Martina Bečvářová

Středověké početní algoritmy

In: Jindřich Bečvář (editor): Matematika ve středověké Evropě. (Czech). Praha: Prometheus, 2001. pp. 230–263.

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/401788

Židovský lichvář počítající na linách
(dřevoryt J. Breua, počátek 16. stol.)

STŘEDOVĚKÉ POČETNÍ ALGORITMY

MARTINA BEČVÁŘOVÁ

Nejjednodušším způsobem počítání bylo ve středověku *počítání na prstech*, které užívali obchodníci a finančníci k jednoduchému znázornění čísel, k jejich sčítání a odčítání. K násobení, dělení a komplikovanějším výpočtům se však prsty příliš nehodily.

Během 10. století se v Evropě opět rozšířil *abakus*, počítací deska s vyrytými vertikálními linkami, které vymezovaly sloupce, do kterých se vkládaly kaménky nebo početní známky reprezentující jednotky, desítky, stovky atd.

Koncem 12. století se v Evropě objevily místo vertikálních linek linky horizontální, tzv. *liny*. *Počítání na linách* bylo založeno na podobných postupech jako počítání na abaku. Abakus i liny byly běžně užívány až do konce 15. století, kdy je vytlačilo počitadlo a písemné počítání. Počtáři používající abakus a liny byli označováni jako *abacisté*.

Od 10. století pozvolna pronikal do Evropy indicko-arabský desítkový poziční systém; s rostoucí znalostí tohoto způsobu zápisu čísel se postupně šířily a zdokonalovaly návody na písemné provádění početních operací – poměrně výstižně se hovořilo o *počítání na cifry*. Počtáři, kteří tyto algoritmy znali, se nazývali *algoritmikové*. Jejich počet v Evropě od 11. století postupně narůstal, teprve koncem 15. století však písemné způsoby počítání převážily; ostatní postupy byly i nadále využívány na triviálních školách při výuce elementární aritmetiky.

V následujícím textu se pokusíme popsat jednotlivé početní pomůcky a postupy.

1. Počítání na prstech.

Jednou z nejstarších a nejjednodušších početních pomůcek byly prsty.

Znázorňování čísel a počítání na prstech bylo již ve starověku užíváno snad ve všech kulturních civilizacích. V Evropě počítali na prstech již Řekové (viz [Mel], str. 211–212), kteří tyto početní postupy považovali za jednoduché a názorné, od Řeků je převzali Římané;[1] počítání na prstech používali hlavně lidé bez většího vzdělání. O počítání na prstech se zmiňoval např. Plinius Starší (23/24–79),[2] satirik Decimus Iunius Iuvenalis (po r. 50 – po r. 130), řečník, učitel a vychovatel Marcus Fabius Quintilianus (asi 35–96) a astronom Firmicus Maternus (4. stol.). Znázorňování čísel prsty a počítání na prstech umožňovalo překonávat v obrovské mnohonárodní římské říši jazykové bariéry zejména při obchodu.

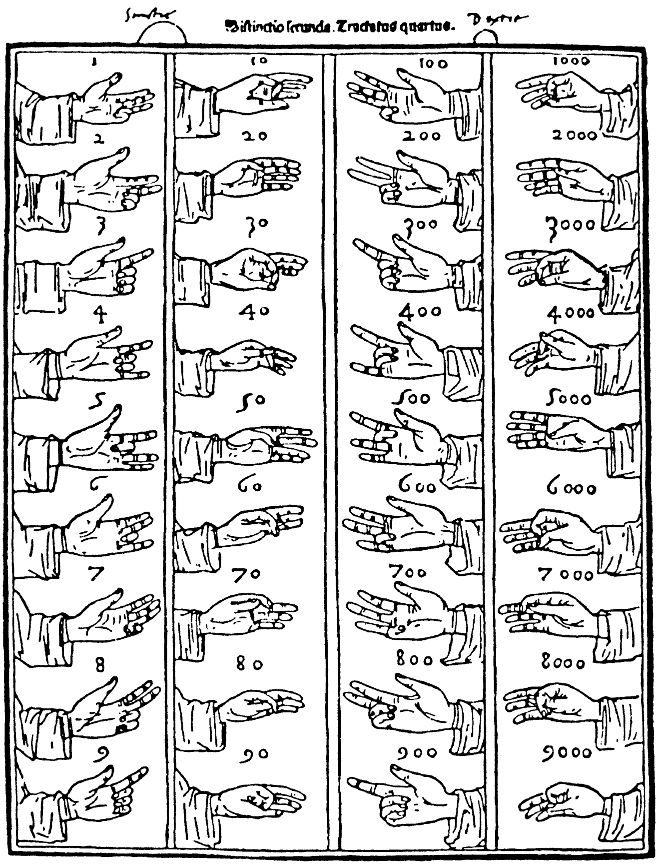
---

[1] Římané počítali na prstech od 1 do 10 000; v Britském muzeu v Londýně jsou uloženy římské *početní známky* ze slonoviny, na kterých jsou zobrazeny polohy prstů pro číselné hodnoty 1 až 15. Pocházejí snad z 1. století.

[2] Popsal mimo jiné slavnou římskou sochu boha Iana, který ukazoval na prstech počet dnů v roce. Viz [Mel], str. 210.

Po zániku antického světa došlo v Evropě k hlubokému úpadku vzdělanosti i kultury, zapomenuta byla téměř celá antická matematika i rozvinuté početní algoritmy. Počítání na prstech se proto ve středověkém světě výrazně uplatňovalo.

Benediktinský mnich Beda Venerabilis (asi 673–735) popsal znázorňování čísel na prstech v úvodu *De computo vel loquela digitorum* svého díla *De temporum ratione*: jednotky byly reprezentovány polohami prstů levé ruky, desítky kombinacemi poloh prstů a palce levé ruky, stovky polohami prstů pravé ruky, tisíce kombinacemi poloh prstů a palce pravé ruky, desetitisíce, statisíce a miliony polohami celých paží a trupu.[3] Díky Bedovi se počítání na prstech rozšířilo v celé Evropě; prosazoval je např. biskup Walafried Strabo (9. stol.) z kláštera Reichenau.



Počítání na prstech

(L. Pacioli: *Summa de Arithmetica. ...*, Benátky, 1494)

[3] Podrobný popis viz [Mel], str. 202–208. Polohy prstů znázorňující prvních 15 čísel jsou stejné jako na římských žetonech.

Počítání na prstech popsal i Hrabanus Maurus (780–856) ve svém spise *De numeris*; na prstech znázorňoval čísla od 1 do 20 000.[4]

Znázornění čísel na prstech je i na samém počátku slavné knihy *Liber abaci* Leonarda Pisánského (asi 1170 – po 1240).[5]

Nicholas Rhabdas ze Smyrny ve spise *Ekphrásis toû Daktylikoû Métrou* (*Počítání na prstech*) z roku 1340 popisuje počítání na prstech podle římského způsobu a ukazuje, že i Arabové, Peršané a Řekové používali podobnou symboliku a podobné postupy jako Římané.

Další popis počítání na prstech je možno nalézt např. v rukopise *Praticha d'Arismetricha* neznámého florentského mistra.[6]

Počítání na prstech nelišící se příliš od způsobu, který podal Beda Venerabilis, popsal Luca Pacioli (1445–1514) ve svém velkém díle *Summa de Arithmetica. Geometria. Proporzioni. Proporzionalità* z roku 1494.

Roku 1522 publikoval Aventin z Norimberku učebnici *Abacus atque vetustissimi veterum Latinorum per digitos manusque numerandi consuetudo*, ve které popsal souvislosti mezi počítáním na abaku a na prstech.

Jedna z posledních učebnic, která obsahovala výklad počítání na prstech, je učebnice Jacoba Leupolda *Theatrum Arithmetico-Geometricum*, která vyšla roku 1727.[7]

2. Abakus.

Důležitou středověkou početní pomůckou byl abakus, který používali již staří Řekové, ale jehož znalost byla po pádu římského impéria na dlouhou dobu téměř zapomenuta a musela být znovu pracně objevována.

Středověký abakus byla hladká dřevěná deska rozdělená obvykle na 30 sloupců, z nichž první tři zprava sloužily pro počítání se zlomky, ostatní pro počítání s přirozenými čísly. Sloupce bývaly nahoře zakončeny ozdobným obloukem, který byl nazýván *arcus Pythagorei*, neboť ve středověku byl vynález abaku nesprávně připisován Pýthagorovi. Počítání na středověkém abaku modifikoval koncem 10. století Gerbert (asi 940–1003). Zatímco ostatní počtáři vyznačovali čísla na abaku položením příslušného počtu kaménků do sloupců představujících jednotky, desítky, stovky apod., Gerbert a jeho žáci používali tzv. *apexy* (*apices*), tj. početní známky, na kterých byly speciální znaky, které lze označit za předchůdce dnešních moderních evropských číslic 1, 2, ..., 9. Do každého sloupce abaku tedy stačilo položit nejvýše jeden apex. Apexy byly vyráběny

---

[4] Viz *Dějiny světa. Raně křesťanský svět. Od roku 732 do roku 1096*, Larousse, Vašut nakladatelství, Praha, 1998, str. 688. Viz též [Mel], str. 215.

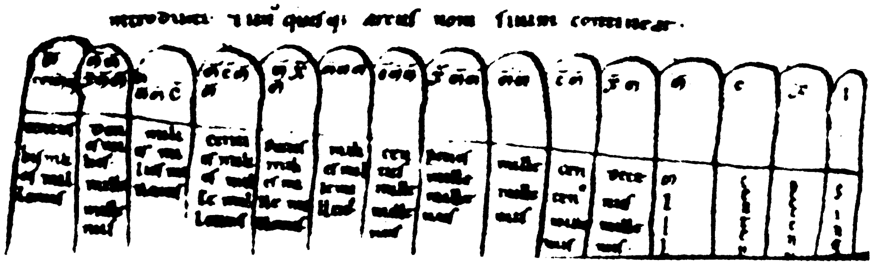
[5] Viz např. *Codice ambrosiano I 72 sup.* ze 13. století. Viz též H. Lüneburg: *Leonardi Pisani Liber Abbaci oder Lesevergnügen eines Mathematikers*, Wissenschaftsverlag, Mannheim, Leipzig, Wien, Zürich, 1992, 2. přeprac. a rozšíř. vyd. 1993.

[6] Viz U. Bottazzini, P. Freguglia, L. Toti Rigatelli: *Fonti per la storia della matematica*, Sansoni Editore, Firenze, 1992, str. 30–31 a jedna z fotografií v obrazové příloze.

[7] Viz obr. 41, [Mel], str. 207.

z kůry, rohoviny, dřeva apod; jejich názvy byly odvozeny z arabských a řeckých slov.

Na abaku bylo možno poměrně snadno sčítat a odčítat; násobení bylo již komplikovanější, dělit uměli jen ti nejschopnější počtáři, mezi které patřil právě Gerbert. Ten se v několika svých spisech počítání na abaku věnoval.



Abakus s 15 sloupci
(rukopis z 12. století, Bavorská státní knihovna, Mnichov)

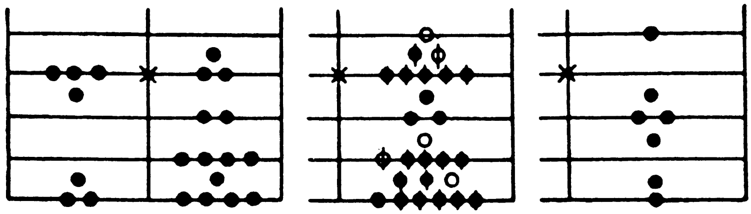
Jeden z dalších výkladů počítání na abaku podal v 11. století Bernelinus ve spise *Liber abaci*. Je pravděpodobné, že jako Gerbertův žák popsal právě Gerbertův abakus. V 11. a 12. století se abakus značně rozšířil, vznikla řada prací popisujících použití této početní pomůcky. Autorem jedné z nich byl Hermannus Contractus (1013–1054) z benediktinského kláštera v Reichenau, který popisoval počítání na abaku bez užití „apexů", které nahradil římskými číslicemi.

Abakus s apexy velké obliby nedosáhl, s apexy se počítalo většinou jen v klášterních školách. Rozšířil se abakus s římskými číslicemi, který byl užíván až do konce 15. století, zejména výběrčími daní a kupci.

3. Liny.

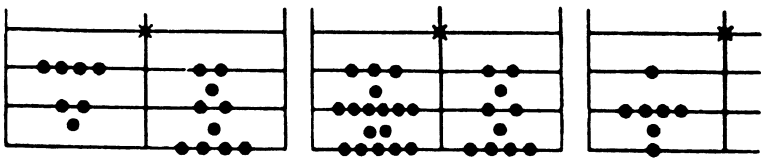
Na konci 12. století se v Evropě začalo používat počítání *na linách*. Výhodou tohoto postupu bylo to, že nebylo zapotřebí žádné pomůcky; stačilo načrtnout řadu rovnoběžných linek na tabuli nebo na stole. Každá linka byla určena pro jeden konkrétní řád (jednotky, desítky, stovky atd.). Kaménky se kladly buď na linky nebo mezi ně, bylo však možno je nahradit namalovanými puntíky, které bylo při výpočtu možno snadno mazat. Na lince měly kaménky hodnotu jednotky příslušného řádu, v mezeře označovaly pět jednotek.

Sčítání a odčítání na linách je znázorněno na dvou následujících obrázcích. Sčítalo se tak, že se každý ze sčítanců zaznamenal na linách do jednoho sloupečku, pak se všechny kaménky přemístily do společného sloupečku na odpovídající liny a do odpovídajících mezer. Na každé lině mohly ležet maximálně čtyři kaménky; pokud počet kaménků přesahoval tento počet, odebralo se pět kaménků a do následující mezery se jeden přidal. V každé mezeře mohl být nejvýše jeden kamének; pokud jich bylo více, nahradily se dva kaménky z mezery jedním kaménkem na následující lině. Tak se postupovalo od nejnižších řádů k nejvyšším. Odčítání se provádělo podobně.



Sčítání na linách

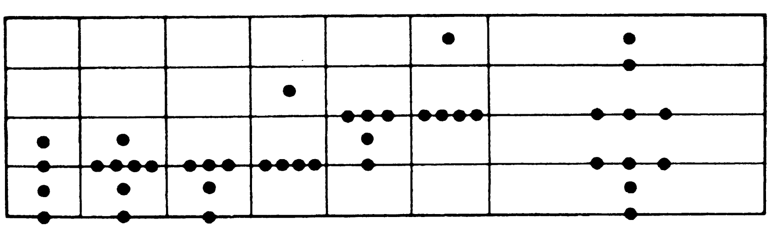
$3\,507 + 7\,249 = 10\,756$



Odčítání na linách

$425 - 279 = 146$

Násobení se převádělo na opakované sčítání, případně se násobilo po jednotlivých řádech. Dělení se převádělo na opakované odčítání. Násobení a dělení vyžadovalo poměrně dlouhou a pozornou manipulaci s přemisťováním kaménků. Násobení na linách je znázorněno na následujícím obrázku.



Násobení na linách

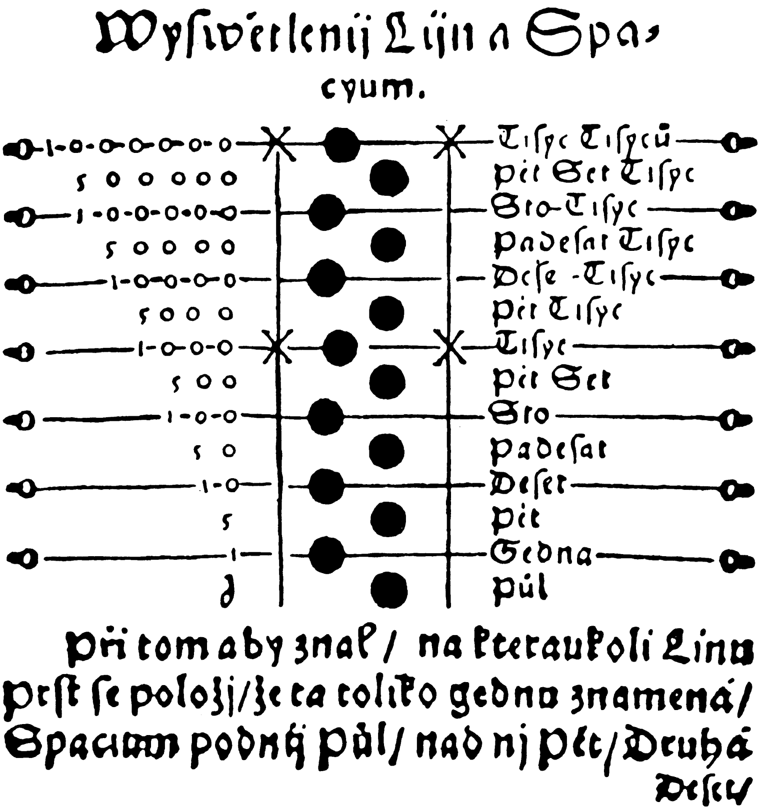
$66 \times 96 = 6\,336$

První sloupeček znázorňuje číslo 66,
druhý sloupeček číslo 96, třetí sloupeček číslo $6 \times 6 = 36$,
čtvrtý sloupeček číslo $6 \times 90 = 540$, pátý sloupeček číslo $60 \times 6 = 360$,
šestý sloupeček číslo $60 \times 90 = 5\,400$
a sedmý sloupeček součet $36 + 540 + 360 + 5\,400 = 6\,336$.

Početní deska s linami pro výpočet směny mincí
(dřevoryt pocházející patrně ze Štrasburku)

Počítání na linách
(J. Köbel: *Rechenbüchlein*, Augsburg, 1514)

Počítání na linách bylo s úspěchem užíváno i v 16. století, zabývá se jím v té době řada učebnic. Často jsou na základním schématu vedle sebe umístěny ve třech sloupcích číselné hodnoty $\frac{1}{2}$, 1, 5, ..., 1 000 000 (moderním způsobem pomocí desítkové poziční soustavy s indicko-arabskými číslicemi včetně nuly), jejich slovní označení a znázornění na linách (viz následující obrázek).[8] Liny se dlouhou dobu používaly i na triviálních školách jako „počitadlo“ a sloužily rovněž jako průprava ke vnímání čísel.



(Z české učebnice)

[8] Jde např. o učebnice Adama Riese (1492–1559); na jejich titulních listech jsou zobrazeni počtáři pracující s linami. Další známé početnice jsou od J. Köbela. První českou početnicí je spis Ondřeje Klatovského nazvaný *Nowe knížky wo pocztech na Cifrý a nalyny przytom niektere welmi vžyteczne regule a exempla mintze rozlyczne podle biehu kupetzkeho Kratze a vžyteczníe sebrana* (1530); další české početnice sepsali např. Beneš Optát z Telče a Petr Czell: *Isagogikon* (1535), *Knížky Početní na rozličné Koupě v nově vytištěné* (1548), Jiří Mikuláš Brněnský: *Knížka v níž obsahují se začátkové Umění Aritmetického, to jest počtův na Cifry neb liný poznání pro pacholata a lidi kupecké sebraná* (1567), Georg Goerl z Goerlštejna: *Arithmetica to gest knijžka početnij neb uměnij počtůw na linách a cyffrách skrze exempla a mince rozličné wšem w handlech, w auřadech, a w hospodářstwij se obijragijcým welmi užitečná a prospěšná* (1577, 1597, 1610). Podrobněji viz [Sm].

55	LV	90	XC	4000	IIII^{M}
56	LVI	91	XCI	5000	V^{M}
57	LVII	92	XCII	6000	VI^{M}
58	LVIII	93	XCIII	7000	VII^{M}
59	LIX	94	XCIIII	8000	VIII^{M}
60	LX	95	XCV	9000	IX^{M}
61	LXI	96	XCVI	10000	X^{M}
62	LXII	97	XCVII	20000	XX^{M}
63	LXIII	98	XCVIII	30000	XXX^{M}
64	LXIIII	99	XCIX	1400	M CCCC
65	LXV	100	C		M IIII^{C}
66	LXVI	101	CI	1500	M V^{C}
67	LXVII	102	CII		M D
68	LXVIII	103	CIII	1514	M V^{C} XIIII
69	LXIX	104	CIIII	1600	M D C
70	LXX	105	CV		M VI^{C}
71	LXXI	106	CVI	1612	M VI^{C} X II
72	LXXII	107	CVII	1700	M DCC
73	LXXIII	108	CVIII		M VII^{C}
74	LXXIIII	109	CIX	1715	M VII^{C} XV
75	LXXV	110	CX	1800	M DCCC
76	LXXVI	111	CXI		M VIII^{C}
77	LXXVII	112	CXII	1820	M VIII^{C} XX
78	LXXVIII	112	CXIII &c.	1900	M VIIII^{C}
79	LXXIX	200	CC		
80	LXXX	300	CCC		
81	LXXXI	400	CCCC		
82	LXXXII	500	V^{C}		
83	LXXXIII	600	VI^{C}		
84	LXXXIIII	700	VII^{C}		
85	LXXXV	800	VIII^{C}		
86	LXXXVI	900	IX^{C}		
87	LXXXVII	1000	M		
83	LXXXVIII	2000	II^{M}		
89	LXXXXI	3000	III^{M}		

Dem nach mag stu die bayde zale durch ainn ander lernen erkennen vnd rechen.

Tabulka pro výuku nové numerace

(J. Köbel: *Rechenbüchlein*, 1524)

4. Zápis čísel. Symbolika.

Až do 10. století se v Evropě k zápisu čísel používaly pouze římské číslice. Pak začínaly do Evropy pozvolna pronikat nové, indicko-arabské číslice. Poprvé se objevily ve Španělsku, kam se dostaly s šířící se arabskou vědou a kulturou. Nejstarší zápis čísla v indicko-arabské poziční desítkové soustavě nalézáme v Evropě v kodexu *Codex Vigilanus* z roku 976; patřil klášteru Albelda v severním Španělsku.

Na přelomu 10. a 11. století se v Evropě začaly šířit západoarabské číslice *gubar* (též *gobar*), které přišly z oblasti dnešního Íránu a Egypta. V této době ještě nebyl v Evropě užíván žádný znak pro nulu, nad čísly se psaly tečky, které určovaly řád čísel (např. zápis $\ddot{2}\dot{3}4$ představoval číslo 234, zápis $\ddot{2}\dot{3}$ číslo 230, zápis $\ddot{2}4$ číslo 204). V 11. století se objevovalo stále více rukopisů, ve kterých byla čísla zapisována novým způsobem, v indicko-arabské poziční desítkové soustavě, postupně se však vyskytovaly větší či menší odchylky od arabského způsobu psaní cifer. Ve 12. století se v Evropě rozšířilo slovo *cifra* ve smyslu číslice nebo číslo; tento termín byl odvozen z arabského slova *as-syfr*, které původně znamenalo nulu.[9] Ve 13. století zavedl Leonardo Pisánský pro nulu termín *zephirum*, který se udržel až do 17. století, ve 12. až 15. století se objevily ještě termíny „circulus, nihil, figura nihili, nullus, nulla". Smysl a význam nuly byl po několik století předmětem matematicko-filozofických úvah. Například v roce 1484 napsal Nicolas Chuquet (1445–1488):

... nula sama o sobě nic neznamená, ale tím, že zaujímá nějaké místo, určuje hodnotu jiných symbolů. ([Ju], str. 344)

Indicko-arabská poziční desítková soustava byla v Evropě přijímána opatrně a s nedůvěrou. Je zajímavé, že o nový způsob měli zájem hlavně obchodníci a pokladníci, kteří prováděli dlouhé výpočty, zatímco matematici se přidržovali „osvědčených" římských číslic. I oficiální autority dlouho „novoty" odmítaly. Například roku 1299 zakázala Florencie používat nová čísla a nařídila je zapisovat slovy. Rozhodující význam pro přijetí desítkové poziční soustavy a nových číslic měly některé nové spisy, které se v Evropě šířily; byla to zejména latinská kompilace *Libro alghvarismi de practica arismatrice* (*Kniha Algorisma o aritmetické praxi*) od Joanna Sevillského (? – asi 1153), *Liber ysagogarum Alghorismi in artem astronomicam a magistro A. compositus* (*Kniha uvedení Algorisma do astronomického umění*) neznámého mistra A. (snad jím byl Adelard z Bath) a latinský překlad Savasordova[10] spisu *Liber embadorum* (*Kniha o měřeních*).

Až do 16. století v Evropě soupeřily oba typy zápisu čísel. V 16. století zvítězila „nová čísla", která ze škol i běžného života postupně vytlačila římské cifry. K rozšíření indicko-arabského pozičního desítkového systému přispěl i rozvoj knihtisku a s ním spojené vydávání prvních početnic a učebnic aritmetiky.

---

[9] Poprvé se tento termín objevil ve spisu *Kniha uvedení Algorisma do astronomického umění*, kterou sepsal v roce 1143 neznámý mistr A.

[10] Arabský matematik Abraham Bar Chijja (asi 1070–1136).

Až do poloviny 15. století neexistovaly žádné symboly pro označení aritmetických operací. Byly vyjadřovány pouze slovy nebo bylo dokonce třeba typ operace vyrozumět z kontextu nebo z vlastního zápisu výpočtu. U zrodu symbolů pro aritmetické operace stál Johannes Widmann (1462–1498), který ve své knize *Behende und hubsche Rechenung auff allen kauffmanschafft* (*Hbité a pěkné počítání pro všechny kupce*) vydané v Lipsku roku 1489 použil symboly + a −; poprvé se tak tyto symboly objevily ve vytištěné knize.[11]

Dodnes se vedou spory o původu těchto znaků. Snad byly odvozeny z obchodnických značek používaných na bednách se zbožím; symboly + a − označovaly, že váha zboží přesahuje nebo nedosahuje stanovené hodnoty. Podle jiných názorů jsou znaky + a − indického původu, podle dalších badatelů jsou evropského původu a byly odvozeny z latiny (např. + z *et* nebo ze symbolu &).

Koncem 15. století se objevily další užitečné symboly, které usnadňovaly početní postupy; např. druhá mocnina byla označována tečkou před číslem, třetí mocnina třemi tečkami, čtvrtá dvěma tečkami; při rychlém psaní se tečky měnily v čárky. Druhá odmocnina byla často značena písmenem *R*, které bylo různě modifikováno (např. přeškrtnutá nožička); bylo použito prvního písmene z latinského *radix*, resp. italského *radice*. Pro třetí odmocninu bylo k písmenu *R* přidáváno číslo 3, slovo *cub* apod. Pro čtvrtou odmocninu bývalo někdy použito písmeno *R* dvakrát.

Rozvoj matematiky a písemného počítání vedl koncem středověku i k počátkům algebraické symboliky. První pokusy v tomto směru učinili ve 13. století Leonardo Pisánský a Jordanus Nemorarius (1225–1260), kteří začali v určitých situacích některé veličiny označovat písmeny. Jejich snahy však ještě neměly velkou odezvu.

V souvislosti s přijetím desítkové poziční soustavy užívající indicko-arabské číslice nastal v Evropě postupný odklon od počítání na abaku a na linách. Začaly se rozvíjet početní algoritmy na provádění početních operací s čísly vyjádřenými tímto novým způsobem. Počítání *na linách* tak soupeřilo s počítáním *na cifry*. Soupeření nových a starých početních postupů bylo dokonce i umělecky ztvárněno.

Na následujícím obrázku je ženská postava, která je alegorickým zosobněním aritmetiky. Na dlouhé sukni má indicko-arabské cifry,[12] v obou rukou drží početní desky. U stolků sedí dva počtáři.

Vpravo je Pýthagorás, který počítá „na linách". U pravé ruky má hromádku kamínků, v levé části počítací desky je znázorněno číslo 1 241 a v pravé části číslo 82. Zdá se, že zdvojuje číslo 1 241, ale svůj výpočet ještě nedokončil.

---

[11] Poznamenejme, že v jednom rukopise neznámého autora uchovaném v drážďanské knihovně se objevují znaky + a − dříve než ve Widmannově učebnici. Rukopis pochází z roku 1486.

[12] Uprostřed je jednička, vpravo čísla 2, 4, 8 vlevo 3, 9, 27 (mocniny dvojky a trojky). O smyslu tohoto uspořádání čísel viz např. Jamie James: *The Music of the Spheres*, Springer-Verlag, New York, 1995, str. 46.

Aritmetika

(G. Reisch: *Margarita philosophica*, Štrasburk, 1504)

Vlevo je Boëthius, který počítá „novým“ způsobem, tj. *na cifry*. Ze zápisu však nelze identifikovat, co vlastně počítá a zda již svůj výpočet ukončil. Obrázek bývá často interpretován jako vítězství počítání na cifry nad počítáním na linách.

Je třeba poznamenat, že obrázek je značně zavádějící; odráží nepřesné informace, které o objevitelích početních postupů lidé měli na přelomu 15. a 16. století.

Boëthius nemohl počítat na cifrách, neboť tento způsob provádění numerických výpočtů se v Evropě postupně šířil až od 11. století; nemohl počítat ani na linách, které byly užívány až v 11. století a oblibu získaly ještě později. Ani Pýthagorás nemohl počítat na linách, oba k výpočtům užívali abakus.

Diskuse o způsobech počítání

(R. Record: *The Grounde of the Arts*, 1540)

Na obrázku vidíme čtyři počtáře;
jeden počítá na linách,
dva počítají novým způsobem s ciframi,
čtvrtý přihlíží.

5. Početní operace prováděné „s ciframi“.

Původní indický způsob počítání, který byl založen na vymazávání částečných výsledků a jejich postupném nahrazování dalšími částečnými výsledky (na desce pokryté prachem nebo pískem), byl naprosto nevhodný při počítání *na cifry*. Výchozí čísla i celý výpočet byl zapisován na pergamenu nebo na papíru, soustavné vymazávání částečných výsledků nebylo možné, početní postupy se proto pozměnily. Vymazávání částečných výsledků bylo nahrazeno přeškrtáváním jednotlivých číslic; nad ně byly zapisovány cifry dalších částečných výsledků.

5.1 Numerace.

Za úvodní početní „operaci“ byla ve středověku považována tzv. *numerace*, tj. vlastní zápis čísel.

Začátečníci se nejprve učili počítat na abaku nebo na linách, k čemuž nepotřebovali umět čísla zapisovat. Pro další vzdělání však bylo třeba se naučit zapisovat čísla (nejprve římskými a později indicko-arabskými ciframi) a právě k tomu sloužila numerace.

Zapisování čísel se stalo naprosto nepostradatelným v souvislosti s rozvojem počítání „na cifry“.

5.2 Sčítání.

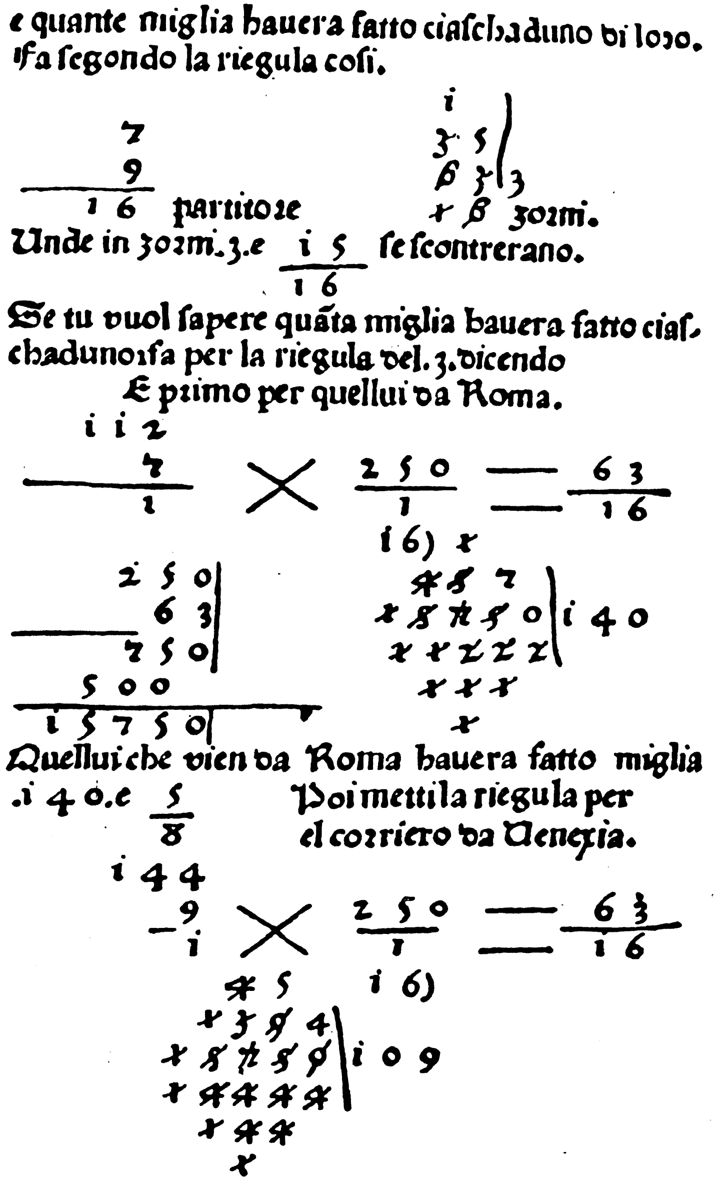
Nejjednodušší početní operací bylo *sčítání*. Středověký počtář zapisoval jednotlivé sčítance pod sebe, sčítal zleva doprava, opačně než dnes, tj. od nejvyšších řádů. Částečné výsledky postupně zapisoval nad sčítance; při sčítání zleva doprava bylo někdy třeba předchozí výsledek korigovat, protože součet v nižším řádu může ovlivnit výsledek v řádu vyšším. Při počítání na počítacích deskách či na abaku nedělaly takovéto opravy žádný problém, příslušná číslice se smazala, případně se upravil počet kaménků nebo se vyměnil příslušný apex. Při zápisu na pergamenu nebo na papíře se částečné výsledky přeškrtávaly a nad ně se zapisovaly výsledky nové; výsledek výpočtu pak bylo třeba „sestavit“ z nejvyšších nepřeškrtnutých číslic. Na příkladu

$$2837 + 3524 + 1722 = 8083$$

zaznamenáme jednotlivé fáze výpočtu, který středověký počtář prováděl.

$$\begin{array}{cccc} 6 & & & \\ 2 & 8 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 7 & 2 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 8 & & & \\ \cancel{6} & 0 & & \\ 2 & 8 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 7 & 2 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 8 & & & \\ \cancel{6} & 0 & 7 & \\ 2 & 8 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 7 & 2 & 2 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 8 & & 8 & \\ \cancel{6} & 0 & \cancel{7} & 3 \\ 2 & 8 & 3 & 7 \\ 3 & 5 & 2 & 4 \\ 1 & 7 & 2 & 2 \end{array}$$

Připomeňme, že po ukončení výpočtu měl před sebou středověký počtář pouze poslední z výše uvedených čtyř schémat; výsledek 8083 bylo třeba sestavit z nejvyšších nepřeškrtnutých číslic. Zkouška správnosti výpočtu by byla vzhledem k přeškrtávání číslic poměrně obtížná; správnost výsledku se většinou ověřovala opětovným výpočtem.



e quante miglia hauera fatto ciascheduno di loro.
Fa segondo la riegula cosi.

16 partitore — 3 zorni.

Unde in zorni .3. e $\frac{15}{16}$ se scontrerano.

Se tu vuol sapere quāta miglia hauera fatto ciaschaduno: fa per la riegula del .3. dicendo
E primo per quellui da Roma.

Quellui che vien da Roma hauera fatto miglia .140. e $\frac{5}{8}$ Poi metti la riegula per el corriero da Venezia.

Výpočty v tištěné italské aritmetice z roku 1478

Jde o řešení následující úlohy: *Kde se setkají dva kurýři, z nichž jeden projde vzdálenost 250 mil z Říma do Benátek za 7 dní a druhý z Benátek do Říma za 9 dní.*

5.3 Odčítání.

Odčítání prováděli středověcí počtáři podle několika algoritmů. První, tzv. *indický*, byl podobný našemu dnešnímu algoritmu. Výpočet se prováděl zleva doprava, opačně než dnes, tj. od nejvyšších řádů. Částečné výsledky se zapisovaly nahoru (podobně jako při sčítání), při následujících krocích se přeškrtávaly. Výsledek bylo třeba opět sestavit z nejvyšších nepřeškrtnutých cifer, které jsou často v různých řádcích. Na příkladu

$$8946 - 6983 = 1963$$

zaznamenáme jednotlivé fáze výpočtu, který středověký počtář prováděl.

$$\begin{array}{cccc} 2 & & & \\ 8 & 9 & 4 & 6 \\ 6 & 9 & 8 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 2 & 0 & & \\ 8 & 9 & 4 & 6 \\ 6 & 9 & 8 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 9 & & \\ \cancel{2} & \cancel{0} & 6 & \\ 8 & 9 & 4 & 6 \\ 6 & 9 & 8 & 3 \end{array} \qquad \begin{array}{cccc} 1 & 9 & & \\ \cancel{2} & \cancel{0} & 6 & 3 \\ 8 & 9 & 4 & 6 \\ 6 & 9 & 8 & 3 \end{array}$$

Druhý algoritmus byl založen na tzv. *desítkovém doplňku.* Čísla $1, \ldots, 9$ je možno chápat jako doplňky čísel $9, \ldots, 1$ do 10, tj. $1 = 10 - 9, \ldots, 9 = 10 - 1$.

Výpočet se prováděl tentokrát zprava doleva; na první řádek zapsal středověký počtář menšence, na druhý menšitele a na třetí zaznamenával rozdíl. Pokud byla cifra menšitele větší než příslušná cifra menšence, nahradila se doplňkem, obě cifry se sečetly a k další číslici menšitele se přičetla jednička. Stejně se postupovalo v dalších krocích. Na příkladu

$$62315 - 47836 = 14479$$

popišme jednotlivé kroky, které středověký počtář prováděl.

$$\begin{array}{ccccc} 6 & 2 & 3 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & 8 & 3 & 6 \\ 1 & 4 & 4 & 7 & 9 \end{array}$$

Výpočet probíhal asi takto: rozdíl $5 - 6$ „nelze vypočítat“, proto číslo 6 nahradíme jeho doplňkem $4 = 10 - 6$. Nyní sečteme cifru menšence s cifrou doplňku menšitele, tj. $5 + 4 = 9$, devítku zapíšeme a zvětšíme o jedničku další cifru menšitele, tj. $3+1 = 4$.[13] Pokračujeme dále: rozdíl $1-4$ „nelze vypočítat“, proto číslo 4 nahradíme jeho doplňkem 6, sečteme $1+6 = 7$, sedmičku zapíšeme a následující cifru menšitele zvětšíme o jedničku, tj. $8 + 1 = 9$. Nyní budeme počítat třetí cifru: rozdíl $3 - 9$ „nelze vypočítat“, proto číslo 9 nahradíme doplňkem 1, sečteme $3 + 1 = 4$, čtyřku zapíšeme a následující cifru menšitele zvětšíme o jedničku, tj. $7 + 1 = 8$. Obdobně pro čtvrtou cifru: rozdíl $2 - 8$ „nelze vypočítat“, tudíž číslo 8 nahradíme jeho doplňkem 2, sečteme $2+2 = 4$,

[13] Neboť $5 - 6 = 5 + (10 - 6) - 10$.

čtyřku zapíšeme a následující cifru menšitele zvětšíme o jedničku, tj. $4 + 1 = 5$. Výpočet poslední cifry je jednoduchý: $6 - 5 = 1$.

Tento postup se podobá našemu současnému algoritmu, zápis výpočtu, pokud bychom přidali znaménko minus, by byl naprosto stejný.

5.4 Násobení.

Středověké algoritmy pro násobení byly založeny na dokonalé znalosti malé násobilky (1×1 až 9×9).

Jedním z často užívaných algoritmů pro násobení víceciferných čísel byl postup nazývaný *galea* nebo *battello*, tj. *loď* či *člun*. Název byl odvozen z obrázku, který počtář obdržel na konci výpočtu; lze v něm s notnou dávkou fantazie spatřit loď se stožárem, napjatou plachtou a případně i s kormidlem. Násobitel se napsal nad násobence tak, aby poslední cifra násobence byla pod první cifrou násobitele. Potom se první cifrou násobitele zleva doprava postupně vynásobily všechny cifry násobence. Částečné výsledky se zapisovaly nahoru nad násobence a musely se rovněž postupně korigovat, podobně jako při sčítání. Pak se cifry násobence znovu zapsaly, ale posunuté o jedno místo vpravo, všechny tyto cifry se vynásobily druhou cifrou násobitele, částečné výsledky se zapisovaly nahoru, přičemž docházelo k opravám předchozích částečných výsledků. Stejným způsobem probíhal další výpočet. Výsledek se pak sestavil z nejvyšších nepřeškrtnutých cifer.

Vzhledem k tomu, že po ukončení výpočtu bylo těžké „ve změti cifer“ rychle rozeznat oba činitele, začal se násobenec (v základní poloze) i násobitel podtrhávat. Zkouška správnosti výpočtu byla těžko realizovatelná, prováděla se většinou opakováním výpočtu. Na příkladu

$$151 \times 327 = 49377$$

ukažme postup středověkého počtáře.

Nejprve zapíšeme oba činitele tak, aby první cifra násobitele byla nad poslední cifrou násobence:

$$\begin{array}{ccccc} & & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 1 & & \end{array}$$

Při prvním kroku postupně násobíme všechny cifry násobence, tj. čísla 151, první cifrou násobitele 327, tj. třemi. Násobení provádíme zleva, částečné výsledky zapisujeme nad násobené cifry; jen jednou musíme opravit předchozí výsledek:

$$\begin{array}{ccccc} 4 & & 3 & & \\ \cancel{3} & 5 & 3 & 2 & 7 \\ 1 & 5 & 1 & & \end{array}$$

Při druhém kroku znovu zapíšeme cifry násobeného čísla 151, posuneme je však o jedno místo doprava; tyto posunuté cifry násobíme druhou cifrou násobitele, tj. dvěma, výsledky přičítáme k předchozímu částečnému výsledku, přičemž opět dochází k přeškrtávání cifer.

$$\begin{array}{ccccc}
 & 8 & & & \\
4 & \cancel{7} & 3 & 2 & \\
\cancel{3} & \cancel{5} & 3 & 2 & 7 \\
1 & 5 & 1 & 1 & \\
 & 1 & 5 & &
\end{array}$$

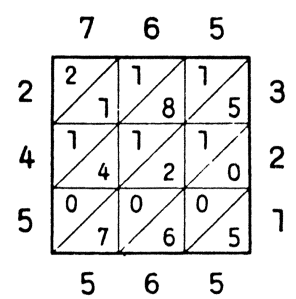
Při třetím kroku opět zapíšeme cifry čísla 151 posunuté o další místo doprava, násobíme je třetí cifrou čísla 327, tj. sedmi. Výsledky opět přičítáme k předchozím výsledkům, přičemž opět dochází ke škrtání některých cifer.

$$\begin{array}{ccccc}
 & 9 & 3 & & \\
 & \cancel{8} & \cancel{0} & 7 & \\
4 & \cancel{7} & \cancel{3} & \cancel{2} & 7 \\
\cancel{3} & \cancel{5} & 3 & 2 & 7 \\
1 & 5 & 1 & 1 & 1 \\
 & 1 & 5 & 5 & \\
 & & 1 & &
\end{array}$$

Zdůrazněme, že středověký počtář měl na svém papíru pouze poslední zápis, „obrázek“ vzdáleně připomínající loď.

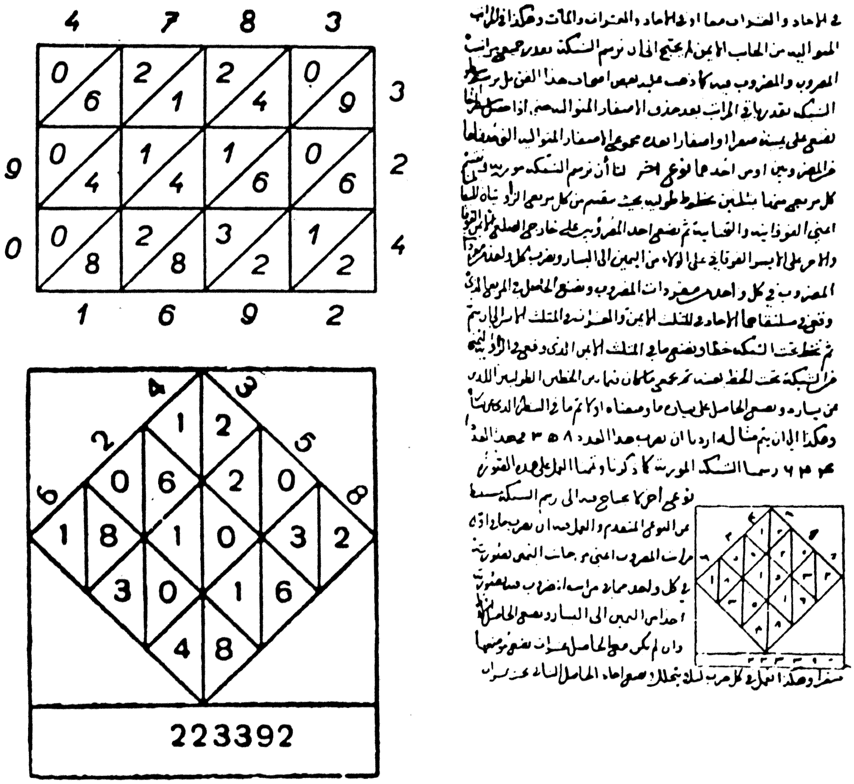
Další užívaný algoritmus pro násobení byl nazýván *gelosia*. Traduje se, že to je prastarý postup, který vznikl v Indii. Počtář nejprve nakreslil čtvercovou síť a každý čtverec rozdělil úhlopříčkou na dvě pole. Cifry násobence napsal zleva doprava nad sloupce, cifry násobitele za řádky shora dolů. Pak začal počítat součiny jednotlivých čísel a výsledky zapisoval do jednotlivých čtverců, desítky nad úhlopříčku a jednotky pod ni.

Pak sečetl v jednotlivých pásech ve směru úhlopříčky všechna čísla, případné desítky přičetl k součtu dalšího šikmého pásu. Celkový výsledek byl čten zleva, shora dolů a doprava. Tvar sítě prý připomínal italským matematikům mříže v oknech vdaných benátských žen; snad proto byl nazýván *gelosia* (italsky žárlivost). Byl též znám pod méně romantickým názvem, *multiplicare per quadrilatero*, tj. násobení ve čtvercích nebo v dlaždicích. Na následujícím obrázku je zaznamenán výpočet 765 × 321 = 245 565 pomocí algoritmu *gelosia*.



Tento algoritmus je velmi jednoduchý, jeho zvládnutí nevyžaduje zvláštní matematické nadání.

Někdy bylo násobení podle algoritmu *gelosia* prováděno v nepatrně modifikovaném tvaru – místo čtverce nebo obdélníka byl užíván kosočtverec nebo kosodélník (viz obrázek).



Středověký algoritmus *gelosia* v evropské a arabské verzi

Indického původu je prý i algoritmus nazývaný *multiplicare per crocette* nebo *multiplicare per casella* (*crocette* je italsky křížek, *casella* skříňka), který byl poprvé popsán v práci indického matematika Bháskary II. (1114 – po 1178). Tento početní postup byl v Itálii velmi oblíben, obratný počtář získával správné výsledky velmi rychle. Luca Pacioli prý napsal, že tato *metoda vyžaduje trochu více rozumu a fantazie.*

Násobená čísla napíšeme pod sebe, jednotky pod jednotky, desítky pod desítky atd. Potom zprava násobíme jednotlivé cifry obou čísel tak, abychom postupně dostávali cifry výsledku (jednotky, desítky, ...). Máme-li vypočítat součin 375×4251, umístíme oba činitele pod sebe:

$$\begin{array}{cccc} & 3 & 7 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 1 \end{array}$$

Nyní budeme počítat jednotlivé cifry výsledku v pořadí jednotky, desítky, stovky atd. tak, jak je dále naznačeno. Poznamenejme, že „zbytek“ částečného výsledku se vždy bere jako sčítanec v kroku následujícím.

jednotky	$5 \cdot 1$	$=$	5	$\longrightarrow$	5
desítky	$5 \cdot 5 + 7 \cdot 1$	$=$	32	$\longrightarrow$	2
stovky	$3 + 3 \cdot 1 + 2 \cdot 5 + 7 \cdot 5$	$=$	51	$\longrightarrow$	1
tisíce	$5 + 2 \cdot 7 + 3 \cdot 5 + 4 \cdot 5$	$=$	54	$\longrightarrow$	4
desetitisíce	$5 + 4 \cdot 7 + 3 \cdot 2$	$=$	39	$\longrightarrow$	9
statisíce	$3 + 4 \cdot 3$	$=$	15	$\longrightarrow$	5
miliony	1	$=$	1	$\longrightarrow$	1

Hledaný součin je tedy 1 594 125.

Předchozí výpočet lze usnadnit tak, že cifry jednoho z činitelů napíšeme na proužek papíru v opačném pořadí. Proužek umístíme tak, aby levá krajní cifra čísla na proužku byla pod pravou krajní cifrou čísla na papíře. Nyní vypočteme součin cifer, které jsou pod sebou, jednotky částečného výsledku zapíšeme a proužek posuneme o jedno místo doleva. Vypočteme součiny cifer, které jsou pod sebou, oba součiny sečteme a přičteme případné desítky z předchozího kroku. Proužek opět posuneme o jedno místo doleva a pokračujeme ve výpočtu. V našem příkladě bude první poloha obou činitelů vypadat takto:

$$\begin{array}{cccccc} 3 & 7 & 5 & & & \\ & & 1 & 5 & 2 & 4 \end{array}$$

Poslední poloha bude:

$$\begin{array}{cccccc} & & & 3 & 7 & 5 \\ 1 & 5 & 2 & 4 & & \end{array}$$

Ve středověku byla vyvinuta a rozvíjena i tzv. *teorie doplňků*, která umožňovala násobení čísel pouze se znalostí „části“ malé násobilky, tj. součinů 1×1 až 5×5.

Máme-li vypočítat součin $a \times b$, kde $5 < a < 10$, $5 < b < 10$, pak vynásobíme jejich doplňky $10 - a$ a $10 - b$ a k tomuto číslu přičteme desetinásobek čísla $a + b - 10$, tj.

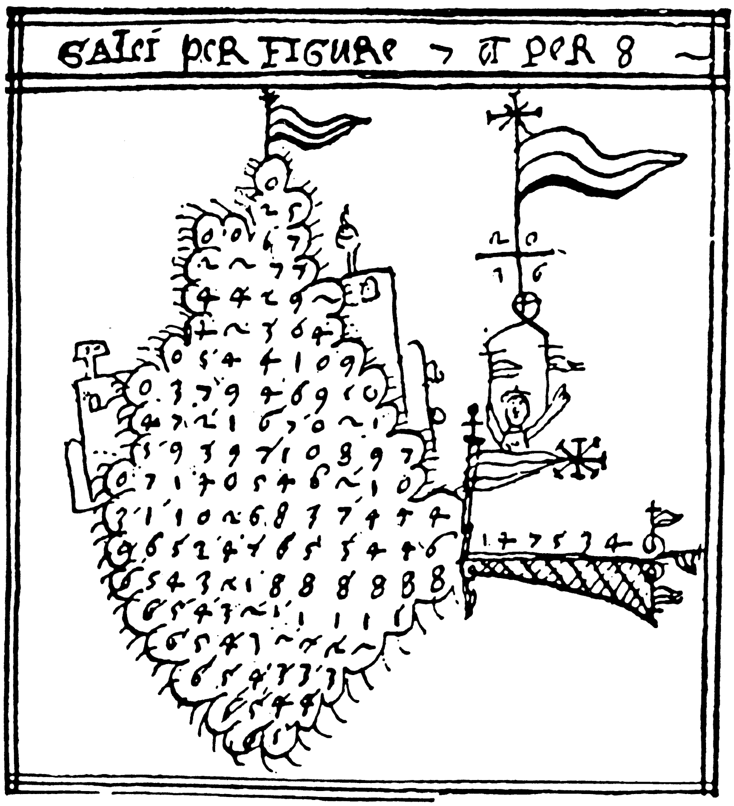
$$a \cdot b = 10(a + b - 10) + (10 - a)(10 - b)\ .$$

Chceme-li např. vypočítat součin čísel 6 a 8, vynásobíme jejich doplňky 4 a 2, $4 \times 2 = 8$, a máme jednotky hledaného součinu. Čísla 6 a 8 sečteme a odečteme 10, $6 + 8 - 10 = 4$, a máme desítky hledaného součinu. Počítáme-li však takto např. součin 6×6, je součin doplňků roven 16; číslo 6 určuje jednotky hledaného součinu a číslo 1 je třeba přičíst k číslu $6 + 6 - 10$, abychom získali desítky hledaného součinu.

Tento algoritmus pro násobení přežil do dnešních dnů ve formě tzv. *cikánské násobilky.* Chceme-li vypočítat součin čísel větších než pět, vztyčíme na každé ruce tolik prstů, o kolik je každý z činitelů větší než pět. Součet vztyčených prstů je pak roven počtu desítek a součin nevztyčených prstů počtu jednotek hledaného součinu. Uvědomme si, že postup přesně odpovídá „metodě doplňků“.

Podobný algoritmus funguje i pro velkou násobilku (10×10 až 19×19); např. součin 13×14 lze na prstech vypočítat takto: na každé ruce vztyčíme tolik prstů, o kolik číslo převyšuje 10, tj. 3 a 4, sečteme počet vztyčených prstů ($3 + 4 = 7$) a součet vynásobíme deseti (tj. 70), vynásobíme počet vztyčených prstů ($3 \times 4 = 12$) a sečteme obě čísla (dostaneme 82), výsledek přičteme k číslu 100 a dostaneme 182. Je zjevné, že algoritmus lze v nepatrně modifikované podobě použít i na násobení větších čísel. Není obtížné zjistit, že se tato metoda blíží algoritmu *multiplicare per crocette*. Více viz [Mel], str. 218.

Znovu připomeňme, že v raném středověku bylo počítání na prstech „dovedeno k dokonalosti“ (viz např. metody, které učil Beda Venerabilis).



Dělení podle algoritmu *battello*

965 347 653 486 : 6 543 218
(podíl je 147 534, zbytek je 529 074)

5.5 Dělení.

Algoritmy *dělení* prodělaly složitý vývoj; dělení bylo ve středověku považováno za jeden z nejobtížnějších matematických úkonů. Matematické vzdělání se často prokazovalo právě výbornou znalostí dělení.

Nejrozšířenějším středověkým algoritmem pro dělení víceciferných čísel byl postup nazývaný *galea* nebo *battello*, stejně jako výše uvedený algoritmus pro násobení.

Středověký počtář zapsal dělitele pod dělence tak, aby byly pod sebou jejich první cifry zleva; pokud však byl dělitel větší než číslo utvořené ze stejného počtu cifer dělitele, zapsala se první cifra dělitele pod druhou cifru dělence.

Pak počtář provedl odhad podílu, hodnotu částečného podílu zapsal za svislou čáru vpravo od dělitele, částečným podílem postupně násobil jednotlivé cifry dělitele a výsledky odčítal od dělence; tento výpočet prováděl zleva, předchozí výsledky proto musel někdy korigovat. Škrtal i použité cifry dělitele, aby měl stále přehled o tom, kam až ve výpočtu dospěl. Po ukončení prvního kroku zapsal znovu všechny cifry dělitele (všechny cifry dělitele byly totiž v té chvíli již škrtnuté), ale posunuté o jedno místo doprava. Celý postup opakoval až do okamžiku, kdy získal výsledek dělení s případným zbytkem, který objevil mezi nepřeškrtnutými čísly.

Obtížnost dělení byla (obdobně jako u násobení) komplikována tím, že cifry dělitele byly zapsány ve více řádcích. Na příkladu

$$18\,821 : 153 \;=\; 123 \qquad \text{(a zbudou 2)}$$

ukážeme celý postup. Nejprve zapíšeme dělence i dělitele.

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 8 & 8 & 2 & 1 \\ 1 & 5 & 3 & & \end{array}$$

Cifry 1, 5, 3 jsou zapsány pod ciframi 1, 8, 8, neboť je 188 > 153. Výpočet zachytíme v jednotlivých fázích vývoje schématu:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & \\ 1 & 8 & 8 & 2 & 1 & \\ 1 & 5 & 3 & & & |1 \\ & & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} 0 & 3 & 5 & & & \\ \cancel{1} & \cancel{8} & \cancel{8} & 2 & 1 & \\ \cancel{1} & \cancel{5} & \cancel{3} & & & |1 \\ & & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} 0 & 3 & 5 & & & \\ \cancel{1} & \cancel{8} & \cancel{8} & 2 & 1 & \\ \cancel{1} & \cancel{5} & \cancel{3} & 3 & & |1 \\ & 1 & 5 & & & \end{array}$$

Získali jsme první částečný podíl, odečetli příslušný násobek dělitele a cifry dělitele jsme zapsali posunuté o jedno místo doprava. Dále je:

$$\begin{array}{cccccc} & & & & & \\ & & & & & \\ 0 & 3 & 5 & & & \\ \cancel{1} & \cancel{8} & \cancel{8} & 2 & 1 & \\ \cancel{1} & \cancel{5} & \cancel{3} & 3 & & |12 \\ & 1 & 5 & & & \end{array} \qquad \begin{array}{cccccc} & 0 & & & & \\ & \cancel{1} & 4 & & & \\ 0 & \cancel{3} & \cancel{5} & 6 & & \\ \cancel{1} & \cancel{8} & \cancel{8} & \cancel{2} & 1 & \\ \cancel{1} & \cancel{5} & \cancel{3} & \cancel{3} & & |12 \\ & \cancel{1} & \cancel{5} & & & \end{array}$$

Získali jsme druhý částečný podíl a příslušný násobek dělitele jsme odečetli.

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & 0 & & & & & \\
 & \cancel{1} & 4 & & & & \\
0 & \cancel{3} & \cancel{5} & 6 & & & \\
\cancel{1} & \cancel{8} & \cancel{8} & \cancel{2} & 1 & & \\
\cancel{1} & \cancel{5} & \cancel{3} & \cancel{3} & 3 & & |12 \\
 & \cancel{1} & \cancel{5} & 5 & & & \\
 & & 1 & & & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & 0 & & & & \\
 & 0 & \cancel{1} & 0 & & & \\
 & \cancel{1} & \cancel{4} & \cancel{1} & & & \\
0 & \cancel{3} & \cancel{5} & \cancel{6} & 2 & & \\
\cancel{1} & \cancel{8} & \cancel{8} & \cancel{2} & \cancel{1} & & \\
\cancel{1} & \cancel{5} & \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{3} & & |123 \\
 & \cancel{1} & \cancel{5} & \cancel{5} & & & \\
 & & \cancel{1} & & & &
\end{array}
$$

Cifry dělitele jsme zapsali potřetí, opět posunuté o jedno místo doprava, vypočetli jsme další částečný podíl a odečetli příslušný násobek dělitele. Získali jsme tak hledaný podíl 123 a zbytek 2. Povšimněme si, že identifikovat v tomto zápise dělence a dělitele není jednoduché. Hledání případné chyby ve výpočtu je obtížné, nejjednodušší je provést nový výpočet.

5.6 Odmocňování.

Ještě obtížnější operací bylo ve středověku *odmocňování*, neboli „dobývání kořene“. Ocitujme půvabnou pasáž z práce Josefa Smolíka *Mathematikové v Čechách*, ve které Smolík popsal, jak odmocňoval Křišťan z Prachatic:

Kořene druhého stupně učí Křišťan dobývati takto: Nejprvé nechť prý se sečtou cifry daného čísla, kdyby byl počet jejich sudý, nechť se započne dobývání u dvou nejvyšších míst, kdyby však byl lichý, u nejvyššího místa. Dle toho se tedy dobude kořene částečného buď ze dvou neb z jedné cifry. Dále nechť se kořen ten poznamená, sám sebou násobí a odečte, na to nechť se zdvojnásobí, dvojnásobený napíše ob jednu cifru dále v pravo, a nechť se jím dělí předešlý zbytek a jedna cifra vedle; načež má se podíl ten napsati ke kořenu, násobiti dělitelem a násoben odečísti od svého dělence, pak násobiti sám sebou a odečísti od předešlého zbytku a cifry vedle a t. d. ... ([Sm], str. 21)

Na jednoduchém příkladu budeme nyní demonstrovat postup středověkého počtáře; vypočteme druhou odmocninu čísla 119 025.

Číslo 119 025 má šest cifer; začneme tedy „dobývati kořen“ dvouciferného čísla 11 sestaveného z prvních dvou cifer zleva. Částečný výsledek je 3, toto číslo se umocní, devítka se napíše pod druhou cifru odmocňovaného čísla, odečte se a rozdíl 2 se napíše nad číslo 11, které se škrtne. Částečný výsledek 3 se nyní zdvojnásobí, číslo 6 se zapíše na další řádek pod třetí cifru odmocňovaného čísla 119 025, šestkou se vydělí číslo 29 (zbytek 2 z předchozího výpočtu a další cifra 9) a podíl 4 je další cifrou výsledku; částečným výsledkem je nyní 34. Od čísla 29 se odečte součin 6×4, rozdíl 5 se napíše nad devítku a číslo 29 se škrtne. Číslo 4, tj. druhá cifra částečného výsledku, se nyní umocní, číslo 16 se zapíše na další řádek pod třetí a čtvrtou cifru, tj. pod číslo 50, odečte se od 50, číslo 50 se škrtne a číslo 34 se zapíše nad ně. Částečný výsledek 34 se nyní zdvojnásobí, číslo 68 se zapíše na další řádek pod čtvrtou a pátou cifru, vydělí se jím číslo 342 (první tři neškrtnuté číslice); podíl 5 je další cifrou výsledku.

Od čísla 342 se odečte $5 \times 68 = 340$, číslice 3 a 4 se škrtnou, číslice 2 hraje nyní roli zbytku. Předchozí částečný výsledek 5 se umocní a výsledek 25 se zapíše na další řádek a odečte se od čísla tvořeného posledními nepřeškrtnutými číslicemi, tj. od čísla 25. Poslední dvě číslice se tedy škrtnou, zbytek je nula, výsledkem „dobývání kořene" je číslo 342. Středověký zápis postupu, který jsme právě popsali, vypadal asi takto:

$$
\begin{array}{cccccccl}
 & & \cancel{3} & & & & & \\
 & \cancel{2} & \cancel{5} & \cancel{4} & & & & \\
\cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{9} & \cancel{0} & \cancel{2} & \cancel{5} & & |345 \\
 & 9 & & & & & & \\
 & & 6 & & & & & \\
 & & 1 & 6 & & & & \\
 & & & 6 & 8 & & & \\
 & & & & 2 & 5 & &
\end{array}
$$

Uvedený postup se matematicky zdůvodní poměrně snadno. Stačí si uvědomit, že

$$345^2 = (300 + 40 + 5)^2 = (300 + 40)^2 + 2 \cdot 340 \cdot 5 + 5^2 =$$

$$= 300^2 + 2 \cdot 300 \cdot 40 + 40^2 + 2 \cdot 340 \cdot 5 + 5^2 = 90\,000 + 24\,000 + 1\,600 + 3\,400 + 25\,.$$

Ukažme ještě příklad, který byl pravděpodobně pro nezkušené středověké počtáře obtížný a problematický. Vypočtěme druhou odmocninu čísla 56 169.

Toto číslo má lichý počet cifer, proto začínáme odmocněním čísla 5. Prvním částečným výsledkem je číslo 2. Po umocnění čísla 2 a odečtení, získáme zbytek 1, který napíšeme nad pětku, kterou škrtneme. Nyní musíme číslo 16 vydělit dvojnásobkem čísla 2, tj. čtyřkou. Podíl je 4, a to by měla být druhá cifra výsledku; odečteme-li 4×4 od 16, je zbytek nula, nyní musíme dvojmoc čísla 4 odečíst od čísla 1 a to nejde! Musíme se tedy vrátit, při předchozím dělení 16 : 4 vzít jako podíl číslo 3 a to bude druhá cifra částečného výsledku; zbytek je potom 4 a v dalším kroku odčítáme dvojmoc čísla 3, tj. 9 od 41, zbytek je 32. Číslo 326 dělíme dvojnásobkem částečného výsledku, tj. číslem 46; dostáváme číslo 7, od čísla 326 odečteme součin $7 \cdot 46 = 322$, zbytek je 4. Připojíme-li poslední cifru 9, dostáváme právě druhou mocninu čísla 7; druhou odmocninou čísla 56 169 je tedy číslo 237. Středověký zápis mohl vypadat asi takto:

$$
\begin{array}{ccccccl}
 & \cancel{3} & & & & & \\
\cancel{1} & \cancel{4} & \cancel{2} & \cancel{4} & & & \\
\cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{1} & \cancel{6} & \cancel{9} & & |237 \\
4 & & & & & & \\
 & 4 & & & & & \\
 & & 9 & & & & \\
 & & 4 & 6 & & & \\
 & & & 4 & 9 & &
\end{array}
$$

Algoritmus pro nalezení odmocniny se tedy nedal užívat zcela bezmyšlenkovitě, velmi často docházelo k výše naznačeným „komplikacím".

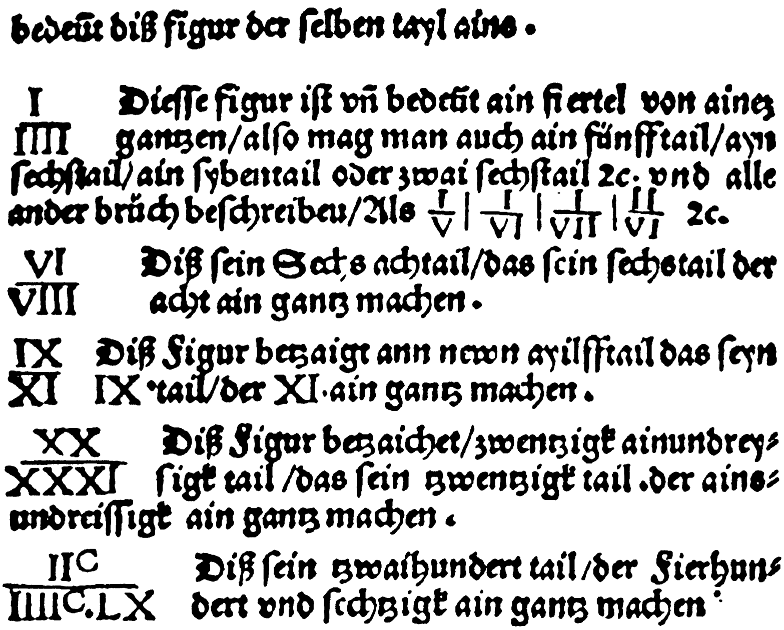
Poznamenejme, že byl ve středověku užíván i algoritmus pro výpočet třetí odmocniny, který byl složitější; vychází ze známého vzorce

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 ,$$

podobně jako je algoritmus pro výpočet druhé odmocniny založen na využití vzorce

$$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 .$$

Před několika desetiletími byly ještě tyto algoritmy vyučovány na základních školách; ve starých učebnicích je můžeme snadno vyhledat. Dnes už je mladší generace nezná. Dnešní žáci a studenti by vzhledem k všeobecnému rozšíření počítačů a kalkulaček tyto algoritmy považovali za zbytečné a neužitečné.



bedeüt diß figur der selben tayl ains.

$\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{IIII}}$ Diesse figur ist vñ bedeüt ain fiertel von ainẽ gantzen/also mag man auch ain fünfftail/ayn sechstail/ain sybentail oder zwai sechstail 2c. vnd alle ander brüch beschreiben/Als $\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{V}}$ | $\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{VI}}$ | $\frac{\mathrm{I}}{\mathrm{VII}}$ | $\frac{\mathrm{II}}{\mathrm{VI}}$ 2c.

$\frac{\mathrm{VI}}{\mathrm{VIII}}$ Diß sein Sechs achtail/das sein sechstail der acht ain gantz machen.

$\frac{\mathrm{IX}}{\mathrm{XI}}$ Diß Figur bezaigt ann newn ayilfftail das seyn IX tail/der XI ain gantz machen.

$\frac{\mathrm{XX}}{\mathrm{XXXI}}$ Diß Figur bezaichet/zwentzigk ainundreyssigk tail/das sein zwentzigk tail der ainsundreissigk ain gantz machen.

$\frac{\mathrm{II^C}}{\mathrm{IIII^C.LX}}$ Diß sein zwaihundert tail/der Vierhundert vnd sechtzigk ain gantz machen.

Zlomky v římské numeraci

(J. Köbel: *Rechenbüchlein*, Augsburg, 1514)

6. Počítání se zlomky.

Počítání se zlomky patřilo k obtížným partiím středověké matematiky. Svědčí o tom mimo jiné i často připomínaný výrok Bedy Venerabilise:

Kdo umí dělit, tomu se žádná záležitost nebude zdát těžká. Já znám hodně složitých věcí, ale nic není složitější než operace se zlomky. ([Ko], str. 109)

Rozvíjející se aktivity řemeslnické, ekonomické a obchodnické však motivovaly čím dál, tím více rozvoj početních metod, a tedy i práci se zlomky.

Až do 12. století se v Evropě udržel *římský způsob* počítání se zlomky, jejichž jmenovatelem bylo číslo 12 nebo nějaký násobek tohoto čísla. Tento způsob vycházel z římské peněžní jednotky *as*, která byla rozdělena na 12 *uncí*.

Základem byl „zlomek" $\frac{12}{12}$ nazývaný *as*; dále byly užívány např. zlomky $\frac{11}{12}$ (*deunx*, název byl odvozen z výrazu *de uncia*, tj. „as bez unce"), $\frac{10}{12}$ (*dextans, de sextans*, tj. „as bez $\frac{1}{6}$ asu"), $\frac{9}{12}$ (*dodrans*), $\frac{8}{12}$ (*bes*), $\frac{7}{12}$ (*septunx*), $\frac{6}{12}$ (*semis*, polovina), $\frac{5}{12}$ (*quincunx*, pět uncí), $\frac{4}{12}$ (*triens*, třetina), $\frac{3}{12}$ (*quadrans*, čtvrtina), $\frac{2}{12}$ (*sextans*, šestina), $\frac{1}{12}$ (*uncia*), $\frac{1}{24}$ (*semuncia*, polovina unce), $\frac{1}{36}$ (*duella*), $\frac{1}{48}$ (*sicilicus*), $\frac{1}{72}$ (*sextula*, šestina unce), $\frac{1}{144}$ (*dimidia sextula*), $\frac{1}{288}$ (*scriptulum*), $\frac{1}{576}$ (*obolus*), $\frac{1}{1152}$ (*ceratus*, tj. karát), $\frac{1}{1728}$ (*siliquae*), $\frac{1}{5184}$ (*tercia siliquae*).

Na konci 12. století se ukazovalo, že *římský způsob* již není schopen dalšího rozvoje; výpočty užívající římské zlomky byly zdlouhavé, zbytečně komplikované a málo produktivní.

Na počátku 13. století sepsal Leonardo Pisánský ve svém velkém díle *Liber abaci* početní metody využívající egyptské *kmenné* zlomky, tj. zlomky, které měly v čitateli číslo 1. Počítání s egyptskými zlomky však přinášelo podobné problémy jako počítání se zlomky římskými; každé číslo bylo třeba vyjádřit jako součet přirozeného čísla a egyptských, resp. římských zlomků. Např.

$$\frac{3}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{7} + \frac{1}{28}\,, \qquad \frac{3}{7} = \frac{5}{12} + \frac{1}{84}\,.$$

Počítání s egyptskými zlomky se v Evropě neujalo, i přesto, že Leonardo popsal několik postupů pro rozklad zlomku na součet kmenných zlomků.

Leonardo Pisánský však přinesl do Evropy desítkový poziční systém a s ním i *desetinné zlomky*. Desítková poziční soustava i desetinné zlomky měly patrně původ v Indii, přes islámský svět pronikaly od 10. století postupně do Evropy.

Leonardo Pisánský zapisoval zlomky téměř tak, jako my dnes; užíval i zlomkovou čáru (*virgula*). Smíšená čísla zapisoval jinak než my, zlomky stály vlevo od čísel přirozených. Pro zlomky užíval termíny *fractia* (z latinského frangere, lámat), *ruptus* (z latinského *rumpere*, trhat).

V Evropě se desetinné zlomky většinou zapisovaly pomocí výrazné tečky, např. $\frac{4}{5}\bullet$ má význam $\frac{4}{5}$. Dnešní zápis $\frac{4}{5}$ či 4/5 se výrazně rozšířil až v 16. století.

Výuka počítání se zlomky byla pro tehdejší žáky obtížná. Operace se zaváděly dogmaticky, bez zdůvodnění a hlubšího teoretického podkladu. Pro snazší zapamatování algoritmů vznikaly různé básně a mnemotechnické pomůcky.

I rutinovaní matematici však dlouho zápolili s některými jevy spjatými s operacemi se zlomky. Například vynikající počtář Luca Pacioli, profesor matematiky v Miláně, se pozastavoval nad tím, že při násobení zlomkem menším než 1 je výsledek menší než násobenec; v bibli je totiž psáno: *Rostež a množte se a naplňte Zemi!*

Velkým propagátorem práce se zlomky byl Jordanus Nemorarius. Zajímavý je jeho způsob dělení zlomků, který byl sice správný, ale v tehdejší době asi obtížně srozumitelný. Nemorarius doporučoval dělit čitatele prvního zlomku čitatelem zlomku druhého a výsledek dělit podílem jmenovatelů prvního a druhého zlomku. Jestliže tento postup nebylo možno použít, pak doporučoval násobit čitatele i jmenovatele prvního zlomku součinem čitatele a jmenovatele zlomku druhého (tj. rozšířit první zlomek) a teprve potom provést výše uvedený úkon. Např.

$$\frac{3}{4} : \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 5 \cdot 7}{4 \cdot 5 \cdot 7} : \frac{5}{7} = \frac{3 \cdot 7}{4 \cdot 5} .$$

Velikým pokrokem při operování se zlomky byl objev převádění zlomků na společného jmenovatele (nejmenší společný násobek jmenovatelů); do evropské praxe tento postup uvedl Leonardo Pisánský. Do této doby (ale i značně později) většina matematiků brala za společný jmenovatel součin všech jmenovatelů. Poznamenejme, že tuto metodu důsledně používali až Niccolò Tartaglia (1499–1557) a Christophor Clavius (1537–1612); k jejímu všeobecnému rozšíření došlo až v 17. století.

Kromě desetinných zlomků přišly z arabského světa *zlomky šedesátinné*, které byly užívány zejména při astronomických měřeních a výpočtech. Jejich teorie se učila ve 13. století na univerzitách podle anonymního spisu *Algoritmus de minutiis*. Je třeba říci, že šedesátinné zlomky se v Evropě netěšily příliš velké oblibě, zabývala se jimi pouze malá skupina matematiků. Ve 13. století šedesátinné zlomky studoval Johannes Sacrobosco (asi 1195–1256), který ve spise *Algoritmus communis* popsal užívání zlomků při astronomických výpočtech, dánský dominikán Petrus Ingvarssön zvaný Petrus Philomena de Dacia (? –1303) sestavil tabulku pro násobení v šedesátkové soustavě a Joannes z Gmundenu (asi 1380–1442) ve spise *Tractatus de minutiis physicis* vyložil pravidla pro počítání v šedesátkové soustavě.

Ve 14. století rozpracoval teorii desetinných zlomků židovský astronom a matematik Immanuel ben Jákob Bonfils z Tarasconu, který v hebrejsky psaném spise *Derek hilluk* (*Cesta dělení*) vysvětlil pravidla pro sčítání, odčítání, násobení a dělení desetinných zlomků. Neuvedl však žádné příklady. Jeho práce zůstala zcela nepovšimnuta.

Francouzský matematik Jean de Meurs (14. stol.) používal desetinné zlomky k zápisu přibližné hodnoty některých iracionálních čísel (např. $\sqrt{2}$ zapisoval 1414 a zápis objasňoval pomocí zlomků). Pařížský matematik Jean de Lignères (1. polovina 14. století) nazývaný též Iohannes de Lineriis vyložil základní operace se zlomky ve spise *Algorismus de minutiis*. V 15. století vídeňský matematik Georg Peuerbach (1423–1461) použil desetinné i šedesátinné zlomky ve svých nepublikovaných tabulkách sinů. V jeho stopách se vydal jeho žák

Johannes Müller zvaný Regiomontanus (1436–1476), který se již zcela zbavil šedesátinného systému a v roce 1467 sestavil první čistě desetinné trigonometrické tabulky (vydané až po jeho smrti roku 1490).

První souhrn vědomostí o zlomcích a operacích s nimi podal nizozemský matematik Simon Stevin (1548–1620) ve své knize *Arithmétique* (1585). Od 16. století se v Evropě začaly všeobecně užívat desetinné zlomky.

7. Závěr.

V předchozích odstavcích jsme popsali nejdůležitější středověké početní algoritmy pro sčítání, odčítání, násobení, dělení a odmocňování. Je třeba upozornit na to, že výše uvedené algoritmy a jejich zápisy se vyvíjely a modifikovaly; podrobným rozborem je možno poukázat na řadu odlišností v jednotlivých stoletích, regionech, u různých autorů apod. Koncem středověku již někteří počtáři užívají početní postupy, které nejsou příliš odlišné od těch, které jsme se učili na základní škole.

Poznamenejme, že středověké „učebnice" aritmetiky uvádějí ještě další dvě operace – *zdvojování* a *půlení*, tj. výpočet dvojnásobku a poloviny daného čísla. Algoritmy pro zdvojování a půlení však jsou jen modifikací algoritmů pro násobení a dělení, proto jsme se jimi podrobněji nezabývali.

Připomeňme rovněž, že se ve středověké Evropě až na vzácné výjimky pracovalo pouze s přirozenými čísly, kladnými zlomky a smíšenými čísly.

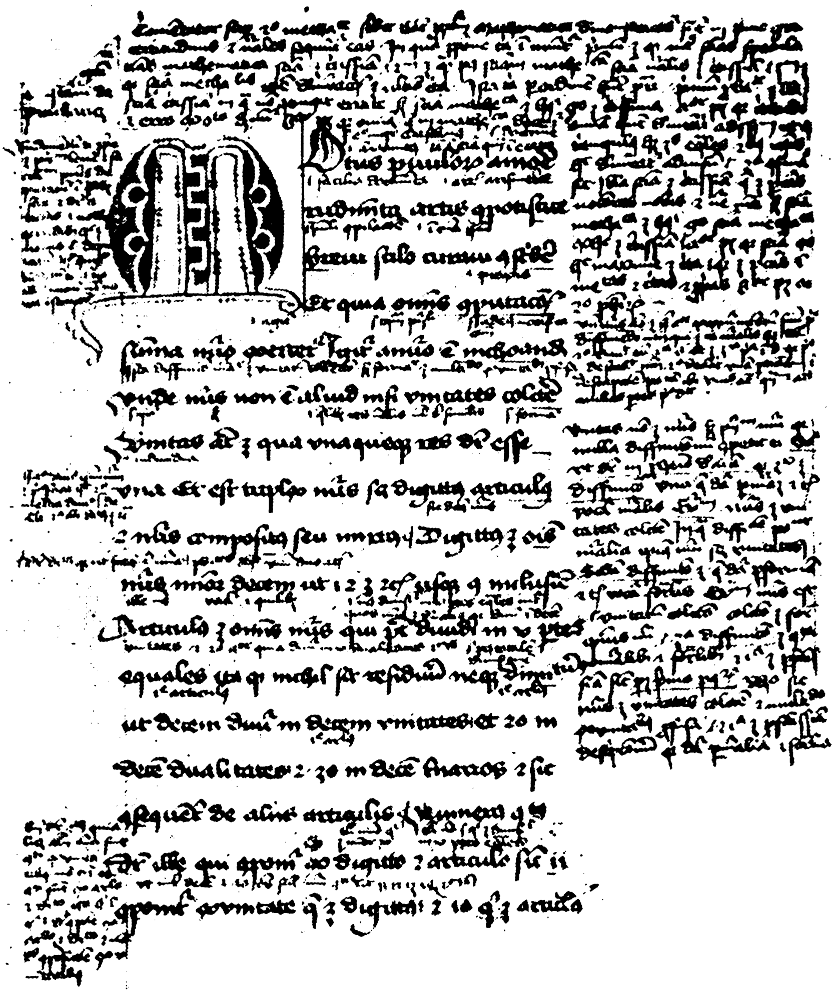
Se zápornými čísly se setkáváme jen výjimečně. Objevila se v rukopise *De arithmeticis propositionibus* z přelomu 8. a 9. století, za jehož autora byl někdy považován Beda Venerabilis.[14] V řadě příkladů je potom použil až Leonardo Pisánský ve 13. století a interpretoval je jako dluh. Přesto však byla záporná čísla dlouho odmítána, teprve na přelomu 15. a 16. století zformuloval Luca Pacioli pravidlo pro násobení záporných čísel. Vyslovil je však bez důkazu; neschopnost dokázat tento poznatek zdůvodňoval nedostatečností lidského rozumu. Ještě v 16. století bojovala záporná čísla o svoji existenci.

S iracionálními čísly se výrazněji setkáváme teprve u Leonarda Pisánského, který již rozlišoval jednotlivé typy kvadratických iracionalit v duchu 10. knihy Eukleidových *Základů*.

8. Ukázky.

Následující ukázky jsou převzaty z knihy Křišťana z Prachatic *Algorismus prosaycus. Základy aritmetiky* [KP], a sice z lichých stran 13–25, 35–41, 43–49, 63–73, 81–91, 99–115. Přetištěn je pouze základní text bez vepsaných komentářů a poznámek. Počátek Křišťanova rukopisu je na uvozujícím obrázku. Vřele doporučujeme podrobné studium knihy [KP].

[14] Viz Karel Mačák: *Tři středověké sbírky matematických úloh*, edice Dějiny matematiky, sv. 15, Prometheus, Praha, 2001, str. 40–42.



Křišťan z Prachatic: *Algorismus prosaycus*

KŘIŠŤAN Z PRACHATIC

ALGORISMUS PROSAYCUS

I. Numerace

Pohnut láskou k mladým přičinil jsem se o sepsání základů početního umění ve stručném stylu. A protože podstata všeho počítání se vykonává prostřednictvím čísla, je tedy třeba od čísla začít.

Číslo není nic jiného než shromážděné jednotky. Jednotka však je to, čím se o každé věci vypovídá, že je jedna.

A číslo je trojí, totiž digitus, artikulus a číslo složené čili smíšené.

Digitus, „prst“, je každé číslo menší než deset, jako 1, 2, 3, atd. až do 9 včetně.

Artikulus, „článek“, je každé číslo, které může být rozděleno na deset stejných částí tak, že nezůstává nic zbylého ani zmenšeného, jako např. deset se dělí na deset jednotek a dvacet na deset dvojic a třicet na deset trojic a tak podobně i ostatní artikuly.

Číslo složené se nazývá to, které se skládá z digitu a artikulu, jako např. 11 se skládá z 1, což je digitus, a z 10, což je artikulus. A tak každé číslo mezi dvěma sousedními artikuly se nazývá číslo složené.

Tato čísla se znázorňují u různých různými číslicemi; jinak je píší lidé znající latinsky, jinak je na zdech zaznamenávají lidé latinsky neznající. Ponechme stranou lidi bez latinského vzdělání, kteří dle různých krajin používají pro čísla různých znaků; následující výklad pojednává o označování latinském.

Latiníci zapisují každé číslo dvěma způsoby. Prvním, hrubším, píší jednotku jako I, dvojku jako II, přidávajíce takto až k pětce, kterou označují písmenem V, a pak znovu přidávají I až k deseti, které zobrazují jako X. A proto:

I – to je jedna, V pět, X deset, to zdvojené dvacet, XL dá dvakráte víc, LX třikrát a samotné L pak vytvoří padesátku, XC zas devadesátku, C vždy udává sto, kdežto z D vznikne pokaždé pět set. Stovek je v DC šest, M je tisíc; to C, jde-li před ním, pak sto musí pryč: to je klíč, jak psát budeš veškerá čísla. ...

II. Sčítání

Sčítání je seskupování čísla či čísel, aby se vědělo, jaká bude suma celého seskupeného čísla.

Pamatuj, že každé číslo, které má být přičteno k jinému, se jmenuje číslo přičítané a musí se napsat vždy dolů. Avšak to číslo, k němuž se má přičítat, se musí napsat nahoru, a to tak, že první číslice přičítaného čísla se napíše pod první číslici čísla, k němuž se přičítá, druhá pod druhou, třetí pod třetí a tak dále, je-li číslic více.

Když se tak stalo, přičti první číslici spodního řádku k první číslici horního řádku.

A jestliže z takového sečtení vyjde digitus, škrtni horní a napiš digitus vycházející ze sčítání, např. při sčítání 2 a 4 škrtni 4 a napiš 6. Vyjde-li artikulus, tu se po škrtnutí horní číslice napíše na její místo nula a číslo, které dává jméno tomuto artikulu, se přičte k následující číslici jako digitus, nikoliv jako artikulus. A jestliže následující číslice neexistuje, pak se napíše na následující prázdné místo, např. přičtením 4 k 6 vyjde 10; tu se po škrtnutí 6 napíše nula a jednička se přičte k následující číslici, existuje-li, nebo se napíše na prázdné místo. Jestliže však někdy ze sčítání vyjde číslo složené, tu se po škrtnutí hořejší číslice napíše na její místo digitus, který je částí onoho složeného čísla, a artikulus se přičte k následující číslici nebo se napíše na následující volné místo, jestliže tam žádná číslice není, jak bylo výše řečeno o artikulu. ...

III. Odčítání

Odčítání je odnímání čísla nebo čísel od daného čísla, např. odečtením 3 od 10 zůstane 7.

Při odčítání jsou potřebná dvě čísla, totiž číslo odčítané, a takto je nazýváno to, které se od jiného odčítá, a číslo, od něhož se děje odčítání. A je třeba, aby číslo, od něhož se odčítá, bylo vždy větší než číslo odčítané, nebo jemu rovné, protože menší od většího nebo stejné od stejného může být odečteno, avšak větší od menšího se v žádném případě odečíst nedá.

Při odčítání se musí číslice čísel uspořádat tak, že první čísla odčítaného se napíše pod první čísla od něhož se odčítá, druhá pod druhou a tak dále i ostatní.

Když se tak stalo, odečti první číslici spodního řádku od první číslice horního řádku, můžeš-li, a zbytek napiš na hořejší místo. Jestliže však nemůžeš, protože horní je menší, nebo je nula, tu od druhé číslice odeber jedničku a napiš ji před menší číslo nebo před nulu, která bude mít hodnotu deseti. A tu od tohoto prvního sloučeného čísla odečti první číslici spodního řádku od první číslice horního řádku. A jestliže odčítané číslo bude rovno číslu od něhož se odčítá, tu se po škrtnutí čísla, od něhož se má odčítat, na jeho místo napíše nula.

A po odečtení první číslice spodního řádku od první číslice horního řádku je třeba odečíst druhou od druhé, napsané nad ní, a třetí od třetí a tak dále. A je třeba postupovat týmž způsobem, jak bylo řečeno o první číslici. ...

VI. Násobení

Násobení je zmnožování jednoho čísla druhým tolikrát, kolik je ve druhém jednotek, např. když řekneme dvakrát tři je šest. V tomto případě jsou tři rozmnoženy dvakrát prostřednictvím dvou jednotek, které jsou obsaženy v čísle dvě.

A číslo, které je násobeno, se jmenuje číslo násobené, a číslo, které násobí jiné, se jmenuje číslo násobící, a vždy má být vyjádřeno jako příslovce, např. třikrát čtyři je dvanáct. V tomto případě třikrát je číslo násobící a čtyři číslo násobené a číslo 12, které z násobení vyjde, se nazývá číslo vytvořené. A je třeba vědět, že z čísla násobícího se může stát násobené a opačně, např. totéž je říci třikrát čtyři a čtyřikrát tři, protože vyjde dvanáct.

Chceš-li tedy nějaké číslo násobit sebou nebo jiným, napiš číslo násobené podle číslic do hořejšího řádku a číslo násobící do spodního řádku a to tak, aby první číslice spodního řádku byla pod poslední číslicí horního řádku.

A pak násob pomocí příslovce všemi číslicemi spodního řádku, začínaje od poslední spodního řádku, poslední číslici horního řádku.

A jestliže z takového násobení vyjde digitus, napiš ho bezprostředně nahoru nad to číslo, kterým násobíš. Jestliže artikulus, pak napiš nulu nahoru nad číslo násobící a digitus pojmenovávající artikulus napiš na nejbližší místo směrem doleva. A jestliže číslo složené, pak digitus, který je součástí toho složeného čísla, napiš nahoru nad číslo, kterým násobíš, a artikulus posuň doleva jako dříve.

Když se tak stalo, je třeba násobit poslední číslici horního řádku předposlední číslicí spodního řádku, přičemž děláme všechno tak, jak bylo řečeno, a tak podobně u všech spodního řádku, násobíce jimi pomocí příslovce poslední číslici horního řádku, a to tak, že když násobíš první číslicí spodního řádku nějakou číslici horního řádku, tu vždycky škrtni tu v horním řádku a výsledek napiš na její místo. Jestliže vyjde digitus, napiš digitus. Jestliže artikulus, napiš na její místo nulu a digitus přičti k následující číslici směrem doleva. Jestliže číslo složené, pak digitus, který je součástí toho složeného čísla, napiš na místo škrtnuté číslice a artikulus směrem doleva, jak bylo řečeno dříve.

A potom, cos vynásobil všemi číslicemi spodního řádku poslední číslici horního řádku, posuň všechny číslice spodního řádku o jedno místo tak, že napíšeš první číslici spodního řádku pod předposlední horního řádku. A začni násobit, jaks to dělal dříve, ...

VII. Dělení

Dělení je rozdělování jednoho čísla číslem jiným, menším nebo stejným.

Při dělení jsou potřebná tři čísla: první je číslo dělené, a to je to, které má být rozděleno na části, druhé je číslo dělící, a to je to, kterým je číslo děleno. A třetí je kvociens, a to je to, které označuje, kolikrát může být číslo dělící odečteno od čísla děleného; např. při dělení 20 jablek nebo grošů mezi pět lidí bude číslo zvané kvociens 4, a to ukazuje, že pět je ve dvaceti obsaženo čtyřikrát.

Chceš-li tedy nějaké číslo dělit jiným, pak napiš číslo dělené v horním řádku podle jeho číslic, přičemž musí být vždy větší nebo rovno číslu děliteli, číslo dělící čili dělitele do spodního řádku takovým způsobem, aby poslední číslice dělitele byla pod poslední číslicí čísla děleného, předposlední pod předposlední a tak podobně u ostatních číslic; a to tehdy, jestliže číslo dělící může být odečteno od číslic napsaných nad ním; jestliže však ne, pak poslední číslici dělitele napiš pod předposlední číslici čísla děleného a tak podobně u ostatních, dávaje číslici pod číslici.

Když se tak stalo, podívej se, kolikrát je poslední číslice čísla dělícího obsažena v číslici napsané nad ní, nebo – což je lepší – podívej se, kolikrát je číslo dělící obsaženo v číslicích napsaných nad ním; a nebývá to víc než devětkrát a méně než jednou. A toto číslo, určující kvociens, napiš nahoru nad tu číslici čísla děleného, pod níž je první číslice čísla dělitele. A pak násob všechny číslice dělitele oním kvocientem a výsledek napiš doprostřed mezi číslo dělené a dělitele, dávaje vždy první číslici čísla výsledného nad tu číslici, kterou násobíš kvocientem, a druhou nad druhou směrem doleva. A pak odečti celý výsledek násobení od číslic nad ním napsaných.

Když se tak stalo, napiš první číslici dělitele pod nejbližší číslici horního řádku směrem doprava a tak učiň s ostatními číslicemi dělitele. ...

IX. Odmocňování

K nalezení kořene čísla čtvercového nebo krychlového je třeba vědět, že číslo čtvercové je číslo, které vychází z násobení sebe sama sebou samým, např. když řekneme dvakrát dvě jsou čtyři; tedy 4 je číslo čtvercové a číslo 2 je kořen tohoto čísla. Krychlové číslo je však to, které vychází z násobení sebe sama sebou dvakrát, nebo z násobení jednou sebe sama a jednou svého čísla čtvercového, např. když řekneme dvakrát 2 dvakrát je 8, nebo takto: dvakrát 2 jsou 4 a dvakrát 4 je 8; tedy číslo 2 bude kořenem tohoto krychlového čísla 8. Z toho plyne, že totéž číslo může být kořenem čísla čtvercového i krychlového.

Najít kořen není nic jiného než k nějakému danému číslu najít podle velikosti daného čísla jeho čtvercový nebo krychlový kořen. Z toho plyne, že najít čtvercový kořen znamená najít k nějakému danému číslu čtvercový kořen, to jest číslo, které znásobené jednou sebou vytvoří dané číslo, je-li přesně čtvercové; jestliže však není, pak největší čtvercové v daném čísle obsažené.

Chceš-li tedy najít čtvercový kořen nějakého daného čísla, napiš dané číslo podle jeho míst a spočítej počet číslic, zda je sudý nebo lichý. Je-li sudý, začni pracovat pod předposlední číslicí směrem doleva, je-li lichý, pak od poslední, takže začínáš vždy od poslední napsané na lichém místě.

Tedy pod poslední číslicí napsanou na lichém místě je třeba najít nějaký digitus, který znásoben sebou samým vyruší celé nahoře napsané nebo nakolik nejblíže může. Po nalezení takového digitu a odečtení od hořejšího čísla je třeba digitus zdvojit a dvojnásobek napsat pod nejbližší číslici směrem doprava a jeho subduplum, to jest onen digitus, který zdvojils, pod něj. Když se tak stalo, je třeba najít nějaký digitus pod nejbližší číslicí před dvojnásobkem, který znásobený dvojnásobkem a potom sebou samým vyruší celé nad ním nahoře napsané číslo, nakolik nejblíže může.

A nemá se přestat v hledání takového digitu a v jeho zdvojnásobování a kladení subduplů, dokud nebude pod první číslicí nalezen digitus, který znásoben všemi dvojnásobky a potom sebou samým zruší celé nad ním nahoře napsané nebo nakolik nejblíže může.

A jestliže by se stalo, že by nějaký digitus nemohl být nalezen, pak je třeba napsat nulu pod nejbližší třetí číslici směrem doprava. A první dvojnásobek s jeho subduplem je třeba posunout dopředu a pod předcházející číslicí směrem doprava je třeba najít nějaký digitus a postupovat jako dříve.

Jestliže po tom, co se tak stalo, vyjde nula, pak dané číslo bylo pravé čtvercové a naposled nalezený digitus se subduplem nebo subduply bude jeho kořen. Jestliže však něco po odečtení dvojnásobků zůstane, pak ono číslo nebylo čtvercové, ale nalezený kořen je kořenem největšího čtvercového čísla obsaženého v onom čísle.

Chceš-li si ověřit, zda jsi počítal správně, vynásob kořen sebou samým a vyjde dané číslo, bylo-li čtvercové; jestliže nebylo čtvercové, pak dané číslo vyjde s přidáním zbytku k číslu vyšlému z násobení kořene sebou.

LITERATURA

[Ba] Balada F., *Z dějin elementární matematiky*, SPN, Praha, 1959.

[Be] Berman G. N., *Wie die Menschen zählen lernten*, Aufbau-Verlag, Berlin, 1953.

[Bt] Betz O., *Das Geheimnis des Zahlen*, Kreuz Verlag, Zürich, 1989.

[Ca] Cantor M., *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, II Band*, Teubner, Leipzig, 1913.

[Ed] Edwards C. H., *The historial Development of the Calculus*, Springer Verlag, New York, 1979.

[Ev] Eves H., *An Introduction to the History of Mathematics*, Holt, Rinehart and Winston, New York, Chicago, San Francisco, Toronto, London, 1966.

[Ge] Gericke H., *Geschichte des Zahlbegriffs*, Bibliographisches Institute, Mannheim, Wien, Zürich, 1970.

[Ha] Hairer E., Wanner G., *Analysis by Its History*, Springer, New York, 1996.

[Ch] Chabert J.-L., *A History of Algorithms. From the Pebble to the Microchip*, Springer, Berlin, 1999.

[Ju] Juškevič A. P., *Dějiny matematiky ve středověku*, Academia, Praha, 1977.

[Ko] Konforovič A. G., *Významné matematické úlohy*, SPN, Praha, 1989.

[Kl] Kline M., *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford University Press, New York, 1972, reprint ve třech svazcích, Oxford Univ. Press, New York, 1990.

[KP] Křišťan z Prachatic, *Algorismus prosaycus. Základy aritmetiky*, Oikoymenh, Praha, 1999, edice a český překlad Z. Silagiová.

[Kr] Krysicki W., *Zählen und Rechnen Einst und Jetzt*, Teubner, Leipzig, 1968.

[Le] Lemoine J.-G., *Les anciens procédés de calcul sur les doigts en orient et en occident*, Paris, 1932.

[Lo] Löffler E., *Ziffern und Ziffersysteme der Kulturvölker in alter und neuer Zeit*, Teubner, Leipzig, Berlin, 1912.

[Me1] Menninger K., *Number Words and Number Symbols. A Cultural History of Numbers*, Dover Publications, Inc., New York, 1969.

[Me2] Menninger K., *Zahlwort und Ziffer. Eine Kulturgeschichte der Zahl*, 2. neubearbeitete und erweiterte Auflage, Vandenhoeck & Ruprecht, Göttingen, 1958.

[Mi] Mikan M., *Jak se vyvinula matematika a geometrie*, Orbis, Praha, 1954.

[Pi] Picutti E., *Sul numero e la sua storia*, Feltrinelli, Milano, 1977.

[Sc] Scriba Ch. J., *The Concept of Number*, Bibliographisches Institute, Mannheim, Wien, Zürich, 1968.

[Sh] Smith D. E., *Computing Jeton*, The American Numismatic Society Broadway at 156th Street, New York, 1921.

[St] Struik D. J., *Dějiny matematiky*, Orbis, Praha, 1963.

[Sm] Smolík J., *Mathematikové v Čechách od založení univerzity Pražské až do počátku tohoto století*, Živa **12** (1864), 12–27, 140–141, 152–153, 194–225, 308–341.

[TJ] Tropfke J., *Geschichte der Elementarmathematik*, 4. vyd., De Gruyter, Berlin, New York, 1980, přepracoval K. Vogel.

[Ul] Úlehla J., *Dějiny matematiky II.*, Praha, 1913.

[Wa] van der Waerden B. L., *A History of Algebra. From al-Khwārizmī to Emmy Noether*, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985.