

# Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady

---

## Řecká matematika před Eukleidem

In: Martina Bečvářová (author): Eukleidovy Základy, jejich vydání a překlady. (Czech). Praha: Prometheus, 2002. pp. 8–13.

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/401800>

### Terms of use:

© Bečvářová, Martina

Institute of Mathematics of the Czech Academy of Sciences provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This document has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://dml.cz>



Řecký svět

## ŘECKÁ MATEMATIKA PŘED EUKLEIDEM

V době vzniku Eukleidových *Základů* měla za sebou řecká matematika zhruba tři století intenzivního a velmi plodného vývoje.

### Výsledky.

Bouřlivý rozvoj řecké matematiky začal v šestém století před naším letopočtem, kdy v řeckém světě došlo k pozoruhodnému všestrannému myšlenkovému rozkvětu. Matematické myšlení v té době nejvíce ovlivňovala pýthagorejská škola. Jejím zakladatelem byl Pýthagorás ze Samu (asi 580 – 500), matematik, filozof a politik. Z rodného ostrova Samos přesídlil do Krotónu v jižní Itálii, kde založil filozofickou školu. Jeho žáci byli posléze z Krotónu vyhnáni a sám Pýthagorás snad zemřel v Metapontu. Veškeré údaje o Pýthagorovi jsou však pouze legendami.

Pýthagorejci prosazovali studium geometrie, aritmetiky, astronomie a hudby, tj. čtyř disciplín pozdějšího kvadrivia. Mezi těmito disciplínami vnímali úzké souvislosti. Celý svět, přírodovědné vazby i společenské vztahy, vykládali pomocí přirozených čísel a jejich poměrů, tvrdili, že číslo je podstatou všeho. Proto věnovali velkou pozornost aritmetice a teorii čísel; zabývali se vlastnostmi sudých a lichých čísel, poměrů a úměr, dělitelností, studiem rovinných i prostorových figurálních čísel, pýthagorejskými trojicemi čísel, dokonalými čísly atd. Teorii poměrů využili i v hudbě (matematický popis hudebních intervalů, pýthagorejské ladění) a v popisu vesmíru. Souvislost matematiky, hudby a kosmologie se odráží i ve slovních spojeních *harmonie kosmu a hudba sfér*, jejichž původ je pýthagorejský.

Kromě aritmetiky a teorie čísel položili pýthagorejci základy rovinné i prostorové geometrie. Navázali na poznatky milétské školy (Thalés z Milétu, počátek 6. stol.),<sup>6</sup> zformulovali a dokázali základní poznatky o rovinných útvarcích, o shodnosti a podobnosti, dokázali Pýthagorovu větu, studovali zlatý řez, popsali konstrukce několika pravidelných mnohoúhelníků, seznámili se s pravidelnými mnohostěny atd. atd. I geometrii však pýthagorejci „postavili“ na přirozených číslech. Podle jejich původních představ byly všechny geometrické záležitosti vyjádřitelné aritmeticky; každé dvě úsečky byly *souměřitelné*, tj. poměr jejich velikostí byl roven poměru nějakých dvou přirozených čísel.<sup>7</sup> I poměr podobnosti geometrických útvarů byl tedy vždy poměrem dvou přirozených čísel. Celá matematika, aritmetika i geometrie, tak byla postavena na přirozených číslech a jejich poměrech.

Tento původní pýthagorejský pohled na svět čísel a veličin se zhroutil v okamžiku, kdy bylo ukázáno, že existují nesouměřitelné úsečky (strana

<sup>6</sup> Thalés využíval podobnosti trojúhelníků ke zjišťování nepřístupných délek, zformuloval Thaletovu větu.

<sup>7</sup> Poměr velikostí libovolného konečného počtu úseček byl tedy rovněž vyjádřitelný přirozenými čísly a proto např. každý pravoúhlý trojúhelník odpovídal nějaké pýthagorejské trojici čísel.

a úhlopříčka čtverce, strana a úhlopříčka pravidelného pětiúhelníka atd.) a že takových případů je dokonce nekonečně mnoho. Objev nesouměřitelnosti úseček byl hlubokým výsledkem řecké matematiky, výsledkem překvapivým, jehož důkaz byl zřejmě veden sporem. Bližší informace o objevu nesouměřitelnosti nemáme; k důkazu mohla být použita Pýthagorova věta, podobnost, figurální čísla, základní poznatky o nesoudělných číslech a o sudých a lichých číslech.

Zhroucení původní koncepce pýthagorejské matematiky je obvykle označováno jako *první krize matematiky*. Překonána byla geometrizací matematiky, kdy byly za základ matematiky místo aritmetických veličin (přirozená čísla) vzaty veličiny geometrické (délky, obsahy a objemy) a kdy původní pýthagorejská teorie poměrů přirozených čísel byla nahrazena teorií poměrů geometrických veličin (tzv. *Eudoxova teorie proporcí*). Všechny dosud získané poznatky aritmetiky a teorie čísel byly přeloženy do geometrické řeči, rozpracována byla tzv. *geometrická algebra*.

Objev nesouměřitelnosti úseček, ke kterému patrně došlo na počátku pátého století a se kterým se pýthagorejci úspěšně vyrovnali, byl velkým impulsem pro rozvoj matematiky. Již koncem pátého století studovali řečtí matematici iracionality, tj. veličiny nesouměřitelné se zvolenou úsečkou jednotkové délky. Theodóros z Kyrény ukázal, že je jich nekonečně mnoho, jeho žák Theaitétos z Athén (asi 417 – 369/8) se výzkumem iracionalit podrobně zabýval, vybudoval jakousi jejich klasifikaci a vymezil některé jejich typy. Kromě toho se intenzívně věnoval teorii pravidelných mnohostěnů.

Již v pátém století se řečtí filozofové zabývali problémem nekonečna. Atomisté Leukippos a Démokritos rozvíjeli představy o nedělitelných částech, *atomech*, ze kterých je složen svět; pomocí těchto představ získali návody na výpočet objemů nejdůležitějších těles. Jiná filozofická škola, tzv. eleaté, prosazovali myšlenku neomezeného dělení; nejvýznamnějším z eleatů byl Zénón, autor slavných *apórií*. Problémy možnosti či nemožnosti neomezeného dělení hmoty, času, velikosti apod. velmi úzce souvisely s matematikou.

V pátém století se rovněž objevily tzv. klasické úlohy řecké matematiky, *kvadratura kruhu, trisekce úhlu, zdvojení krychle*.<sup>8</sup> Tyto úlohy měly být řešeny pouze *pravítkem a kružítkem*;<sup>9</sup> takováto řešení se však delší dobu nedařilo nalézt. Proto se začala objevovat řešení, která využívala jiných postupů. Tak byly např. objeveny zajímavé křivky. Sofista Hippiás z Élidy objevil v pátém století křivku, která byla později nazvána *kvadratrix*, ve čtvrtém století využil Menaechmos k řešení zdvojení krychle parabolu, jeho bratr Dinóstratos poukázal na vztah křivky kvadratrix a problému rektifikace kružnice atd. Poznamenejme, že neřešitelnost klasických úloh byla dokázána až v devatenáctém století.

Filozof, matematik, státník a vojevůdce Archytás z Tarentu (asi 428 – 365), který vyšel z pýthagorejské školy, byl v úzkém kontaktu s Platónem a jeho Akademií. Připisují se mu výsledky o poměrech a úměrách; zkoumal mimo jiné

<sup>8</sup> Někdy se k těmto třem klasickým úlohám přidávají dvě další: *rektifikace kružnice a konstrukce pravidelných mnohoúhelníků*.

<sup>9</sup> Dnes se hovoří o eukleidovských konstrukcích.

aritmetický, geometrický a harmonický průměr, věděl, že druhé odmocniny čísel  $n(n+1)$  jsou iracionalitami. Archytás je autorem velice nápadité stereometrické konstrukce, pomocí které jsou ke dvěma daným délkám  $a$ ,  $b$  nalezeny délky  $x$ ,  $y$ , pro které je  $a : x = x : y = y : b$ ; tato konstrukce řeší mimo jiné problém zdvojení krychle, nejde však o konstrukci využívající pouze pravítko a kružítko.

Eudoxos z Knidu (asi 408 – 360), žák Archyta z Tarentu, byl vynikajícím matematikem a astronomem. Je autorem matematické teorie pohybu planet, obecné teorie proporcí geometrických veličin, která předjímá myšlenky teorie řezů německého matematika Richarda Dedekinda (1831–1916), jedné z moderních teorií reálných čísel. Eudoxos je rovněž tvůrcem tzv. *exhaustivní metody*, řecké „teorie limit“, pomocí níž bylo možno dokazovat poznatky o obsahu nebo objemu geometrických útvarů.

Ve čtvrtém století ovlivnily myšlenky pýthagorejců Platóna (429–348) i celou jeho Akademii. Platónova filozofická škola byla nesmírně plodným prostředím; ve styku s Akademií byli Archytás, Theaitétos, Eudoxos, Menaechmos, Dinóstratos a mnozí další. Pozitivní vztah k matematice (zejména ke geometrii) byl prý vyjádřen heslem *Nevstupuj, kdo neovládáš geometrii*, které bylo umístěno nad vchodem Akademie.<sup>10</sup>

V Platónových dialozích je řada zajímavých pasáží týkajících se matematiky, Platón matematiku často využíval při prezentaci svých názorů, při demonstraci společenských vztahů atd. Svou filozofii výrazně přispěl k rozvoji abstraktního myšlení, k přesnému vymezení pojmů, k rozlišení nedokonalého smyslového světa a světa dokonalých matematických objektů.

Nejvýznamnější Platónův žák Aristotelés (384–322) je mimo jiné autorem logických spisů, které byly později opatřeny souhrnným názvem *Organon*. Zformuloval zde základy vědeckého myšlení, ukázal, podle jakých principů je třeba budovat vědeckou teorii. Ovlivnil tak bezesporu i budování řecké geometrie jako přísně důsledné deduktivní vědy vycházející z minimálního počtu výchozích předpokladů a postavené na pevných základech.

## Spisy.

Z šestého a pátého století se žádné ucelené matematické texty nedochovaly. Značně neúplné informace o výsledcích tehdejších matematiků čerpáme z děl pozdějších filozofů a myslitelů.

Ve druhé polovině pátého století působil v Athénách matematik Hippokratés z Chiu. Sepsal spis *Stoicheia*, tj. *Základy*; zdá se, že podle tohoto textu sepsal později Eukleidés první čtyři knihy své stejnojmenné monografie. Z Hippokratova matematického díla se zachoval pouze fragment zabývající se kvadraturou útvarů omezených kruhovými oblouky a jejich konstrukcemi (tzv. *Hippokratovy menisky* nebo *měsíčky*).

<sup>10</sup> Více o Platónovi a matematice viz [AM].

Další užitečnou „kolekci pečlivě vybraných učebních textů“ dal dohromady na přelomu pátého a čtvrtého století filozof a matematik Leon,<sup>11</sup> který byl jen o málo starší než Eudoxos a o málo mladší než Platón.

V Platónově Akademii se stýkali nejlepší filozofové a učenci z celého řeckého světa. Vznikaly zde i nové matematické texty, jejichž autory byli Theudius z Magnésiá, Hermotius z Kolofónu, Amyklas z Hérakleia, Menaechmus, jeho bratr Dinóstratos a Athenaeus z Kyzikos, informace o vývoji řecké matematiky sepsal v té době první známý historik matematiky Eudémos z Rhodu.<sup>12</sup> Práce těchto autorů se bohužel nezachovaly.

Na základě výsledků, které byly v šestém, pátém a čtvrtém století v řeckém světě získány, a textů, které v tomto období vznikly, sepsal Eukleidés z Alexandrie na přelomu čtvrtého a třetího století před naším letopočtem svůj geniální spis *Základy*, ve kterém shrnul většinu matematických poznatků své doby jako ucelenou teorii vybudovanou podle principů zformulovaných Aristotelem.<sup>13</sup>

Podrobné informace o předeukleidovské řecké matematice lze najít v řadě knižních i časopiseckých prací; některé jsou uvedeny v následujícím seznamu literatury.

## LITERATURA

- [Al] Allman G. J., *Greek Geometry from Thales to Euclid*, New York, 1976.
- [Ar] Artmann B., *Über voreuklidische „Elemente“, deren Autor Proportionem vermied*, Archive for History of Exact Sciences **33** (1985), 291–306.
- [AM] Artmann B., Mueller I., *Plato and Mathematics*, Mathematische Semesterberichte **44** (2001), 1–17.
- [Be1] Becker O., *Zur Geschichte der griechischen Mathematik*, Darmstadt, 1965.
- [Be2] Becker O., *Eudoxos-Studien I. Eine voreudoxische Proportionenlehre und ihre Spuren bei Aristoteles und Euclid*, Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik, Astronomie und Physik, Abteilung B: Studien **2** (1933), 311–333.
- [Be3] Becker O., *Das mathematische Denken der Antik*, Göttingen, 1966.
- [BJ1] Bečvář J., *Hrdinský věk řecké matematiky I*, in J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): *Historie matematiky I*, Seminář pro vyučující na středních školách, Jevíčko 19. 8. – 22. 8. 1993, Prometheus, Brno, 1994, 21–101.
- [BJ2] Bečvář J., *Hrdinský věk řecké matematiky II*, in J. Bečvář, E. Fuchs (ed.): *Historie matematiky II*, Seminář pro vyučující na středních školách, Jevíčko 21. 8. – 24. 8. 1995, Prometheus, Praha, 1997, 7–28.
- [B] Berggren J. L., *History of Greek mathematics. A survey of recent research*, Historia Mathematica **11** (1984), 394–410.
- [CS] Cancik H., Schneider H., *Der Neue Pauly Enzyklopädie der Antike*, Stuttgart, 1996–1999.
- [Co] Coldstream J. N., *Geometric Greece*, Benn, London, 1977.
- [Coo] Coolidge J. L., *A History of Geometrical Method*, Oxford, 1940.

<sup>11</sup> Více o Leonovi viz [CS].

<sup>12</sup> Více o těchto učencích viz [CS].

<sup>13</sup> Poznamenejme, že *Základy* neobsahují „celou“ tehdejší matematiku; vyhýbají se zcela např. kuželosečkám. Těm byl věnován jiný Eukleidův spis, který se bohužel nezachoval.

- [Dau] Dauben J. W., *The History of Mathematics from Antiquity to the Present. A Selective Annotated Bibliography*, CD-ROM, AMS, 2000.
- [HH] Hankel H., *Zur Geschichte der Mathematik in Alterthum und Mittelalter*, Leipzig, 1874.
- [H] Hartshorne R., *Geometry: Euclid and Beyond*, Springer-Verlag, New York, 2000.
- [Ha] Hauser G., *Geometrie der Griechen von Thales bis Euklid mit einem einleitenden Abschnitt über die vorgriechische Geometrie*, Haag, 1955.
- [He1] Heath T. L., *A History of Greek Mathematics, Volume I, From Thales to Euclid*, Oxford, 1921.
- [He2] Heath T. L., *Mathematics in Aristotle*, Clarendon Press, Oxford, 1970.
- [He] Heiberg J. L., *Naturwissenschaften und Mathematik im klassischen Altertum*, Teubner, Leipzig, 1912, 102 stran.
- [Ch] Chasles M., *Aperçu historique sur l'origine et le développement des méthodes en Géométrie*, Paris, 1837.
- [Kn] Knorr W. R., *Archimedes and pre-Euclidean Proportion Theory*, Archives International d'Histoire des Sciences **28** (1978), 183–244.
- [La] Larsen M. E., *On the Possibility of a Pre-Euclidean Theory of Proportions*, Centaurus **27** (1987), 1–25.
- [Lo1] Loria G., *Histoire des sciences mathématiques dans l'antiquité hellénique*, Paris, 1929.
- [Lo2] Loria G., *Le scienze esatte nell'antica Grecia*, Seconda edizione totalmente riveduta, Ulrico Hoepli, Editore-Libraio della real casa, Milano, 1914.
- [Lo3] Loria G., *Storia delle matematiche dall' Alba della civiltà al tramonto del secolo XIX*, Milano, 2. vydání, 1950.
- [Lo4] Loria G., *Il passato ed il presente delle principali teorie geometriche*, Turin, 1887.
- [Ma] Mainzer K., *Geschichte der Geometrie*, Mannheim, 1980.
- [M] Michel P. H., *De Pythagore à Euclide: Contribution à l'Histoire des Mathématiques préeuclidiennes*, Paris, 1950.
- [Mi] Milhaud G., *Les Philosophes-géomètres de la Grèce: Platon et ses prédécesseurs*, Paris, 1900.
- [Ne] Neugebauer O., *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften*, Springer-Verlag, Berlin, 1969.
- [Pr] Procissi A., *Bibliografia Matematica della Grecia classica e di altre civiltà antiche*, Bolletino di storia della scienze matematiche **1** (1981), 7–149.
- [Sz1] Szabò A., *Anfänge der griechischen Mathematik*, Oldenbourg, München-Wien, 1969.
- [Sz2] Szabò A., *The Beginnings of Greek Mathematics*, translated by A. M. Ungar, Akademiai, Budapest, 1978.
- [Ta] Tannery P., *Le géométrie grecque*, Paris, 1887.
- [Th] Thomas I. (ed.), *Selections Illustrating the History of Greek Mathematics*, Volume I: *From Thales to Euclid*, Volume II: *From Aristarchus to Pappus*, Cambridge, Massachusetts, 1939, 1941, oba díly vyšly v reprintech r. 1951 a r. 1957, r. 1967–1968, r. 1980.
- [Tho] Thorup A., *A Pre-Euclidean Theory of Proportions*, Archive for History of Exact Sciences **45** (1992/93), 1–16.
- [Wu] Wußing H., *Mathematik in der Antike*, Pfalz Verlag, Basel, 1965.