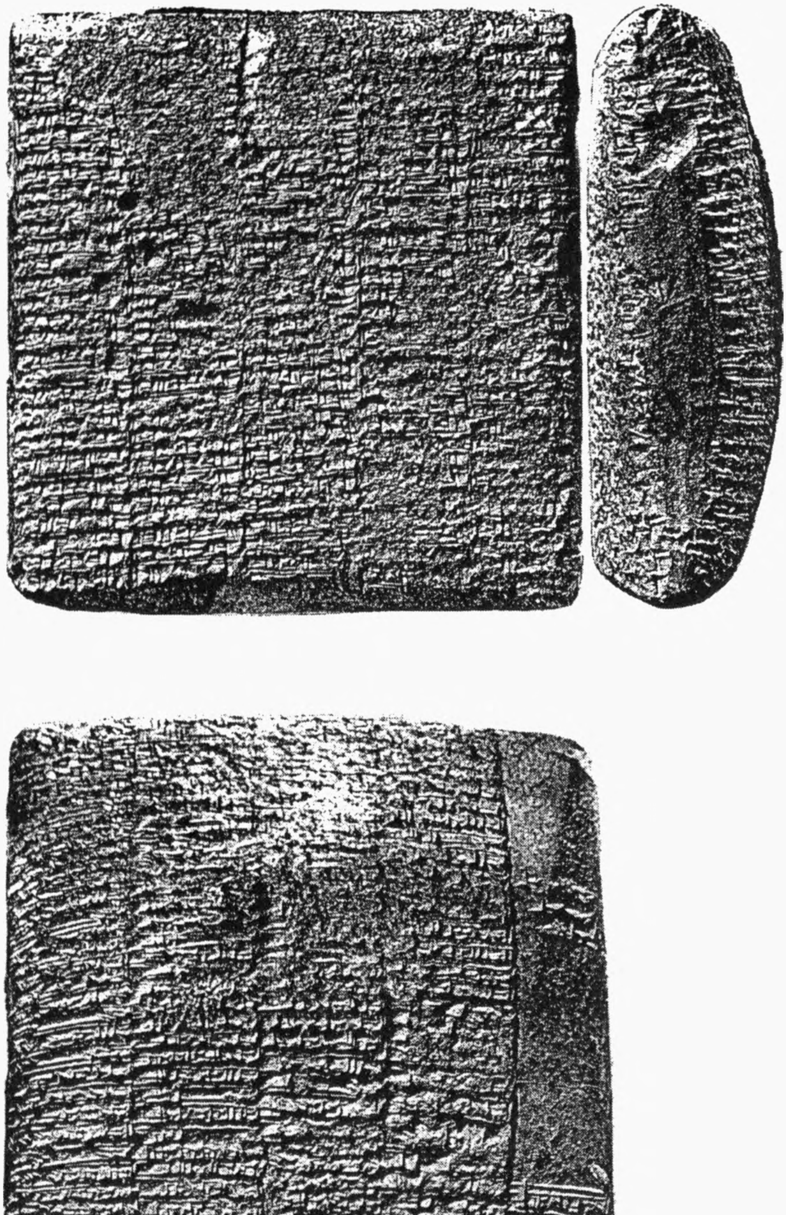
$$\begin{aligned} x \cdot y &= 500 + 10^2 \;, \\ x - y &= 10 \;, \end{aligned}$$

který je řešen standardní metodou.

Druhý příklad vede na soustavu rovnic

$$\begin{aligned} x \cdot y - (x-y)^2 &= 500 \;, \\ x + y &= 50 \;. \end{aligned}$$

[21] Viz [N1], 3. díl, originální text str. 22–23, německý překlad str. 23–24, rozbor str. 24–25.



Tabulka A 24194

Uvedené řešení odpovídá úpravě první rovnice:

$$x \cdot y = 500 + (x+y)^2 - 4 \cdot x \cdot y ,$$
$$5 \cdot x \cdot y = 500 + 50^2 .$$

Tak získáme soustavu, která odpovídá kanonickému tvaru

$$x \cdot y = 600 ,$$
$$x + y = 50 ,$$

který je řešen standardním postupem.

Třetí příklad je možno vyjádřit vztahy

$$x \cdot y - (x-y)^2 = 500 ,$$
$$x = 30 ;$$

je řešen pomocí substituce

$$z = x - y = 30 - y .$$

Po dosazení do první rovnice získáme úplnou kvadratickou rovnici

$$z^2 + 30z = 400 ,$$

která má jedno kladné řešení $z = 10$. Je zajímavé, že počtář postupoval tak složitým způsobem a nedosadil do první rovnice $x = 30$. Přímé dosazení bylo mezopotámským počtářům poměrně cizí.

Čtvrtý příklad lze vyjádřit vztahy

$$x \cdot y - (x-y)^2 = 500 ,$$
$$y = 20 ;$$

je řešen patrně na základě znalosti výsledku předchozího příkladu. Bez jakýchkoli úprav je řečeno, že řešením je

$$x = \sqrt{20^2 + 500} = 30 .$$

Poznamenejme, že všechny čtyři příklady mají stejná řešení ($x = 30$, $y = 20$); patrně vznikly modifikací první úlohy.

Ukončeme tuto kapitolu stručnou informací o dvou pozoruhodných tabulkách A 24194 a A 24195,[22] které lze chápat jako sbírky úloh z „vyšší" matematiky. První tabulka obsahuje 247 příkladů, druhá 177 příkladů. Jsou na nich jen texty příkladů; všechny mají stejný výsledek $x = 30$, $y = 20$.

[22] Viz [NS], originální texty str. 107–112 a 119–122, anglické překlady str 112–116 a 122–126, rozbor str. 116–119 a 126–129. Obě tabulky jsou uloženy v Yale Babylonian Collection na Yale University v USA.

Příklady, které jsou zachyceny na tabulce A 24194, vedou na soustavy dvou rovnic o dvou neznámých. První rovnice je pro všechny příklady společná; v naší symbolice ji lze zapsat v tvaru

$$x \cdot y = 600 \,.$$

Druhá rovnice se postupně mění; je utvořena následujícími sedmi způsoby z funkcí f a g (v mezopotámském textu jde o slovně zadané podmínky):

$$\begin{aligned}
f(x,y) + g(x,y) &= a_1 \,, \\
2f(x,y) + g(x,y) &= a_2 \,, \\
-f(x,y) + g(x,y) &= a_3 \,, \\
-2f(x,y) + g(x,y) &= a_4 \,, \\
a \cdot f(x,y) &= g(x,y) \,, \\
b \cdot f(x,y) &= g(x,y) + 10 \,, \\
c \cdot f(x,y) &= g(x,y) - 10 \,,
\end{aligned}$$

kde a, b, c, a_1, a_2, a_3, a_4 jsou přirozená čísla.

Funkce g je poměrně jednoduchá, v jednotlivých příkladech má tvar

$$\begin{aligned}
g(x,y) &= x \,, \\
g(x,y) &= y \,, \\
g(x,y) &= x + y \,, \\
g(x,y) &= 3x + 2y \,, \\
g(x,y) &= x + (x - y) \,, \\
g(x,y) &= x + y + 2 \cdot (x - y) \,, \\
g(x,y) &= \frac{x}{3} + \frac{y}{4} \,, \\
g(x,y) &= \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + (x - y) \,, \\
g(x,y) &= \frac{x}{3} + \frac{y}{4} + (x + y) \,, \\
g(x,y) &= x - y \,.
\end{aligned}$$

Všech 247 příkladů tabulky A 24194 lze podle tvaru funkce f rozdělit do sedmi skupin; funkce f je poměrně složitá.

První skupinu tvoří 1. až 41. příklad, funkce f zde má tvar

$$f(x,y) = \frac{1}{11} \cdot \left[\frac{1}{13} \cdot (x + 4y) + 2 \cdot (x - y) + 45 \right] .$$

Druhou skupinu tvoří 42. až 53. příklad, funkce f je dána předpisem

$$f(x,y) = \frac{1}{7} \cdot \frac{1}{11} \cdot \left[\frac{1}{14} \cdot (x + y) + 2 \cdot (x - y) + 149 \right] .$$

Třetí skupinu tvoří 54. až 80. příklad, čtvrtou 81. až 118. příklad, pátou 119. až 138. příklad; funkci f nelze v těchto příkladech přesně rekonstruovat, neboť tabulka je značně poškozena.

V šesté skupině (139. až 196. příklad) je

$$f(x,y) = \frac{1}{11} \cdot \left[\frac{1}{7} \cdot \left(\frac{x}{2} - \frac{1}{3} \cdot \frac{x}{2} + 25 \right) + 17 \right].$$

V sedmé skupině (197. až 247. příklad) je

$$f(x,y) = \frac{1}{8} \cdot \left\{ \frac{1}{11} \cdot \left[\frac{1}{8} \cdot \left[x + (x-y) + \tfrac{1}{4} \cdot (x + (x-y)) + 6 \right] + 15 \right] + x \right\}.$$

Úlohy nejsou jednoduché; vedou na různé typy kvadratických rovnic, jejichž numerické řešení je poměrně obtížné. Ten, kdo sbírku tvořil, ovládal velmi dobře problematiku kvadratických rovnic. Obdobnou strukturu má i tabulka A 24195.

Poznamenejme, že úlohy vedoucí na kvadratické rovnice jsou i na tabulkách VAT 7528, VAT 7537, YBC 4668, YBC 4695, YBC 4712, YBC 4713, YBC 4714 a YBC 4715.

LITERATURA

[Fr] Friberg J., *Methods and Traditions of Babylonian Mathematics II: An Old Babylonian Catalogue Text with Equations for Squares and Circles*, Journal of Cuneiform Studies **33** (1981), 57–64.

[Ga] Gandz S., *The Origin and Development of the Quadratic Equations in Babylonian, Greek and Early Arabic Algebra*, Osiris **3** (1937), 405–557.

[GG2] Grattan-Guinness I., *The Fontana History of the Mathematical Sciences*, Fontana Press, London, 1997.

[GS] Grundlach K.-B., von Soden W., *Einige altbabylonische Texte zur Lösung "quadratische Gleichungen"*, Abhandlungen aus dem mathematischen Seminar der Universität Hamburg **26** (1963), 248–263.

[Ju] Juškevič A. P., *Istorija matematiky*, Nauka, Moskva, 1970.

[Kl] Kline M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972.

[Ko] Kolman A., *Dějiny matematiky ve starověku*, Academia, Praha, 1968.

[N1] Neugebauer O., *Mathematische Keilschrift-Texte*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1935 (erster und zweiter Teil), 1937 (dritter Teil), reprint Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[N2] Neugebauer O., *Vorlesungen über Geschichte der Antiken Mathematischen Wissenschaften, Erster Band. Vorgriechische Mathematik*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1934.

[N5] Neugebauer O., *Točnye nauki v drevnosti*, Nauka, Moskva, 1968.

[N6] Neugebauer O., *The Exact Sciences in Antiquity*, Harper, New York, 1962.

[N7] Neugebauer O., *Studien zur Geschichte der antiken Algebra I*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, B, Band 2, 1933, 1–27.

[N8] Neugebauer O., *Serientexte in der babylonischen Mathematik*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, B, Band 3, 1936, 106–114.

[N9] Neugebauer O., *Zur geometrischen Algebra (Studien zur Geschichte der antiken Algebra III)*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, B, Band 3, 1936, 245–259.

[NS] Neugebauer O., Sachs A., *Mathematical Cuneiform Texts*, American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research, New Haven, Connecticut, 1945, reprint, Harrassowitz, 1986.

[S] Schuster H. S., *Quadratische Gleichungen der Seleukidentzeit aus Uruk*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, B, Band 1, 1931, 194–200.

[Sch] Scholz E., *Geschichte der Algebra*, Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1990.

[Ra] Raik A. E., *Iz rannej istorii algebry. Kvadratnye uravnenija*, Učenye zapiski Permskogo Universiteta **8** (1955), 31–63.

[Th] Thureau-Dagin F., *L'Équation du deuxième degré dans la mathématique babylonienne d'après une tablette inédite du British Museum*, Revue d'Assyriologie **33** (1936), 27–48.

[Tr1] Tropfke J., *Zur Geschichte der quadratischen Gleichungen über dreieinhalb Jahrtausend*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung **43** (1933), 98–107.

[Tr2] Tropfke J., *Zur Geschichte der quadratischen Gleichungen über dreieinhalb Jahrtausend*, Jahresbericht der Deutschen Mathematiker Vereinigung **44** (1934), 26–119.

[Vs] Veselovskij I. N., *Vavilonskaja matematika*, Trudy Instituta istorii estestvennych nauk i techniky **5** (1955), 241–303.

[Vo] Vogel K., *Vorgriechische Mathematik*, Würzburg, 1958-1959.

[Vo2] Vogel K., *Zur Berechnung der quadratischen Gleichungen bei den Babyloniern*, Unterrichtsblätter für Mathematik und Physik **39** (1933), 76–81.

[Vy1] Vygodskij M. Ja., *Arifmetika i algebra v drevnem mire*, Nauka, Moskva, 1967.

[Vy3] Vygodskij M. Ja., *Matematika drevnich vavilonjan*, Uspechi matematičeskich nauk **7** (1952), 102–153.

[Vy4] Vygodskij M. Ja., *Matematika drevnich vavilonjan*, Uspechi matematičeskich nauk **8** (1953), 293–335.

WWW STRÁNKY

[WW1] http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath.

[WW3] http://www.math.tamu.edu/~don.allen/history/babylon/babylon.html.

[WW4] http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Indexes/Babylonians.html.

BIKVADRATICKÉ ROVNICE.

Již ve starobabylónském období byly v Mezopotámii řešeny úlohy, které dnes řešíme pomocí bikvadratických rovnic. Jejich terminologie se neliší od terminologie příkladů vedoucích na rovnice kvadratické. Původ většiny úloh je geometrický; přesto není dodržován zákon homogenity.

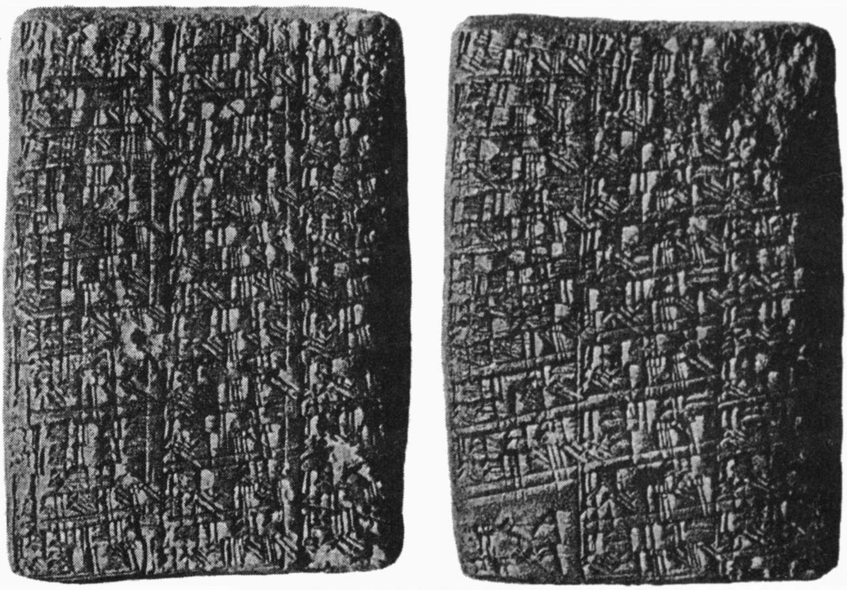
Velmi zajímavá je tabulka YBC 4709[1] obsahující zadání 55 úloh; všechny vedou na soustavu rovnic tvaru

$$x \cdot y = 600\ ,$$

$$(ax \pm by)^2 \pm cx^2 \pm dy^2 = e\ ,$$

kde a, b, c, d jsou přirozená čísla nebo nuly a e je přirozené číslo. Řešení ani výsledky příkladů nejsou na tabulce uvedeny; všechny úlohy však mají společné řešení: $x = 30$, $y = 20$.

Vs.



Rs.

YBC 4709

Uveďme pro zajímavost znění prvních tří příkladů:

1. *Plocha je* (1) *eše. Délku jsem vynásobil* (3), *umocnil a přidal plochu šířky. Je to* (2, 21, 40).

2. *Vynásob* (2), *přidej, to je* (2, 28, 20).

3. *Plocha šířky odečtena, to je* (2, 8, 20).

---

[1] Pochází ze starobabylónského období. Viz [N1], originální text str. 412–414, německý překlad str. 414–418, rozbor str. 418–420.

Znění jednotlivých příkladů na sebe navazuje; k jejich dobrému porozumění je třeba mít jistou zkušenost ze studia obdobných tabulek. Matematickou symbolikou je možno tyto tři příklady zapsat takto:

1. $x \cdot y = 600\,, \qquad (3x)^2 + y^2 = 8\,500\,,$

2. $x \cdot y = 600\,, \qquad (3x)^2 + 2y^2 = 8\,900\,,$

3. $x \cdot y = 600\,, \qquad (3x)^2 - y^2 = 7\,700\,.$

Povšimněme si první soustavy. Budeme ji nejprve řešit tak, jak by ji řešil žák dnešní střední školy.

Dosadíme-li z první rovnice $y = \frac{600}{x}$ do druhé, získáme po jednoduché úpravě bikvadratickou rovnici

$$9x^4 - 8\,500x^2 + 360\,000 = 0\,.$$

Substitucí $x^2 = t$ přejdeme ke kvadratické rovnici

$$9t^2 - 8\,500t + 360\,000 = 0\,,$$

jejíž řešení je

$$t_1 = 900\,, \qquad t_2 = \frac{400}{9}\,;$$

odtud

$$x_1 = 30\,, \qquad x_2 = -30\,, \qquad x_3 = \frac{20}{3}\,, \qquad x_4 = -\frac{20}{3}\,.$$

Záporná řešení však nemají vzhledem k zadání úlohy smysl. Z první rovnice (dosazením za x_1 a x_3) vypočteme druhou neznámou:

$$y_1 = 20\,, \qquad y_3 = 90\,.$$

Poznamenejme, že druhé řešení ($x_3 = \frac{20}{3}, y_3 = 90$) by mezopotámští počtáři neuváděli, neboť jednak nebylo zvykem uvádět více řešení, jednak měla být podle zvyku délka větší než šířka.

Nevíme, jak mezopotámští počtáři při řešení takovýchto úloh postupovali. Je pravděpodobné, že zvolili vhodnou substituci a úlohu převedli na známý kanonický tvar. Možný postup jejich řešení zapíšeme v naší symbolice. První rovnici soustavy

$$x \cdot y = 600\,,$$
$$(3x)^2 + y^2 = 8\,500$$

upravili a obdrželi

$$3x \cdot 3x \cdot y \cdot y = 9x^2y^2 = 9 \cdot 600 \cdot 600 = 3\,240\,000\,.$$

Substitucí $t = 9x^2$, $u = y^2$ pak přešli k soustavě

$$t \cdot u = 3\,240\,000 \,,$$
$$t + u = 8\,500 \,;$$

získali tak jednu z klasických mezopotámských kanonických úloh.

Úlohy na tabulce YBC 4709 byly sestaveny podle určitých pravidel. Uveďme pro zajímavost přepis všech 55 příkladů této tabulky:

1. $x \cdot y = 600$, $(3x)^2 + y^2 = 8\,500$,
2. $x \cdot y = 600$, $(3x)^2 + 2y^2 = 8\,900$,
3. $x \cdot y = 600$, $(3x)^2 - y^2 = 7\,700$,
4. $x \cdot y = 600$, $(3x + 2y)^2 + x^2 = 17\,800$,
5. $x \cdot y = 600$, $(3x + 2y)^2 + 2x^2 = 18\,700$,
6. $x \cdot y = 600$, $(3x + 2y)^2 - x^2 = 16\,000$,
7. $x \cdot y = 600$, $(3x + 2y)^2 - 2x^2 = 15\,100$,
8. $x \cdot y = 600$, $(3x + 2y)^2 + y^2 = 17\,300$,
9. $x \cdot y = 600$, $(3x + 2y)^2 + 2y^2 = 17\,700$,
10. $x \cdot y = 600$, $(3x + 2y)^2 - y^2 = 16\,500$,
11. $x \cdot y = 600$, $(3x + 2y)^2 - 2y^2 = 16\,100$,
12. $x \cdot y = 600$, $(3x + 4y)^2 + x^2 = 29\,800$,
13. $x \cdot y = 600$, $(3x + 4y)^2 + 2x^2 = 30\,700$,
14. $x \cdot y = 600$, $(3x + 4y)^2 - x^2 = 28\,000$,
15. $x \cdot y = 600$, $(3x + 4y)^2 - 2x^2 = 27\,100$,
16. $x \cdot y = 600$, $(3x + 4y)^2 + y^2 = 29\,300$,
17. $x \cdot y = 600$, $(3x + 4y)^2 + 2y^2 = 29\,700$,
18. $x \cdot y = 600$, $(3x + 4y)^2 - y^2 = 28\,500$,
19. $x \cdot y = 600$, $(3x + 4y)^2 - 2y^2 = 28\,100$,
20. $x \cdot y = 600$, $[3x + 2(x - y)]^2 + x^2 = 13\,000$,
21. $x \cdot y = 600$, $[3x + 2(x - y)]^2 + 2x^2 = 13\,900$,
22. $x \cdot y = 600$, $[3x + 2(x - y)]^2 - x^2 = 11\,200$,
23. $x \cdot y = 600$, $[3x + 2(x - y)]^2 - 2x^2 = 10\,300$,
24. $x \cdot y = 600$, $[3x + 2(x - y)]^2 + y^2 = 12\,500$,
25. $x \cdot y = 600$, $[3x + 2(x - y)]^2 + 2y^2 = 12\,900$,

26. $x \cdot y = 600$, $[3x + 2(x - y)]^2 - y^2 = 11\,700$,

27. $x \cdot y = 600$, $[3x + 2(x - y)]^2 - 2y^2 = 11\,300$,

28. $x \cdot y = 600$, $[3x - 2(x - y)]^2 + x^2 = 5\,800$,

29. $x \cdot y = 600$, $[3x - 2(x - y)]^2 + 2x^2 = 6\,700$,

30. $x \cdot y = 600$, $[3x - 2(x - y)]^2 - x^2 = 4\,000$,

31. $x \cdot y = 600$, $[3x - 2(x - y)]^2 - 2x^2 = 3\,100$,

32. $x \cdot y = 600$, $[3x - 2(x - y)]^2 + y^2 = 5\,300$,

33. $x \cdot y = 600$, $[3x - 2(x - y)]^2 + 2y^2 = 5\,700$,

34. $x \cdot y = 600$, $[3x - 2(x - y)]^2 - y^2 = 4\,500$,

35. $x \cdot y = 600$, $[3x - 2(x - y)]^2 - 2y^2 = 4\,100$,

36. $x \cdot y = 600$, $[3x - 2(x - y)]^2 + (x^2 + y^2) = 6\,200$,

37. $x \cdot y = 600$, $[3x - 2(x - y)]^2 + 2(x^2 + y^2) = 7\,500$,

38. $x \cdot y = 600$, $[3x - 2(x - y)]^2 - (x^2 + y^2) = 3\,600$,

39. $x \cdot y = 600$, $[3x - 2(x - y)]^2 - 2(x^2 + y^2) = 2\,300$,

40. $x \cdot y = 600$, $[(3x + 5y) + 2(x - y)]^2 = 44\,100$,

41. $x \cdot y = 600$, $[(3x + 5y) - 2(x - y)]^2 + x^2 = 29\,800$,

42. $x \cdot y = 600$, $[(3x + 5y) - 2(x - y)]^2 + 2x^2 = 30\,700$,

43. $x \cdot y = 600$, $[(3x + 5y) - 2(x - y)]^2 - x^2 = 28\,000$,

44. $x \cdot y = 600$, $[(3x + 5y) - 2(x - y)]^2 - 2x^2 = 27\,100$,

45. $x \cdot y = 600$, $[(3x + 5y) - 2(x - y)]^2 + y^2 = 29\,300$,

46. $x \cdot y = 600$, $[(3x + 5y) - 2(x - y)]^2 + 2y^2 = 29\,700$,

47. $x \cdot y = 600$, $[(3x + 5y) - 2(x - y)]^2 - y^2 = 28\,500$,

48. $x \cdot y = 600$, $[(3x + 5y) - 2(x - y)]^2 - 2y^2 = 28\,100$,

49. $x \cdot y = 600$, $[(3x + 5y) - 2(x - y)]^2 + (x^2 + y^2) = 30\,200$,

50. $x \cdot y = 600$, $[(3x + 5y) - 2(x - y)]^2 + 2(x^2 + y^2) = 31\,500$,

51. $x \cdot y = 600$, $[(3x + 5y) - 2(x - y)]^2 - (x^2 + y^2) = 27\,600$,

52. $x \cdot y = 600$, $[(3x + 5y) - 2(x - y)]^2 - 2(x^2 + y^2) = 26\,300$,

53. $x \cdot y = 600$, $[3y + (x - y)]^2 + x^2 = 5\,800$,

54. $x \cdot y = 600$, $[3y + (x - y)]^2 + 2x^2 = 6\,700$,

55. $x \cdot y = 600$, $[3y + (x - y)]^2 + (x^2 + y^2) = 6\,200$.

Tabulka YBC 4709 je užitečná a velmi cenná i pro metodický výzkum tvorby příkladů a jejich řazení do sbírek. První rovnice je ve všech úlohách stejná. Druhá se podle určitých pravidel mění, můžeme ji zapsat v tvaru

$$f(x,y) + g(x,y) = e\ ,$$

kde f a g jsou poměrně jednoduché funkce dvou proměnných x a y. Přirozené číslo e bylo voleno tak, aby bylo řešení všech příkladů stejné. Ten, kdo vytvářel sbírku, vycházel od výsledku; po volbě funkcí f a g vypočetl pravou stranu druhé rovnice. Musel být poměrně dobrým počtářem.

Funkce f je stejná v úlohách 1. až 3., 4. až 11., 12. až 19., 20. až 27., 28. až 39., 41. až 52., 53. až 55.

Funkce g se pravidelně obměňuje; v příkladech 4. až 35. se postupně střídá čtyřčlenný cyklus x^2, $2x^2$, $-x^2$, $-2x^2$ s cyklem y^2, $2y^2$, $-y^2$, $-2y^2$. V úlohách 36. až 39. se jako funkce g objeví $x^2 + y^2$, $2(x^2 + y^2)$, $-(x^2 + y^2)$, $-2(x^2 + y^2)$. V úlohách 41. až 52. se jako funkce g prostřídají tři výše zmíněné cykly.

První tři úlohy vybočují. Mezi třetí a čtvrtou úlohou patrně chybí úloha, ve které by jako funkce g bylo $-2y^2$; snad měly být zcela na začátku čtyři úlohy, ve kterých by jako funkce g bylo x^2, $2x^2$, $-x^2$, $-2x^2$.

Vybočuje i 40. úloha, kde je pozměněná funkce f a funkce g je nulová.

Poslední tři úlohy se zdají být vybrány z obdobně vytvořeného kompletu dvanácti úloh.[2]

Všechny tyto úlohy užívají geometrickou terminologii, ale jejich řešení se o geometrické představy patrně neopíralo.

Poznamenejme ještě, že se na starobabylónských tabulkách objevených v městě Susa nacházejí i úlohy vedoucí na rovnice osmého stupně, které lze vhodnou substitucí převést na rovnice kvadratické. Jeden z příkladů lze v naší symbolice zapsat rovnicí

$$x^8 + (20,0)^2 x^4 = (14,48,53,20)^2\ .$$

Poznamenejme, že v tomto příkladu jsou vhodně zvoleny koeficienty; jedno řešení je totiž rovno 40.

Úlohy vedoucí na bikvadratické rovnice lze nalézt i na starobabylónských tabulkách YBC 4668, YBC 4712, YBC 4713.

---

[2] Poznamenejme, že obdobnou koncepci tvorby úloh lze nalézt i na jiných tabulkách, které obsahují sbírky úloh vedoucích na lineární, kvadratické a kubické rovnice.

LITERATURA

[GG2] Grattan-Guinness I., *The Fontana History of the Mathematical Sciences*, Fontana Press, London, 1997.

[Ju] Juškevič A. P., *Istorija matematiky*, Nauka, Moskva, 1970.

[Kl] Kline M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford Univ. Press, New York, 1972.

[Ko] Kolman A., *Dějiny matematiky ve starověku*, Academia, Praha, 1968.

[N1] Neugebauer O., *Mathematische Keilschrift-Texte*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1935 (erster und zweiter Teil), 1937 (dritter Teil), reprint Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[N2] Neugebauer O., *Vorlesungen über Geschichte der Antiken Mathematischen Wissenschaften, Erster Band. Vorgriechische Mathematik*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1934.

[NS] Neugebauer O., Sachs A., *Mathematical Cuneiform Texts*, American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research, New Haven, Connecticut, 1945, reprint, Harrassowitz, 1986.

[Ra] Raik A. E., *O bikvadratnych uravnenijach u vavilonjan*, Učenye zapiski Permskogo Universiteta **9** (1956), 11–14.

[Vo] Vogel K., *Vorgriechische Mathematik*, Würzburg, 1958–1959.

[Vs] Veselovskij I. N., *Vavilonskaja matematika*, Trudy Instituta istorii estestvennych nauk i techniky **5** (1955), 241–303.

[Vy] Vygodskij M. Ja., *Arifmetika i algebra v drevnem mire*, Nauka, Moskva, 1967.

[Vy3] Vygodskij M. Ja., *Matematika drevnich vavilonjan*, Uspechi matematičeskich nauk **7** (1952), 102–153.

[Vy4] Vygodskij M. Ja., *Matematika drevnich vavilonjan*, Uspechi matematičeskich nauk **8** (1953), 293–335.

WWW STRÁNKY

[WW1] http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath.

[WW3] http://www.math.tamu.edu/~don.allen/history/babylon/babylon.html.

[WW4] http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Indexes/Babylonians.html.

KUBICKÉ ROVNICE.

Na některých mezopotámských tabulkách se setkáváme s úlohami, které dnes můžeme řešit pomocí kubických rovnic. Většina takovýchto úloh vychází z geometrických problémů, což dokazuje užívaná terminologie. Nejčastěji jsou dány tři vztahy mezi třemi neznámými (*délka*, *šířka* a *hloubka*), v příkladech jde o objem výkopů nebo náspů a obsah jejich vertikálních nebo horizontálních řezů. Opět není dodržován zákon homogenity, běžně se sčítá objem a obsah. Vlastní řešení se pravděpodobně neopírá o žádné geometrické představy, vychází se z čistě algebraických metod, používají se speciální početní tabulky a interpolace.[1] Podívejme se na jednotlivé typy úloh, které mezopotámští počtáři řešili; uvažujeme úlohy, ve kterých se vyskytuje součin tří neznámých.

Poznamenejme ještě, že pokud byl na mezopotámských tabulkách uveden výsledek nějakého příkladu, bylo vždy zaznamenáno pouze jediné řešení, a to i v případech, že jich existovalo více.

I. Úloha typu $x^3 = a$.

Nejjednodušším typem kubické rovnice byla rovnice $x^3 = a$, kde a bylo přirozené číslo, šedesátinný zlomek nebo smíšené číslo. Tato rovnice se řešila pomocí tabulek třetích mocnin, resp. odmocnin, odhadem či výpočtem třetí odmocniny.

Na tabulce BM 85200 + VAT 6599 (viz následující obrázek)[2] bylo zapsáno třicet příkladů; několik z nich (1. až 4., 10. až 11. a 28. příklad) je však zničeno. 22. příklad zní takto:

Délka, šířka. Co jsem umocnil, je také hloubka. (1; 30) *je objem vykopaný. Délka, šířka a hloubka jsou co?*

Ty: Reciprokou hodnotu z (12) *utvoř.* (0; 5) *vidíš.*

(0; 5) *s* (1; 30) *násob.* (0; 7, 30) *vidíš.*

(0; 30) *je třetí odmocnina.* (0; 30) *s* (1) *násob.* (0; 30) *kvadratické.*

(0; 30) *s* (12) *násob.* (6) *je hloubka. Postup.*[3]

Úlohu lze v naší současné symbolice zapsat soustavou tří rovnic; je-li x délka, y šířka a z hloubka, je

$$x \cdot y \cdot z = 1\frac{1}{2}\,,$$
$$y = x\,,$$
$$z = 12x\,,$$

[1] Interpolace byla užívána, když nebylo možno řešení získat pomocí tabulek odmocnin a mocnin.

[2] Jde o dvě části jedné tabulky, která pochází z období 1. babylónské dynastie. Jedna část (BM 85200) je uložena v Britském muzeu v Londýně, druhá část (VAT 6599) je uložena v Berlíně. Poprvé ji studoval roku 1933 O. Neugebauer. Viz [N1], originální text str. 194–199, německý překlad str. 200–208, rozbor 208–219.

[3] Viz [N1], originální text str. 198, německý překlad str. 204, rozbor str. 216.

Tabulka BM 85200 a VAT 6599 (líc)

neboť délka a šířka byla měřena v jednotkách gar, zatímco hloubka v loktech. Je-li délka x stejná jako hloubka z, je $z = 12x$, neboť 1 gar je 12 loktů.

Dosadíme-li z druhé a třetí rovnice za y a z do rovnice první, získáme rovnici

$$12x^3 = 1\frac{1}{2} .$$

Postup uvedený na tabulce odpovídá tomuto výpočtu (v šedesátkové soustavě):

$$x^3 = (0;5) \times (1;30) = (0;7,30) , \qquad x = (0;30) ,$$

$$y = (0;30) \times (1) = (0;30) , \qquad z = (0;30) \times (12) = (6) .$$

Počtář tedy došel ke kanonickému tvaru $x^3 = a$, řešení x pak nalezl patrně pomocí tabulky třetích mocnin či odmocnin a potom dopočítal hodnoty neznámých y a z.

II. Úloha typu $x^3 + x^2 = a$.

Druhým typem kubických rovnic byla rovnice $x^3 + x^2 = a$. Byla řešena pomocí speciálních tabulek uvádějících součet druhých a třetích mocnin přirozených čísel nebo pomocí aproximace, pokud hodnota a na příslušné tabulce nebyla.

23. příklad na tabulce BM 85200 + VAT 6599 zní takto:

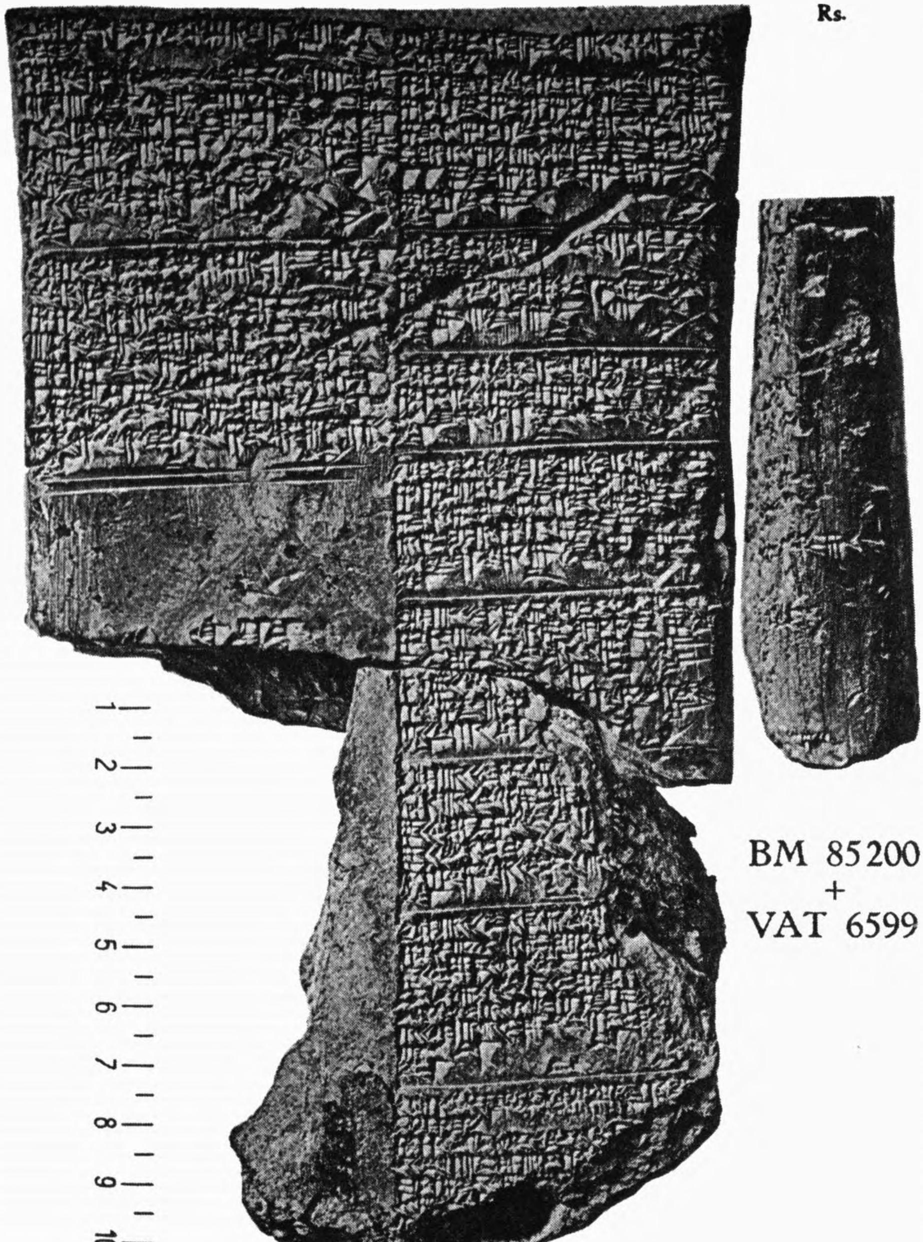
Délka, šířka. Co jsem umocnil a (1) *loket diference, je také hloubka.* (1; 45) *je vykopaný objem.*
Ty: (0; 5) *diferenci s* (1), *dílem zlomku násob.* (0; 5) *vidíš.*
(0; 5) *s* (12) *násob.* (1) *uvidíš.*
(0; 5) *umocni.* (0; 0, 25) *vidíš.*
(0; 0, 25) *s* (1) *násob.* (0; 0, 25) *vidíš.*
Reciproké k (0; 0, 25) *vytvoř.* (2, 24) *uvidíš.*
(2, 24) *s* (1; 45) *násob.* (4, 12) *vidíš.*
Z hrany (1) *přičti.* (6) *nebo* (1) *jsou hrany.*
(6) *s* (0; 5) *násob.* (0; 30) *vidíš.*
(0; 30) *kvadratické,* (6)(sic)[4] *hloubka. Postup.*[5]

Úlohu lze v současné matematické symbolice zapsat následující soustavou rovnic:

$$\begin{aligned} x \cdot y \cdot z &= 1\frac{3}{4} , \\ y &= x , \\ z &= 12x + 1 . \end{aligned}$$

[4] Písařská chyba. Správně má být (7).
[5] Viz [N1], originální text str. 198, německý překlad str. 205, rozbor str. 216.

Rs.



BM 85200
+
VAT 6599

Tabulka BM 85200 a VAT 6599 (rub)

Dosadíme-li z druhé a třetí rovnice za y a z do rovnice první, získáme rovnici

$$12x^3 + x^2 = 1\frac{3}{4}\ .$$

Úloha se řeší úpravou na kanonický tvar, tj. převede se na rovnici

$$w^3 + w^2 = a\ ,$$

kde $w = 12x$. Použijeme-li tuto substituci, dostaneme rovnici

$$(12x)^3 + (12x)^2 = 12^2 \cdot 1\frac{3}{4}\ ,$$

neboli

$$w^3 + w^2 = 252\ .$$

Kořen w se nyní najde pomocí tabulky součtů druhých a třetích mocnin přirozených čísel: $w = 6$. Potom se vypočte x, y a z:

$$x = y = \frac{1}{12} \cdot w = \frac{1}{2}\ , \qquad z = 12x + 1 = w + 1 = 7\ .$$

Přečteme-li si podrobněji postup babylónského počtáře, zjistíme, že jeho výpočet je zdlouhavý a zmatený. Nejprve vypočetl číslo $\frac{1}{12}$, vynásobil je číslem 1 (není jasné, proč tento krok uvádí), pak vypočítal $(\frac{1}{12})^2$, k tomu určil pomocí tabulek převrácenou hodnotu, opět ji vynásobil číslem 1 a dále ji vynásobil objemem $(1;45)$. Jde o zbytečně složitý výpočet čísla $(12)^2 \times (1;45) = (4,12)$.

Věta „*Z hrany* (1) *přičti.*“ je umístěna chybně. Měla by být až na konci, neboť představuje výpočet $z = 12x + 1 = 6 + 1 = 7$. Snad proto je hloubka v závěru vypočtena špatně. Věta „(6) *nebo* (1) *jsou hrany*“ je nejasná.

Pátý příklad na téže tabulce patří ke stejnému typu kubické rovnice. Jeho řešení je však obtížnější než řešení 23. příkladu.

Délka, šířka. Co je délka, je také hloubka. Řez a objem máš sečíst, tj. $(1;10)$. … *délka, šířka je co?*

… (3) *vidíš.* $\frac{1}{2}$ *z* (3) *odečti.* $(1;40)$ *vidíš.* … *násob.* $(0;40)$ *vidíš jako díl zlomku.*

Reciproké z (12), *dílu zlomku hloubky, utvoř.* $(0;5)$ *vidíš.*

S (1) *násob,* $(0;5)$ *vidíš.*

S $(0;40)$ *násob.* $(0;3,20)$ *vidíš.*

$(0;3,20)$ *s* $(0;5)$ *násob.* $(0;0,16,40)$ *vidíš.*

Reciproké z $(0;0,16,40)$ *utvoř.* $(3,36)$ *vidíš.*

$(3,36)$ *s* $(1;10)$ *násob.* $(4,12)$ *vidíš.*

(6) *je hrana.* (6) *s* $(0;5)$ *násob,* $(0,30)$ *vidíš.*

(6) *s* $(0;3,20)$ *násob.* $(0;20)$ *je šířka.*

(6) *s* (1) *násob.* (6) *vidíš jako hloubku. Tak je postup.*[6]

[6] Viz [N1], originální text str. 194, německý překlad str. 200, rozbor str. 210.

Zadání úlohy lze spolehlivě rekonstruovat až z postupu řešení; vede na následující soustavu rovnic:

$$x \cdot y \cdot z + x \cdot y = 1\frac{1}{6} ,$$
$$y = \frac{2}{3}x ,$$
$$z = 12x .$$

Dosadíme-li z druhé a třetí rovnice za y a z do rovnice první, získáme rovnici

$$12 \cdot \frac{2}{3}x^3 + \frac{2}{3}x^2 = 1\frac{1}{6} .$$

Mezopotámský postup řešení je podobný, opět jde o úpravu na kanonický tvar s využitím substituce $w = 12x$:

$$w^3 + w^2 = 12^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 1\frac{1}{6} = 252 .$$

Stejně jako ve výše uvedeném 23. příkladu se poměrně komplikovaně vypočítává číslo $12^2 \cdot \frac{3}{2} \cdot 1\frac{1}{6} = 252$. Nejprve se určí reciproká hodnota k 12, ta se vynásobí $\frac{2}{3}$ a pak ještě reciprokou hodnotou k 12; k výsledku se pak vypočte reciproká hodnota a tou se násobí pravá strana rovnice, tj. číslo $1\frac{1}{6}$.

Řešení rovnice $w^3 + w^2 = 252$ se nalezne v tabulkách; vychází $w = 6$, pak se vypočítá

$$x = \frac{1}{12} \cdot 6 = \frac{1}{2} , \qquad y = \frac{1}{12} \cdot \frac{2}{3} \cdot 6 = \frac{1}{3} , \qquad z = 6 \cdot 1 = 6 .$$

Zajímavý je i 20. příklad, který zní takto:

Délka, šířka. Co jsem umocnil a (7) *loket je také hloubka.* (0; 3, 20) *jako objem je vykopán. Délka, šířka a hloubka je co?*

Ty: (7) *díl ze* (7) *vezmi.* (1) *vidíš.*

Reciproké z (12) *utvoř.* (0; 5) *vidíš.*

(0; 5) *s* (1) *násob.* (0; 5) *vidíš.*

(0; 5) *s* (12). (1) *vidíš.*

(0; 5) *umocni.* (0; 0, 25) *s* (1) *násob.* (0; 0, 25) *vidíš.*

Reciproké z (0; 0, 25) *utvoř.* (2, 24) *vidíš.*

(2, 24) *s* (0; 3, 20), *objemem, násob.* (8) *vidíš.*

Co jsou hrany? (1), (1), (8).

(0; 5) *s* (1) *násob.* (0; 5) *vidíš.*

(0; 5) *loket*(sic)[7] *je délka.*

(8) *s* (1) *násob.* (8) *loket je hloubka. Postup.*[8]

---

[7] Písařská chyba. Správně má být *gar*.

[8] Viz [N1], originální text str. 197, německý překlad str. 204, rozbor str. 215.

Úlohu lze v naší symbolice zapsat následující soustavou rovnic:

$$x \cdot y \cdot z = \frac{1}{18} ,$$
$$y = x ,$$
$$z = 12x + 7 .$$

Po dosazení z druhé a třetí rovnice do první obdržíme rovnici

$$12x^3 + 7x^2 = \frac{1}{18} ,$$

kterou převedeme jednoduchou úpravou na kanonický tvar:

$$\left(\frac{12x}{7}\right)^3 + \left(\frac{12x}{7}\right)^2 = \frac{1}{18} \cdot \frac{12^2}{7^3} .$$

Dospěli jsme tedy k rovnici

$$w^3 + w^2 = \frac{8}{7^3} ,$$

kde $w = \frac{12}{7}x$. Na pravé straně rovnice je však zlomek, jehož rozvoj není v šedesátkové soustavě konečný. Dělení sedmi bylo pro mezopotámského počtáře velmi obtížné. Patrně proto postupoval trochu jinak.

Při podrobném prostudování popsaného postupu zjistíme, že na počátku je uvedena nejasná operace $7 : 7 = 1$. Další část postupu je až na podivné násobení číslem 1 jasná:

$$(0;5) \times (1) \times (0;5) = (0;0,25) ,$$

$$\frac{1}{(0;0,25)} = (2,24) ,$$

$$(2,24) \times (0;3,20) = (8) .$$

Výpočet odpovídá substituci $u = 12x$, která vede na rovnici

$$u^3 + 7u^2 = 8 .$$

Těžko říci, zda pro hodnoty $u^3 + 7u^2$ existovaly nějaké tabulky. Jedno řešení uvažované rovnice je však patrné na první pohled: $u = 1$. Délka a šířka je tedy 1 loket, hloubka je o 7 loktů větší, tedy 8 loktů.

Závěr příkladu je srozumitelný; jde jen o převod délky a šířky na základní délkovou jednotku *gar*. Převod je proveden dobře, výsledek je však uveden s chybnou jednotkou *loket*. Hloubka byla určena v loktech, proto se výsledek násobí jen číslem (1), nikoliv (0; 5).[9]

[9] Podobný charakter mohla mít i 21. úloha, jejíž text, postup řešení i výsledek jsou poškozeny.

III. Úloha převoditelná na lineární rovnici.

Některé příklady z tabulky BM 85200, které by mohly vést na kubické rovnice, se dají snadno převést na rovnice lineární. Osmý příklad na této tabulce zní takto:

Délka, šířka. Jaká je délka, taková je i hloubka. Vykopaná zemina. Řez a objem sečti, je to (1; 10). (0; 30) *je délka. Jaká je šířka?*
Ty: (0; 30), *délku, s* (12) *násob.* (6) *vidíš jako hloubku.*
(1) *k* (6) *přičti.* (7) *vidíš.*
Reciprokou ze (7) *netvoř. Co s* (7) *vezmi, aby to* (1; 10) *dalo?* (0; 10) *vezmi.*
Reciproké z (0; 30), *délka, utvoř.* (2) *vidíš.*
(0; 10) *s* (2) *násob.* (0; 20) *šířka vidíš. Postup.*[10]

Úlohu lze v naší symbolice přepsat soustavou tří rovnic

$$z = 12x \,,$$
$$x \cdot y + x \cdot y \cdot z = 1\frac{1}{6} \,,$$
$$x = \frac{1}{2} \,.$$

Dosadíme-li z první a třetí rovnice za x a z do druhé rovnice, obdržíme lineární rovnici

$$\frac{1}{2} \cdot y + 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot y = 1\frac{1}{6} \,,$$

ze které se snadno vypočte neznámá y: $y = \frac{1}{3}$.

Mezopotámský postup je odlišný. Označme $S = x \cdot y$ obsah řezu. Potom lze rovnici

$$x \cdot y + x \cdot y \cdot z = 1\frac{1}{6}$$

přepsat v tvaru

$$S + 12 \cdot \frac{1}{2} \cdot S = 1\frac{1}{6} \,.$$

Odtud

$$7S = 1\frac{1}{6} \,, \qquad S = \frac{1}{6}$$

a dále

$$y = \frac{S}{x} = \frac{1}{6} \cdot 2 = \frac{1}{3} \,, \qquad z = 12 \cdot x = 6 \,.$$

Obdobnou soustavou rovnic můžeme v naší symbolice zapsat i 12. příklad téže tabulky:

$$z = 12x \,,$$
$$\frac{1}{7} \cdot (x \cdot y + x \cdot y \cdot z) + x \cdot y = \frac{1}{3} \,,$$
$$x = \frac{1}{2} \,.$$

[10] Viz [N1], originální text str. 195, německý překlad str. 201, rozbor str. 211–212.

Mezopotámský postup řešení je stejný jako u 8. příkladu.

Velmi jednoduchý je i 17. příklad, který lze zapsat následující soustavou rovnic:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x} , \\ 12 \cdot (x - (x - y)) &= z , \\ x \cdot y \cdot z &= 6 . \end{aligned}$$

Ta vede na jednoduchou rovnici $\frac{12}{x} = 6$, jejíž řešení nečinilo žádný problém.

Ještě jednodušší je 19. příklad, který lze zapsat soustavou

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x} , \\ z &= 12x , \\ x \cdot y \cdot z &= 20 . \end{aligned}$$

Ta vede na rovnici $12x = 20$, jejíž řešení opět nečinilo problém, neboť k číslu 12 bylo reciproká hodnota $(0;5)$ obecně známá.

IV. Úloha převoditelná na kvadratickou rovnici.

Některé příklady z tabulky BM 85200 je možno převést na rovnice kvadratické.

Na nejjednodušší typ kvadratické rovnice vede 15. příklad, který zní takto:

Délka, šířka. Co jmenovatel je, je také délka. Co je čitatel, je také šířka. O to, co jmenovatel převyšuje čitatele, je ... . (36) *je vykopaná zemina. Jmenovatel, čitatel a hloubka je co?*
Ty: Utvoř reciproké z (12). (0; 5) *vidíš.*
(36) *s* (0; 5) ..... *násob.* (3) *vidíš.*
$\frac{1}{2}$ *z* (3) *odečti.* (1; 30) *vidíš.*
(1; 30) *je jmenovatel.* (0; 40) *čitatel,* (36) *hloubka. Postup.*[11]

Úlohu lze v naší symbolice zapsat následující soustavou rovnic:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x} , \\ x \cdot y \cdot z &= 36 , \\ y &= x - y . \end{aligned}$$

[11] Viz [N1], originální text str. 196, německý překlad str. 203, rozbor str. 213. Termíny čitatel a jmenovatel jsou užívány ve významu dělenec a dělitel (*igu* a *igibu*), tj. x a $\frac{1}{x}$; více viz kapitola o kvadratických rovnicích. Třetí rovnice je problematická, text je totiž poškozen. Uvedené řešení však nevyhovuje právě této třetí rovnici. Poznamenejme, že třetí rovnice se výrazně odlišuje od rovnic z ostatních příkladů.

Z první a třetí rovnice snadno vypočteme, že $x^2 = 2$, odtud

$$x = \sqrt{2}\,, \qquad y = \frac{\sqrt{2}}{2}\,.$$

Z první a druhé rovnice ihned vyplývá hodnota neznámé z: $z = 36$.

Tento postup však neodpovídá řešení uvedenému na tabulce; výpočet neznámé x zde vypadá takto:

$$x = \frac{(1)}{(12)} \times (36) \times \frac{1}{2} = (1;30)\,.$$

Poznamenejme, že hodnota $(1;30)$ byla první starobabylónskou aproximací čísla $\sqrt{2}$.

Takovýto postup řešení by odpovídal spíše soustavě[12]

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x}\,, \\ x \cdot y \cdot z &= 36\,, \\ 12 \cdot \big((x+y) + (x-y) \big) &= z\,. \end{aligned}$$

Dosadíme-li totiž z první a třetí rovnice za y a z do druhé rovnice, obdržíme rovnici

$$12 \cdot 2 \cdot x = 36\,.$$

Pak by však mohl být tento příklad zařazen k předchozímu typu, tj. k úlohám převoditelným na rovnice lineární.

Obtížnější typ kvadratické rovnice objevíme v 9. příkladu, jehož zadání zní takto:

Délka, šířka. Co je délka, je také hloubka. Zemina vykopaná. Řez a objem máš sečíst a (1; 10) *to je.* (0; 20) *je šířka. Délka je co?*
Ty: (0; 20) *s* (12) ***násob.*** (4) ***vidíš.***
(4) *s* (1; 10) ***násob.*** (4; 40) ***vidíš.***
$\frac{1}{2}$ *z* (0; 20) ***šířky odečti.*** (0; 10) ***vidíš.***
(0; 10) ***umocni.*** (0; 1, 40) ***vidíš.***
K (4; 40) ***přičti.*** (4; 41, 40) ***vidíš.***
(2; 10) *je* ***odmocnina.*** (0; 10), ***to ty máš se sebou násobit, je odečteno a*** (2) ***vidíš.***
Reciproké z (4) ***utvoř.*** (0; 15) ***vidíš.***
S (2) ***násob.*** (0; 30) ***vidíš*** *jako délku. Délka. Postup.*[13]

---

[12] Třetí rovnice by spíše odpovídala duchu celé tabulky; v této podobě ji navrhnul O. Neugebauer.

[13] Viz [N1], originální text str. 195–196, německý překlad str. 201, rozbor str. 212.

Úlohu lze v naší symbolice zapsat soustavou

$$\begin{aligned} z &= 12x\,, \\ x\cdot y + x\cdot y\cdot z &= 1\frac{1}{6}\,, \\ y &= \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

Dosadíme-li za z a y z první a třetí rovnice do druhé, obdržíme po jednoduché úpravě rovnici

$$4x^2 + \frac{1}{3}\cdot x - \frac{7}{6} = 0\,,$$

jejíž kořeny jsou

$$x_1 = \frac{1}{2}\,, \qquad x_2 = -\frac{7}{12}\,.$$

Druhý kořen vzhledem k zadání úlohy (x je délka) nepřichází v úvahu.

Mezopotámský postup odpovídá řešení kanonické rovnice $ax^2 + bx = c$, výpočet neznámé x lze zapsat takto:

$$x = \frac{\sqrt{\left(\frac{1}{2}\times(0;20)\right)^2 + (12)\times(0;20)\times(1;10)} - \frac{1}{2}\times(0;20)}{(12)\times(0;20)} = (0;30)\,.$$

Obdobně je řešen i 13. příklad, který lze vyjádřit následující soustavou rovnic:

$$\begin{aligned} z &= 12x\,, \\ \frac{1}{7}\cdot(x\cdot y + x\cdot y\cdot z) + x\cdot y &= \frac{1}{3}\,, \\ y &= \frac{1}{3}\,. \end{aligned}$$

Dosadíme-li z první a třetí rovnice za z a y do rovnice druhé a zvolíme-li substituci $w = 12\cdot\frac{1}{3}\cdot x$, získáme rovnici

$$w^2 + \frac{8}{3}\cdot w = \frac{28}{3}\,.$$

Její řešení nečinilo mezopotámským počtářům problém, neboť mohli použít metodu odpovídající kanonickému tvaru $ax^2 + bx = c$.

16. příklad na tabulce BM 85200 zní takto:

Délka, šířka. Co je jmenovatel, to je též délka. Co čitatel je, to je také šířka. Co úhrn jmenovatele a čitatele je, je také hloubka. (26) *je objem. Jmenovatel, čitatel a hloubka je co?*

Ty: Reciproké z (12) *utvoř.* (0; 5) *vidíš.*

(0; 5) s (26) násob. (2; 10) vidíš.
$\frac{1}{2}$ *s (2; 10) odečti. Umocni. (1; 10, 25) vidíš.*
(0; 25) je druhá odmocnina. K (1; 5) přičteno a odečteno. (1; 30).
Reciproké z (0; 40) utvoř. (1; 30) je jmenovatel. (0; 40) čitatel, (26) hloubka. Postup.[14]

Úlohu lze v naší symbolice zapsat touto soustavou rovnic:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x} , \\ 12 \cdot (x + y) &= z , \\ x \cdot y \cdot z &= 26 . \end{aligned}$$

Dosadíme-li za y a z z první a druhé rovnice do třetí, obdržíme po jednoduché úpravě rovnici

$$x^2 - \frac{13}{6} \cdot x + 1 = 0 .$$

Mezopotámský počtář použil postup, který odpovídal řešení kanonické úlohy $x^2 + a = bx$; šlo vlastně o řešení soustavy rovnic

$$x + y = \frac{26}{12} , \qquad x \cdot y = 1 ,$$

která ihned vyplývá z výše uvedené soustavy tří rovnic. Z první a třetí rovnice totiž dostáváme $z = 26$. Počtář tedy využil substituce

$$x = \frac{13}{12} + w , \qquad y = \frac{13}{12} - w .$$

Obdobně byly řešeny i další příklady.[15]

Velmi zajímavý je i 14. příklad, který zní takto:

Délka, šířka. Co je jmenovatel, to je také délka. Co čitatel je, je také šířka. O co jmenovatel převyšuje čitatele, je také hloubka. (16) objem. Délka, šířka, hloubka je co?
Ty reciproké z (12) utvoř. (0; 5) vidíš.
(0; 5) s (16) násob. (1; 20) vidíš.
(1; 20) je jmenovatel. Reciproké z (1; 20) utvoř. (0; 45) vidíš.
(0; 40)(sic)[16] *je čitatel. (16) je hloubka. Postup.*[17]

---

[14] Viz [N1], originální text str. 197, německý překlad str. 203, rozbor str. 214.

[15] Jde o 18. příklad vedoucí na soustavu $y = \frac{1}{x}$, $12(x + y) = z$, $x \cdot y \cdot z = 30$, 25. příklad vedoucí na soustavu $z = 3\frac{1}{3}$, $x + y = 5\frac{5}{6}$, $x \cdot y \cdot z = 27\frac{7}{9}$, 27. příklad $x = 1\frac{2}{3}$, $x \cdot y \cdot z = 1\frac{2}{3}$, $\frac{12}{7} \cdot (x - y) = z$ a 30. příklad $x = 1\frac{2}{3}$, $x \cdot y \cdot z = \frac{5}{6}$, $\frac{12}{7} \cdot (x - y) - 1 = z$.

[16] Písařská chyba. Správně má být (0; 45).

[17] Viz [N1], originální text str. 196, německý překlad str. 202, rozbor str. 213.

Úlohu lze v naší symbolice zapsat následující soustavou rovnic:

$$\begin{aligned} y &= \frac{1}{x}\,, \\ 12\cdot(x-y) &= z\,, \\ x\cdot y\cdot z &= 16\,. \end{aligned}$$

Dosadíme-li z první a druhé rovnice za y a z do třetí rovnice, obdržíme po úpravě rovnici

$$x^2 - \frac{4}{3}\cdot x - 1 = 0\,.$$

Mezopotámský počtář patrně převedl soustavu na kanonickou úlohu

$$x - y = \frac{16}{12}\,, \qquad x\cdot y = 1\,,$$

kterou získáme z výše uvedené soustavy tří rovnic (z první a třetí dostáváme $z = 16$). Pak použil standardní substituci

$$x = w + \frac{2}{3}\,, \qquad y = w - \frac{2}{3}\,.$$

Ze zachyceného postupu řešení je jasné, že počtář vypočetl pouze koeficient $\frac{16}{12}$. Tuto hodnotu chybně prohlásil za neznámou x a pak dopočítal (chybně) neznámou y; snad při přepisu spojil dva různé příklady.

Poznamenejme ještě, že řešení tohoto příkladu vede na iracionální čísla.

Obdobně byly řešeny i další příklady.[18]

V. Obecná kubická rovnice $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$.

Mezopotámští matematici řešili i složitější úlohy, jejich postupy však neznáme. Je možné, že používali nějaké speciální tabulky; některé úlohy patrně počítali „zkusmo".

Šestý příklad na tabulce BM 85200 zní takto:

Délka, šířka. Co je délka, je také hloubka. (1) *jako objem vykopal jsem. Řez a objem máš sečíst.* (1; 10). *Délka a šířka je* (0; 50). *Délka, šířka je co?*

Ty: (0; 50) *s* (1), *dílem zlomku, násob.* (0; 50) *vidíš.*

(0; 50) *s* (12) *násob.* (10) *vidíš.* (0; 50) *umocni.* (0; 41, 40) *vidíš.*

S (10) *pronásob.* (6; 56, 40) *vidíš.*

Jeho reciprokou hodnotu utvoř. (0; 8, 38, 24) *vidíš.*

S (1; 10) *násob.* (0; 10, 4, 48) *vidíš.*

(0; 36), (0; 24) *a* (0; 42) *jsou hrany.*

---

[18] Jde o 24. příklad vedoucí na soustavu $z = 3\frac{1}{3}$, $x\cdot y\cdot z = 27\frac{7}{9}$, $x - y = \frac{5}{6}$, 26. příklad vedoucí na soustavu $z = 3\frac{1}{3}$, $x\cdot y\cdot z = 27\frac{7}{9}$, $y = \frac{x}{12} = \frac{2}{3}\cdot x$ a 29. příklad $x = 1\frac{2}{3}$, $x\cdot y\cdot z = 3\frac{1}{3}$, $\frac{12}{7}\cdot(x-y) + 2 = z$.

(0; 36) *s* (0; 50) *násob.* (0; 30) *je délka.*
(0; 24) *s* (0; 50) *násob.* (0; 20) *je šířka.*
(0; 36) *s* (10) *násob.* (6) *je hloubka. Postup.*[19]

Úlohu lze v naší symbolice zapsat touto soustavou rovnic:

$$z = 12x \ ,$$
$$x \cdot y + x \cdot y \cdot z = 1\frac{1}{6} \ ,$$
$$x + y = \frac{5}{6} \ .$$

Dosadíme-li za y a z z první a třetí rovnice do druhé, obdržíme po jednoduché úpravě rovnici

$$12x^3 - 9x^2 - \frac{5}{6}x + 1\frac{1}{6} = 0 \ .$$

Mezopotámský počtář tuto úlohu počítal složitě; vypočítal hodnotu

$$\frac{(1;10)}{(0;50) \times (1) \times (12) \times (0;50)^2} = (0;10,4,48) \ .$$

Upravme druhou rovnici soustavy a snažme se objasnit výpočet starověkého počtáře. Dospějeme k rovnici

$$xy \cdot (1+z) = 1\frac{1}{6} = (1;10) \ ,$$

odtud

$$\frac{x}{(0;50)} \times \frac{y}{(0;50)} \times \frac{1+z}{(0;50)} = \frac{(1;10)}{(12) \times (0;50)^3} = (0;10,4,48) \ ;$$

číslo 12 je převodním koeficientem mezi jednotkami *loket* a *gar*. Postup uvedený na tabulce odpovídá výše uvedenému výpočtu, který však neumíme vysvětlit; vypočtené číslo je „vhodným způsobem“ rozloženo na součin tří čísel:

$$(0;10,4,48) = (0;36) \times (0;24) \times (0;42) = \frac{x}{(0;50)} \times \frac{y}{(0;50)} \times \frac{z+1}{(0;50)} \ .$$

Další část výpočtu je již jednoduchá a jasná:

$$x = (0;36) \times (0;50) = (0;30) \ ,$$

$$y = (0;24) \times (0;50) = (0;20) \ .$$

Hloubka z je vypočtena jinak:

$$z = x \cdot 12 = (0;36) \times (0;50) \times (12) = (0;36) \times (0;10) = (6) \ .$$

[19] Viz [N1], originální text str. 195, německý překlad str. 200, rozbor str. 210–211.

Pokud si dobře pročteme zadání 6. příkladu, zjistíme, že je zadán i objem výkopu „(1) *jako objem vykopal jsem*". Použijeme-li tuto dodatečnou podmínku, získáme soustavu

$$\begin{aligned} z &= 12x \,, \\ x \cdot y + 1 &= 1\frac{1}{6} \,, \\ x + y &= \frac{5}{6} \,, \end{aligned}$$

která vede na následující kanonický tvar:

$$\begin{aligned} x \cdot y &= \frac{1}{6} \,, \\ x + y &= \frac{5}{6} \,. \end{aligned}$$

Její řešení by bylo pro mezopotámské matematiky jednoduché, stačilo by použít standardní substituci

$$x = \frac{5}{12} + w \,, \qquad y = \frac{5}{12} - w \,.$$

Po dosazení za x a y bychom obdrželi rovnici

$$\left(\frac{5}{12}\right)^2 - w^2 = \frac{1}{6} \,,$$

a jejím řešením a užitím substituce získali

$$x = \frac{5}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2} \,, \qquad y = \frac{5}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3} \,.$$

Není jasné, proč nebyla při řešení použita právě tato cesta. Odpověd neposkytne ani 7. příklad, který je řešen stejně.

Délka, šířka. Co je délka, je také hloubka. (1) *objem je vykopán. Řez a objem máš sečíst, to je* (1; 10). *Délka převyšuje šířku o* (0; 10).

Ty: (1) *a* (12), *díl zlomku, vezmi.*
(0; 10) *diferenci s* (1) *násob.* (0; 10) *vidíš.*
S (12) *násob.* (2) *vidíš.*
(0; 10) *umocni.* (0; 1, 40) *vidíš.*
S (2) *násob.* (0; 3, 20) *vidíš.*
Reciproké z (0; 3, 20) *utvoř.* (18) *vidíš.*
S (1; 10) *násob.* (21) *vidíš.*
(3), (2), (21)(sic)[20] *jsou hrany.*
(0; 10) *s* (3) *násob.* (0; 30) *je délka.*

[20] Písařská chyba. Správně má být (3; 30).

(0; 10) *s* (2) *násob.* (0; 20) *je šířka.*
(3) *s* (2) *násob.* (6) *vidíš.* (6) *je hloubka. Postup.*[21]

Úlohu lze v naší symbolice zapsat soustavou tří rovnic:

$$\begin{aligned} z &= 12x\ , \\ x\cdot y + x\cdot y\cdot z &= 1\frac{1}{6}\ , \\ x - y &= \frac{1}{6}\ . \end{aligned}$$

Dosadíme-li za y a z z první a třetí rovnice do druhé, obdržíme po úpravě rovnici

$$12x^3 - x^2 - \frac{1}{6}x - 1\frac{1}{6} = 0\ .$$

Mezopotámský počtář počítá hodnotu tohoto výrazu:

$$\frac{(1;10)}{(0;10)\times(1)\times(12)\times(0;10)^2} = (21)\ .$$

Budeme-li postupovat obdobně jako v předešlém příkladu, můžeme úpravou druhé rovnice soustavy dospět k rovnici

$$x\cdot y\cdot(1+z) = 1\frac{1}{6} = (1;10)\ ,$$

neboli k rovnici

$$\frac{x}{(0;10)}\times\frac{y}{(0;10)}\times\frac{1+z}{(0;10)} = \frac{(1;10)}{(12)\times(0;10)^3} = (21)\ .$$

Mezopotámský postup je založen na vhodném rozkladu čísla 21.

$$(21) = (3)\times(2)\times(3;30) = \frac{x}{(0;10)}\times\frac{y}{(0;10)}\times\frac{1+z}{(0;10)}\ .$$

Poznamenejme, že počtář chybně zapsal rozklad; místo správné hodnoty (3; 30) uvedl (21), ale neznámé x, y a z vypočetl správně. Další část výpočtu je již jasná:

$$\begin{aligned} x &= (0;10)\times(3) = (0;30)\ , \\ y &= (0;10)\times(2) = (0;20)\ , \\ z &= x\cdot 12 = (3)\times(0;10)\times(12) = (3)\times(2) = (6)\ . \end{aligned}$$

[21] Viz [N1], originální text str. 195, německý překlad str. 201, rozbor str. 210–211.

Prohlédneme-li si opět dobře zadání 7. příkladu, zjistíme, že je zadán i objem výkopu: „(1) *jako objem vykopal jsem*“. S použitím této podmínky získáme soustavu

$$z = 12x\,,$$
$$x \cdot y + 1 = 1\frac{1}{6}\,,$$
$$x - y = \frac{1}{6}\,,$$

která opět vede na kanonický tvar:

$$x \cdot y = \frac{1}{6}\,,$$
$$x - y = \frac{1}{6}\,.$$

Její řešení by bylo jednoduché. Stačilo by zvolit standardní substituci

$$x = w + \frac{1}{12}\,, \qquad y = w - \frac{1}{12}\,;$$

obdrželi bychom rovnici

$$w^2 - \left(\frac{1}{12}\right)^2 = \frac{1}{6}\,,$$

jejímž řešením získáme

$$x = \frac{5}{12} + \frac{1}{12} = \frac{1}{2}\,, \qquad y = \frac{5}{12} - \frac{1}{12} = \frac{1}{3}\,.$$

Není jasné, proč nebyla tato jednoduchá metoda použita. Dnes už na tuto otázku asi nenalezneme odpověď.

LITERATURA

[Bo] Bortolotti E., *Sulla risoluzione della equazione cubica in Babilonia*, Memoire della R. Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna, 9. ser., **1** (1934), 81–94.

[Ga] Gandz S., *The Origin and Development of the Quadratic Equations in Babylonian, Greek and Early Arabic Algebra*, Osiris **3** (1937), 405–557.

[GG2] Grattan-Guinness I., *The Fontana History of the Mathematical Sciences*, Fontana Press, London, 1997.

[Ju] Juškevič A. P., *Istorija matematiky*, Nauka, Moskva, 1970.

[Ko] Kolman A., *Dějiny matematiky ve starověku*, Academia, Praha, 1968.

[N1] Neugebauer O., *Mathematische Keilschrift-Texte*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1935 (erster und zweiter Teil), 1937 (dritter Teil), reprint Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[N2] Neugebauer O., *Vorlesungen über Geschichte der Antiken Mathematischen Wissenschaften, Erster Band. Vorgriechische Mathematik*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1934.

[N3] Neugebauer O., *Studien zur Geschichte der antiken Algebra I*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, B, Band 2, 1933, 1–27.

[N4] Neugebauer O., *Serientexte in der babylonischen Mathematik*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, B, Band 3, 1936, 106–114.

[N5] Neugebauer O., *Točnye nauki v drevnosti*, Nauka, Moskva, 1968.

[N6] Neugebauer O., *The Exact Sciences in Antiquity*, Harper, New York, 1962.

[N7] Neugebauer O., *Über die Lösung kubischer Gleichungen in Babylonien*, Nachrichten von der Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Mathematische-Physikalische Klasse (1933), 316–321.

[NS] Neugebauer O., Sachs A., *Mathematical Cuneiform Texts*, American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research, New Haven, Connecticut, 1945, reprint, Harrassowitz, 1986.

[Sch] Scholz E., *Geschichte der Algebra*, Wissenschaftsverlag, Mannheim, Wien, Zürich, 1990.

[Vo1] Vogel K., *Vorgriechische Mathematik*, Würzburg, 1958–1959.

[Vo2] Vogel K., *Kubische Gleichungen bei den Babyloniern ?*, Sitzungsberichte der Bayerischen Akademie der Wissenschaften zu München. Mathematisch-Naturwissenschaftliche Abteilung (1934), 87–94.

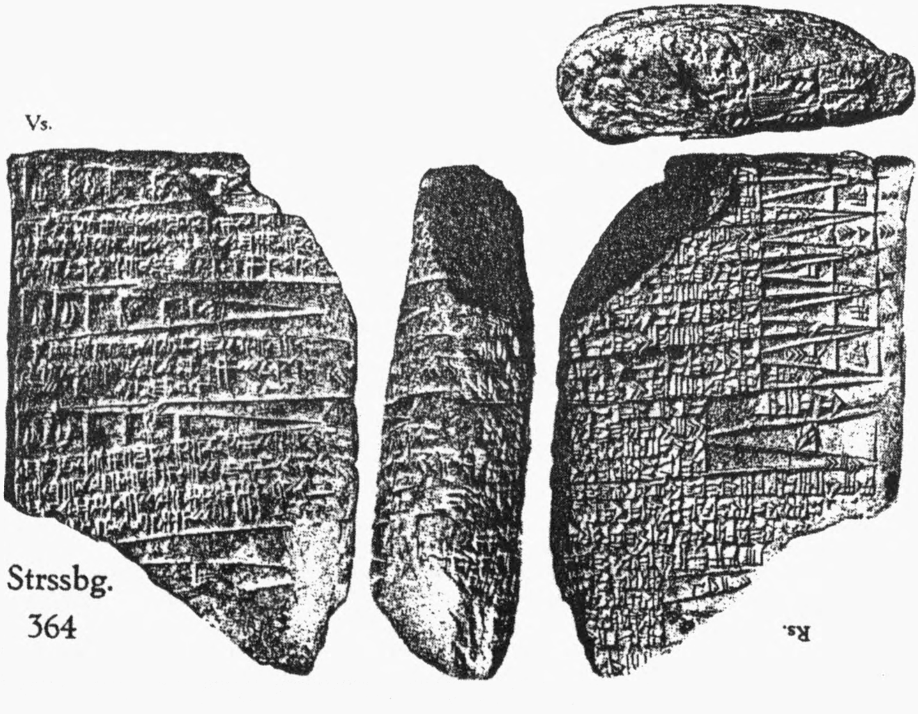
[Vy] Vygodskij M. Ja., *Arifmetika i algebra v drevnem mire*, Nauka, Moskva, 1967.

WWW STRÁNKY

[WW1] http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath.

[WW3] http://www.math.tamu.edu/~don.allen/history/babylon/babylon.html.

[WW4] http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Indexes/Babylonians.html.



ROVINNÁ GEOMETRIE.

V této kapitole se pokusíme objasnit algoritmy používané mezopotámskými matematiky při řešení geometrických úloh.

Mezopotámské geometrické úlohy, které se nám dochovaly, pocházejí ve většině případů ze Starobabylónské říše, tj. z období 19. až 17. století př. n. l., a z období vlády Seleukovců, tj. z 3. až 1. století př. n. l. Nejčastěji vycházejí z potřeb zeměměřictví, stavebnictví, válečnictví a obchodu. Některé však nesouvisejí přímo s praktickými potřebami, neboť jsou v nich zadávány veličiny, které se v praxi spíše hledají a často jsou udány ve zcela nevhodných jednotkách. Tyto úlohy byly patrně sestaveny pro pedagogické účely. Číselné hodnoty jsou většinou voleny tak, aby byla úloha snadno numericky řešitelná, tj. aby se dalo snadno zejména dělit a odmocňovat. Zdá se, že ti, kdo úlohy vytvářeli, látce dobře rozuměli, bezpečně znali postupy řešení, pravděpodobně chtěli naučit metody a nesnažili se trápit řešitele komplikovanými aritmetickými operacemi.

Čtverec a obdélník.

Obsah čtverce a obdélníka počítali mezopotámští počtáři již od nejstarších období. Tyto výpočty jsou již na tabulkách ze Starobabylónské říše; v naší současné symbolice je lze vyjádřit známým vzorcem

$$S = a^2\ , \qquad \text{resp.} \qquad S = a \cdot b\ ,$$

kde a je délka strany čtverce, resp. a, b délky stran obdélníka. Poměrně jednoduché úlohy o čtvercích a obdélnících jsou obvykle komplikovány převodem plošných jednotek. Obsah čtverce je počítán např. v pátém příkladu na tabulce AO 6484.[1]

U obdélníka se hovoří o *šířce* a *délce*, šířka je přitom vždy menší než délka.

Trojúhelník.

Na řadě mezopotámských tabulek se objevují úlohy, v nichž se počítá obsah trojúhelníka. Obvykle je zadána základna a a rameno r rovnoramenného trojúhelníka nebo obě odvěsny a, b pravoúhlého trojúhelníka. Zdůrazněme, že se nehovoří o výšce, ale o stranách trojúhelníka; z kontextu je potřeba vyrozumět, o jaký trojúhelník se jedná. V případě rovnoramenného trojúhelníka je obsah většinou počítán jen přibližně, výpočet odpovídá vzorci

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot r\ ,$$

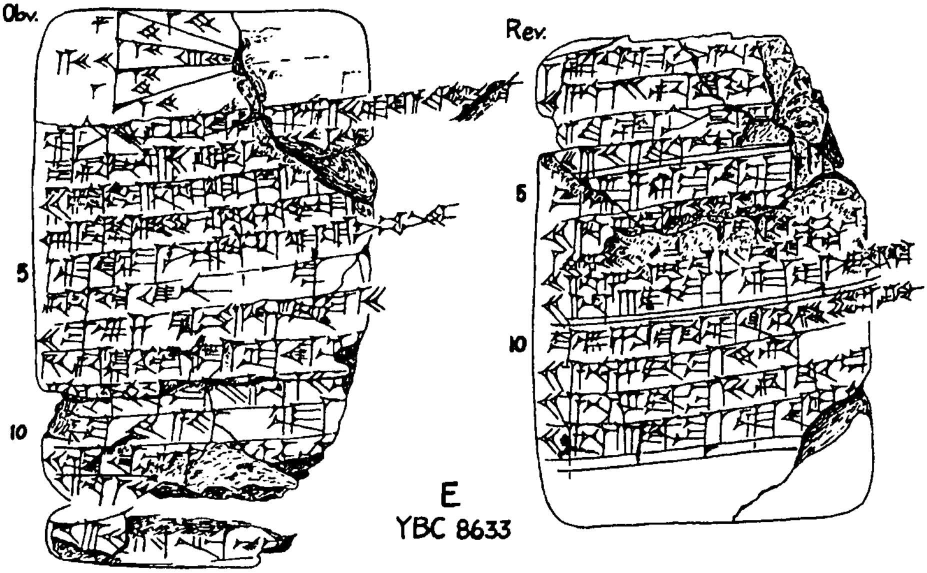
u pravoúhlého trojúhelníka je obsah počítán přesně, výpočet odpovídá vzorci

$$S = \frac{1}{2} \cdot a \cdot b\ .$$

[1] Viz [N1], text str. 97, německý překlad str. 100, komentář str. 103–104.

Je nutno poznamenat, že v některých příkladech není jasné, zda je zadána výška nebo délka ramene trojúhelníka; potom je těžké rozhodnout, zda byl obsah vypočten přesně nebo jen přibližně.

Na starobabylónské tabulce YBC 8633, která je překreslena na následujícím obrázku, je komplikovaný příklad doplněný zajímavým obrázkem.



Trojúhelník. (1,40) *délka každé ze dvou stran,* (2,20) *šířka. Jaká je plocha? Jako pro tebe od* (2,20) *šířka, která* [.......] *odečti* 20 [.......] *šířka trojúhelníka* [.......].

A pak rozpul (2,0), *které ti zůstalo, výsledek je* (1,0).

(1,0) *je šířka jednoho trojúhelníka a* (1,0) *je šířka druhého trojúhelníka. Jaká je druhá délka?*

Násob (20), *makṣarum,*[2] (4) *a výsledek je* (1,20). (1,20) *je druhá délka.*

Pak rozpul (1,0), *šířka trojúhelníka, a násob výsledek* (30). (1,20) *druhá délka; výsledek* (40,0) *je plocha prvního trojúhelníka.*

Rozpul (20), *šířka trojúhelníka, a násob výsledek* (10). (1,20) *je druhá délka trojúhelníka; výsledek* (13,20) *je plocha druhého trojúhelníka.*

Rozpul (1,0), *šířka trojúhelníka, a násob výsledek* (30). (1,20) *je druhá délka; výsledek* (40,0) *je plocha třetího trojúhelníka.*

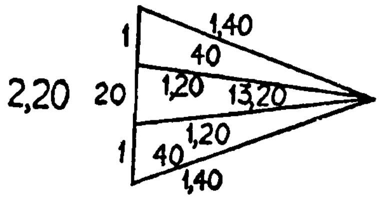
(1,33,20) *je správná plocha* [.......][3]

---

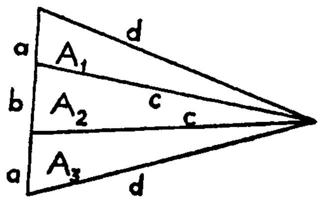
2 Význam slova *makṣarum* není jasný, patrně šlo o označení koeficientu podobnosti. Viz dále.

3 Více viz [NS], originální text str. 53, anglický překlad str. 53–54, komentář str. 54–55.

Následující obrázek je překreslením náčrtku, který je vyryt na tabulce YBC 8633:



Pro další výklad označme strany a obsahy jednotlivých trojúhelníků takto:



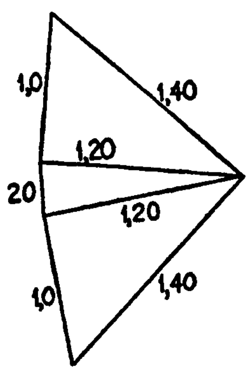
Je tedy dáno $d = (1,40) = 100$ a $2a + b = (2,20) = 140$. Na tabulce je nejprve vypočteno $a = (1,0) = 60$ a $b = (20) = 20$ (toto místo je na tabulce poškozeno, zadání příkladu není jasné), potom je „záhadně" vypočteno $c = (1,20) = 80$ a nakonec obsahy jednotlivých trojúhelníků:

$$
\begin{aligned}
A_1 &= \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 80 = 2\,400 = (40,0)\,, \\
A_2 &= \frac{1}{2} \cdot 20 \cdot 80 = 800 \quad = (13,20)\,, \\
A_3 &= \frac{1}{2} \cdot 60 \cdot 80 = 2\,400 = (40,0)\,.
\end{aligned}
$$

Obsah velkého trojúhelníka je součtem vypočtených obsahů menších trojúhelníků:

$$A = A_1 + A_2 + A_3 = 5\,600 = (1,33,20)\,.$$

Poznamenejme, že tvary jednotlivých trojúhelníků na tabulce neodpovídají uvedeným hodnotám. Správně by měl obrázek vypadat asi takto:

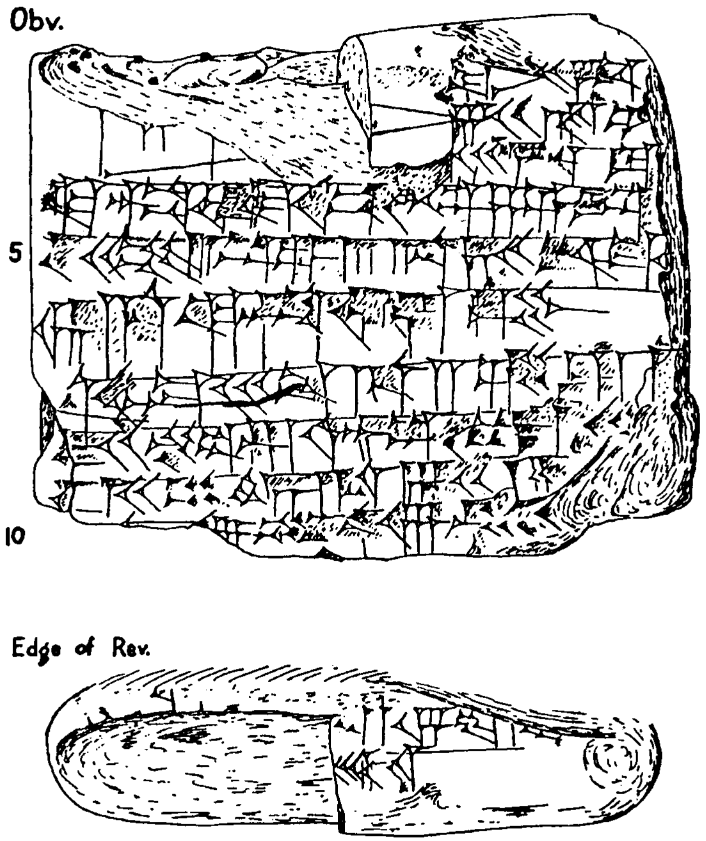


Jde tedy o obrázek, který se skládá ze dvou shodných pravoúhlých trojúhelníků (vnější trojúhelníky) a jednoho rovnoramenného trojúhelníka (vnitřní trojúhelník). Při této interpretaci je výpočet obsahů A_1 a A_3 správný, obsah A_2 je ve skutečnosti menší, neboť c je strana a nikoli výška vnitřního trojúhelníka.[4]

Velmi zajímavý obrat se objevuje v první části úlohy: *Násob* (20), *makṣarum,* (4) *a výsledek je* (1, 20); jde o výpočet druhé odvěsny pravoúhlého trojúhelníka (není však použita Pythagorova věta). Zdá se, že si počtář uvědomil, že pravoúhlý trojúhelník je podobný nejznámějšímu pythagorejskému trojúhelníku o stranách 3, 4, 5 a že koeficient podobnosti (snad *makṣarum*) je 20.

Rovněž je pravděpodobné, že počtář pochopil, že situace vypadá jinak než na obrázku na tabulce, tj. že základny trojúhelníků neleží na jedné přímce; jinak by patrně k výpočtu obsahu použil „velký" rovnoramenný trojúhelník a počítal takto:

$$A = \frac{1}{2} \cdot 140 \cdot 100 = 7\,000 = (1, 56, 40)\ .$$



Ca. MLC 1950

[4] K velké chybě však nedošlo, rameno má velikost 80 a výška přibližně 79,37.

Mezopotámští počtáři počítali i obtížnější příklady; v některých bylo třeba rozdělit trojúhelník úsečkou rovnoběžnou se základnou, resp. úsečkami rovnoběžnými se základnou na dvě, resp. více částí, tj. na podobný trojúhelník a lichoběžník, resp. podobný trojúhelník a několik lichoběžníků; přitom měly být splněny určité podmínky (např. rovnost obsahů částí, daný poměr obsahů, daný poměr výšek jednotlivých útvarů apod.).

Například na značně poškozené starobabylónské tabulce MLC 1950, která je překreslena na předchozím obrázku, je úloha, v níž se má výše uvedeným způsobem rozdělit trojúhelník na jeden trojúhelník a jeden lichoběžník tak, aby obsahy obou útvarů byly stejné.

Trojúhelník (20) *gar je délka,* (5, 20) *je plocha,* (30) *gar* [.......] *Jaká je horní šířka a dolní šířka.*

Když ty uděláš tyto operace: vezmi převrácenou hodnotu k (20), *vidíš* (0; 3).

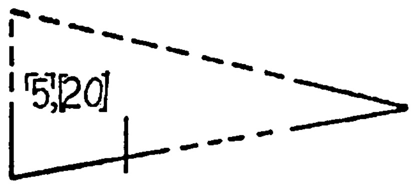
(0; 3) *vynásob* (5, 20) *a výsledek je* (16). (16) *horní délka a* [.......] (30), *délka, násob* (2).

Přičti výsledek (1, 0) *k* (20), *horní kolmice je* (1, 20).

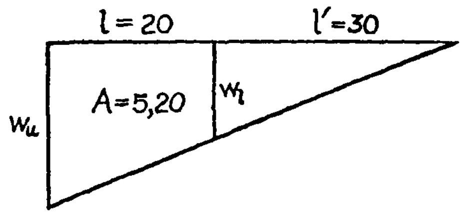
Vezmi převrácenou hodnotu k (1, 20). (0; 0, 45) *násob* (5, 20), *plocha. Výsledek je* (4).

Přidej (4) *k* (16), *odečti od* (16). *Horní šířka je* (20), *dolní šířka je* (12).[5]

Na tabulce je značně poškozený obrázek, jeho rekonstrukce je takováto:



Snad šlo o pravoúhlý trojúhelník: známe jednu odvěsnu, její rozdělení na dvě části, tj. $l + l' = (20) + (30) = (50)$, a obsah oddělovaného lichoběžníku $A = (5, 20) = 320$. Obrázek by tedy měl vypadat asi takto:



Úkolem je určit základny w_u a w_l většího a menšího trojúhelníka (v textu se hovoří o *horní* a *dolní základně*). Úloha je řešena standardní mezopotámskou metodou; nejprve jsou vypočteny hodnoty

$$\frac{1}{2} \cdot (w_u + w_l) \qquad \text{a} \qquad \frac{1}{2} \cdot (w_u - w_l)$$

a teprve potom hledané hodnoty w_u a w_l.

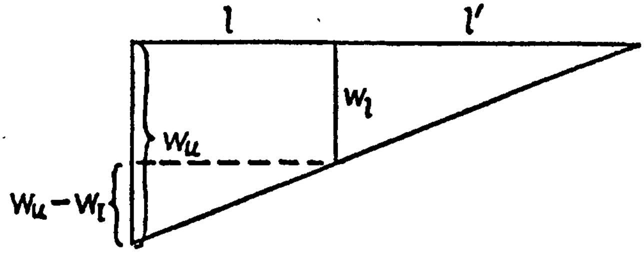
[5] Viz [NS], originální text str. 48, anglický překlad str. 48, komentáře str. 48–49.

Ze znalosti obsahu lichoběžníku je tedy vypočtena polovina součtu hledaných základen:

$$\frac{1}{2} \cdot (w_u + w_l) = \frac{A}{l} = \frac{320}{20} = 16 .$$

Výpočet hodnoty $\frac{1}{2} \cdot (w_u - w_l)$ je komplikovanější. Z podobnosti trojúhelníků (viz následující obrázek) vyplývá vztah

$$\frac{w_u}{l + l'} = \frac{w_l}{l'} = \frac{w_u - w_l}{l} .$$



Odtud po snadných úpravách

$$w_u = \frac{l + l'}{l'} \cdot w_l , \qquad w_u + w_l = \frac{l + 2l'}{l'} \cdot w_l = (l + 2l') \cdot \frac{w_u - w_l}{l} ,$$

dojdeme k následujícímu vztahu:

$$\frac{1}{2} \cdot (w_u - w_l) = (w_u + w_l) \cdot \frac{l}{2 \cdot (2l' + l)} = \frac{A}{2l' + l} = \frac{320}{80} = 4 .$$

V závěrečném kroku je vypočítáno w_u a w_l:

$$w_u = \frac{1}{2} \cdot (w_u + w_l) + \frac{1}{2} \cdot (w_u - w_l) = 16 + 4 = 20 ,$$
$$w_l = \frac{1}{2} \cdot (w_u + w_l) - \frac{1}{2} \cdot (w_u - w_l) = 16 - 4 = 12 .$$

Poznamenejme, že trojúhelník bylo možno chápat i jako rovnoramenný; obsah A rovnoramenného lichoběžníka s ramenem l pak mohl počtář vypočítat přibližně postupem, který odpovídá vzorci

$$A = \frac{w_u + w_l}{2} \cdot l .$$

Došel by ke stejnému výsledku. Úlohy podobného typu jsou v mezopotámské matematice dosti časté.[6]

[6] Např. úlohy na tabulce Strssbg. 364; viz [N1], originální text str. 248–250, německý překlad str. 250–252, komentáře str. 252–256.

Zajímavá úloha využívající podobnost trojúhelníků je i na poměrně „mladé“ tabulce AO 6484:[7]

Vs. Rs.

AO 6484
(ca. 8 × 12,8 cm)

Výška stěny je (10) *loktů,* (1) *loket na hlavě stěny je otevřený,* (1) *loket výšky stromu. Jak daleko se mohu vzdálit od základu stěny.*

Převrácenou hodnotu od (1) *utvoř, to je* (1). (1) *násob* (10) *lokty. To dá* (10). (10) *loktů vzdálený jej ještě uvidíš ...*[8]

Přeložíme-li tento málo srozumitelný text do současného jazyka, zjistíme, že jde o stěnu šířky $b = 1$ loket a výšky $H = 10$ loktů zakrývající strom, který vyčnívá o $h = 1$ loket nad stěnu. Má se určit, z jaké vzdálenosti B od paty zdi je ještě vidět vrchol stromu (viz následující obrázek). Jde tedy o úlohu, kterou lze snadno vyřešit.

Z podobnosti trojúhelníků plyne

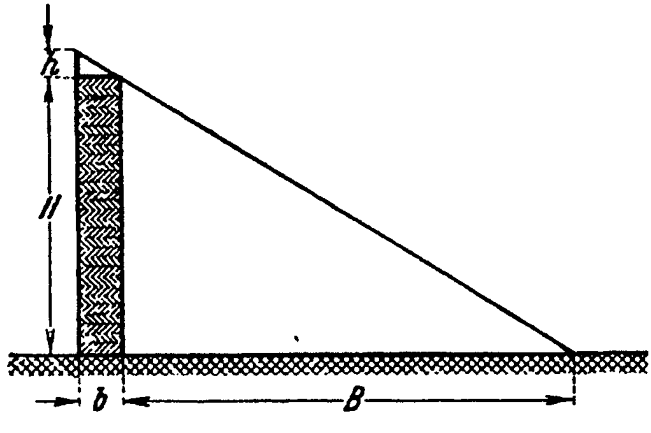
$$\frac{h}{b} = \frac{H}{B}\,, \qquad \text{tj.} \qquad B = H \cdot \frac{b}{h} = 10 \text{ loktů}\,.$$

Poslednímu vztahu odpovídá výše uvedené mezopotámské řešení.

---

[7] Tabulka pochází až z období Seleukovců, byla nalezena ve Warce. Je na ní 17 dobře čitelných úloh.

[8] Viz [N1], originální text str. 97, německý překlad str. 99, komentáře str. 103.



Hned za touto úlohou následuje na tabulce úloha opačná. Je dáno h, b a B a má se vypočítat výška H stěny. Pracuje se s úplně stejnými hodnotami.

Na tabulce AO 6484 nacházíme i jednu z mála úloh, v níž je obsah rovnoramenného trojúhelníka vypočítán přesně. Text úlohy zní takto:

Nějaký trojúhelník. Když délka je (5), *spodní šířka* (6), *kolik obnáší osivo?*
(5) *vynásob* (5), *délka,* (25). (3), *polovina šířky, vynásob s* (3). *Výsledek je* (9).
(9) *odečti od* (25), *zůstane* (16). *Co s čím se má vynásobit, má-li to dáti* (16)*?* (4) *s* (4) *vynásob. Dostaneš* (16).
(4), *výška, s* (3), *polovina šířky, násob. To dává* (12). ...[9]

Označíme-li základnu rovnoramenného trojúhelníka písmenem z (*spodní šířka*) a rameno písmenem r, můžeme výšku v vypočítat podle Pythagorovy věty ($z = 6$, $r = 5$):

$$v = \sqrt{r^2 - \left(\frac{z}{2}\right)^2} = \sqrt{25 - 9} = \sqrt{16} = 4 .$$

Obsah trojúhelníka je tedy

$$S = \frac{1}{2} \cdot z \cdot v = 3 \cdot 4 = 12 .$$

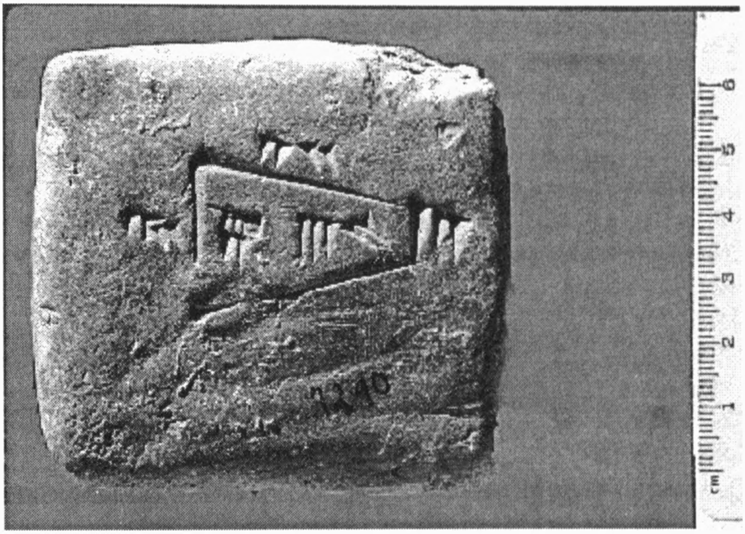
Mezopotámský počtář postupoval stejně. Po výpočtu obsahu trojúhelníka je vypočítáno množství obilí potřebného k jeho osetí. Obsah je násoben dvěma koeficienty $(0;21,36) = 0,36$ a $(1,48) = 108$. Množství obilí, které je takto vypočteno, je $(7,46;33,36) \doteq 466,56$. Poznamenejme, že není jasné, jaký význam použité koeficienty mají. Jejich hodnoty jsou patrně ovlivněny i použitými jednotkami.

[9] Viz [N1], originální text str. 97, německý překlad str. 100, komentáře str. 104.

Lichoběžník.

Velmi oblíbeným geometrickým útvarem mezopotámských matematiků byl lichoběžník, zejména rovnoramenný. Svědčí o tom velké množství úloh, v nichž se počítá obsah lichoběžníka nebo se lichoběžník dělí na několik částí daných vlastností.

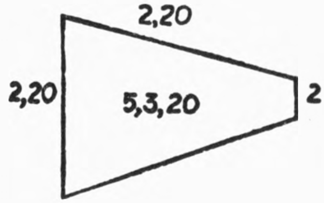
Na tabulce YBC 7290 (viz následující obrázek)[10] je pouze obrázek lichoběžníka doplněný čtveřicí čísel: (2) a (2, 20) u základen, (2, 20) u ramene a (5, 3, 20) uvnitř.



První dvě čísla jsou délky obou základen, třetí je délka ramene a čtvrté obsah. Víme, že mezopotámští počtáři používali k výpočtu obsahu lichoběžníka algoritmus, který lze v naší symbolice zapsat vzorcem

$$S = \frac{1}{2} \cdot (a + b) \cdot s \ ,$$

kde a a b jsou délky základen a s je délka ramene.



[10] Tabulka pochází ze starobabylónského období, poprvé byla publikována O. Neugebauerem a A. Sachsem ve čtyřicátých letech 20. století.

V uvedeném příkladu je tedy vypočten obsah takto:

$$S = \frac{(140 + 120) \cdot 140}{2} = 18\,200 \,.$$

Je zřejmé, že použitý postup nevede ke správnému výsledku, neboť se místo výšky užívá délka ramene. Pokud budeme postupovat podle správného vztahu, vypočteme hodnotu

$$S = 130 \cdot \sqrt{140^2 - 10^2} \doteq 18\,153{,}5 \,.$$

Chyba, s níž mezopotámský počtář vypočítal obsah lichoběžníka, je vzhledem ke zvolenému zadání jen $0{,}26\%$. Dnes je těžké rozhodnout, zda si počtář nepřesnost výpočtu uvědomoval, nebo zda nebyla vlastně zadána výška.[11]

Na mezopotámských tabulkách se dochovala řada příkladů, v nichž je lichoběžník dělen rovnoběžkou (resp. rovnoběžkami) se základnami na dva lichoběžníky (resp. více lichoběžníků) podle předem stanovených podmínek (požadován byl shodný obsah dílů, daný poměr výšek nebo základen, dané výšky, ramena apod.). Obyčejně se v příkladech pracuje s pravoúhlými nebo rovnoramennými lichoběžníky.

Na tabulce YBC 4608[12] je úloha, v níž se lichoběžník dělí na dvě části, jejichž obsahy jsou dány. Dále je stanoven poměr výšek menších lichoběžníků a délka příčky, kterou je lichoběžník dělen. Úkolem je určit délky základen a výšek. Text úlohy a její řešení zní takto:

Lichoběžník ... Rozdělit plochu na dvě; $(42,11;15)$ *je plocha dolního pruhu,* $(14,3;45)$ *je plocha horního pruhu;* $\frac{1}{5}$ *(délky) dolního pruhu je délka horního pruhu;* $(52;30)$ *je délka předělu.*

Jaká je horní délka, dolní délka, horní šířka a dolní šířka?

Když si představíš operace, nechť (5) *je dáno za horní šířku. Nechť* (1) *za dolní šířku.*

Sečti $(14,3;45)$ *a* $(42,11;15)$ *a dostaneš* $(56,15)$.

Sečti (5) *a* (1) *a výsledek je* (6).

Vezmi převrácenou hodnotu k (6). *Dostaneš* $(0;10)$.

$(0;10)$ *násob* $(56,15)$. *A výsledek* $(9,22;30)$ *násob dvěma. Výsledek je* $(18,45)$. *Udrž* $(18,45)$ *ve své hlavě.*

Vezmi převrácenou hodnotu k (1), *horní délka, a výsledek je* (1). (1) *násob* $(14,3;45)$. *Dostaneš* $(14,3;45)$.

Násob (2). *Dostaneš* $(28,7;30)$.

Odečti $(18,45)$ *od* $(28,7;30)$ *a udrž výsledek* $(9,22;30)$ *ve své hlavě.*

Vezmi převrácenou hodnotu k (5), *délka dolního pruhu. Výsledek je* $(0;12)$.

$(0;12)$ *násob* $(42,11;15)$ *a dostaneš* $(8,26;15)$.

---

[11] Viz též [NS], str. 44; jde o tabulku YBC 111 26 s lichoběžníkem $a = (45)$, $b = (22,30)$, $s = (3)$ a $S = (1,41,15)$.

[12] Tabulka pochází ze starobabylónského období. Jsou na ní dvě úlohy, druhá je však natolik poškozena, že není možno provést její uspokojivou rekonstrukci.

Rozpul (9,22;30), *které držíš ve své hlavě, a dostaneš* (4,41;15). *Přičti* (4,41;15) *k* (8,26;15) *a výsledek je* (13,7;30).

Převrácená hodnota k (13,7;30) *je neobdržitelná. Co je potřeba k* (13,7;30) *dát, má-li mně dávat* (52;30), *její dělící linie?*

Vezmi (0;4). *Převrácená hodnota k* (0;4) *ti dá* (15).

Měl bys (15) *násobit* (1), *což jsem udal pro horní délku, a výsledek* (15) *je délka horního pruhu.*

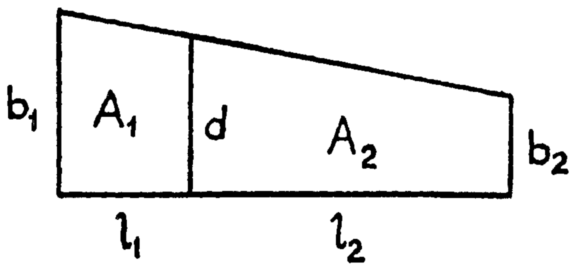
Ty bys měl (15) *násobit* (5), *což jsem vzal pro dolní šířku, a dostaneš* (1,15), *délka dolního pruhu.*

V řadě pro tebe vidět horní šířka a dolní šířka, násob plochu (2). *Dostaneš* (28,7;30). *Vezmi reciproké číslo k* (15). *Dostaneš* (0;4). (0;4) *násob* (28,7;30). *Dostaneš* (1,52;30). *Dej pryč* (52;30), *délka předělu, od* (1,52;30) *a výsledek* (1,0) *je horní šířka.*

Násob celou plochu (2) *a dostaneš* (1,52,30). *Vezmi reciproké číslo k* (1,30). *Dostaneš* (0;0,40). (0;0,40) *násob* (1,52,30) *a dostaneš* (1,15). *Dej pryč* (1,0), *horní šířka, od* (1,15). *Výsledek* (15) *je dolní šířka.*

V řadě pro tebe vidět plocha, sečti (1,0) *a* (15). *Výsledek* (1,15). *Rozpul* (1,15) *a dostaneš* (37;30). (37;30) *násob* (1,30). *Dostaneš* (56,15), *plocha.*[13]

Všechny výpočty jsou správné, uvažujeme-li ovšem pravoúhlý lichoběžník. Úloha není bohužel na tabulce doplněna žádným obrázkem. Vypadal by asi takto:



Předpokládejme tedy, že je dán pravoúhlý lichoběžník, který je rozdělen příčkou $d = (52;30) = 52,5$ na dva lichoběžníky, jejichž obsahy jsou

$$A_1 = (14,3;45) = 843,75 \qquad \text{a} \qquad A_2 = (42,11;15) = 2\,531,25$$

a jejichž výšky l_1, l_2 jsou v poměru 1 : 5. Základny označme symboly b_1, b_2.

Úloha je na tabulce řešena metodou chybného předpokladu; jako chybný předpoklad se vezme

$$l_1' = 1\,, \qquad l_2' = 5\,, \qquad \text{tedy} \qquad l' = l_1' + l_2' = 6\,.$$

Nejprve je vypočten obsah celého lichoběžníka:

$$A = A_1 + A_2 = (14,3;45) + (42,11;15) = (56,15) = 3\,375\,.$$

---

[13] Viz [NS], originální text str. 49–50, anglický překlad str. 50–51, komentáře str. 51–52.

Potom jsou počítány délky obou základen, které jsou ovšem ovlivněny chybným předpokladem:

$$b'_1 + b'_2 = \frac{2A}{l'} = \frac{(2) \times (56,15)}{(6)} = (18,45) = 1\,125 \; ,$$

$$b'_1 + d' = \frac{2A_1}{l'_1} = \frac{(2) \times (14,3;45)}{(1)} = (28,7;30) = 1\,687,5 \; ,$$

$$d' - b'_2 = (b'_1 + d') - (b'_1 + b'_2) = (28,7;30) - (18,45) = (9,22;30) = 562,5 \; ,$$

$$\frac{d' + b'_2}{2} = \frac{A_2}{l'_2} = \frac{(42,11;15)}{(5)} = (8,26;15) = 506,25 \; ,$$

$$\frac{d' - b'_2}{2} = (4,41;15) = 281,25 \; ,$$

$$d' = \frac{d' + b'_2}{2} + \frac{d' - b'_2}{2} = (13,7;30) = 787,5 \; .$$

Délka příčky však má být $d = (52;30)$. Počtář nyní musí vypočítat poměr veličin d a d'. Poznamenává, že reciproká hodnota k d' neexistuje; vzápětí uvádí, že poměr veličin je $(0;4)$. Vzhledem k tomu, že počítá se skutečnými hodnotami obsahů a veličina d' vyšla patnáctkrát větší než má být, je třeba patnáctkrát zvětšit výšky lichoběžníků. Skutečné hodnoty výšek tedy jsou:

$$l_1 = 15 \cdot l'_1 = (15) = 15 \; , \qquad l_2 = 15 \cdot l'_2 = (1,15) = 75 \; .$$

Ze znalosti obsahů A_1 a A se nyní vypočte $b_1 + d$ a $b_1 + b_2$, ze znalosti d se určí b_1 a pak b_2:

$$b_1 + d = \frac{2A_1}{l_1} = (1,52;30) = 112,5 \; ,$$

$$b_1 + b_2 = \frac{2A}{l} = (1,15) = 75 \; ,$$

$$b_1 = (1,0) = 60 \; , \qquad b_2 = (15) = 15 \; .$$

Na závěr je provedena zkouška; na základě vypočtených hodnot b_1, b_2, l je vypočten obsah A velkého lichoběžníka:

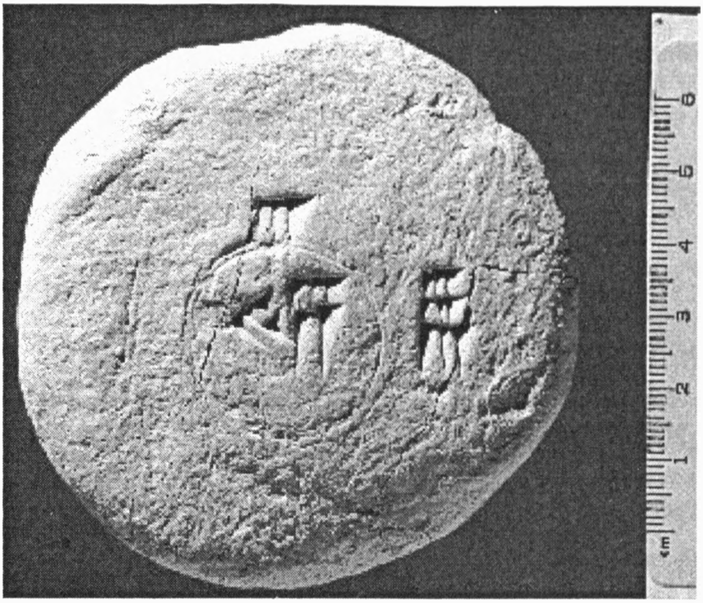
$$A = \frac{1}{2} \cdot (b_1 + b_2) \cdot l = (56,15) = 3\,375 \; .$$

Podobné příklady jsou i na tabulkách YBC 4675, YBC 9852, Vat 7621, Vat 7532, Vat 7535, Vat 7621, Vat 8522 a Strssbg 367.[14]

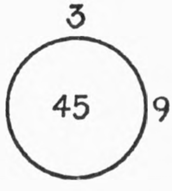
[14] Více viz [N1] a [NS].

Kruh, kružnice.

Jedna z nejstarších babylónských tabulek vztahujících se ke geometrii je tabulka YBC 7302 (viz následující obrázek).[15]



Jde o kruhovou tabulku, jejíž průměr je necelých 8 cm. Není na ní žádný text, pouze téměř dokonalý obrázek kružnice a tři čísla. Nad kružnicí je napsáno číslo 3, vpravo číslo 9 a uvnitř číslo 45.



Pravděpodobná interpretace čísel z tabulky je takováto: $(0;45)$ je obsah kruhu, (3) je obvod a (9) druhá mocnina obvodu.

Babylónský matematik totiž užíval k výpočtu obsahu kruhu algoritmus, který lze v naší symbolice zapsat vzorcem

$$S = \frac{1}{12} \cdot o^2 ,$$

[15] Tabulka byla objevena ve třicátých letech 20. století v městě Susa (dnešní Shush v Íránu), v padesátých letech ji zkoumal E. M. Bruins.

kde o je obvod kruhu. Další tabulky tuto interpretaci potvrzují. Ve výše uvedeném příkladu je tedy

$$S = \frac{1}{12} \cdot 3^2 = (0;5) \times (9) = (0;45) .$$

Je tedy patrné, že řády uvedených čísel 3, 9 a 45 nejsou stejné; počtář si patrně s nimi nelámal hlavu. Není obtížné zjistit, že „mezopotámská hodnota čísla π" je při tomto výpočtu rovna 3. Obtížnější je vysvětlit, jaký význam tabulka YBC 7302 měla, co bylo dáno a co se mělo vypočítat.[16]

Mezopotámská matematika obyčejně pracovala s hodnotou $\pi = 3$; máme však doklad (tabulky z konce starobabylónského období objevené roku 1936 v Suse), že užívala i aproximaci $\pi = 3\frac{1}{8}$.

Obvod kružnice byl patrně počítán pomocí algoritmu, který lze v naší matematické symbolice vyjádřit vzorcem

$$o = \pi \cdot d ,$$

kde d je průměr kružnice. Mezopotámská hodnota čísla π je většinou rovna 3.[17]

LITERATURA

[Ba] Baqir Taha, *Foreword (Tel Dhiba'i: New Mathematical Texts)*, Sumer **18** (1962), 11–14.

[BBS] Brack-Bernsen L., Schmidt O., *Bisectable Trapezia in Babylonian Mathematics*, Centaurus **33** (1990), 1–38.

[BR] Bruins E. M., Rutten M., *Textes mathématiques de Suse*, Paris, 1961.

[E] Edwards C. H., Jr., *The Historical Development of the Calculus*, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1979.

[Fr] Friberg J., *Methods and Traditions of Babylonian Mathematics, II An Old Babylonian Catalogue Text with Equations for Squares and Circles*, Journal of Cuneiform Studies **33** (1981), 57–64.

[Ga] Gandz S., *Studies in Babylonian Mathematics I*, Osiris **8** (1948), 13–40.

[H2] Høyrup J., *Algebra and Naive Geometry: An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought*, Altorientalische Forschungen **17** (1990), 27–69, 262–354.

[H4] Høyrup J., *Mathematics, Algebra, and Geometry*, in The Anchor Bible Dictionary IV, ed. D. N. Freedman, New York, 1992, 601–602.

[Ko] Kolman A., *Dějiny matematiky ve starověku*, Academia, Praha, 1968.

[Ki] Kilmer A. D., *Sumerian and Akkadian Names for Designs and Geometrical Shapes*, in *Investigating artistic environments in the ancient Near East*, ed. A. Gunter, New York, 1990, 83–91.

[16] Obdobný příklad je rovněž na tabulce YBC 11120, kde je $o = (1;30)$, $o^2 = (2;15)$ a $S = (0;11,15)$.

[17] Viz úlohy v kapitole o Pythagorově větě.

[LB] Leemans W. F., Bruins E. M., *Un texte vieux-babylonien concernant des cercles concentriques*, Comptes Rendus de la Rencontre Assyriologique Internationale **2** (1951), 31–35.

[Mu] Muroi K., *Reexamination of Susa Mathematical Text No. 3: Alleged Value $\pi = 31/8$*, Historia Scientiarum, Second Series **2** (1992), 45–49.

[N1] Neugebauer O., *Mathematische Keilschrift-Texte*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1935 (erster und zweiter Teil), 1937 (dritter Teil), reprint Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[N2] Neugebauer O., *Vorlesungen über Geschichte der Antiken Mathematischen Wissenschaften, Erster Band. Vorgriechische Mathematik*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1934.

[N3] Neugebauer O., *Zur Geschichte der babylonischen Mathematik*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, B, Band I (1931), 97–80.

[NS1] Neugebauer O., Sachs A., *Mathematical Cuneiform Texts*, American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research, New Haven, Connecticut, 1945, reprint, Harrassowitz, 1986.

[NS2] Neugebauer O., Sachs A., *Mathematical and Metrological Texts*, Journal of Cuneiform Studies **36** (1984), 243–251.

[NSt] Neugebauer O., Struve W., *Über die Geometrie des Kreises in Babylonien*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, B, Band I (1931), 81–92.

[Po4] Powell M. A., *Metrological Notes on the Esagila Tablet and Related Matters. Appendix II: Bricks as Evidence for Metrology*, Zeitschrift für Assyriologie **72** (1982), 116–123.

[Po5] Powell M. A., *Late Babylonian Surface Mensuration: A Contribution to the History of Babylonian Agriculture and Arithmetic*, Archiv für Orientforschungen **31** (1984), 32–66.

[Sg] Saggs H. W. F., *A Babylonian Geometrical Text*, Revue d' Assyriologie et d'Archéologie **54** (1960), 131–146.

[Td1] Thureau-Dangin F., *Texts mathématiques Babyloniens*, Brill, Leiden, 1938.

[Td2] Thureau-Dangin F., *Tablettes d'Uruk à l'usage des prêtres du Temple d'Anu au temps des Séleucides*, Paris, 1922.

[Td3] Thureau-Dangin F., *Le calcul de la surface d'un segment de cercle (Notes Assyrologiques LXIII.)*, Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale **29** (1932), 26–28.

[Td4] Thureau-Dangin F., *Encore un mot sur la mesure du segment de cercle (Notes Assyrologiques LXIV.)*, Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale **29** (1932), 77–78.

[Va] Vajman A. A., *Vavilonskie geometričeskie risunki prostranstvennych figur*, Istoriko-matematičeskie issledovanija **13** (1960), 379–382.

[Va2] Vajman A. A., *O geometričeskoj figure absamikku klinopisnych matematičeskich tekstov*, Vestnik drevnej istorii **1** (1959), 91–94.

[Vo] Vogel K., *Vorgriechische Mathematik*, Würzburg, 1958–1959.

[Vy] Vygodskij M. Ja., *Arifmetika i algebra v drevnem mire*, Nauka, Moskva, 1967.

[W] Waschow H., *Verbesserungen zu den babylonischen Dreiecksaufgaben S. K. T.*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, B, Band II (1933), 211–214.

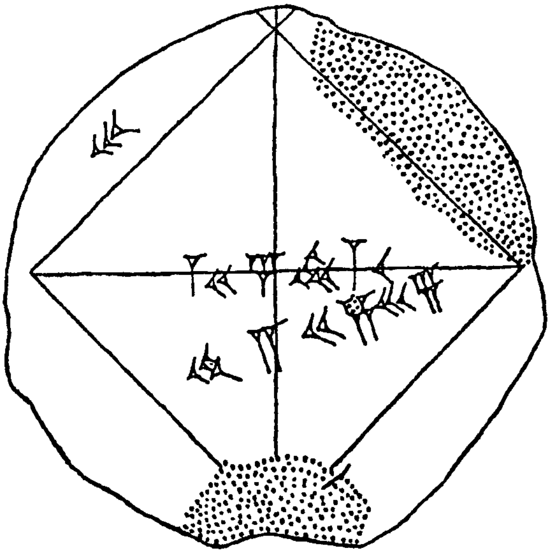
WWW STRÁNKY

[WWW] http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath.

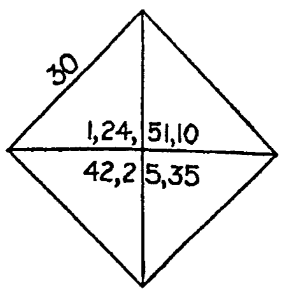
PYTHAGOROVA VĚTA.

Znalost Pythagorovy věty je v Mezopotámii doložena už v době Starobabylónské říše. Pro tehdejší počtáře byla zdrojem příkladů různé obtížnosti.

Nejznámější mezopotámská tabulka, která souvisí s Pythagorovou větou, je tabulka YBC 7289. Pochází ze starobabylónského období.



Jde o poškozenou kruhovou tabulku, jejíž průměr je přibližně 7 cm. Popsána je jen z jedné strany; není na ní žádný text, pouze náčrt čtverce s úhlopříčkami a tři čísla. U jedné ze stran nakresleného čtverce je číslo (30), uvnitř čtverce jsou čísla $(1, 24, 51, 10)$ a $(42, 25, 35)$.



Je velmi pravděpodobné, že číslo (30) představuje délku strany uvažovaného čtverce; číslo $(1, 24, 51, 10)$ lze interpretovat jako

$$(1; 24, 51, 10) = 1 + \frac{24}{60} + \frac{51}{60^2} + \frac{10}{60^3} \doteq 1{,}414\,212\,963\ ,$$

což je jeden ze starobabylónských odhadů čísla $\sqrt{2}$.[1] Třetí číslo je součin

$$(30) \times (1;24,51,10) = (42;25,35)\ ,$$

které udává přibližnou délku úhlopříčky čtverce o straně 30. Je pravděpodobné, že výsledek uvedený na tabulce souvisel s Pythagorovou větou. Snad šlo o výukovou tabulku, která seznamovala žáky se vztahem délek strany a úhlopříčky čtverce.[2]

Velmi jednoduchá a dnes snad nejčastěji citovaná mezopotámská úloha využívající Pythagorovu větu pochází ze Starobabylónské říše.[3] Ve volném překladu zní takto:

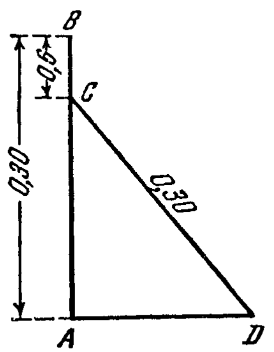
(4) *je délka a* (5) *úhlopříčka. Jaká je šířka?*

Její délka je neznámá. (4) × (4) *je* (16), (5) × (5) *je* (25). *Odeber* (16) *od* (25), *dostaneš* (9). *Co se samo sebou má násobit, aby to dalo* (9)*?* (3) × (3) *je* (9). (3) *je šířka.*

Úloha není doplněna žádným obrázkem, ale z popsaného postupu řešení je patrné, že jde o pravoúhlý trojúhelník. Poznamenejme, že jde o nejznámější pythagorejský trojúhelník o stranách 3, 4, 5. Algoritmus řešení je popsán pečlivě, je pravděpodobné, že se jedná o školní tabulku.[4]

Desátá úloha na tabulce BM 85196[5] zní takto:

Trám délky (0; 30) *gar je opřen o zeď. Na vrchu se spustí o* (0; 6) *gar. O kolik se posune dole?*



Babylónské řešení (viz předchozí obrázek) lze v naší symbolice pro hodnoty

$$AB = CD = (0;30) = \frac{1}{2} \qquad \text{a} \qquad BC = (0;6) = \frac{1}{10}$$

[1] Přesně je určeno pět desetinných míst.

[2] Více viz [NS], str. 42–43.

[3] Je na jedné z mnoha tabulek uložených v Britském muzeu.

[4] Více viz http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk.

[5] Tabulka pochází buď z kassitského období nebo z období první novobabylónské dynastie, její rozměry jsou $19 \times 12,3$ cm. Obsahuje 18 geometrických úloh motivovaných většinou praxí.

zapsat takto:

$$AD = \sqrt{CD^2 - (AB - BC)^2} = \frac{3}{10} .$$

Řešení je popsáno slovně:

Ty: (0; 30) *umocni.* (0; 15) *vidíš.*
(0; 6) *odejmi od* (0; 30). *Ty* (0; 24) *vidíš.*
(0; 24) *umocni, ty* (0; 9, 36) *vidíš.*
(0; 9, 36) *odejmi od* (0; 15). *Ty* (0; 5, 24) *vidíš.*
(0; 5, 24) *jaký má kvadratický kořen?* (0; 18) *je kvadratický kořen. O* (0; 18) *se na zemi posune trám.*

Úloha zde však nekončí, ale pokračuje takto:

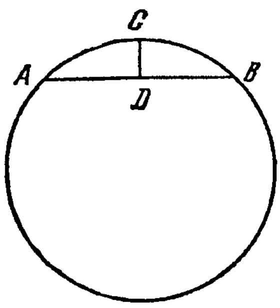
Když se na zemi o (0; 18) *posunul trám, o kolik poklesl nahoře?*
(0; 18) *umocni. Ty* (0; 5, 24) *vidíš.*
(0; 5, 24) *odečti od* (0; 15). *Ty* (0; 9, 36) *vidíš.*
(0; 9, 36) *jaký má kořen?* (0; 24) *je kořen.*
(0; 24) *odečti od* (0; 30). (0; 6) *ty vidíš.*
O (0; 6) *poklesl trám. Toto je způsob.*

Druhou část úlohy lze chápat buď jako zkoušku, nebo jako úlohu opačnou k zadané úloze.[6]

Zajímavé použití Pythagorovy věty je v jednom příkladu na tabulce BM 85194:[7]

(1, 0) *je obvod.* (2) *je to, o co jsem se spustil. Jaká je délka rozdělení?*

Z postupu řešení je patrné, že jde o následující úlohu: je dán kruh, jehož obvod je (1, 0) = 60 jednotek; hledáme délku tětivy, která odtíná úseč o výšce 2 jednotky (viz obrázek).



Nejprve je vypočten průměr d kružnice, postup však není uveden; je zapsán pouze výsledek, z něhož je jasné, že byla použita hodnota $\pi = 3$:

$$d = \frac{o}{\pi} = \frac{60}{3} = 20 .$$

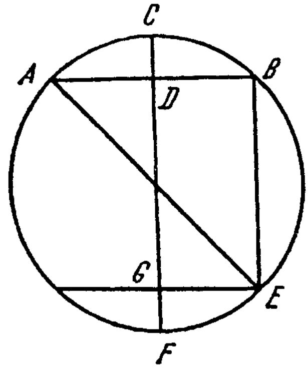
[6] Více viz [Vy], ruský překlad úlohy a její rozbor je na str. 168–169.
[7] Tabulka pochází z kassitského období, obsahuje 35 úloh, z nichž 16 je geometrických.

Pak je podáno podrobné řešení úlohy, které lze v naší symbolice zapsat vztahem

$$a = \sqrt{d^2 - (d-2s)^2} = \sqrt{400 - 256} = 12 \; .$$

Řešení vychází z následujícího obrázku, ve kterém je

$$AB = a \; , \quad AE = d = 20 \; , \quad CD = GF = s = 2 \; , \quad BE = d - 2s = 16 \; .$$



Řešení úlohy opět svědčí o dobré znalosti Pythagorovy věty a dokládá snad i znalost věty Thaletovy. Text řešení této úlohy zní takto:

Ty: (2) *umocni;* (4) *od* (20) *odečti, průměr,* (16) *vidíš.*
(20), *průměr umocni;* (6, 40) *vidíš.*
(16) *umocni,* (4, 16) *vidíš.*
(4, 16) *odečti od* (6, 40). (2, 24) *vidíš.*
Najdi kvadratický kořen (2, 24). (12) *je kvadratický kořen. To je délka předělu. To je tvůj způsob.*[8]

Poznamenejme, že v uvedeném postupu je jedna nesrovnalost. Místo $2s$ se počítá s^2 (2 *umocni*); výsledek je však správný, neboť $s = 2$.

Hned za touto úlohou následuje úloha opačná; je dána délka tětivy $a = 12$ a obvod kružnice $o = 60$. Úkolem je určit výšku příslušné úseče. Postup řešení odpovídá vztahu

$$s = \frac{1}{2}(d - \sqrt{d^2 - a^2}) \; .$$

Prohlédneme-li si pravoúhlý trojúhelník využitý v těchto příkladech, zjistíme, že jeho strany mají délky 12, 16 a 20; jde tedy o trojúhelník podobný nejznámějšímu pythagorejskému trojúhelníku o stranách 3, 4 a 5.

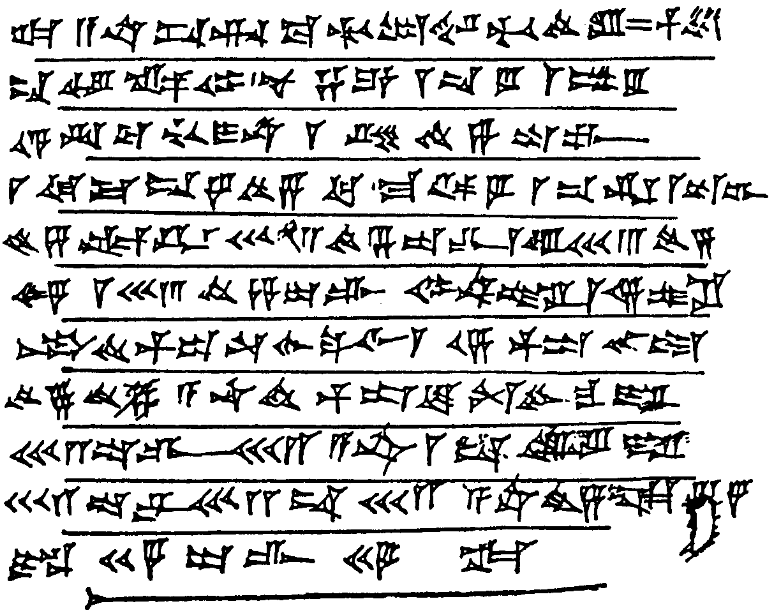
Na jedné tabulce pocházející ze starobabylónského období[9] se Pythagorova věta objevuje v úloze, jejíž přepis je na následujícím obrázku. Mají se vypočítat délky stran obdélníka, je-li dán jejich poměr a délka úhlopříčky.

---

[8] Viz [N1], originální text str. 148, německý překlad str. 159, rozbor str. 180.

[9] Byla objevena ve starobylém městě Susa, poprvé publikována v roce 1962; obsahuje několik geometrických příkladů. Více viz [BR].

Nechť šířka měří o $\frac{1}{4}$ méně než délka. (40) *je úhlopříčka. Jaká je délka a šířka?*[10]



Úloha je řešena metodou chybného předpokladu. Zvolena je hodnota délky $a_0 = 60$, tuto hodnotu je možno snadno dělit čtyřmi; tedy $b_0 = 45$. Nyní je vypočtena délka úhlopříčky obdélníka se stranami 60 a 45:

$$u_0 = \sqrt{a_0^2 + b_0^2} = \sqrt{3\,600 + 2\,025} = \sqrt{5\,625} = 75\ .$$

V zadání však má mít úhlopříčka u délku 40. Délka a a šířka b jsou proto vypočteny takto:

$$a = a_0 \cdot \frac{u}{u_0} = 60 \cdot \frac{40}{75} = 32\ , \qquad b = b_0 \cdot \frac{u}{u_0} = 45 \cdot \frac{40}{75} = 24\ .$$

Poznamenejme, že místo dělení číslem 75 je násobeno převrácenou hodnotou $(0;0,48)$ tohoto čísla.

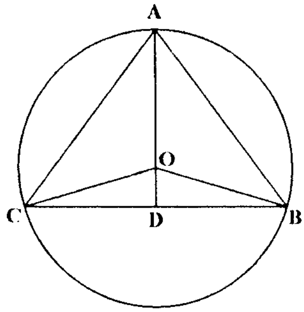
Metoda chybného předpokladu byla užívána mezopotámskými počtáři v geometrii poměrně často.[11]

Na jiné tabulce nalezené v městě Susa je úloha, v níž se má určit poloměr kružnice opsané rovnoramennému trojúhelníku se stranami 50, 50 a 60. Na tabulce je následující obrázek, který zadání úlohy objasňuje.[12]

[10] Viz [Ch], originální text, anglický překlad i rozbor je na str. 87–88; dále viz [BR], str. 102.

[11] Další příklady obdobného charakteru lze nalézt např. na tabulce VAT 6598.

[12] Viz http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk.



Babylónský postup výpočtu poloměru r lze v dnešní symbolice popsat asi takto ($AC = AB = 50$, $CB = 60$).

Pomocí Pythagorovy věty nejprve vypočteme stranu AD trojúhelníka $\triangle ABD$.

$$AD^2 = AB^2 - BD^2 , \qquad AD = 40 .$$

Opět pomocí Pythagorovy věty, tentokrát pro trojúhelník $\triangle OBD$ vypočteme poloměr r:

$$r^2 = OD^2 + BD^2 = (40 - r)^2 + 30^2 , \qquad r = 31\frac{1}{4} .$$

Poznamenejme, že trojúhelník $\triangle ABD$ je podobný pythagorejskému trojúhelníku o stranách 3, 4, 5 a trojúhelník $\triangle OBD$ pythagorejskému trojúhelníku o stranách 7, 24, 25.

Další úlohy, které využívaly Pythagorovu větu, procvičovaly výpočet poloměrů kružnice opsané a vepsané pravidelnému šestiúhelníku, výpočet obsahů rovnoramenných a rovnostranných trojúhelníků, výpočet délek stran pravoúhlých trojúhelníků apod.[13]

Zajímavá matematická úloha je na tabulce Db_2–146 Dhiba'i:[14]

Jaká je strana pravoúhelníka, jehož obsah je $(0;45)$ *a úhlopříčka je* $(1;15)$.[15]

Označíme-li písmeny x a y délku a šířku uvažovaného obdélníka, lze úlohu v naší symbolice zapsat touto soustavou rovnic:

$$x \cdot y = \frac{3}{4} ,$$
$$x^2 + y^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 .$$

[13] Více viz tabulky uložené v Britském muzeu nebo v kolekci Yale University. Viz [Ko], [NS] a [N1].

[14] Roku 1962 byla ve starobabylónském chrámu v městě Tell Dhiba'i objevena kolekce pěti set tabulek pocházející z 18. století př. n. l. Byla v ní i tabulka označená Db_2–146, jejíž rozměry jsou $11,5 \times 6,8 \times 3,3$ cm. Text na této tabulce je jen nepatrně poškozený, snadno lze identifikovat nádhernou matematickou úlohu.

[15] Viz [Ta], text věnovaný matematickým tabulkám je na str. 11–14, znění úlohy na str. 12.

Dosadíme-li z první rovnice do druhé $y = \frac{3}{4x}$, dostaneme rovnici

$$x^2 + \left(\frac{3}{4x}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2 .$$

Jednoduchou úpravou dojdeme k bikvadratické rovnici

$$x^4 - \left(\frac{5}{4}\right)^2 x^2 + \left(\frac{3}{4}\right)^2 = 0 .$$

Vyřešit tuto rovnici není těžké; snadno dojdeme ke dvěma kladným kořenům $x_1 = 1$ a $x_2 = \frac{3}{4}$.

Mezopotámské řešení je daleko jednodušší a elegantnější, nepotřebuje rovnici čtvrtého stupně. Naší symbolikou lze mezopotámský postup vyjádřit takto:

$$2xy = 1\frac{1}{2} ,$$

$$x^2 + y^2 - 2xy = (x - y)^2 = \frac{1}{16} ,$$

$$x - y = \frac{1}{4} , \qquad \frac{x - y}{2} = \frac{1}{8} .$$

Podobně se vypočte polovina součtu hledaných stran; počtář zde však postupoval trochu jinak:

$$\frac{x + y}{2} = \sqrt{\frac{x^2 + y^2 - 2xy}{4} + xy} = \frac{7}{8} .$$

Ze znalosti poloviny součtu a poloviny rozdílu hledaných stran obdélníka pak byly obě tyto strany vypočteny:

$$x = \frac{x + y}{2} + \frac{x - y}{2} = 1 , \qquad y = \frac{x + y}{2} - \frac{x - y}{2} = \frac{3}{4} .$$

Několik zajímavých příkladů využívajících Pythagorovu větu je i na tabulce AO 6484.[16] Šestý příklad zní takto:

Délka, šířka a úhlopříčka je (40) *a* (2,0) *je plocha.*

Je tedy dán obdélník, známe součet délek dvou jeho stran a úhlopříčky a jeho obsah. Úkolem je určit délky stran a úhlopříčky. Na tabulce je uveden jen výsledek, postup chybí:

(15) *je délka,* (8) *šířka,* (17) *úhlopříčka.*[17]

Užijeme-li naši symboliku a označíme-li délku a, šířku b a úhlopříčku d, dostaneme soustavu dvou rovnic o třech neznámých:

$$a + b + d = 40 ,$$
$$a \cdot b = 120 .$$

[16] Tabulka pochází z období Seleukovců, byla objevena ve Warce. Je na ní 17 úloh.

[17] Viz [N1], originální text str. 97, německý překlad str. 100, komentář str. 104.

Z Pythagorovy věty navíc vyplývá rovnost

$$a^2 + b^2 = d^2 \ .$$

Po dosazení za b a d do první rovnice dostaneme po jednoduchých úpravách rovnici

$$a \cdot (a^2 - 23a + 120) = 0 \ ;$$

její kořeny jsou $a_1 = 0$, $a_2 = 15$ a $a_3 = 8$.

První kořen nepřichází v úvahu vzhledem k zadání. Máme tedy dvě řešení

$$a_2 = 15 \ , \quad b_2 = 8 \ , \quad d_2 = 17 \ ,$$
$$a_3 = 8 \ , \quad b_3 = 15 \ , \quad d_3 = 17 \ .$$

První řešení je na mezopotámské tabulce uvedeno, druhé nikoli, neboť délka musela být větší než šířka.

Osmý příklad na téže tabulce zní takto:

Úhlopříčka čtverce je (10) *loktů. Urči stranu čtverce.*
(10) *násob* (0; 42, 30). *To dává* (7; 5) *jako délku.*
(7; 5) *a* (1; 25) *vynásob. To dá* (10; 2, 5) ...[18]

Úlohu lze v naší symbolice zapsat takto (stranu čtverce označíme a a úhlopříčku u):

$$a = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot u = 5\sqrt{2} \doteq 7,071 \ .$$

Rekonstrujeme-li mezopotámské řešení, zjistíme, že jeho postup odpovídá výpočtu

$$(10) \times (0; 42, 30) = (7; 5) \ ,$$

kde $(0; 42, 30) = \frac{17}{24}$ je mezopotámská aproximace čísla $\frac{\sqrt{2}}{2}$; byla používána jako první, značně hrubá aproximace tohoto čísla již od starobabylónského období. Chyba výpočtu je asi 0,17%.

Na konci úlohy je patrně zkouška, neboť ze znalosti délky strany čtverce je vypočtena délka úhlopříčky:

$$u = a \cdot \sqrt{2} = (7; 5) \times (1; 25) = (10; 2, 5) \ ,$$

kde $(1; 25) \doteq 1,417$ je hrubá aproximace čísla $\sqrt{2}$. Bylo by zajímavé vědět, jaký slovní komentář byl dáván k objasnění takovéhoto postupu.

Závěrem poznamenejme, že mezopotámští počtáři znali a využívali Pythagorovu větu více než tisíc let před Pythagorem. Byla pro ně zdrojem nejrůznějších geometrických a zeměměřických úloh, které dnes řešíme pomocí kvadratických rovnic. Je pravděpodobné, že znali i Thaletovu větu; její užití však nelze s jistotou prokázat.

[18] Viz [N1], originální text str. 97, německý překlad str. 100, komentář str. 104.

LITERATURA

[Ba] Baqir Taha, *Foreword*, Sumer **18** (1962), 5–14.

[BR] Bruins E. M., Rutten M., *Textes mathématiques de Suse*, Paris, 1961.

[H2] Høyrup J., *Algebra and Naive Geometry: An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought*, Altorientalische Forschungen **17** (1990), 27–69, 262–354.

[Ch] Chabert J.-L. et al., *A History of Algorithms. From the Pebble to the Microchip*, Springer, Berlin, Heidelberg, ..., 1999.

[Kn] Knuth D., *Ancient Babylonian Algorithms*, Communications for the Association of Computing Machinery **15** (1972), 671–677, opravy in 19(1976), 108.

[Ko] Kolman A., *Dějiny matematiky ve starověku*, Academia, Praha, 1968.

[N1] Neugebauer O., *Mathematische Keilschrift-Texte*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1935 (erster und zweiter Teil), 1937 (dritter Teil), reprint Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[N2] Neugebauer O., *Vorlesungen über Geschichte der Antiken Mathematischen Wissenschaften, Erster Band. Vorgriechische Mathematik*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1934.

[N3] Neugebauer O., *Zur geometrischen Algebra (Studien zur Geschichte der antiken Algebra III)*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, B, Band 3, 1936, 245–259.

[NS] Neugebauer O., Sachs A., *Mathematical Cuneiform Texts*, American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research, New Haven, Connecticut, 1945, reprint, Harrassowitz, 1986.

[P1] Powell M. A., *Sumerian Numeration and Metrology*, University Microfilms (72-14 445), Minneapolis, 1971.

[Se] Sethe K., *Von Zahlen und Zahlworten bei den alten Ägyptern*, Strassburg, 1916.

[ThD] Thureau-Dangin F., *Le théorème de Pythagore. (Notes Assyriologigues LXVIII)*, Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale **29** (1932), 131–142.

[Vo] Vogel K., *Vorgriechische Mathematik*, Würzburg, 1958–1959.

[Vo2] Vogel K., *Der „falsche Ansatz“ in der babylonischen Mathematik*, Mathematisch-Physikalische Semesterberichte **7** (1960), 89–95.

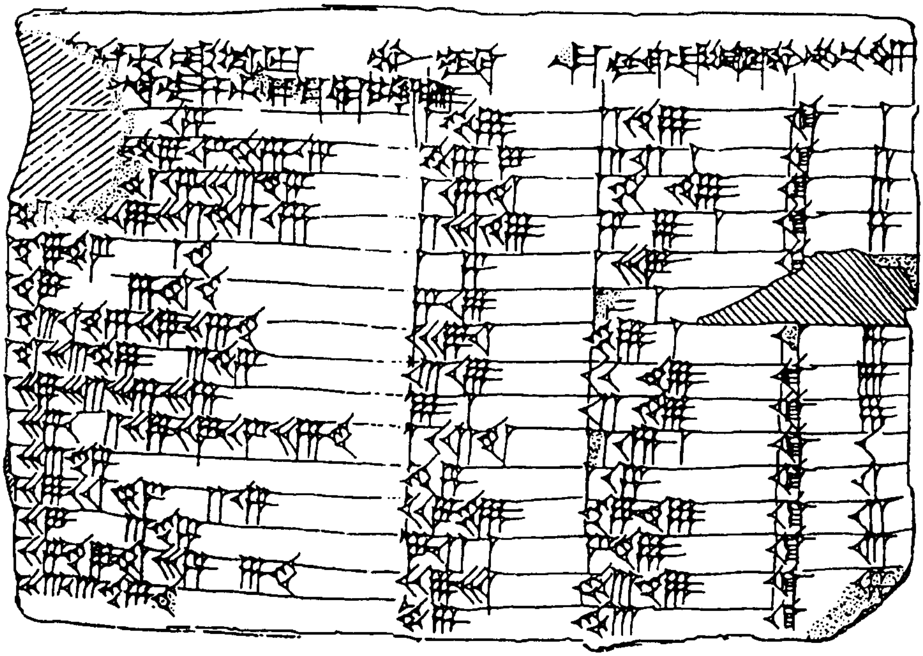
[Vy] Vygodskij M. Ja., *Arifmetika i algebra v drevnem mire*, Nauka, Moskva, 1967.

WWW STRÁNKY

[WWW] http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath.

PYTHAGOREJSKÉ TROJICE.

Nejznámější a asi nejčastěji diskutovanou a reprodukovanou mezopotámskou tabulkou je tabulka Plimpton 322, která pochází z období 19. až 17. století př. n. l. Dnes je uložena na univerzitě v Yale v kolekci, kterou této univerzitě věnoval George Arthur Plimpton (1855–1936).[1] Tabulka o rozměrech přibližně 13 × 9 × 2 cm je značně poškozena na okrajích i na vlastní ploše, je dokonce možné, že část tabulky chybí. Na počátku 20. století se odborníci domnívali, že jde o jakýsi hospodářský záznam nebo daňový registr nějakého kláštera. Tabulka totiž neobsahuje text, pouze 15 řádků čísel uspořádaných do čtyř sloupců. Písař, který ji psal, špatně dodržoval řádky a dopustil se čtyř písařských chyb (více viz [Br2] a [NS]). Tabulka Plimptom 322, jejíž přepis je na následujícím obrázku, je obyčejně označována jako tabulka pythagorejských trojic. Toto označení však není nejvhodnější.



Přepíšeme-li klínopisný zápis a zachováme-li šedesátkovou soustavu, dostaneme následující tabulku (zjištěné chyby byly odstraněny, na některých místech byly doplněny nuly a tím opraveny řády čísel, poškozená místa byla rekonstruována):

[1] Více viz http://www.library.yale.edu.

(1; 59, 00, 15)	(1, 59)	(2, 49)	(1)
(1; 56, 56, 58, 14, 50, 06, 15)	(56, 07)	(1, 20, 25)	(2)
(1; 55, 07, 41, 15, 33, 45)	(1, 16, 41)	(1, 50, 49)	(3)
(1; 53, 10, 29, 32, 52, 16)	(3, 31, 49)	(5, 09, 01)	(4)
(1; 48, 54, 01, 40)	(1, 05)	(1, 37)	(5)
(1; 47, 06, 41, 40)	(5, 19)	(8, 01)	(6)
(1; 43, 11, 56, 28, 26, 40)	(38, 11)	(59, 01)	(7)
(1; 41, 33, 45, 14, 03, 45)	(13, 19)	(20, 49)	(8)
(1; 38, 33, 36, 36)	(8, 01)	(12, 49)	(9)
(1; 35, 10, 02, 28, 27, 24, 26)	(1, 22, 41)	(2, 16, 01)	(10)
(1; 33, 45)	(45)	(1, 15)	(11)
(1; 29, 21, 54, 02, 15)	(27, 59)	(48, 49)	(12)
(1; 27, 00, 03, 45)	(2, 41)	(4, 49)	(13)
(1; 25, 48, 51, 35, 06, 40)	(29, 31)	(53, 49)	(14)
(1; 23, 13, 46, 40)	(56)	(1, 46)	(15)

Nejsnáze lze vysvětlit první sloupec,[2] který označuje pořadí řádku. Zbývající tři sloupce zůstanou při letmém pohledu nesrozumitelné. Převeďme proto čísla předchozí tabulky do desítkové soustavy:

1,983 402 7	119	169	1
1,949 158 5	3 367	4 825	2
1,918 802 1	4 601	6 649	3
1,886 247 8	12 709	18 541	4
1,815 007 6	65	97	5
1,785 192 8	319	481	6
1,719 983 5	2 291	3 541	7
1,692 709 3	799	1 249	8
1,642 669 4	481	769	9
1,586 122 5	4 961	8 161	10
1,562 500 0	45	75	11
1,489 416 7	1 679	2 929	12
1,450 017 3	161	289	13
1,430 238 8	1 771	3 229	14
1,387 160 4	56	106	15

Ve třicátých letech 20. století studoval tabulku Plimpton 322 F. Thureau-Dangin [ThD]; jako první zjistil, že nejde o soupis majetku, ale o pythagorejské trojice. Ve čtyřicátých letech tabulku zkoumali O. Neugebauer a A. Sachs [NS]; odstranili písařské chyby, doplnili poškozená místa a interpretovali tabulku jako sbírku patnácti pythagorejských trojic. Na přelomu čtyřicátých a padesátých

[2] Sloupce počítáme zprava.

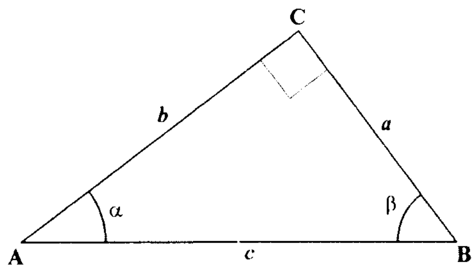
let studoval tabulku E. M. Bruins (viz [Br1], [Br2]); dospěl k názoru, že jde o speciální aplikaci reciproké tabulky vybraných čísel od $n = (2;24)$ $(\frac{1}{n} = (0;25))$ až po $n = (1;48)$ $(\frac{1}{n} = (0;33,20))$ na pythagorejské trojúhelníky:

$$a' = \frac{a}{b} = \frac{n - \frac{1}{n}}{2}\,, \qquad b' = \frac{b}{b} = 1\,, \qquad c' = \frac{c}{b} = \frac{n + \frac{1}{n}}{2}\,,$$

a', b', c' jsou redukované délky stran.

V šedesátých letech navázal na Neugebauera D. J. Price de Solla [Pr], v osmdesátých letech podali rozšířený výklad J. Friberg a R. Buck Creighton (viz [Fr], [Cr]); vycházeli z práce Neugebauera a Sachse. Poměrně nedávno studovali tabulku E. Robson a D. E. Joyce (viz [Ro1] – [Ro3] a [WW2]); i oni vycházeli z Neugebauerovy a Sachsovy práce. V následujícím textu se přidržíme Joyceových výsledků.

Uvažujme pravoúhlý trojúhelník ABC se standardním označením stran a úhlů (viz obrázek).



Druhý sloupec tabulky Plimpton 322 udává patnáct různých hodnot délky přepony c, třetí sloupec patnáct různých hodnot délky odvěsny a, čtvrtý sloupec odpovídající hodnoty čísla

$$\left(\frac{c}{b}\right)^2 = (\operatorname{cosec}\beta)^2 = \frac{a^2+b^2}{b^2} = 1 + \frac{a^2}{b^2} = 1 + (\operatorname{tg}\alpha)^2\,.$$

Přitom jde o pythagorejské trojúhelníky. Např. v prvním řádku je $c = 169$, $a = 119$, odtud

$$b = \sqrt{169^2 - 119^2} = 120\,;$$

dále je

$$\left(\frac{169}{120}\right)^2 = 1 + \frac{59}{60} + \frac{15}{60^3} \doteq 1{,}983\,402\,778\,.$$

Navíc je tabulka sestavena tak, že ve čtvrtém sloupci jsou hodnoty uspořádány sestupně. Doplňme nyní tabulku o hodnoty délek odvěsny b a o velikosti úhlů α a β:

β	α	b	a	c	n
$45,24°$	$44,76°$	120	119	169	1
$45,75°$	$44,25°$	3 456	3 367	4 825	2
$46,21°$	$43,79°$	4 800	4 601	6 649	3
$46,73°$	$43,27°$	13 500	12 709	18 541	4
$47,92°$	$42,08°$	72	65	97	5
$48,46°$	$41,54°$	360	319	481	6
$49,68°$	$40,32°$	2 700	2 291	3 541	7
$50,23°$	$39,77°$	960	799	1 249	8
$51,28°$	$38,72°$	600	481	769	9
$52,56°$	$37,44°$	6 480	4 961	8 161	10
$53,13°$	$36,87°$	60	45	75	11
$55,02°$	$34,98°$	2 400	1 679	2 929	12
$56,14°$	$33,86°$	240	161	289	13
$56,74°$	$33,26°$	2 700	1 771	3 229	14
$58,11°$	$31,89°$	90	56	106	15

Je velmi pravděpodobné, že tvůrce tabulky znal metodu generování pythagorejských trojic. Tzv. základní (též primitivní) pythagorejské trojice a, b, c získáme tak, že dosazujeme navzájem nesoudělná přirozená čísla $p > q$ do následujících vztahů:

$$a = p^2 - q^2 , \qquad b = 2pq , \qquad c = p^2 + q^2 .$$

Vzhledem k tomu, že je na tabulce Plimpton 322 vypočítána přesná hodnota podílů čtverců přepony $c = p^2 + q^2$ a odvěsny $b = 2pq$ (v šedesátkové soustavě), musel být čtverec čísla b, a tedy i číslo b, součinem mocnin prvočísel 2, 3 a 5.[3]

Bylo zjištěno, že v tabulce Plimpton 322 jsou právě všechny pythagorejské trojice, pro které jsou $p > q$ nesoudělná čísla uvažovaného tvaru, a navíc

$$q \leq 60 , \qquad (1;48) = \frac{9}{5} < \frac{p}{q} < \frac{12}{5} = (2;24) .$$

Jediná nesrovnalost spočívá v tom, že na 11. řádku jsou hodnoty c a a, které odpovídají patnáctinásobku uvedených čísel p, q; pro $p = 2$, $q = 1$ by mělo být $a = 3$, $b = 4$, $c = 5$. V tabulce však je na 11. řádku $a = 45$, $c = 75$ ($b = 60$).

Je možné i jiné vysvětlení: $p = 60$, $q = 30$, $c = 4\,500$, $a = 2\,700$, $b = 3\,600$; čísla p a q odpovídají výše uvedeným nerovnostem, jsou však soudělná. A čísla c a a napsaná na tabulce bychom museli interpretovat jako $c = (1,15,0)$ a $a = (45,0)$.

V následující tabulce jsou uvedeny hodnoty čísel p, q a odpovídající hodnoty čísel a, b, c. Vzhledem k výše uvedené nesrovnalosti je 11. řádek otištěn třikrát.

[3] Reciproká hodnota těchto čísel má v šedesátkové soustavě konečný rozvoj. Mezi prvními 150 čísly jde o tato čísla: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 15, 16, 18, 20, 24, 25, 27, 30, 32, 36, 40, 45, 48, 50, 54, 60, 64, 72, 75, 80, 81, 90, 96, 100, 108, 120, 125, 128, 135, 144, 150.

Nejprve jsou uvedena čísla z tabulky Plimpton 322, která nemají odpovídající hodnoty p, q, neboť jsou to čísla soudělná, v následujících dvou řádcích jsou dvě možné varianty volby čísel p, q, ze kterých lze 11. řádek odvodit.

n	p	q	b	a	c
1	12	5	120	119	169
2	64	27	3 456	3 367	4 825
3	75	32	4 800	4 601	6 649
4	125	54	13 500	12 709	18 541
5	9	4	72	65	97
6	20	9	360	319	481
7	54	25	2 700	2 291	3 541
8	32	15	960	799	1 249
9	25	12	600	481	769
10	81	40	6 480	4 961	8 161
11			60	45	75
11	2	1	4	3	5
11	60	30	3 600	2 700	4 500
12	48	25	2 400	1 679	2 929
13	15	8	240	161	289
14	50	27	2 700	1 771	3 229
15	9	5	90	56	106

Nejbližší dvojicí čísel p, q, která se vymyká nerovnosti $q \leq 60$, je dvojice $p = 125$, $q = 64$; odpovídající hodnoty jsou $a = 11\,529$, $b = 16\,000$, $c = 19\,721$, dále je

$$\left(\frac{c}{b}\right)^2 = 1{,}519\,210\,316 = (1;31,9,9,25,42,2,15)\ ,$$

$$\alpha = 35{,}78^\circ\ , \qquad \beta = 54{,}22^\circ\ .$$

Tyto hodnoty by ve výše uvedené tabulce patřily mezi 11. a 12. řádek.

O významu tabulky Plimpton 322 byla sepsána řada prací. Nelze ji patrně považovat za „trigonometrickou tabulku“. Pokud by tomu tak bylo, měli bychom před sebou nejstarší příklad výskytu funkce kosekans. Kolem této otázky se rozpoutala diskuse matematiků, asyrologů i historiků matematiky; viz např. [NS], [Br1], [Ca], [Fr] a [Ga].

Stále však nejsou dostatečně přesvědčivě zodpovězeny otázky, jak a proč byla tabulka vypočtena, k čemu byla používána atd. Nejzávažnějším problémem je objasnění významu hodnoty $(\frac{c}{b})^2$ a výše uvedených nerovností pro podíl $\frac{p}{q}$.

Číslo $\frac{c^2}{b^2}$ je možno chápat jako podíl obsahů čtverce nad přeponou a čtverce nad odvěsnou pro uvedené pythagorejské trojúhelníky. Přitom jsou uvažovány právě ty pythagorejské trojúhelníky, pro které je tento podíl menší než 2. Omezení zdola (cca 1,387) není jasné.

LITERATURA

[Br1] Bruins E. M., *On Plimpton 322, Pythagorean Numbers in Babylonian Mathematics*, Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings **52** (1949), 629–632.

[Br2] Bruins E. M., *Pythagorean Triads in Babylonian Mathematics: The Errors on Plimpton 322*, Sumer **11** (1955), 117–121.

[Ca] Cajori F., *A History of Mathematical Notations*, Dover Publications, INC, New York, 1993, jde o reprint dvoudílné knihy z roku 1928 a 1929.

[Cr] Creighton Buck R., *Sherlock Holmes in Babylon*, American Mathematical Monthly **87** (1980), 338–345.

[Fr] Friberg J., *Methods and Traditions of Babylonian Mathematics: Plimpton 322, Pythagorean Triples and the Babylonian Triangle Parameter Equations*, Historia Mathematica **8** (1981), 277–318.

[Ga] Gazalé M., *Number From Ahmes to Cantor*, Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 2000.

[Ch] Chabert J.-L. et al., *A History of Algorithms. From the Pebble to the Microchip*, Springer, Berlin, Heidelberg, ..., 1999.

[Ko] Kolman A., *Dějiny matematiky ve starověku*, Academia, Praha, 1968.

[N1] Neugebauer O., *Mathematische Keilschrift-Texte*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1935 (erster und zweiter Teil), 1937 (dritter Teil), reprint Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[N2] Neugebauer O., *Vorlesungen über Geschichte der Antiken Mathematischen Wissenschaften, Erster Band. Vorgriechische Mathematik*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1934.

[NS] Neugebauer O., Sachs A., *Mathematical Cuneiform Texts*, American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research, New Haven, Connecticut, 1945, reprint, Harrassowitz, 1986.

[Pr] Price D. J., de Solla, *The Babylonian „Pythagorean Triangle“ Tablet*, Centaurus **10** (1964), 1–13.

[Ro1] Robson E., *Three Old Babylonian Methods for Dealing with „Pythagorean“ Triangles*, Journal of Cuneiform Studies **49** (1997), 51–72.

[Ro2] Robson E., *Neither Sherlock Holmes nor Babylon: A Reassessment of Plimpton 322*, Historia Mathematica **28** (2001), 167–206.

[Ro3] Robson E., *Words and Pictures: New Light on Plimpton 322*, The American Mathematical Monthly **109** (2002), 105–120.

[Sch] Schmidt O., *On Plimpton 322: Pythagorean Numbers in Babylonian Mathematics*, Centaurus **24** (1980), 4–13.

[ThD] Thureau-Dangin F., *Le théorème de Pythagore. (Notes Assyriologigues LXVIII)*, Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale **29** (1932), 131–142.

[Vo] Vogel K., *Vorgriechische Mathematik*, Würzburg, 1958-1959.

[Vy] Vygodskij M. Ja., *Arifmetika i algebra v drevnem mire*, Nauka, Moskva, 1967.

[We] Weil A., *Number Theory ... from Hammurapi to Legendre*, Birkhäuser, Boston, 1984.

WWW STRÁNKY

[WW1] http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath.

[WW2] Joyce D. E.: http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/mathhist/plimpnote.html.

[WW3] http://www.math.tamu.edu/~don.allen/history/babylon/babylon.html.

[WW4] http://www-groups.dcs.st-andrews.ac.uk/~history/Indexes/Babylonians.html.

[WW5] http://www.swan.ac.au/compsci/Research ... HistoryOfTables/Plimpton/Plimpton.html.

PROSTOROVÁ GEOMETRIE.

V této kapitole se pokusíme objasnit algoritmy používané v Mezopotámii při řešení úloh prostorové geometrie. Ze Starobabylónské říše se zachovalo několik zajímavých tabulek (např. BM 85 196, BM 85 194, BM 85 210, YBC 5037, YBC 4657, YBC 4663, YBC 4662, YBC 4666, YBC 7164 či YBC 7997), které obsahují příklady vycházející z každodenních potřeb zeměměřičů, architektů a stavitelů. Obsahují praktické úlohy na výpočet objemů nebo rozměrů různých staveb, domů, náspů, přehrad, kanálů, opevnění apod.

Je třeba zdůraznit, že se v těchto úlohách téměř nevyskytují geometrické termíny pro tělesa; hovoří se např. o člunu, korytu, žlabu, kanálu, kruhové nádobě, studni, náspu, svahu, kruhovém náspu apod. Jsou však používány termíny více či méně odpovídající našim termínům rovinné geometrie („plocha", průměr, strana, obvod, čtverec, délka, šířka, výška, hloubka apod.).

Velmi často jsou počítány objemy, nevyskytují se však výpočty povrchů. Nemáme doložen výskyt příkladů na výpočet objemu koule, (nekomolého) kužele a jehlanu. Počítalo se patrně jen s tělesy, která se vyskytovala v běžném životě či ve stavební praxi.

Krychle a kvádr.

Starobabylónští počtáři uměli přesně vypočítat objem krychle i kvádru. Postup jejich výpočtu lze v naší symbolice zapsat vzorcem

$$V = a^3\,, \qquad \text{resp.} \qquad V = abc\,,$$

kde a je délka hrany krychle, resp. a, b a c jsou délky hran kvádru. Uveďme jednoduchý příklad:

Člun. (1) *gar délka,* $\frac{1}{2}$ *gar a* (2) *lokte šířky,* (6) *hloubka. Svazky rákosí jsou co?*

Ty: (1) *délky s* (0; 40), *šířka, násob.* (0; 40) *vidíš.*
(0; 40) *s* (6), *hloubka, násob.* (4) *vidíš. Udrž v hlavě.*
Převrácené číslo (0; 5), *obsah* (1) *svazku rákosu, utvoř.* (12) *vidíš.*
(12) *s* (4) *násob.* (48) *svazků rákosí. To je tvůj postup.*[1]

Vnitřní prostor člunu určený pro náklad má tvar kvádru o rozměrech 1 gar, $\frac{1}{2}$ gar a 2 lokty, tj. (0; 40) gar, a 6 loktů. Objem člunu je tedy

$$V = (1) \times (0;40) \times (6) = (4) \text{ sar}\,.$$

Připomeňme, že 1 sar je objem hranolu, jehož čtvercová podstava má hranu délky 1 gar a výška je 1 loket, tj. $\frac{1}{12}$ gar. Proto se při takovýchto výpočtech výška, resp. hloubka udává vždy v loktech.

---

[1] Viz [N1], tabulka BM 85 196, originální text str. 43, německý překlad str. 47, rozbor str. 52.

Úkolem však není určit objem člunu, ale počet n rákosových svazků, které je možno naložit, známe-li rozměry loďky a objem jednoho rákosového svazku. V naší symbolice lze výpočet zapsat takto:

$$n = \frac{V}{V_0}\,,$$

kde V je objem nákladového prostoru člunu a V_0 objem jednoho rákosového svazku; v konkrétních číslech

$$n = \frac{V}{V_0} = \frac{(4)}{(0;5)} = (48) \text{ svazků}\,.$$

Na starobabylónské tabulce NBC 7934 je úloha na výpočet objemu tělesa tvořeného třemi kvádry. Text úlohy zní takto:

(6) a $\frac{1}{2}$ gar a (5) loktů je délka, (3) lokty horní šířka, (3) a $\frac{1}{2}$ lokte je druhá hloubka. Jaký je objem?

$\frac{5}{6}$ sar, (1) a $\frac{5}{6}$ gin a (7) a $\frac{1}{2}$ še je objem.

(6) a $\frac{1}{2}$ gar a (5) loktů je délka, $\frac{1}{2}$ loktů dolní šířka, $\frac{1}{2}$ loktů je dolní hloubka. Jaký je objem?

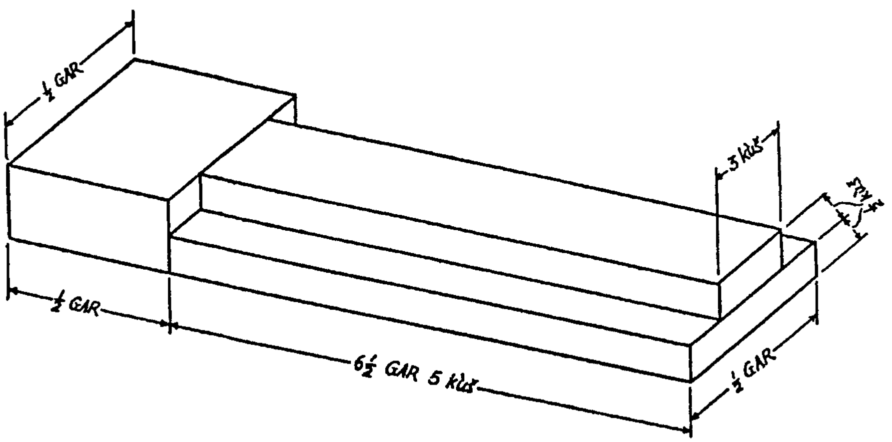
(1) a $\frac{2}{3}$ sar, (3) a $\frac{2}{3}$ gin a (15) še je objem.

Celkem: (2) a $\frac{1}{2}$ sar, (5) a $\frac{1}{2}$ gin a (22) a $\frac{1}{2}$ še je objem.

A (15) gin objem. $\frac{1}{2}$ gar je strana čtverce, $\frac{1}{2}$ lokte je hloubka.

Celkem: (2) a $\frac{5}{6}$ sar, $\frac{1}{2}$ gin a (22) a $\frac{1}{2}$ še je objem.[2]

Těleso z předchozího příkladu z tabulky NBC 7934 má patrně následující tvar.



[2] Viz [NS], originální text str. 55, anglický překlad str. 56, rozbor str. 56.

Výpočet není proveden, tabulka uvádí pouze výsledky. Vzhledem k definici jednotky sar je nutno délku a šířku převést na jednotky gar, výška je již v textu uvedena v potřebné jednotce, tj. v loktech. V naší symbolice lze výpočty objemů z tohoto příkladu zapsat takto:[3]

$$V_1 = \left(6\frac{1}{2} + \frac{5}{12}\right) \cdot \frac{3}{12} \cdot \frac{1}{2} = \frac{249}{288} \text{ sar } = \frac{5}{6} \text{ sar } 1\frac{5}{6} \text{ gin } 7\frac{1}{2} \text{ še },$$

$$V_2 = \left(6\frac{1}{2} + \frac{5}{12}\right) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{83}{48} \text{ sar } = 1\frac{2}{3} \text{ sar } 3\frac{2}{3} \text{ gin } 15 \text{ še },$$

$$V_3 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{4} \text{ sar } = 15 \text{ gin }.$$

Objem celého tělesa V je tedy dán součtem:

$$V = V_1 + V_2 + V_3 = 2\frac{5}{6} \text{ sar } \frac{1}{2} \text{ gin } 22\frac{1}{2} \text{ še }.$$

Další úlohy, v nichž se má určit objem krychle nebo kvádru, jsou též na tabulce BM 85 194.[4]

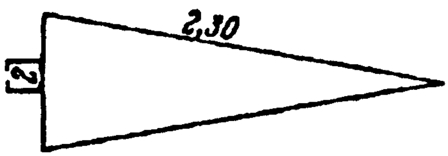
Hranol.

Objem hranolu je počítán jako součin obsahu základny a výšky. Výpočty jsou mírně komplikovány převody jednotek a tím, že základní jednotka objemu 1 sar má stejný název jako základní jednotka obsahu.

Na tabulce BM 85 196 je příklad, v němž se má vypočítat objem ponořené části trojbokého pilíře a objem jeho zbylé části.

Pilíř v proudu. (2) *a* $\frac{1}{2}$ *gar délka,* (2) *gar šířka na jeho zadní straně.* (3) *lokte hloubka nad vodou,* (6) *hloubka. Zeminy jsou co?*[5]

Text na tabulce doprovází tento jednoduchý obrázek:



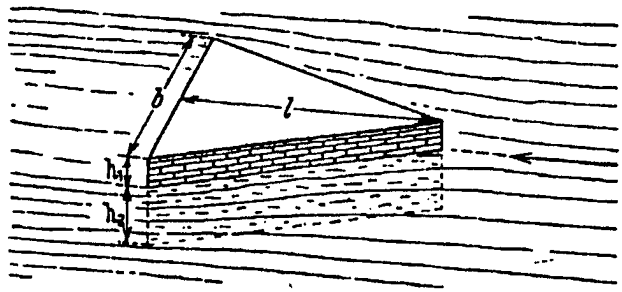
Jde o hranol, jehož podstava má tvar trojúhelníka (základna $b = 2$ gar, výška nebo snad rameno $l = 2\frac{1}{2}$ gar) a jehož výška je $h_1 + h_2 = 3 + 6 = 9$ loktů (viz následující obrázek).

---

[3] Připomeňme, že 1 sar = 60 gin, 1 gin = 180 še.

[4] Viz [N1], originální text str. 148–149, německý překlad str. 160, rozbor str. 181–182.

[5] Viz [N1], originální text str. 43, německý překlad str. 46, rozbor str. 50–51.



Výpočet objemu V tohoto kvádru lze v naší symbolice vyjádřit vzorcem

$$V = \frac{1}{2} \cdot b \cdot l \cdot (h_1 + h_2) .$$

Objem vynořené části pilíře je

$$V_1 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot l \cdot h_1 = \frac{1}{3} \cdot V ,$$

objem ponořené části pilíře je

$$V_2 = \frac{1}{2} \cdot b \cdot l \cdot h_2 = \frac{2}{3} \cdot V .$$

Postup výpočtu uvedený na tabulce zní takto:

(3) *lokte, hloubka, a* (6) *přičteno.* (9) *vidíš.*
$\frac{1}{2}$ *z* (9) *odečti,* (4; 30) *vidíš.*
$\frac{1}{2}$ *z* (2), *šířka, odečti,* (1) *vidíš.* (4; 30) *s* (1) *násob.* (4; 30) *vidíš.*
(4; 30) *s* (2; 30), *délka, násob.* (11; 15) *vidíš.* $\frac{2}{3}$ *z* (11; 15) *odečteno.*
(3; 45) *vidíš jako zeminu. Zbytek* (7; 30) *je zemina základu. To je tvůj postup.*

Počtář se zde dopustil chyby, neboť místo $h_1 + h_2$ počítal $\frac{h_1+h_2}{2}$. Pravděpodobně tak učinil pod vlivem jiných příkladů.[6] Zbytek výpočtu je správný.

Klín.

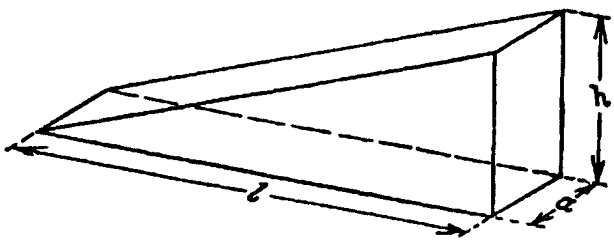
Řada mezopotámských matematických příkladů se týká klínu; toto těleso se objevovalo v úlohách, ve kterých se počítaly hráze nádrží nebo kanálů, opěrných valů či dobývacích náspů. V těchto úlohách je počítán objem zeminy, výška a délka náspu, množství práce kopáčů, délka úseku připadajícího na jednoho kopáče apod. Např. na tabulce BM 85 196 je tento příklad:

Zemina hráze, (30) *délka,* (2) *lokte šířka,* (6) *výška. Zeminy je kolik?*

[6] Například v příkladech 3, 4 a 17 na tabulce BM 85 194 počtář nahradil skutečnou výšku jakousi průměrnou výškou.

Ty: (0; 10) *šířka s* (30), *délka, násob.* (5) *vidíš jako plochu.*
(5) *s* (6), *výška, násob.* (30) *vidíš.*
$\frac{1}{2}$ *ze* (30) *odečti.* (15) *vidíš.* (15) *sar je zemina.*[7]

Jde o klín následujícího tvaru:



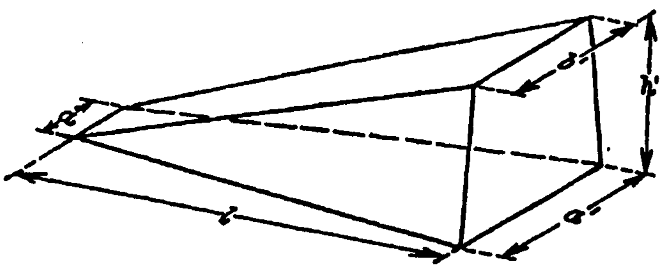
Jeho objem V je vypočítán (v naší symbolice) takto:

$$V = \frac{1}{2} \cdot a \cdot l \cdot h \,,$$

kde $a = 2$ lokty (tj. (0; 10) gar), $l = 30$ gar a $h = 6$ loktů. Výpočet i výsledek 15 sar je správný.

Za touto úlohou následuje složitější příklad, ve kterém je úkolem vypočítat objem nepravidelného klínu:

Zemina hráze. (30) *délka,* $\frac{1}{2}$ *gar horní šířka,* $\frac{1}{2}$ *gar a* (2) *lokty spodní šířka,* (2) *lokty šířka základny. Zeminy je kolik?*
Ty: (0; 30), *šířka hlavy, a* (0; 40), *základna, sečti.* (1; 10) *vidíš.*
$\frac{1}{2}$ *z* (1; 10) *odečti,* (0; 35) *vidíš.*
$\frac{1}{2}$ *z* (0; 10), *základ zeminy, odečti.* (0; 5) *vidíš.*
(0; 5) *k* (0; 35) *přičti.* (0; 40) *vidíš.*
$\frac{1}{2}$ *z* (0; 40) *odečti,* (0; 20) *vidíš.*
(0; 20) *a* (6), *výška, násob.* (1)$^{\text{sic}}$ *vidíš.*
$\frac{1}{2}$ *z* (1)$^{\text{sic}}$ *odečti.* (30) *vidíš.* (30) *sar je zemina. To je tvůj postup.*[8]



[7] Viz [N1], originální text str. 43, německý překlad str. 47, rozbor str. 52.
[8] Dtto. Výška klínu není v zadání úlohy uvedena, její hodnotu lze dešifrovat až z výpočtu.

Popsané řešení vede jen k přibližnému výsledku.[9] V naší symbolice lze babylónský početní postup zapsat takto:

$$V = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a}{2} + \frac{a' + b'}{2} \right) \cdot \frac{h'}{2} \cdot l,$$

kde a je 2 lokte (tj. (0; 10) gar), a' je $\frac{1}{2}$ gar a 2 lokte (tj. (0; 40) gar), b' je $\frac{1}{2}$ gar, h' je 6 loktů a l je 30 gar. Nepravidelný klín je tedy nahrazen pravidelným klínem, jehož délka je 30 gar, šířka (0; 40) gar a výška 3 lokty.

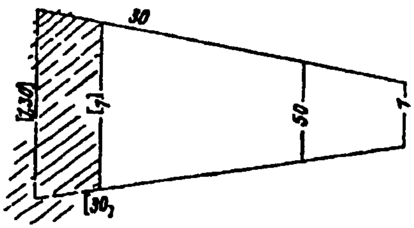
Starobabylónský postup je navíc zaznamenán chybně. Správně by mělo být:

(0; 20) a (6), výška, násob. (2) vidíš.
$\frac{1}{2}$ ze (2) odečti. (1) vidíš.
(1) s (30) násob. (30) vidíš.

Chyba mohla vzniknout při přepisu, neboť výsledek je (v duchu výše uvedené interpretace) správný.

Obdobné příklady jsou i na tabulce BM 85 194.

Na téže tabulce je ještě obtížnější příklad na výpočet objemu nepravidelného klínu.[10] Jeho text je na tabulce doplněn názorným obrázkem, který vypadá asi takto (zobrazování těles bylo tehdy velmi primitivní):



Výpočet objemu tohoto nepravidelného klínu lze v naší symbolice popsat vzorcem

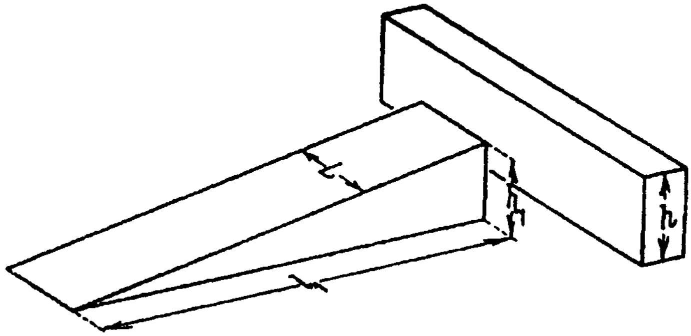
$$V = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a' + b'}{2} \right) \cdot h \cdot l = (9, 45) \text{ sar },$$

kde $a = 1$ gar, $b = (0; 50)$ gar, $a' = (1; 30)$ gar, $b' = 1$ gar, $h = 18$ loktů, $l = 30$ gar.

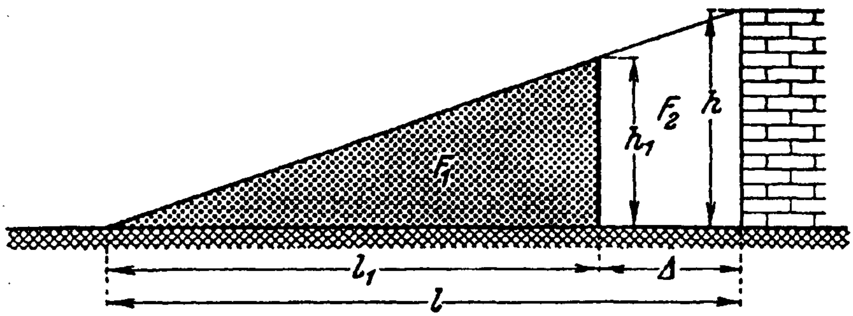
Opět jde o přibližný výpočet objemu; nepravidelný klín je nahrazen klínem pravidelným, jehož délka je 30 gar, výška 18 loktů a šířka (2; 10) gar.

Na tabulce BM 85 194[11] a na tabulce BM 85 210[12] jsou dvě dvojice příkladů na výpočet parametrů náspu ve tvaru pravidelného klínu, který má umožnit dobytí nepřátelského města. Klín k příkladům z tabulky BM 85 194 vypadá asi takto:

[9] Pokud je uvedená interpretace správná, je výsledek zatížen značnou chybou.
[10] Viz [N1], originální text str. 46, německý překlad str. 49, rozbor str. 52.
[11] Viz [N1], originální text str. 149, německý překlad str. 160–162, rozbor str. 182–186.
[12] Viz [N1], originální text str. 220–221, německý překlad str. 224–225, rozbor str. 182–186.



Věnujme se prvnímu z těchto příkladů; řez uvažovaným náspem je znázorněn na následujícím obrázku.



Je dán objem klínu $V = (1,30,0)$ gar$^2 \times$ loket, šířka zdi $L = 6$ gar, obsah vertikálního řezu klínem $F = (15,0)$ gar $\times$ loket, $\Delta = 8$ gar, $h_1 = 36$ loket. Úkolem je určit délku l.

Reprodukujeme-li krok za krokem starobabylónský postup, zjistíme, že nejprve je vypočtena výška klínu h a pak jeho délka l. Z podobnosti trojúhelníků vyplývá

$$\frac{l}{h} = \frac{\Delta}{h - h_1}\,, \qquad \text{tj.} \qquad l = \frac{h}{h - h_1} \cdot \Delta\,.$$

Pro obsah vertikálního řezu klínem platí

$$F = \frac{1}{2} \cdot h \cdot l = \frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{h - h_1} \cdot \Delta\,.$$

Pro výšku h tedy obdržíme rovnici

$$h^2 - \frac{2F}{\Delta} \cdot h + \frac{2F}{\Delta} \cdot h_1 = 0\,,$$

z níž vyplývá, že

$$h = \frac{F}{\Delta} - \sqrt{\frac{F^2}{\Delta^2} - \frac{2Fh_1}{\Delta}} .$$

Tudíž $h = 45$ lokte a $l = \frac{2F}{h} = 40$ gar.

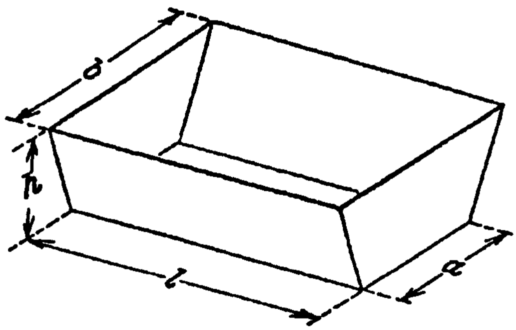
V závěru příkladu je provedena zkouška; ze znalosti F a l je vypočten objem klínu.[13]

Pravidelná i nepravidelná tělesa s lichoběžníkovými podstavami.

Na tabulce BM 85 196 je úloha na výpočet objemu koryta pro uschovávání obilí.

Koryto. (3, 20) *hlava,* (2, 30) *základ,* $\frac{2}{3}$ *lokte hloubky. Objem je co?*
Ty: (3, 20) *a* (2, 30) *sečti.* (5, 50) *vidíš.*
$\frac{1}{2}$ *z* (5, 50) *odečti,* (2, 55).
(2, 55) *s* (5), *délka, násob.* (14, 35) *vidíš* ...
(0; 40), ***výška, násob.*** (9, 43; 20) *vidíš.* ...[14]

Jde o výpočet objemu zvláštní nádoby; dno je obdélník, dvě stěny jsou lichoběžníky a dvě stěny obdélníky (viz obrázek).



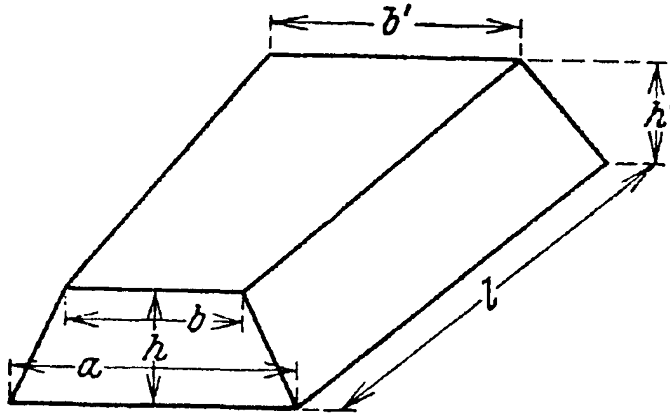
Starobabylónský postup lze v naší symbolice zapsat vzorcem

$$V = \frac{a + b}{2} \cdot l \cdot h .$$

[13] Poznamenejme, že druhé řešení kvadratické rovnice ($h = 180$ loktů a tedy $l = 10$ gar), které vyhovuje počátečním podmínkám, není uvedeno. Je možné, že klín těchto rozměrů by byl značně nepraktický a tedy toto řešení nepřicházelo v úvahu. Tehdejší počtáři se patrně spokojovali s nalezením jediného řešení.

[14] Dále následuje převod na duté míry. Text je značně poškozen, možných interpretací je několik. Délka koryta není v zadání úlohy uvedena, objevuje se až při výpočtu. Viz [N1], originální text str. 44, německý překlad str. 48, rozbor str. 53–54.

Daleko složitější příklad je na tabulce BM 85 194,[15] jde o výpočet objemu hráze (viz obrázek).



Výpočet, který je na tabulce uveden, lze v naší symbolice zapsat vzorcem:

$$V = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{a+b}{2} + \frac{a'+b'}{2} \right) \cdot \frac{h+h'}{2} \cdot l \,.$$

Můžeme si představit, že uvažované těleso je „aproximováno" kvádrem, jehož rozměry jsou

$$\frac{a+b+a'+b'}{4}\,, \qquad \frac{h+h'}{2}\,, \qquad l\,.$$

Dále je vypočten počet p pracovníků potřebných na stavbu; k tomu účelu je zadán objem v, který má navršit jeden pracovník:

$$p = \frac{V}{v}\,.$$

Nakonec je vypočtena délka λ, která na jednoho pracovníka připadá:

$$\lambda = \frac{l}{p}\,.$$

Je zřejmé, že vzhledem k přibližnému výpočtu objemu je i výpočet dalších údajů jen orientační. Pro praktické účely to však jistě plně vyhovovalo.

---

[15] Viz [N1], originální text str. 143, německý překlad str. 152, rozbor str. 165.

Válec.

Na tabulce BM 85 196 je příklad, v němž se má vypočítat objem tělesa, které není ani pojmenováno, ani načrtnuto.

Objem. (0; 30) *obvod.* (0; 40) *výška. Jaký je objem?*
Ty: (0; 30) *umocni.* (0; 15) *vidíš.*
(0; 15) *s* (0; 5) *násob.* (0; 1, 15) *vidíš* ...
Plochu (0; 1, 15) *násob* (0; 40). (0; 0, 50) *vidíš* ...[16]

Ze zadání i výpočtu je jasné, že jde o výpočet objemu V válcové sýpky, známe-li její výšku h a obvod o podstavy. V naší symbolice lze uvedený výpočet zapsat vzorcem

$$V = \frac{o^2 \cdot h}{12} .$$

Označíme-li S obsah podstavy a vezmeme-li babylónskou hodnotu $\pi = 3$, snadno k uvedenému postupu dojdeme:

$$V = S \cdot h = \frac{o^2}{4\pi} \cdot h = \frac{o^2 \cdot h}{12} .$$

Objem válce je počítán i na tabulce BM 85 194 v příkladu, který je věnován výpočtu kanálu,[17] a také na tabulce YBC 7997.[18]

Zajímavý příklad je na tabulce BM 85194, kde je dána kruhová studna, která se má obezdít připravenými cihlami.

Skruž. (0; 3, 20) *délka,* (0; 2, 30) *horní šířka,* (0; 1, 40) *spodní šířka. Pro strany* ...

Ty: (0; 2, 30), *horní šířka, přes* (0; 1, 40) *co ona jde ven?* (0; 0, 50) *jde ven.*
Převrácenou hodnotu z (0; 0, 50) *utvoř.* (1, 12) *vidíš.*
(1, 12) *s* (0; 1, 40) *násob.* (2) *vidíš.*
(2) *umocni.* (4) *vidíš.*
(0; 3, 20), *délka, s* (4) *násob.* (0; 13, 20) *vidíš jako malý průměr.*
(0; 13, 20) *s* (3) *násob.* (0; 40) *je obvod jedné vrstvy studny.* (0; 40) *podrž v hlavě.*
Převrácenou hodnotu z (0; 1, 40), *spodní šířka, utvoř.* (36) *vidíš.*
(36) *s* (0; 40), *obvod jedné vrstvy, násob.* (24) *vidíš.* (24) *je počet cihel jedné vrstvy.*
Vnější obvod jedné vrstvy je? (0; 3, 20), *délka jedné cihly, zdvojnásob.* (0; 6, 40) *k* (0; 13, 20) *přičti.* (0; 20) *vidíš jako velký průměr.*
(0; 20) *s* (3) *násob.* (1) *vidíš jako vnější obvod. Takový je tvůj postup.*[19]

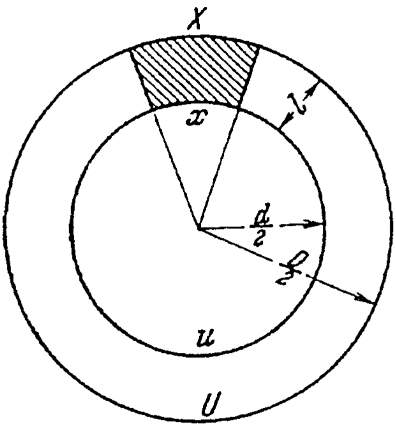
[16] Na vynechaných místech označených tečkami pokračují komplikované převody na jednoty duté míry, v nichž se měřilo obilí. Viz [N1], originální text str. 43, německý překlad str. 47, rozbor str. 52–53.

[17] Viz [N1], originální text str. 144, německý překlad str. 153–154, rozbor str. 167–172.

[18] Viz [NS], originální text str. 98, anglický překlad str. 98–99, rozbor str. 99.

[19] Viz [N1], originální text str. 146, německý překlad str. 157, rozbor str. 177.

Situace je znázorněna na následujícím obrázku, kde je U vnější a u vnitřní obvod studny, D vnější a d vnitřní průměr studny, X je délka vnějšího a x délka vnitřního oblouku cihly a l její tloušťka. Dáno je $X = (0; 2,30)$, $x = (0; 1,40)$ a $l = (0; 3,20)$.



Počtář využil při výpočtu podobnost:

$$\frac{U}{u} = \frac{D}{d} = \frac{X}{x}\,, \qquad \text{odtud} \qquad \frac{X-x}{x} = \frac{D-d}{d}\,.$$

Dále je

$$d = \frac{D-d}{2} \cdot \frac{2x}{X-x} = l \cdot \frac{2x}{X-x} = (0; 13,20)\,.$$

Vnitřní obvod studny je tedy

$$u = \pi \cdot d = 3 \times (0; 13,20) = (0; 40)\,.$$

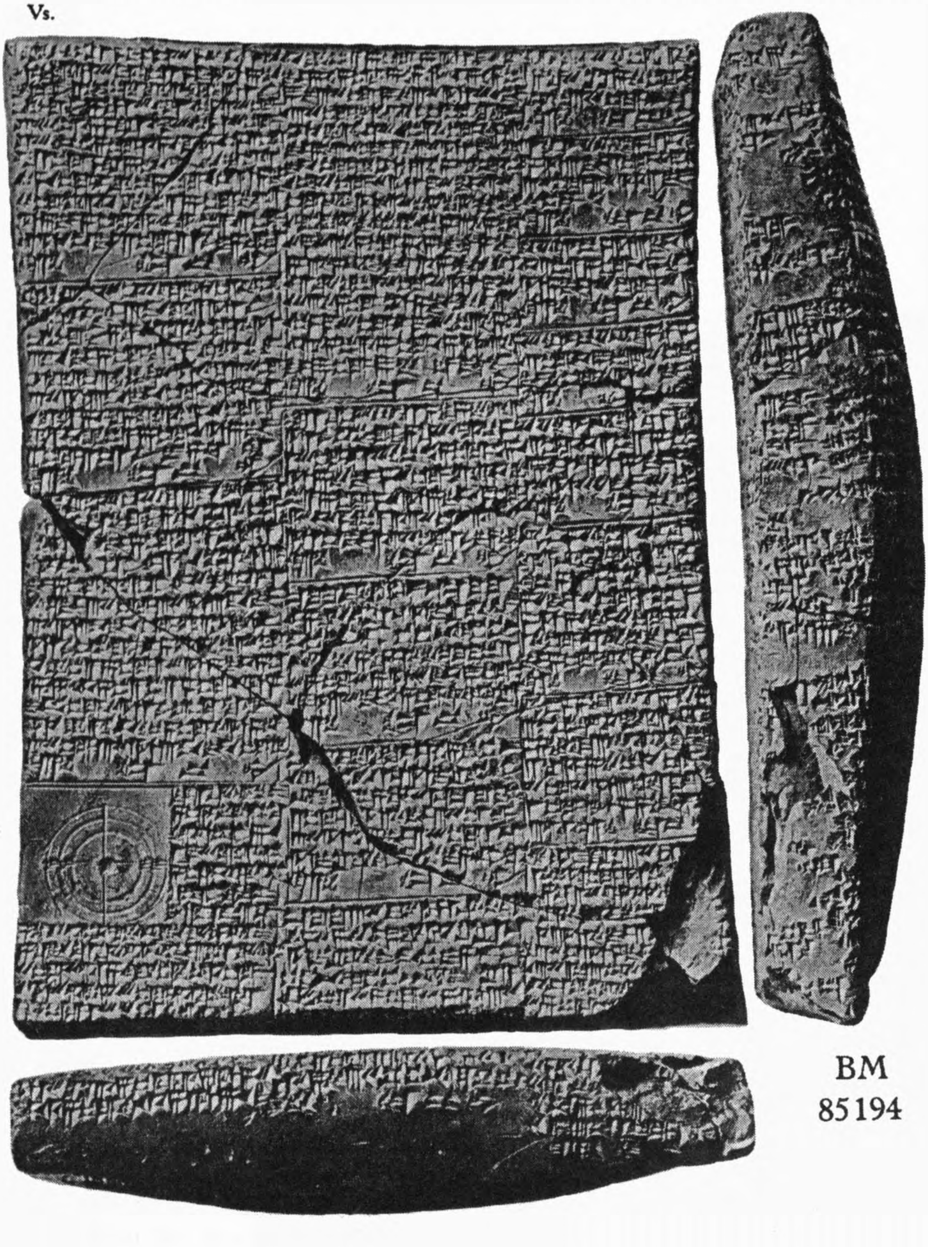
Počet cihel potřebných k obložení jednoho pásu je

$$\frac{u}{x} = \frac{(0; 40)}{(0; 1,40)} = (24)\,.$$

V příkladu se dále ze znalosti l a d vypočte D, tj. průměr studny, a její vnější obvod.

V uvedeném postupu je určitá nepřesnost; místo 2 *umocni*, by mělo být 2 *zdvojnásob*, aby byl uvedený postup zcela obecný.

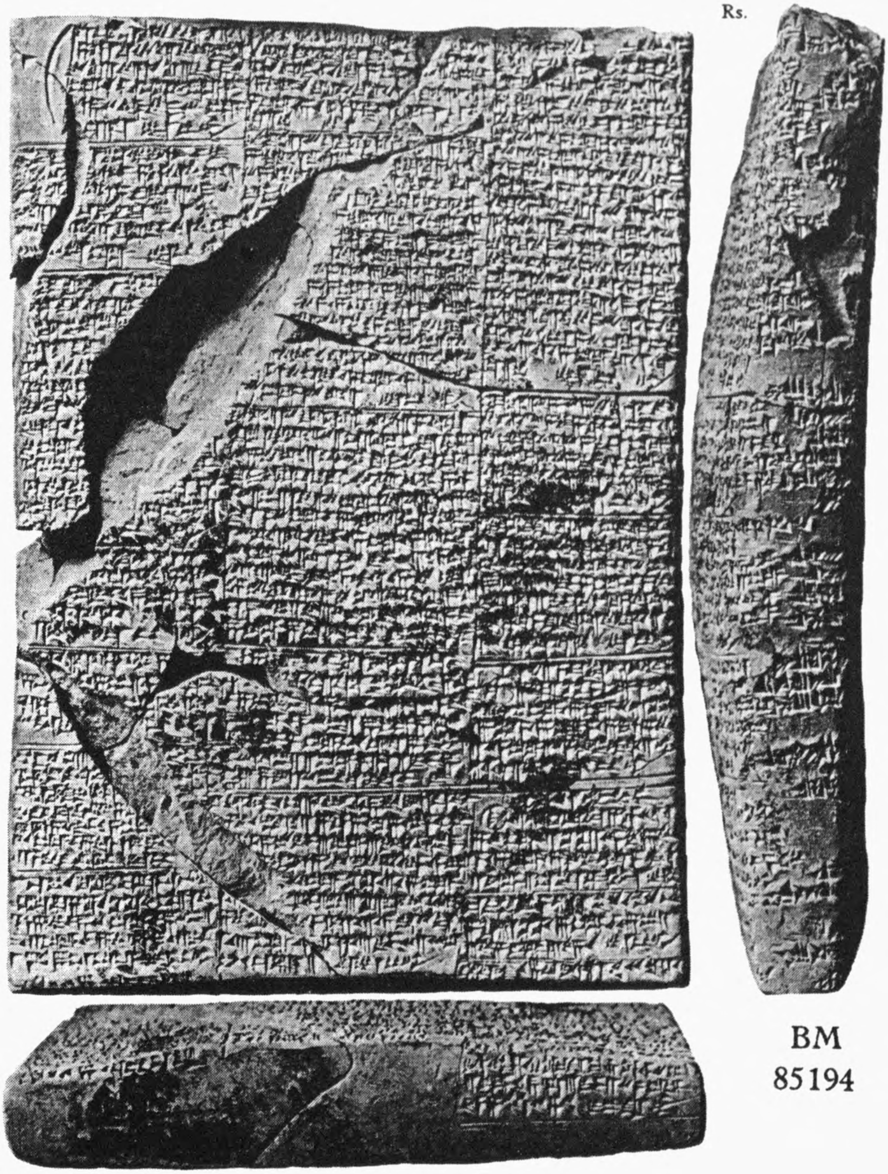
Vs.



BM
85194

Tabulka BM 85 194 (líc)

Rs.



BM
85194

Tabulka BM 85 194 (rub)

Komolý kužel.

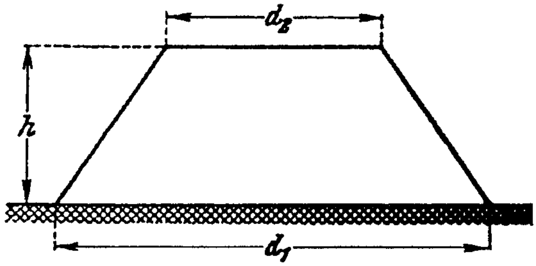
Na tabulce BM 85 194 je několik úloh, v nichž se počítá objem komolého kužele. Tento odborný termín zde pochopitelně není; hovoří se o zemině, přičemž jsou dány obvody dolní a horní podstavy a výška. Text jedné z těchto úloh zní takto:

Základ. (4) *spodní obvod,* (2) *horní obvod,* (6) *výška. Zeminy jsou co?*
(4) *umocni.* (16) *vidíš.* (16) *s* (0; 5), *pro zakřivení, násob.* (1; 20) *vidíš.*
(2) *umocni.* (4) *vidíš.* (4) *s* (0; 5), *pro zakřivení, násob.* (0; 20) *vidíš.*
(1; 20) *a* (0; 20) *sečti.* (1; 40) *vidíš.*
$\frac{1}{2}$ *z* (1; 40) *odečti.* (0; 50) *vidíš.*
(0; 50) *s* (6), *výška, násob.* (5) *vidíš jako zeminy základů. Takový je tvůj postup.*[20]

Objem komolého kužele je vypočten jen přibližně, výpočet lze v naší symbolice vyjádřit vzorcem

$$V = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{o_1{}^2}{4\pi} + \frac{o_2{}^2}{4\pi} \right) \cdot h = \frac{S_1 + S_2}{2} \cdot h\,,$$

kde o_1, o_2 jsou obvody a S_1, S_2 obsahy dolní a horní podstavy, h je výška.



Poznamenejme, že je na tabulce použita hodnota $\pi = 3$, tj. $\frac{1}{4\pi} = (0; 5)$.

Komolý kužel o výšce h a průměrech podstav d_1 a d_2 je při výpočtu nahrazen válcem o stejné výšce, jehož podstava má průměr $\sqrt{\frac{d_1{}^2 + d_2{}^2}{2}}$.

Komolý kužel se objevuje i v jedné úloze na tabulce BM 85 194.[21]

Pravidelný čtyřstěn.

Na tabulce AO 6484[22] je pět příkladů, ve kterých je počítán objem čtyřstěnu. Jejich text lze zapsat asi takto:

n loktů délky, n loktů spodní šířky, n loktů výšky. Vypočti objem tělesa.

[20] Viz [N1], originální text str. 146, německý překlad str. 156–157, rozbor str. 176–177.
[21] Viz [N1], originální text str. 144, německý překlad str. 153–154, rozbor str. 167–172.
[22] Tabulka pochází z období Seleukovců, byla objevena ve Warce. Obsahuje 17 matematických úloh.

V jednotlivých úlohách nabývá n postupně hodnot 1, 2, 3, 4 a 5.[23]

Neugebauer pomocí jazykového rozboru ukázal, že *n loktů výšky* neznamená výšku tělesa v našem pojetí, ale že jde o délku boční hrany. Zároveň na základě výborné znalosti terminologie a podrobného studia výpočtů usoudil, že podstavou je rovnostranný trojúhelník, že tedy jde o výpočet objemu pravidelného čtyřstěnu.

Víme, že objem pravidelného čtyřstěnu o hraně délky n je roven

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot n^3 .$$

Uveďme text prvního příkladu; ostatní jsou řešeny obdobně.

(1) *loket délky,* (1) *loket spodní šířky,* (1) *loket výšky.*
... (0; 5) *lokte, základna, s* (0; 5) *lokte, základna, násob. To dává* (0; 0, 25).
(0; 0, 25) *s* (1), *svislice, násob. To dává* (0; 0, 25).
(0; 0, 25) *s* (6) ... *násob* ... *Výsledek je* (0; 2, 30).

Mezopotámský výpočet lze interpretovat takto:

$$V = \frac{n}{12} \cdot \frac{n}{12} \cdot n \cdot 6 = 0,041\overline{6} .$$

Vyjdeme-li z našeho vzorce a ze znalosti aproximací, které mezopotámští počtáři užívali, lze psát

$$V = \frac{\sqrt{2}}{12} \cdot n^3 \approx \frac{17}{12} \cdot \frac{1}{12} \cdot n^3 = \frac{n}{12} \cdot \frac{n}{12} \cdot n \cdot 17 ,$$

kde $\frac{17}{12}$ je standardní aproximace $\sqrt{2}$. Porovnáme-li však poslední úpravu s mezopotámským výpočtem, zjistíme, že místo činitele 17 je počítáno jen s činitelem 6. Je možné, že je výpočet ovlivněn nějakým objemovým koeficientem z technické praxe, jehož význam není znám.[24] Rovněž je možné, že se počtář dopustil chyby.

Komolý jehlan.

Na tabulce BM 85 196 je úloha, v níž se má určit objem komolého jehlanu.

Základ. (5) *gar je čtverec,* (6) *výška.* (1) *loket pro* (1) *loket svahu. Hlava a zeminy jsou co?*
(0; 5), *svah, zdvojnásob.* (0; 10) *vidíš.*
(0; 10) *s* (6), *výška, násob.* (1) *vidíš.*
(1) *od* (5) *odečti.* (4) *vidíš jako hlavu čtvercovou.*
Základna a hlava sečteno. (9) *vidíš.*
$\frac{1}{2}$ *z* (9) *odečti.* (4; 30) *vidíš.*

[23] Viz [N1], originální text str. 97–98, německý překlad str. 100–101, rozbor str. 104.
[24] Různé koeficienty se objevují i na jiných mezopotámských tabulkách.

(4; 30) *s* (6), *výška, násob.* (27) *vidíš.* (27) *jsou zeminy.*[25]

Ze zadání je patrné, že je dána délka hrany spodní podstavy $a = 5$ gar, výška komolého jehlanu $h = 6$ loktů a sklon bočních stěn 45°.

V naší symbolice lze výpočet délky horní hrany b zapsat takto:[26]

$$\frac{a-b}{2h} = \operatorname{cotg}^*\alpha\ , \qquad \text{tj.} \qquad b = a - 2h \cdot \operatorname{cotg}^*\alpha\ ,$$

kde

$$\operatorname{cotg}^*\alpha = \frac{1 \text{ loket}}{1 \text{ loket}} = \frac{1}{12}\,\frac{\text{gar}}{\text{loket}} = (0;5)\,\frac{\text{gar}}{\text{loket}}\ .$$

Vlastní výpočet délky hrany b vypadá takto:

$$b = (5) - (2) \times (0;5) \times (6) = (4)\ .$$

Starobabylónský výpočet délky hrany horní základny je zcela správný. Chybně je však vypočten objem; uvedený výpočet lze vyjádřit vzorcem

$$V = \frac{1}{2} \cdot (a+b) \cdot h = 27\ .$$

Starobabylónské tradici by spíše odpovídal vzorec

$$V = \frac{1}{2} \cdot \left(a^2 + b^2\right) \cdot h\ .$$

Velmi zajímavý příklad na výpočet objemu komolého jehlanu nalézáme na tabulce BM 85 194; jde o zcela ojedinělý případ, kdy je objem komolého jehlanu počítán správně (ve výpočtu jsou však chyby).

Příkop. (10) *hlava,* (18) *výška,* (1) *loket pro* (1) *loket svahu. Základna a zeminy jsou co?*

Ty: (0; 5) *a* (0; 5) *sečti.* (0; 10) *vidíš.*
(0; 10) *s* (18), *výška, násob.* (3) *vidíš.*
(3) *z* (10) *je odklizeno.* (7) *vidíš jako základnu.*
Znovu základnu a hlavu (10) *připoj.* (17) *vidíš.*
$\frac{1}{2}$ *z* (17) *odečti.* (8; 30) *vidíš.*
Umocni. (1, 12; 15) *vidíš.* (1, 12; 15) *drž v hlavě.*
Druhý díl z (3), *z rozdílu hlavy nad základnou, umocni …*
(0; 45) *k* (1, 12; 15) *přidej a* (1, 13) *vidíš.*
(18) *s* (1, 13) *násob.* (22, 30)$^{\text{sic}}$ *vidíš.*
(2) *eše* (1) *gán* $\frac{1}{2}$ *gán jsou zeminy. Takový je tvůj postup.*[27]

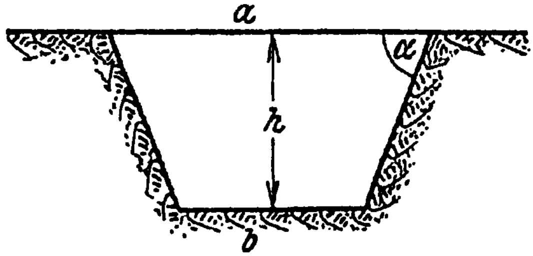
---

[25] Viz [N1], originální text str. 44, německý překlad str. 48, rozbor str. 55.

[26] Píšeme cotg*, neboť vodorovné a svislé délky měříme v jiných jednotkách; např. $\operatorname{cotg}^* 45° = \frac{1}{12}$.

[27] Viz [N1], originální text str. 150, německý překlad str. 162, rozbor str. 187–188.

Naše interpretace tvaru příkopu je na následujícím obrázku; dáno je $a = 10$, $h = 18$, $\alpha = 45°$.



Text je trochu poškozen; Neugebauer navrhuje ve své práci [N1] tuto matematickou interpretaci výpočtu:

$$V = \left[\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{a-b}{2}\right)^2\right]\cdot h\,,$$

což dá po jednoduché úpravě známý vzorec

$$V = \frac{1}{3}\cdot(a^2 + ab + b^2)\cdot h\,.$$

Nejprve je vypočtena délka dolní hrany, a to stejně jako ve výše uvedeném příkladu:

$$b = a - 2h\cdot\operatorname{cotg}^*\alpha = (10) - (2) \times (18) \times (0;5) = (7)\,.$$

Poznamenejme pro zajímavost, že počtář místo obvyklého $2\cdot\operatorname{cotg}^*\alpha$ počítá $\operatorname{cotg}^*\alpha + \operatorname{cotg}^*\alpha = (0;5) + (0;5) = (0;10)$.

Ze zachyceného postupu je jasné, že je nejprve vypočteno

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 = \left(\frac{17}{2}\right)^2 = (8;30)^2 = (1,12;15)$$

a potom

$$(a-b)^2 = (9)\,;$$

následující úsek výpočtu je bohužel poškozen. Neugebauer číslo $(0;45)$, které následuje, interpretuje takto:

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{a-b}{2}\right)^2 = \frac{1}{3}\cdot\frac{9}{4} = \frac{3}{4} = (0;45)\,.$$

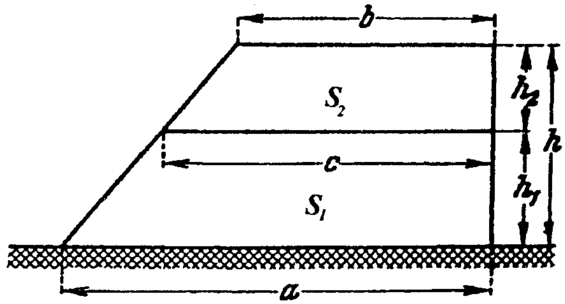
Dál už je výpočet jasný. V závěru udělal počtář chybu, místo správné hodnoty $(21,54)$ napsal chybně $(22,30)$. Poslední věta zachycuje převod objemových jednotek.[28]

[28] Správně převeden je však předchozí nesprávný výsledek. Připomeňme, že *eše* je 600 sar a *gán* je 100 sar.

Porovnáme-li starobabylónský výpočet objemu komolého jehlanu s postupem egyptským, zjistíme, že starobabylónský počtář postupoval složitěji. Jeho výpočet však plně odpovídá babylónské tradici, tj. práci se součty a rozdíly veličin.[29]

Hráze a náspy.

Na tabulce BM 85 194 jsou dva příklady, v nichž se počítají některé údaje vztahující se k náspu, jehož řez je na následujícím obrázku.



Text příkladu zní takto:

Zeď. (36) *výška. ... hlava. Co je základ, to jsem se spustil dolů přes dělící linii. Co jsem dolů postoupil, základ, dělící linie a zeminy jsou co?*

Ty: Pro jeden loket $(0;0,50)$ *hodnota svahová.* $(0;0,50)$ *zdvojnásob.* $(0;1,40)$ *vidíš.*

$(0;1,40)$ *s* (36), *výška, násob.* (1) *vidíš. Udrž v hlavě.*

$(0;45)$ *umocni.* $(0;33,45)$ *vidíš.* (1) *a* $(0;33,45)$ *sečti.* $(1;33,45)$ *vidíš.*

Co je druhá odmocnina? $(1;15)$ *je druhá odmocnina.*

$(1;15)$ *je základna.* $(1;15)$ *s* (12), *délka části výšky, násob.* (15) *vidíš.*

$(0;25)$, *svahová hodnota, pamatuj si.*

Znovu $(1;15)$, *základna, přes* $(0;45)$ *o co jde ona ven? O* $(0;30)$ *jde ona ven.*

$(0;25)$, *svahová základna, s* $(0;30)$, *diference, násob.* $(0;12,30)$ *vidíš.*

$(0;12,30)$ *k* $(0;45)$, *hlava, přičti.* $(0;57,30)$ *vidíš jako dělící linii.*

Znovu pohleď na zeminu. $(0;57,30)$, *dělící linie,* $(0;45)$, *hlava, přidej.* $(1;42,30)$ *vidíš.*

$\frac{1}{2}$ *z* $(1;42,30)$ *odečti.* $(0;51,15)$ *vidíš.*

$(0;51,15)$ *s* (15), *které jsi postoupil dolů, násob.* $(12;48,45)$ *vidíš jako horní zeminy.*

Znovu pohleď na spodní zeminu. $(0;57,30)$ *a* $(1;15)$ *sečti.* $(2;12,30)$.

$\frac{1}{2}$ *z* $(2;12,30)$ *odečti.* $(1;6,40)^{\text{sic}}$ *vidíš.*

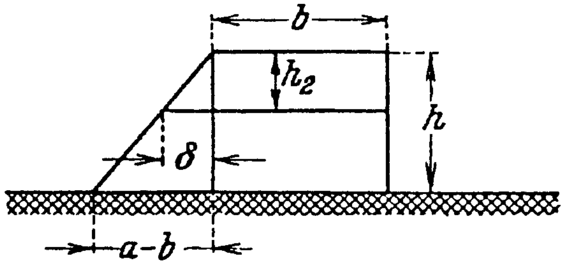
$(1;6,15)$ *s* (21), *výška, násob.* $(23;11,15)$ *je spodní zemina. To je postup.*[30]

---

[29] Tyto postupy jsme poznali v kapitole věnované kvadratickým rovnicím.

[30] Viz [N1], originální text str. 147, německý překlad str. 157–158, rozbor str. 178–179. Na předposledním řádku je písařská chyba, správně má být $(1;6,15)$.

Výška náspu je $h = (36)$ loktů, ostatní údaje je třeba dešifrovat z výpočtu, neboť zadání příkladu je poškozeno. Délka horní hrany je $b = (0;45)$ gar, sklon náspu je $(0;0,50)$, obsah vertikálního řezu je $S = (36)$ gar×loket. Úkolem je vypočítat délku spodní základny a, délku předělu c a obsahy řezů S_1 a S_2.



Výpočet uvedený na tabulce je možno v naší terminologii a symbolice prezentovat takto: Dvojnásobek „sklonu" α je

$$2 \cdot \operatorname{cotg}^{*}\alpha = \frac{2 \cdot (a-b)}{h} = (0;1,40) \ ,$$

dále

$$2 \cdot \operatorname{cotg}^{*}\alpha \cdot S = (0;1,40) \times (36) = (1) \ \text{gar}^2 \ .$$

Dosadíme-li $S = \frac{a+b}{2} \cdot h$, dostáváme

$$2 \cdot \frac{a-b}{h} \cdot \frac{a+b}{2} \cdot h = a^2 - b^2 = (1) \ \text{gar}^2 \ .$$

Odtud

$$a = \sqrt{(a^2 - b^2) + b^2} = \sqrt{(1) + (0;45)^2} = (1;15) \ \text{gar} \ .$$

Pak je vypočtena výška h_2: *Co je základ, to jsem se spustil dolů.* Délku $(1;15)$ gar je třeba nejprve převést na lokty:

$$h_2 = (1;15) \times (12) = (15) \ \text{loktů} \ .$$

Hodnotu $(0;25)$, která se náhle objevuje v textu bez bližšího vysvětlení, lze interpretovat takto:

$$\frac{h_2}{h} = \frac{15}{36} = \frac{25}{60} = (0;25) \ .$$

Pak je z podobnosti trojúhelníků vypočteno $\delta = c - b$:

$$\frac{c-b}{h_2} = \frac{a-b}{h} \ ,$$

tedy

$$\delta = c - b = \frac{h_2}{h} \cdot (a-b) = (0;25) \times (0;30) = (0;12,30) \ \text{gar} \ .$$

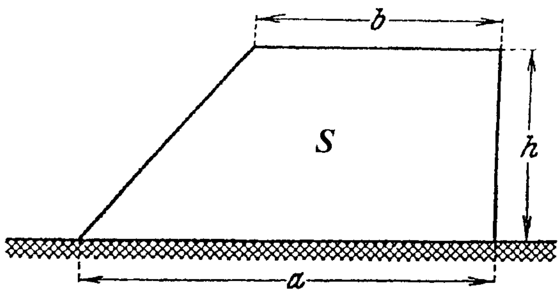
Délka c předělu je tedy $c = \delta + b = (0; 12,30) + (0; 45) = (0; 57,30)$ gar.

Vertikální obsahy řezů jednotlivých částí se nyní vypočítají velmi jednoduše:

$$S_2 = \frac{c+b}{2} \cdot h_2 = \frac{(0;57,30) + (0;45)}{(2)} \cdot (15) = (12; 48,45) \text{ gar}\times\text{loket} ,$$

$$S_1 = \frac{a+c}{2} \cdot h_1 = \frac{(1;15) + (0;57,30)}{(2)} \cdot (21) = (23; 11,15) \text{ gar}\times\text{loket} .$$

Druhý příklad je podstatně jednodušší. Jde o násep stejného tvaru jako v předchozím příkladu, ale bez předělu (viz následující obrázek).



Zadán je obsah vertikálního řezu $S = (36)$ gar×loket, výška $h = (36)$ loktů a sklon $\operatorname{cotg}^*\alpha = (0; 0,50)$; vypočítat se má dolní šířka a a horní šířka b.

Výpočet, který je na tabulce uveden, lze v naší symbolice vyjádřit takto:

$$S = \frac{a+b}{2} \cdot h , \qquad \text{tj.} \qquad \frac{a+b}{2} = \frac{1}{h} \cdot S = (1) \ \text{gar} .$$

$$\frac{1}{2} \cdot \operatorname{cotg}^*\alpha \cdot h = \frac{1}{2} \cdot \frac{a-b}{h} \cdot h = \frac{a-b}{2} = (0; 15) \ \text{gar} .$$

Odtud již snadno určíme a a b:

$$a = \frac{a+b}{2} + \frac{a-b}{2} = (1; 15) \text{ gar} .$$

$$b = \frac{a+b}{2} - \frac{a-b}{2} = (0; 45) \text{ gar} .$$

Tímto postupem se počtář elegantně vyhnul řešení kvadratické rovnice.

LITERATURA

[E] Edwards C. H., Jr., *The Historical Development of the Calculus*, Springer Verlag, New York, Heidelberg, Berlin, 1979.

[H2] Høyrup J., *Algebra and Naive Geometry: An Investigation of Some Basic Aspects of Old Babylonian Mathematical Thought*, Altorientalische Forschungen **17** (1990), 27–69, 262–354.

[Ju] Juškevič A. P., *Istoria matematiki s drevnejšich vremen do načala XIX stoletija*, *I*, Nauka, Moskva, 1970.

[Ko] Kolman A., *Dějiny matematiky ve starověku*, Academia, Praha, 1968.

[N1] Neugebauer O., *Mathematische Keilschrift-Texte*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1935 (erster und zweiter Teil), 1937 (dritter Teil), reprint Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[N2] Neugebauer O., *Vorlesungen über Geschichte der Antiken Mathematischen Wissenschaften, Erster Band. Vorgriechische Mathematik*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1934.

[N3] Neugebauer O., *Zur geometrischen Algebra (Studien zur Geschichte der antiken Algebra III)*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, B, Band 3, 1936, 245–259.

[N4] Neugebauer O., *Babylonische „Belagerungsrechnung“*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, B, Band 2, 1933, 306–310.

[N5] Neugebauer O., *Das Pyramidenstumpf-Volumen in der vorgriechischen Mathematik*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, B, Band 2, 1933, 347–351.

[N6] Neugebauer O., *Točnye nauki v drevnosti*, Nauka, Moskva, 1968.

[N7] Neugebauer O., *The Exact Sciences in Antiquity*, Harper, New York, 1962.

[NS] Neugebauer O., Sachs A., *Mathematical Cuneiform Texts*, American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research, New Haven, Connecticut, 1945, reprint, Harrassowitz, 1986.

[ThD1] Thureau-Dangin F., *Encore un mot sur la mesure du segment de cercle (Notes Assyriologiques LXIV.)*, Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale **29** (1932), 77–78.

[ThD2] Thureau-Dangin F., *-BAL= „raison arithmétique ou géométrique“ (Notes Assyriologiques LXV.)*, Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale **29** (1932), 78–80.

[ThD3] Thureau-Dangin F., *Varâdu »abaisser une perpendiculaire«, elû »élever une perpendiculaire« (Notes Assyriologiques LXVI.)*, Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale **29** (1932), 80–87.

[ThD4] Thureau-Dangin F., *La mesure du volume d'un tronc de pyramide (Notes Assyriologiques LXVII.)*, Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale **29** (1932), 87–88.

[ThD5] Thureau-Dangin F., *Mathématique Babylonienne*, Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale **29** (1932), 59–66.

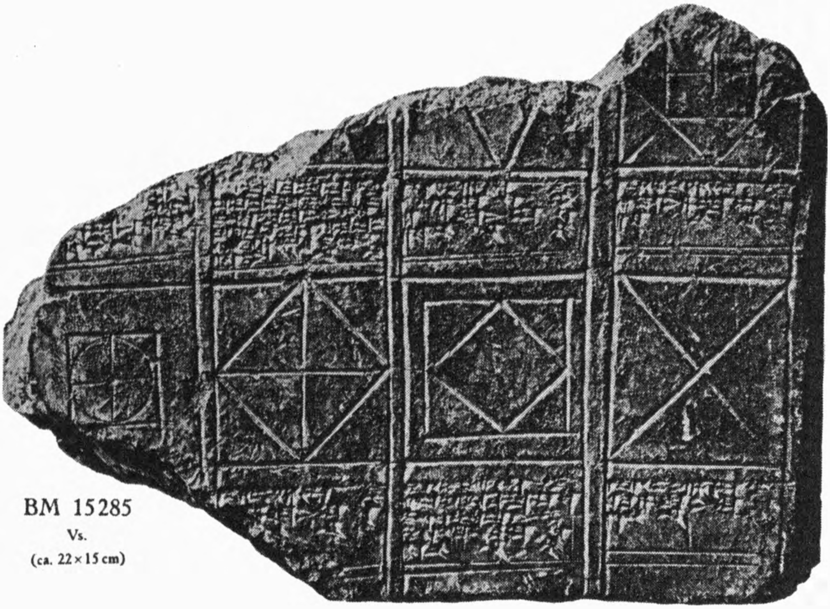
[ThD6] Thureau-Dangin F., *La Ville Ennemie de Marduk*, Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale **29** (1932), 109–119.

[Vo] Vogel K., *Vorgriechische Mathematik*, Würzburg, 1958–1959.

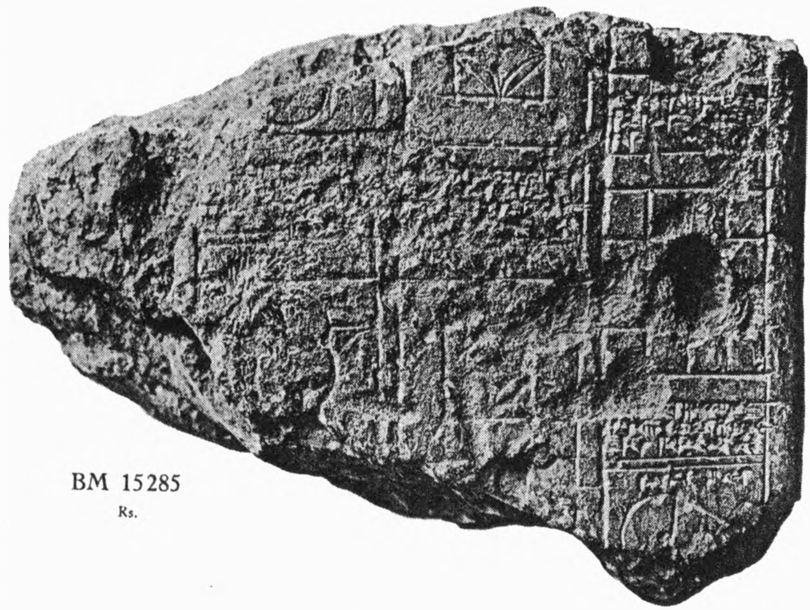
[Vy] Vygodskij M. Ja., *Arifmetika i algebra v drevnem mire*, Nauka, Moskva, 1967.

WWW STRÁNKY

[WWW] http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath.



BM 15285
Vs.
(ca. 22×15 cm)



BM 15285
Rs.

Tabulka BM 15 285 (líc a rub)

CESTA K TEORETICKÉ GEOMETRII?

Obsahy vepsaných útvarů.

Při různých úvahách o možném rozvoji teoretické geometrie v Mezopotámii hraje významnou roli zajímavá, ale značně poškozená tabulka BM 15 285,[1] na které se dochovalo 15 jednoduchých, částečně rekonstruovatelných příkladů na výpočet obsahů jednoduchých i složitějších rovinných útvarů. Na tabulce jsou uvedena pouze zadání úloh a obrázky, chybí výpočty a výsledky.

Řešení těchto úloh nevyžaduje speciální postupy, vystačí se se znalostí Pythagorovy věty, algoritmů pro výpočet obsahů základních rovinných útvarů a algoritmů pro řešení kvadratických rovnic. Většinou se jedná o úlohy, v nichž se má určit obsah trojúhelníka, čtverce, lichoběžníka, kruhů vepsaných do jednotkového čtverce, případně útvaru omezeného úsečkami a částí kruhových oblouků. Na lícové straně tabulky je 1. až 8. příklad, na rubové straně 9. až 15. příklad.[2]

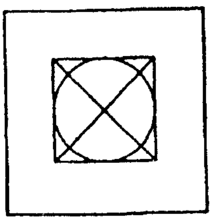
Tabulku ve dvacátých a třicátých letech 20. století zkoumali C. J. Gadd[3] a O. Neugebauer [N1].

V následujícím textu budeme komentovat všech patnáct příkladů této zajímavé tabulky.

1. První příklad, k němuž se obrázek nedochoval, zní takto:

Čtverec, v jeho vnitřku jsem vyznačil (4) *trojúhelníky a* (1) *kruh. Jaké jsou jejich plochy?*

Gadd se domnívá se, že první příklad byl doprovázen tímto obrázkem:



Neugebauer s touto rekonstrukcí nesouhlasí; podotýká, že analogická úloha je ve druhém příkladu.

---

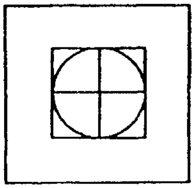
[1] Tabulka pochází ze starobabylónského období, měří přibližně 22 × 15 cm. Text tabulky viz [N1]; originální text str. 137–138, německý překlad str. 138–139, komentář 139–142.

[2] Na lícové, resp. rubové straně tabulky jsou příklady řazeny takto:

1	3	5	7		14	12	9
2	4	6	8		15	13	10
							11

[3] Viz Revue d'Assyriologie et d'Archéologie Orientale 19(1922), 149–158.

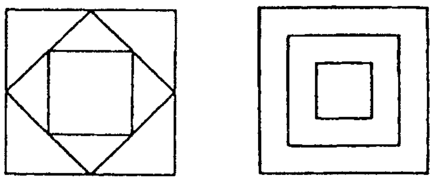
2. Text druhého příkladu chybí, zachoval se pouze obrázek:



3. Třetí příklad má velmi poškozený obrázek, ale dobře zachovaný text:

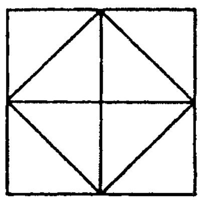
(1) *je délka. Čtverec; do jeho vnitřku jsem vyznačil čtverec. Čtverec, který jsem připojil k prvnímu čtverci. Do druhého čtverce jsem vyznačil třetí čtverec. Co jsem vyznačil, připojil jsem ke druhému čtverci. Jaké jsou jejich plochy?*

Gadd i Neugebauer se domnívají, že připojený obrázek mohl vypadat jako jeden z následujících dvou obrázků; oba dávají přednost prvnímu z nich, neboť více odpovídá terminologii i duchu celé tabulky.

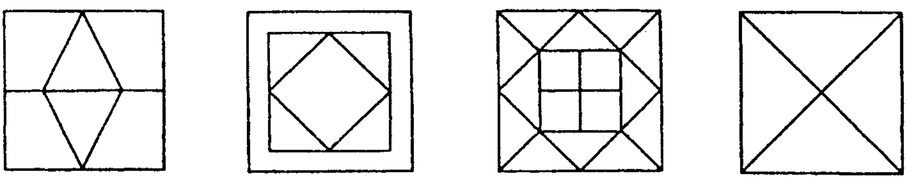


4. Čtvrtý příklad je rekonstruovatelný, i obrázek se dochoval:

(1) *je délka. Čtverec. Do jeho vnitřku* (8) *trojúhelníků jsem vyznačil. Jaké jsou jejich plochy?*



5. až 8. Obdobná znění mají pátý až osmý příklad. Jsou zhruba stejně obtížné, mění se v nich jen počet a tvar útvarů, na které je jednotkový čtverec rozdělen. Snadno je vyřešíme, podíváme-li se na obrázky, které je doprovázejí:

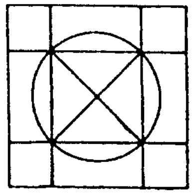


Na rubové straně tabulky BM 15 285 jsou i složitější příklady.

9. Devátý příklad zní takto:

(1) *je délka. Čtverec; ve (4) čtvercích, (4) segmenty … (4) trojúhelníky. Jaké jsou jejich plochy?*

Obrázek doprovázející tento příklad byl zcela zničen. Gadd se domnívá, že mohl vypadat takto:

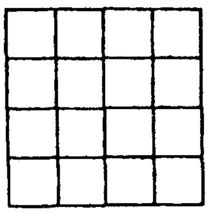


Neugebauer s Gaddovým návrhem nesouhlasí, neboť by šlo o jediný příklad, ve kterém by byl průměr znázorněného kruhu jiný než polovina strany jednotkového čtverce.

10. Desátý příklad je jednoduchý a velmi dobře dochovaný:

(1) *je délka. Čtverec, v jeho vnitřku jsem vyznačil* (16) *čtverců. Jaké jsou plochy?*

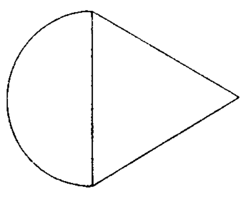
Ze zbytku dochovaného obrázku se dá usoudit, že šlo o zcela triviální úlohu. Obrázek mohl vypadat takto:



11. až 12. Texty i obrázky jedenáctého a dvanáctého příkladu jsou velmi poškozené, rekonstrukce umožňuje jen tento přepis:

… (1) *je průměr, délka a šířka* …

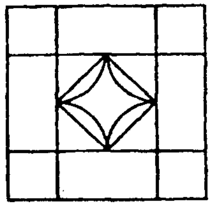
Obrázek doplňující jedenáctý příklad lze s jistou dávkou odvahy rekonstruovat takto:



Pravděpodobně jde o rovnostranný trojúhelník, ke kterému je připojen půlkruh, jehož průměr je roven délce strany tohoto trojúhelníka.

(1) *je délka. Čtverec; v jeho vnitřku jsem vyznačil čtverec ... Jaké jsou jejich plochy?*

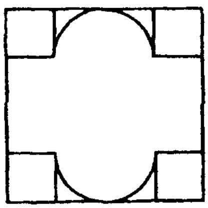
Obrázek ke dvanáctému příkladu Gadd rekonstruoval takto:



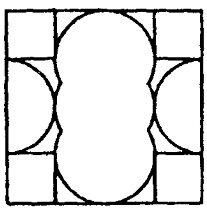
Je zřejmé, že se obrázek skládá z dobře známých útvarů, s nimiž se pracovalo již v předchozích příkladech.

13. Třináctý příklad je velmi těžce poškozen. Text byl zcela zničen, obrázek se zachoval jen částečně. Gadd se domnívá, že obrázek je stejný jako v předchozím příkladě. Neugebauer namítá, že by šlo o jediný příklad, kdy by se na tabulce obrázek opakoval. Chybějící text a poškozený obrázek neumožňují seriózní interpretaci.

14. Čtrnáctý příklad je poničen, text chybí zcela, obrázek je poškozen, znatelné jsou jen jeho okraje. Neugebauer navrhuje tuto rekonstrukci:



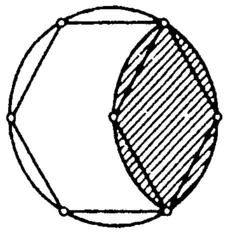
15. Poslední, patnáctý příklad je pravděpodobně nejobtížnější. Jeho text je zničen, doprovodný obrázek poničen, ale lze ho podle Neugebauera rekonstruovat takto:



Cílem příkladu mohl být výpočet obsahu obrazce, který je omezen oblouky tří kružnic. Označíme-li S hledaný obsah, S_k obsah jednoho kruhu a S_6 obsah pravidelného šestiúhelníka do tohoto kruhu vepsaného, potom je

$$S = \frac{5}{3}S_k + \frac{2}{3}S_6 \, .$$

Neugebauer pak ukázal, že obsah P následujícího vyšrafovaného obrazce



je roven

$$P = \frac{2}{3}S_k - \frac{1}{3}S_6$$

a obsah M nevyšrafované části obrazce, tzv. měsíček, je roven

$$M = S_k - P = \frac{1}{3}(S_k + S_6) .$$

Není vyloučeno, že se babylónští písaři pokoušeli počítat obsahy útvarů ohraničených kruhovými oblouky. Tato snaha mohla souviset s pokusy o kvadraturu kruhu.

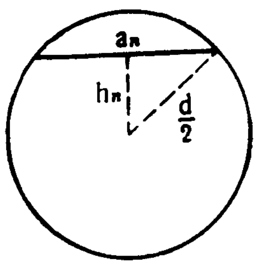
Pravidelné mnohoúhelníky.

Na některých tabukách byly objeveny soupisy jakýchsi „technických konstant"; mezi nimi jsou uvedena i čísla (1, 40), (2, 37, 20) a (3, 41). Na přelomu padesátých a šedesátých let 20. století se touto problematikou zabýval E. M. Bruins. Podle něho tato tři čísla vyjadřují obsah pravidelného pětiúhelníka, šestiúhelníka a sedmiúhelníka, jejichž strany mají jednotkovou délku.

Výpočet obsahu pravidelného n-úhelníka se stranou a_n je založen na aproximaci

$$a_n \approx \frac{o}{n},$$

kde o je obvod kružnice n-úhelníku opsané.



Z obrázku je zřejmé, že pro obsah S_n n-úhelníka vepsaného do kružnice o průměru d je

$$S_n = n \cdot \frac{a_n \cdot h_n}{2} = \frac{n}{2} \cdot a_n \cdot \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - \left(\frac{a_n}{2}\right)^2} .$$

Ve starobabylónské matematice se pro výpočet délky kružnice užíval vztah $o = 3d$, tedy $d = \frac{o}{3}$. Předpokládejme, že $a_n = 1$; potom s přihlédnutím k výše zmíněné aproximaci $o \approx n \cdot a_n$ je

$$S_n = \frac{n}{12} \cdot \sqrt{o^2 - 9} = \frac{n}{12} \cdot \sqrt{n^2 - 9} .$$

Pro $n = 5, 6, 7$ vychází $S_5 = (1;40)$, $S_6 = (2;37,20)$ a $S_7 = (3;41)$.

Je pravděpodobné, že starobabylónský počtář neužíval tuto obecnou formuli, ale obsah každého n-úhelníka počítal zvlášť. Například pro pravidelný pětiúhelník mohl postupovat takto:

$$o = (5) \times (1) = (5) , \qquad d = \frac{1}{3} \times (5) = (1;40) , \qquad \frac{d}{2} = (0;50) ,$$

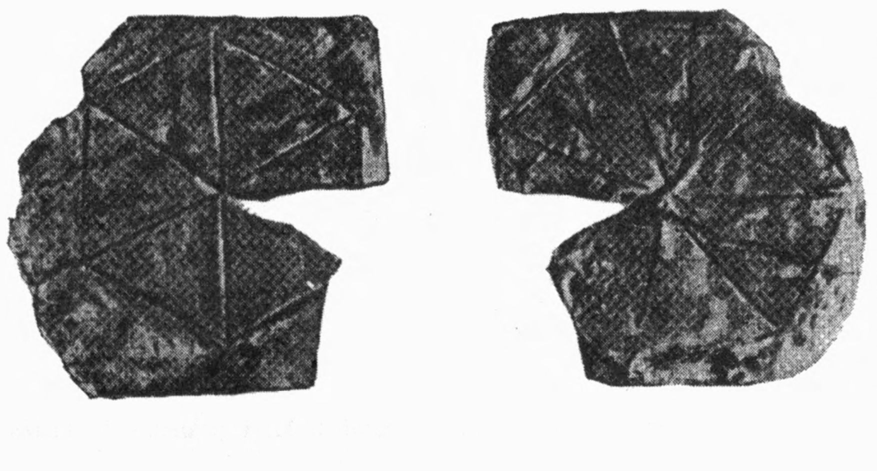
$$h_5 = \sqrt{(0;50)^2 - (0;30)^2} = (0;40) \quad S_5 = (5) \times \frac{1}{2} \times (1) \times (0;40) = (1;40) .$$

Poznamenejme, že při výpočtu obsahu šestiúhelníka, resp. sedmiúhelníka užil starobabylónský počtář hodnotu

$$\sqrt{3} \doteq (1;45) , \qquad \text{resp.} \qquad \sqrt{10} \doteq (3;10) .$$

Ze znalosti „technických konstant" S_5, S_6 a S_7 bylo možno bez problémů vypočítat obsahy pravidelného pětiúhelníka, šestiúhelníka a sedmiúhelníka se stranou a_n; stačilo vynásobit příslušnou „technickou konstantu" číslem a_n^2.

Na dalším obrázku jsou dvě tabulky se znázorněným pravidelným šestiúhelníkem a sedmiúhelníkem.[4]



[4] Viz [BR], table II., III.

LITERATURA

[BR] Bruins E. M., Rutten M., *Textes mathématiques de Suse*, Paris, 1961.

[Br] Bruins E. M., *Ulučšenie približenij v matematike vavilonjan*, Istoriko-matematičeskie issledovanija **21** (1967), 61–70.

[Ko] Kolman A., *Dějiny matematiky ve starověku*, Academia, Praha, 1968.

[N1] Neugebauer O., *Mathematische Keilschrift-Texte*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1935 (erster und zweiter Teil), 1937 (dritter Teil), reprint Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1973.

[N2] Neugebauer O., *Vorlesungen über Geschichte der Antiken Mathematischen Wissenschaften, Erster Band. Vorgriechische Mathematik*, Verlag von Julius Springer, Berlin, 1934.

[NS] Neugebauer O., Sachs A., *Mathematical Cuneiform Texts*, American Oriental Society and the American Schools of Oriental Research, New Haven, Connecticut, 1945, reprint, Harrassowitz, 1986.

[Vo] Vogel K., *Vorgriechische Mathematik*, Würzburg, 1958–1959.

WWW STRÁNKY

[WWW] http://it.stlawu.edu/~dmelvill/mesomath.